"Hütte," des Ingeniers Taschenbuch

Akademischer Verein Hütte, Hütte

Digitized by Google

GIFT OF
Mr. I. . Clarnor

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

„HÜTTE“

DES INGENIEURS TASCHENBUCH.

23. AUFLAGE.

Digitized by Google

Digitized by Google

„HÜTTE“

DES INGENIEURS TASCHENBUCH.

HERAUSGEGEBEN

VOM

AKADEMISCHEN VEREIN HÜTTE, E. V.

23. AUFLAGE.

I. BAND.

BERLIN 1920.

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

Digitized by Google

Alle Rechte und besonders
das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen sind vorbehalten.
Copyright 1920 by Akademischer Verein Hütte,
Eingetragener Verein, Berlin.

GIFT

Digitized by Google

VORWORT ZUR 22. AUFLAGE.

In der 22. Auflage der „Hütte" wurde die Einteilung der vorhergehenden Auflage beibehalten. Sämtliche Abschnitte sind nach dem neuesten Stande der Wissenschaft und der Praxis umgearbeitet und ergänzt, auch ist die Zahl der Abbildungen beträchtlich vermehrt worden. Eine vollständige Neubearbeitung erfuhr das den Kraftmaschinen angegliederte Kapitel „Meßinstrumente für Kraftwerke", das jetzt als besonderer Abschnitt „Meßkunde" erscheint. In diesem neuen Abschnitt sind aber zur Vermeidung von Wiederholungen die elektrischen Meßgeräte nicht enthalten, sondern wie bisher in der „Elektrotechnik" behandelt worden.

Die im Abschnitt „Arbeitsmaschinen: Förder- und Lagermittel für stückige, körnige und mehlfeine Schüttstoffe" des II. Bandes enthaltenen Eimerkettenbagger wurden nach dem III. Bande verlegt und sind dort als Naßbagger den Trockenbaggern des Abschnitts „Baumaschinen" gegenübergestellt.

Wesentliche Umarbeitungen erfuhren die Abschnitte „Mechanik starrer Körper", „Stoffkunde", „Kraftmaschinen" — insbesondere die „Dampfturbinen" —, „Fördermaschinen", „Hebewerke für flüssige Körper", „Gebläse und Kompressoren", „Schiffbau und Schiffsmaschinenbau", „Elektrotechnik", „Statik der Baukonstruktionen", „Grundbau", „Eisenbetonbau", „Hochbau", „Wasserbau", „Eisenbahnwesen" und „Brückenbau".

Soweit es möglich war, haben auch die endgültig festgesetzten Formelzeichen nach den Verhandlungen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF) Anwendung gefunden.

Die Hinweise in den einzelnen Abschnitten auf österreichische Bestimmungen und Vorschriften wurden vermehrt.

Bei dem steten Wachstum der technischen Wissenschaften war es trotz des vermehrten Inhalts nicht leicht, den Umfang des Taschenbuches so zu bemessen, daß der bisherige Preis nicht gesteigert zu werden brauchte. Alle drei Bände, oder der erste und zweite Band als Nachschlagebuch für den Maschinenbau, oder der dritte, die Bauingenieurwissenschaften umfassende Band werden zum gleichen Preise wie bei der vorhergehenden Auflage abgegeben.

Für die Unterstützungen und Ratschläge zur Verbesserung der vorliegenden Auflage, die uns von Freunden und Fachleuten zugingen, sprechen wir an dieser Stelle unseren verbindlichen Dank aus. Wenn es nicht immer möglich war, alle Verbesserungsvorschläge zu berücksichtigen, so werden sie uns doch für die weitere Entwicklung der „Hütte" als wertvolle Unterlagen dienen. Besonderer Dank sei hiermit den nachbenannten Bearbeitern ausgesprochen:

M150687

Digitized by Google

S. Abt, Ingenieur, Winterthur, Schweiz.

E. Ackermann, Regierungsbaumeister, Berlin-Südende.

Dr.-Ing. **F. Bendemann,** Professor, Berlin-Lichterfelde.

H. Bolstorff, Regierungsbaumeister a. D., Beigeordneter der Stadt Essen (Ruhr).

Dr. techn. **K. Brabbée,** Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Dr.-Ing. **E. Braun,** Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

J. Brix, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Dipl.-Ing. **M. Buhle,** Regierungsbaumeister a. D., Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Dr.-Ing. **M. Dietrich,** Betriebsleiter der Berliner städtischen Strafsenbahnen, Berlin-Halensee.

Dr. **R. Doerfel,** k. k. Hofrat, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule zu Prag.

C. Feldmann, Professor an der Technischen Hochschule zu Delft.

Dr. **Ph. Forchheimer,** k. k. Hofrat in Graz (derzeit Konstantinopel).

G. Forner, Oberingenieur der AEG-Turbinenfabrik, Berlin.

F. Generlich, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin".

Dr. **E. Glinzer,** Professor, Oberlehrer der staatlichen Baugewerkschule zu Hamburg.

Dipl.-Ing. **R. Goetze,** Bochum.

Dr.-Ing. **A. Gramberg,** Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Dr.-Ing. h. c. **H. Güldner,** Direktor der Güldner-Motoren-Gesellschaft, Aschaffenburg.

G. Hammer, Regierungsbaumeister, Eisenach.

Dr.-Ing. **H. Hanemann,** Dozent an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Dr. techn. **A. Heller,** Ingenieur, Mitglied der Redaktion der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin.

Dipl.-Ing. **K. Hiorth,** Professor, Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule zu Frankfurt a. O.

W. Hönsch, Regierungsbaumeister a. D., Direktor der Linke-Hofmann-Werke, Breslauer Aktiengesellschaft für Eisenbahnwagen, Lokomotiven und Maschinenbau, Breslau.

Dipl.-Ing. **H. Idelberger,** Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke, Berlin-Friedenau.

O. Kammerer, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

C. Kersten, Oberingenieur und Oberlehrer a. D., Dresden.

Dipl.-Ing. **P. Kesten,** Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke, Nürnberg.

Digitized by Google

K. Körner, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule zu Prag.
E. Kraefft, Geh. Baurat, Berlin.
H. Lang, Regierungs- und Baurat, Cöln-Nippes.
A. Laskus, Geh. Regierungsrat, Berlin-Friedenau.
W. Laudahn, Marinebaurat im Reichs-Marineamt, Berlin.
O. Leitholf, Zivilingenieur, Berlin.
F. Ludloff, Ingenieur, Berlin.
H. Martens, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin".
E. Mattern, Regierungs- und Baurat, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin.
K. Meier, Magistratsbaurat, Direktor der Kanalisationswerke von Berlin.
E. Metzeltin, Regierungsbaumeister a. D., Direktor der Hannoverschen Maschinenbau A.-G. vorm. G. Egestorff, Hannover.
F. V. Meyer, Schiffbauingenieur bei der F. Schichau Schiffswerft zu Danzig.
Dr. **R. Mollier**, Geh. Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.
Dipl.-Ing. **A. Müller**, Regierungsbaumeister a. D., Hamburg.
W. Philippi, Oberingenieur und Prokurist der Siemens-Schuckert-Werke, Professor an der Bergakademie zu Berlin.
Phoenix, Regierungsbaumeister, Dozent an der Bergakademie zu Berlin.
Dipl.-Ing. **K. Preuſs**, Kattowitz (Oberschlesien).
O. Rambuscheck, Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule zu Berlin.
L. Samans, Geh. Baurat, Berlin.
Dipl.-Ing. **M. Schellewald**, Sterkrade.
W. Schrader, Zivilingenieur, Berlin.
R. Seifert, Regierungsbaumeister, Berlin.
Dipl.-Ing. **C. Stumpf**, Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule zu Berlin.
M. Tolle, Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.
W. Treptow, Geh. Regierungsrat, Berlin-Charlottenburg.
L. Troske, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.
Dipl.-Ing. **R. Vogdt**, Regierungsbaumeister, Oberlehrer an der Kgl. höheren Maschinenbauschule zu Aachen.
Dipl.-Ing. **W. Wagenbach**, Professor an der Technischen Hochschule zu Breslau.
K. Wagner, Oberingenieur der AEG-Turbinenfabrik, Berlin.
H. Weihe, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.
M. Wentzel, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin".

Digitized by Google

W. Werner, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

K. Weyand, Regierungsbaumeister, Berlin-Charlottenburg.

Wie bisher hat auch diesmal Herr Oberingenieur Dipl.-Ing. P. Kesten die Schriftleitung des Abschnitts „Elektrotechnik" in dankenswerter Weise übernommen.

Die Verlagsbuchhandlung hat sich durch den Ersatz der vorhandenen Holzschnitte durch neue Abbildungen, sowie um die bewährte Herstellung und Ausstattung des Taschenbuches besonders verdient gemacht.

Nach wie vor bitten wir, Berichtigungen, Abänderungs- und Verbesserungsvorschläge, für die wir stets dankbar sein werden, an die untenstehende Adresse richten zu wollen.

Berlin NW 23, Bachstrafse 9, im April 1915.

Akademischer Verein Hütte, e. V.

Der Ausschuß zur Herausgabe wissenschaftlicher Werke.

I. A. Der Schriftleiter:

Scheibe

VORWORT ZUR 23. AUFLAGE.

Durch die überaus starke Inanspruchnahme des gröfsten Teiles unserer Mitarbeiter während des Krieges mufsten die Arbeiten an dem vorliegenden Taschenbuche zurückgestellt werden. Es war daher nicht möglich, die beabsichtigte Neubearbeitung bis jetzt durchzuführen. Um aber die grofse Nachfrage nach der „Hütte" zu befriedigen, haben wir uns zu einem Neudruck der 22. Auflage entschlossen, der durch Berichtigungen für jeden Band ergänzt worden ist.

Bei der zeitigen Papiernot ist es der Verlagsbuchhandlung trotz eifriger Bemühungen und Aufwendung erheblicher Kosten nicht gelungen, für den Neudruck ein Papier von der bisherigen Beschaffenheit zu erhalten. Auch ließ sich wegen der fortgesetzten Steigerung aller Löhne und Werkstoffe eine Preiserhöhung der „Hütte" leider nicht umgehen.

Berlin NW 23, Bachstrafse 9, im Januar 1920.

Akademischer Verein Hütte, e. V.

Der Ausschuß zur Herausgabe wissenschaftlicher Werke.

I. A. Der Schriftleiter:

Scheibe

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNIS

des ersten Bandes.

ERSTER ABSCHNITT.

Mathematik.

Durchgesehen von Hütte: Ausschuss zur Herausgabe wissenschaftlicher Werke.

I. Tafeln. Seite

A. Tafel der Potenzen, Wurzeln, natürlichen Logarithmen, reziproken Werte, Kreisumfänge und Kreisflächen 1
B. Mantissen der Briggschen Logarithmen 24
C. Tafeln der Kreisfunktionen 26
D. Tafeln der Hyperbelfunktionen 30
E. Kugelinhalte für die Durchmesser $d = 1$ bis 200 35
F. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen und Kreisabschnitte für den Halbmesser 1 36
G. Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1 38
H. Tafel zum Uebergang aus der 90°-Teilung in die 100°-Teilung des Quadranten 42
J. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$ 43
K. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche 43
L. Wichtige Zahlenwerte 43

II. Arithmetik.

A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 45
B. Kombinationslehre 48
C. Determinanten 49
D. Gleichungen 50
E. Zinseszins- und Rentenrechnung 54
F. Reihen 55

III. Kreis- und Hyperbelfunktionen.

A. Kreisfunktionen 57
B. Ebene Dreiecke 61
C. Kugeldreiecke 62
D. Hyperbelfunktionen 64

IV. Differential- und Integralrechnung.

A. Differentialformeln 66
B. Reihen von Maclaurin und Taylor 67
C. Unbestimmte Formen 68
D. Maxima und Minima 68
E. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche 69
F. Integralformeln 71
G. Differentialgleichungen 80

V. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Beobachtungsfehler.

a) Wahrscheinlichkeitsrechnung 84
b) Theorie der Beobachtungsfehler 84
c) Methode der kleinsten Quadrate 86

VI. Analytische Geometrie.

A. Punkt und gerade Linie in der Ebene 88
B. Krumme Linien in der Ebene 91
C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raum 112
D. Kurven doppelter Krümmung 115
E. Krumme Flächen 118

VII. Vektorrechnung 121
VIII. Fouriersche Reihen und harmonische Analyse 124
IX. Inhalte von Flächen und Körpern.

A. Flächeninhalt ebener Gebilde 129
B. Inhalte und Oberflächen von Körpern 133

X. Parallelperspektive 138

Digitized by Google

ZWEITER ABSCHNITT.

A. Mechanik starrer Körper.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. Preufs.

I. Grundbegriffe der Mechanik. Seite

1. Vorbemerkungen 140
2. Geschwindigkeit und Beschleunigung 141
3. Kraft, Gewicht, Masse 147
4. Arbeit und Leistung 150
5. Lebendige Kraft und Energie 151

II. Statik.

1. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht der Kräfte. . . 153
2. Schwerpunkt. Stabilität 162
3. Gleichgewicht am gestützten Körper. Fachwerk 171
4. Grundaufgaben der graphischen Statik 176
5. Gleichgewicht am Seil 181
6. Prinzip der virtuellen Verschiebungen 182

III. Dynamik 1.

1. Dynamik des Massenpunktes.
   a. Freie geradlinige Bewegung 184
   b. Freie krummlinige Bewegung 185
   c. Dreh(Kreis-)bewegung 186
   d. Unfreie Bewegung 187
2. Dynamik des starren Körpers.
   a. Schiebungsbewegung 190
   b. Drehung um eine feste Achse 190
   c. Trägheits- und Zentrifugalmomente 191

IV. Kinematik.

1. Elementarbewegungen 203
2. Zusammensetzung der Elementarbewegungen 204
3. Endliche Bewegungen 207
4. Ebene Bewegung 208

V. Dynamik 2.

A. Kraftfelder, Potential 216
B. Geradlinige Schwingungen 221
C. Relativbewegung bei Drehung des Bezugs-Systems 223
D. Dynamik des Punkthaufens 235
E. Stofs 240

VI. Reibung.

a. Gleitende Reibung 242
b. Reibungszahlen 243
c. Rollbewegung und rollende Reibung 245
d. Zapfen- und Lagerreibung 246
e. Reibung an Getrieben 253

B. Mechanik tropfbar flüssiger Körper.

Bearbeitet von Regierungs- u. Baurat Lang und Regierungsbaumeister Phoenix.

I. Allgemeine Begriffe und Eigenschaften 260

II. Statik tropfbar flüssiger Körper.

A. Grundgleichungen von L. Euler 261
B. Hydrostatischer Druck, Auftrieb 262
C. Statische Stabilität schwimmender Körper 263

III. Dynamik tropfbar flüssiger Körper.

A. Allgemeines 264
B. Ausfluss durch Oeffnungen in Gefäfsen oder Stauanlagen. . . . 265
C. Durchfluss durch gefüllte Rohrleitungen 277
D. Fliefsen in nicht gefüllten Rohrleitungen, in Flüssen und Kanälen 310
E. Fliefsen des Wassers durch Erdreich 314
F. Steighöhe und Sprungweite freier Wasserstrahlen 316
G. Hydraulischer Druck und Arbeitsvermögen frei ausfliefsender Strahlen 317
H. Widerstand von Flüssigkeiten gegen umströmte Flächen und Körper; Stromwiderstand 323

Digitized by Google

C. Mechanik luftförmiger Körper.

Bearbeitet von Professor Dr.-Ing. Bendemann.

Seite

I. Allgemeine Eigenschaften 330
II. Statik luftförmiger Flüssigkeiten 331
III. Dynamik luftförmiger Flüssigkeiten.
A. Allgemeines 335
B. Grundbegriffe und einige Sätze der Strömungslehre (theoretische Hydrodynamik) 336
C. Bewegungen der unvollkommenen (wirklichen) Flüssigkeiten . . 348
D. Erfahrungsangaben über Luftbewegungen und Luftwiderstand . . 355

DRITTER ABSCHNITT.

Wärme.

Bearbeitet von Geh. Hofrat Professor Dr. Mollier.

I. Allgemeine Wärmeeigenschaften der Körper.
A. Temperatur 369
B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme 369
C. Spezifische Wärme 373
D. Temperatur von Mischungen 376
E. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme 378
II. Wärmeübergang.
A. Wärmeübergang durch Wärmeleitung 381
B. Wärmeübergang durch Strahlung 389
III. Allgemeine Grundsätze der Thermodynamik.
A. Die beiden Hauptsätze 393
B. Nutzbare Arbeit 394
C. Formeln aus den beiden Hauptsätzen 395
IV. Vollkommene Gase.
A. Allgemeines 396
B. Gasmischungen 401
C. Besondere Zustandsänderungen 405
D. Besondere Arbeitsprozesse 408
V. Dämpfe.
A. Allgemeines 412
B. Nasser Dampf 413
C. Ueberhitzter Dampf 421
D. Anwendung auf die Theorie der Dampfmaschinen 423
E. Anwendung auf die Theorie der Kältemaschinen 428
VI. Strömende Bewegung von Gasen und Dämpfen.
A. Allgemeines 439
B. Ausfluss 440
C. Zusammenstellung der Ausflussformeln für Luft und gesättigten Wasserdampf. Erfahrungswerte 444
D. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen 447
E. Drosseln 453
VII. Verbrennung.
A. Brennstoffe 455
B. Verbrennung 461
C. Verbrennung gasförmiger und flüssiger Brennstoffe 465

VIERTER ABSCHNITT.

Festigkeitslehre.

Bearbeitet von Geh. Regierungsrat Laskus.

I. Allgemeines und Versuchswerte.
A. Erklärungen und allgemeine Gesetze 481
B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen 486
C. Zulässige Spannungen 502

Digitized by Google

II. Festigkeit gerader Stäbe. Seite
A. Zug- und Druckfestigkeit 507
B. Knickfestigkeit 512
C. Schubfestigkeit 519
D. Biegungsfestigkeit 521
E. Drehungsfestigkeit 568
F. Zusammengesetzte Festigkeit 572
III. Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe.
A. Normalspannungen 583
B. Normal- und Schubspannungen 591
IV. Festigkeit der Federn 593
V. Festigkeit der Platten und Gefäfse 600

FÜNFTER ABSCHNITT.

Stoffkunde.

Bearbeitet von Dr.-Ing. Hanemann (II. aufser Eisen 6 u. 7); Professor Dr. Gintzer (II. Eisen 6, III. bis XI.); Konstruktionsingenieur Rambuscheck (II. Eisen 7); Hütte: Ausschufs zur Herausgabe wissenschaftlicher Werke (I.).

I. Allgemeines. Seite
A. Chemische Elemente und Verbindungen 610
B. Spezifische Gewichte 613
C. Gewichte geschichteter Körper 618
II. Metalle.
A. Allgemeines 620
B. Angaben über einzelne Metalle 626
III. Natürliche Steine und Erden 682
IV. Künstliche Steine.
A. Ungebrannte Steine 686
B. Gebrannte Steine 691
V. Mörtel, Putz, Zement, Beton usw.
A. Luftmörtel 695
B. Wassermörtel (hydraulischer oder Zementmörtel) 697
VI. Glas 709
VII. Kautschuk und Guttapercha, Asbest 714
VIII. Wasserglas, Kitte, Asphalt, Dachpappe u. a. 716
IX. Nutzhölzer 719
X. Schmiermittel 729
XI. Ledertreibriemen 733

SECHSTER ABSCHNITT.

Maschinenteile.

Bearbeitet von Geh. Regierungsrat Treptow (I., II. A. bis E., IV., V., VI.); Geh. Regierungsrat Professor Kammerer (II. F., III.); Hofrat Professor Tolle (VII.).

I. Hülfsmittel zur Verbindung von Maschinenteilen. Seite
A. Keile 736
B. Schrauben 740
C. Niete 753
II. Maschinenteile der drehenden Bewegung.
A. Zahnräder 763
B. Reib- und Kettenräder 792

Digitized by Google

Seite

C. Riemen- und Seilbetrieb 794
D. Achsen und Wellen 816
E. Kupplungen 821
F. Lagerungen 836

III. Maschinenteile für Hebemaschinen.

A. Rundeisenketten 842
B. Kalibrierte Ketten 845
C. Gallsche Kette 847
D. Drahtseile 848
E. Hanfseile 856
F. Lasthaken 856
G. Bremsen 859
H. Gesperre 863
J. Sperradbremsen 864

IV. Kolben, Kolbenstangen, Stopfbüchsen.

A. Kolben 865
B. Kolbenstangen 874
C. Stopfbüchsen 876

V. Kurbelbetrieb.

A. Bewegungsverhältnisse 881
B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse 886
C. Kurbeln und Exzenter 887
D. Schubstangen 894
E. Kreuzköpfe 899
F. Gelenkgeradführungen 902

VI. Maschinenteile zur Aufnahme und zur Fortleitung von Flüssigkeiten.

A. Zylinder 906
B. Rohre 914
C. Ventile 932

VII. Regelnde Maschinenteile.

A. Schwungräder 945
B. Kraftmaschinenregler 961

Anhang.

Bearbeitet von Ingenieur Ludloff.

A. Münztafel 981
B. Vergleich der Maße verschiedener Länder mit dem metrischen Maß . . 986
C. Maße und Gewichte verschiedener Länder 994
D. Vergleichungstafeln zusammengesetzter Maßeinheiten 1000
E. Gebührenordnung der Architekten und Ingenieure 1002
F. Gesetze zum Schutze des gewerblichen Eigentums 1009
G. Gebührenordnung für Zeugen und Sachverständige 1021

Deutsche Wellblech-Normalprofile 1023

Sachverzeichnis.

Bearbeitet von Ingenieur Ludloff.

Sachverzeichnis des ersten, zweiten und dritten Bandes 1028

Berichtigungen zu Band I.

Seite 24 lies $\begin{array}{c|c} N & o \\ \hline 111 & 0451 \end{array}$ anstatt $\begin{array}{c|c} N & o \\ \hline 111 & 0414 \end{array}$

„ 31 lies $\begin{array}{c|c} \varphi & o \\ \hline 0.2 & 1.0201 \end{array}$ „ $\begin{array}{c|c} \varphi & o \\ \hline 0,2 & 0,0201 \end{array}$

„ 37 lies für den Zentriwinkel von 109° unter Inhalt des Kreisabschnittes 0,47845 anstatt 0,47844.

„ 38 lies für die Bogenlänge des Winkels 33° 30′ 0,58469 anstatt 0,58479.

„ 41 lies für die Bogenlänge des Winkels 165° 0′ 2,87979 anstatt 2,87980.

„ 46 Zeile 5 v. o. lies 24. $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ anstatt

24. $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}$.

„ 2 v. u. lies $+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha \Big]$ anstatt

$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha \Big]$.

„ 8 v. u. lies für die rechte Seite der Gleichung $\frac{f(x)}{a}$ anstatt $f(x)$.

„ 102 „ 8 v. o. lies EX' anstatt EX.

„ 102 lies in Abb. 12 für die in E an die Parabel gelegte Tangente DEY' anstatt DEY.

„ 202 Zeile 9 v. o. lies $J_z = \frac{G}{g} \frac{3}{10} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$

anstatt $J_z = \frac{G}{g} \frac{3}{10} \frac{R^3 - r^3}{R - r}$.

„ 246 Zeile 5 v. o. lies $f = 0{,}005$ cm anstatt 0,05 cm.

„ 247 „ 1 v. u. lies †) Z. d. V. d. I. 1905 anstatt 1907.

„ 293 „ 10 v. u. lies $\alpha = 0{,}5\, O_4 - O_1$ anstatt $\alpha = 0{,}5\,(O_4 - O_1)$.

„ 301 „ 19 v. o. lies Abb. 146 S. 299 anstatt Abb. 149 S. 304.

„ 334 „ 2 v. o. lies „in entgegengesetztem Sinne“ anstatt „in gleichem Sinne“.

„ 366 Abb. 170 für die Teilung auf der Abszissenachse setze 0 0,1 0,2 anstatt 0 0 0,2.

„ 384 Zeile 10 v. u. lies $\frac{1}{d^{0,3}}$ 4,931 3,981 3,525 3,234 2,863 2,627 2,456 1,995 anstatt 0,4931 0,3981 0,3525 0,3234 0,2863 0,2627 0,2456 0,1995.

„ 398 lies für Wasserstoff in der Spalte c_p 2,42 anstatt 0,242.

„ 463 letzte Gleichung lies 0,0826 kg anstatt 0,0822 kg.

„ 482 Zeile 22 v. o. lies $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ anstatt $= \alpha_0 \sigma^n$.

„ 483 „ 9 v. o. am Schlufs lies 0,3 % anstatt 0,2 %.

Seite 505 Zeile 11 v. o. lies in den beiden Tabellenspalten unter Zug und Druck 1200 anstatt 1000. Die folgenden fünf Zeilen im Kleindruck sind zu streichen.

„ 505 „ 11 v. u. lies 13. 1. 1916 anstatt 24. 5. 1907.

„ 505 „ 10 v. u. (Fufsnote 3) ist zu streichen.

„ 507 „ 22 bis 27 (III). Die Angaben sind nach den preufsischen Bestimmungen nicht mehr gültig.

„ 517 „ 6 v. u. Fufsnote **). Der erste Satz ist zu streichen. Der zweite Satz mufs lauten: Mit Beton gefüllte Mannesmann-Stahlrohrsäulen zeigen nach Versuchen von A. Gefsner eine Zunahme der . . . .

„ 526 „ 4 v. o. lies 2700 anstatt 2600 und 8000 anstatt 7900.

„ 526 „ 5 v. o. lies 3300 anstatt 3400 und 5600 anstatt 5700. Dementsprechend erfahren die Werte x, M_{max}, M in P_1, P_2 und P_3 (auch in Abb. 19) geringe Aenderungen.

„ 537 „ zu Querschnitt Nr. 16: In der Formel für e_1 lies $a\,H^2$ anstatt $d\,H^2$.

„ 538 „ zu den Querschnitten 24 und 25: Die Abbildungen und Formeln sind zu ersetzen durch die entsprechenden Abbildungen und Formeln auf Seite 1024 bis 1027.

„ 539 lies für $d = 135$ $J = 16\,304\,411$ anstatt 16 204 411.

„ 550 die Abbildungen zu den Belastungsfällen Nr. 13 und 14 sind miteinander zu vertauschen.

„ 552 Belastungsfall Nr. 17. In der Abbildung lies n anstatt x. Die bisherigen Mafse n und ξ sind zu streichen. Das Mafs x mufs rechts bis zum Querschnitt $Q = 0$ reichen. $\xi = x - n$.

„ 560 Zeile 13 v. o. schalte ein: Vergleiche hierzu O. Henkel, Beton u. Eisen. 1917. S. 107.

„ 580 die Nummern der Abbildungen sind miteinander zu vertauschen.

„ 583 Zeile 6 v. o lies 0,748 anstatt 0,743.

„ 603 „ 1 bis 3 v. o. sind zu streichen.

„ 645 „ 5 in Tafel 8. Quadranteisen lies unter Trägheitsmoment 5464 anstatt 54,64.

„ 851 lies in der Tafel für „Kranseile aus Rundlitzen“ in der ersten Spalte 6 Litzen mit je 19 Drähten anstatt 59 Drähten.

„ 857 Zeile 7 v. u. lies $P = k_s \cdot \frac{a}{e_1} \varkappa F$ anstatt $P = k_s \cdot \frac{a}{e_1} k F$.

„ 857 „ 1 v. u. lies $\varkappa$ anstatt s.

„ 884 „ 4 v. u. lies Z. d. V. d. I. 1895 anstatt 1885.

„ 896 „ 17 v. o. lies $\frac{P}{bh} + \frac{1}{30}\left(\frac{n}{1000}\right)^3 \frac{L^2 r}{h} \leqq k_b$ anstatt

$$\frac{P}{b \cdot h} = \frac{1}{30}\left(\frac{n}{1000}\right)^3 \frac{L^2 r}{h} \leqq k_b.$$

„ 909 lies beim Flanschdurchmesser D' für Rohre von 700 mm lichten Durchmesser 900 anstatt 955.

„ 995 Zeile 3 v. o. füge „Bulgarien“ hinzu.

„ 1023 bis 1027 Deutsche Wellblech-Normalprofile als Ergänzung zu der auf S. 664 bis 666 enthaltenen Tafel für Wellbleche

Abkürzungen.

Aufser den vom Bundesrat festgesetzten Mafs- und Gewichtsbezeichnungen (I. Bd. S. 994 ff.) sowie den Bezeichnungen der elektrischen Mafseinheiten (II. Bd. S. 837) sind folgende Abkürzungen angewendet worden:

AEG = Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft.
at = Atmosphäre.
BAMAG = Berlin-Anhaltische Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft in Dessau.
BEW = Berliner Elektrizitäts-Werke.
D.R.P. = Deutsches Reichspatent.
fm = Festmeter.
GO = Reichs-Gewerbe-Ordnung.
G.-T. = Gewichtsteil(e).
H. d. A. = Handbuch der Architektur.
H. d. B. = Handbuch der Baukunde.
H. d. I. W. = Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften.
HK = Hefner-Kerze(n).
$\mathcal{M}$ = Mark.
min = Minute(n).
N. P. = Normalprofil.
PS, PSe, PSi = Pferdestärke(n), effektive, indizierte.
R.-T. = Raumteil(e).
Q.-S. = Quecksilbersäule.
sk = Sekunde(n).
S. & H. = Siemens & Halske.
SSW = Siemens-Schuckertwerke.
st = Stunde(n).
WE = Wärmeeinheit(en), Kilogramm-Kalorien.
W.-S. = Wassersäule.
Uml./sk (min, st) = Umdrehungen in der Sekunde (Minute, Stunde).
$\mathcal{S}$ = Pfennig.

Zeitschriften.

Dingler Pol. J. = Dinglers Polytechnisches Journal.
El. Kraftbetr. u. B. = Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen, Zeitschrift für das gesamte Anwendungsgebiet elektrischer Triebkraft.
ETZ = Elektrotechnische Zeitschrift.
Engng. = Engineering.
Glaser Ann. = Annalen für Gewerbe und Bauwesen.
Journ. Gasb.-Wasserv. = Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung.
Mitt. Forschungsarb. = Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens.
Organ = Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung.
St. u. E. = Stahl und Eisen.
Verhdlgn. Ver. Beförd. Gewerbfl. = Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes.
Z. Arch. u. Ing.-Wes. = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen.
Z. f. B. = Zeitschrift für Bauwesen.
Z. Dampfk. Maschbtr. = Zeitschrift für Dampfkessel u. Maschinenbetrieb.
Z. f. Turbinenw. = Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen.
Z. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins.
Z. d. V. d. I. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.
Zentralbl. Bauv. = Zentralblatt der Bauverwaltung.

Digitized by Google

CALIFORNIA

1. ABSCHNITT.

Mathematik.

I. Tafeln.

(Die Anmerkungen hierzu auf S. 44 sind zu beachten.)

A. Tafel der Potenzen, Wurzeln, natürlichen Logarithmen, reziproken Werte, Kreisumfänge und Kreisflächen.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0, 78 54	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,69315	500,000	6,283	3, 14 16	2
3	9	27	1,7321	1,4422	1,09861	333,333	9,425	7, 06 86	3
4	16	64	2,0000	1,5874	1,38629	250,000	12,566	12, 56 64	4
5	25	125	2,2361	1,7100	1,60944	200,000	15,708	19, 63 50	5
6	36	216	2,4495	1,8171	1,79176	166,667	18,850	28, 27 43	6
7	49	343	2,6458	1,9129	1,94591	142,857	21,991	38, 48 45	7
8	64	512	2,8284	2,0000	2,07944	125,000	25,133	50, 26 55	8
9	81	729	3,0000	2,0801	2,19722	111,111	28,274	63, 61 73	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	2,30259	100,000	31,416	78, 53 98	**10**
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	2,39790	90,9091	34,558	95, 03 32	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	2,48491	83,3333	37,699	1 13, 09 7	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	2,56495	76,9231	40,841	1 32, 73 2	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	2,63906	71,4286	43,982	1 53, 93 8	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	2,70805	66,6667	47,124	1 76, 71 5	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	2,77259	62,5000	50,265	2 01, 06 2	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	2,83321	58,8235	53,407	2 26, 98 0	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	2,89037	55,5556	56,549	2 54, 46 9	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	2,94444	52,6316	59,690	2 83, 52 9	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	2,99573	50,0000	62,832	3 14, 15 9	**20**
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	3,04452	47,6190	65,973	3 46, 36 1	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	3,09104	45,4545	69,115	3 80, 13 3	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	3,13549	43,4783	72,257	4 15, 47 6	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	3,17805	41,6667	75,398	4 52, 38 9	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	3,21888	40,0000	78,540	4 90, 87 4	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	3,25810	38,4615	81,681	5 30, 92 9	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	3,29584	37,0370	84,823	5 72, 55 5	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	3,33220	35,7143	87,965	6 15, 75 2	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	3,36730	34,4828	91,106	6 60, 52 0	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	3,40120	33,3333	94,248	7 06, 85 8	**30**
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	3,43399	32,2581	97,389	7 54, 76 8	31
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	3,46574	31,2500	100,531	8 04, 24 8	32
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	3,49651	30,3030	103,673	8 55, 29 9	33
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	3,52636	29,4118	106,814	9 07, 92 0	34
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	3,55535	28,5714	109,956	9 62, 11 3	35
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	3,58352	27,7778	113,097	10 17, 88	36
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	3,61092	27,0270	116,239	10 75, 21	37
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	3,63759	26,3158	119,381	11 34, 11	38
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	3,66356	25,6410	122,522	11 94, 59	39
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,66	12 56, 64	**40**
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	3,71357	24,3902	128,81	13 20, 25	41
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	3,73767	23,8095	131,95	13 85, 44	42
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	3,76120	23,2558	135,09	14 52, 20	43
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	3,78419	22,7273	138,23	15 20, 53	44
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	3,80666	22,2222	141,37	15 90, 43	45
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	3,82864	21,7391	144,51	16 61, 90	46
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	3,85015	21,2766	147,65	17 34, 94	47
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	3,87120	20,8333	150,80	18 09, 56	48
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	3,89182	20,4082	153,94	18 85, 74	49
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63, 50	**50**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63, 50	50
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	3,93183	19,6078	160,22	20 42, 82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	3,95124	19,2308	163,36	21 23, 72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	3,97029	18,8679	166,50	22 06, 18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	3,98898	18,5185	169,65	22 90, 22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	4,00733	18,1818	172,79	23 75, 83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	4,02535	17,8571	175,93	24 63, 01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	4,04305	17,5439	179,07	25 51, 76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	4,06044	17,2414	182,21	26 42, 08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	4,07754	16,9492	185,35	27 33, 97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	4,09434	16,6667	188,50	28 27, 43	60
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	4,11087	16,3934	191,64	29 22, 47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	4,12713	16,1290	194,78	30 19, 07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	4,14313	15,8730	197,92	31 17, 25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	4,15888	15,6250	201,06	32 16, 99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	4,17439	15,3846	204,20	33 18, 31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	4,18965	15,1515	207,35	34 21, 19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	4,20469	14,9254	210,49	35 25, 65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	4,21951	14,7059	213,63	36 31, 68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	4,23411	14,4928	216,77	37 39, 28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	4,24850	14,2857	219,91	38 48, 45	70
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	4,26268	14,0845	223,05	39 59, 19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	4,27667	13,8889	226,19	40 71, 50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	4,29046	13,6986	229,34	41 85, 39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	4,30407	13,5135	232,48	43 00, 84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	4,31749	13,3333	235,62	44 17, 86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	4,33073	13,1579	238,76	45 36, 46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	4,34381	12,9870	241,90	46 56, 63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	4,35671	12,8205	245,04	47 78, 36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	4,36945	12,6582	248,19	49 01, 67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	50 26, 55	80
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	4,39445	12,3457	254,47	51 53, 00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	4,40672	12,1951	257,61	52 81, 02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	4,41884	12,0482	260,75	54 10, 61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	4,43082	11,9048	263,89	55 41, 77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	4,44265	11,7647	267,04	56 74, 50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	4,45435	11,6279	270,18	58 08, 80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	4,46591	11,4943	273,32	59 44, 68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	4,47734	11,3636	276,46	60 82, 12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	4,48864	11,2360	279,60	62 21, 14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	4,49981	11,1111	282,74	63 61, 73	90
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	4,51086	10,9890	285,88	65 03, 88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	4,52179	10,8696	289,03	66 47, 61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	4,53260	10,7527	292,17	67 92, 91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	4,54329	10,6383	295,31	69 39, 78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	4,55388	10,5263	298,45	70 88 22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	4,56435	10,4167	301,59	72 38, 23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	4,57471	10,3093	304,73	73 89, 81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	4,58497	10,2041	307,88	75 42, 96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	4,59512	10,1010	311,02	76 97, 69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53, 98	100

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53, 98	**100**
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	4,61512	9,90099	317,30	80 11, 85	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	4,62497	9,80392	320,44	81 71, 28	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	4,63473	9,70874	323,58	83 32, 29	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	4,64439	9,61538	326,73	84 94, 87	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	4,65396	9,52381	329,87	86 59, 01	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	4,66344	9,43396	333,01	88 24, 73	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	4,67283	9,34579	336,15	89 92, 02	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	4,68213	9,25926	339,29	91 60, 88	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	4,69135	9,17431	342,43	93 31, 32	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	4,70048	9,09091	345,58	95 03, 32	**110**
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	4,70953	9,00901	348,72	96 76, 89	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	4,71850	8,92857	351,86	98 52, 03	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	4,72739	8,84956	355,00	1 00 28,7	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	4,73620	8,77193	358,14	1 02 07,0	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	4,74493	8,69565	361,28	1 03 86,9	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	4,75359	8,62069	364,42	1 05 68,3	116
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	4,76217	8,54701	367,57	1 07 51,3	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	4,77068	8,47458	370,71	1 09 35,9	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	4,77912	8,40336	373,85	1 11 22,0	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	1 13 09,7	**120**
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	4,79579	8,26446	380,13	1 14 99,0	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	4,80402	8,19672	383,27	1 16 89,9	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	4,81218	8,13008	386,42	1 18 82,3	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	4,82028	8,06452	389,56	1 20 76,3	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	4,82831	8,00000	392,70	1 22 71,8	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	4,83628	7,93651	395,84	1 24 69,0	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	4,84419	7,87402	398,98	1 26 67,7	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	4,85203	7,81250	402,12	1 28 68,0	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	4,85981	7,75194	405,27	1 30 69,8	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	4,86753	7,69231	408,41	1 32 73,2	**130**
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	4,87520	7,63359	411,55	1 34 78,2	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	4,88280	7,57576	414,69	1 36 84,8	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	4,89035	7,51880	417,83	1 38 92,9	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	4,89784	7,46269	420,97	1 41 02,6	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	4,90527	7,40741	424,12	1 43 13,9	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	4,91265	7,35294	427,26	1 45 26,7	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	4,91998	7,29927	430,40	1 47 41,1	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	4,92725	7,24638	433,54	1 49 57,1	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	4,93447	7,19424	436,68	1 51 74,7	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	4,94164	7,14286	439,82	1 53 93,8	**140**
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	4,94876	7,09220	442,96	1 56 14,5	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	4,95583	7,04225	446,11	1 58 36,8	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	4,96284	6,99301	449,25	1 60 60,6	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	4,96981	6,94444	452,39	1 62 86,0	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	4,97673	6,89655	455,53	1 65 13,0	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	4,98361	6,84932	458,67	1 67 41,5	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	4,99043	6,80272	461,81	1 69 71,7	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	4,99721	6,75676	464,96	1 72 03,4	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	5,00395	6,71141	468,10	1 74 36,6	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71, 5	**150**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	**150**
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	1 79 07,9	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	1 81 45,8	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	1 83 85,4	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	1 86 26,5	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	1 88 69,2	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	1 91 13,4	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	1 93 59,3	157
158	2 49 64	3 944 312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	1 96 06,7	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	1 98 55,7	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	2 01 06,2	**160**
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	2 03 58,3	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	2 06 12,0	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	2 08 67,2	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09756	515,22	2 11 24,1	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	2 13 82,5	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	2 16 42,4	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	2 19 04,0	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	2 21 67,1	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	2 24 31,8	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	2 26 98,0	**170**
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	2 29 65,8	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	2 32 35,2	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	2 35 06,2	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	2 37 78,7	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	2 40 52,8	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68182	552,92	2 43 28,5	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	2 46 05,7	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	2 48 84,6	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	2 51 64,9	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	2 54 46,9	**180**
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	2 57 30,4	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	2 60 15,5	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	2 63 02,2	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	2 65 90,4	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	2 68 80,3	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	2 71 71,6	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	2 74 64,6	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	2 77 59,1	188
189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	2 80 55,2	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	2 83 52,9	**190**
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	2 86 52,1	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690	5,25750	5,20833	603,19	2 89 52,9	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	2 92 55,3	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	2 95 59,2	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	2 98 64,8	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	3 01 71,9	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	3 04 80,5	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	3 07 90,7	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	3 11 02,6	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	**200**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5.29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	**200**
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8578	5,30330	4,97512	631,46	3 17 30,9	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	5,30827	4,95050	634,60	3 20 47,4	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	5,31321	4,92611	637,74	3 23 65,5	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	5,31812	4,90196	640,88	3 26 85,1	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	5,32301	4,87805	644,03	3 30 06,4	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	5,32788	4,85437	647,17	3 33 29,2	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	5,33272	4,83092	650,31	3 36 53,5	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	5,33754	4,80769	653,45	3 39 79,5	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	5,34233	4,78469	656,59	3 43 07,0	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	5,34711	4,76190	659,73	3 46 36,1	**210**
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	5,35186	4,73934	662,88	3 49 66,7	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	5,35659	4,71698	666,02	3 52 98,9	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	5,36129	4,69484	669,16	3 56 32,7	213
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	5,36598	4,67290	672,30	3 59 68,1	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	5,37064	4,65116	675,44	3 63 05,0	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	5,37528	4,62963	678,58	3 66 43,5	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	5,37990	4,60829	681,73	3 69 83,6	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	5,38450	4,58716	684,87	3 73 25,3	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	5,38907	4,56621	688,01	3 76 68,5	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	5,39363	4,54545	691,15	3 80 13,3	**220**
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	5,39816	4,52489	694,29	3 83 59,6	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	5,40268	4,50450	697,43	3 87 07,6	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	5,40717	4,48430	700,58	3 90 57,1	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	5,41165	4,46429	703,72	3 94 08,1	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	5,41610	4,44444	706,86	3 97 60,8	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	5,42053	4,42478	710,00	4 01 15,0	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	5,42495	4,40529	713,14	4 04 70,8	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	5,42935	4,38596	716,28	4 08 28,1	228
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	6,1180	5,43372	4,36681	719,42	4 11 87,1	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	5,43808	4,34783	722,57	4 15 47,6	**230**
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	6,1358	5,44242	4,32900	725,71	4 19 09,6	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	5,44674	4,31034	728,85	4 22 73,3	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	5,45104	4,29185	731,99	4 26 38,5	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	5,45532	4,27350	735,13	4 30 05,3	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	5,45959	4,25532	738,27	4 33 73,6	235
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	5,46383	4,23729	741,42	4 37 43,5	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	5,46806	4,21941	744,56	4 41 15,0	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	5,47227	4,20168	747,70	4 44 88,1	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	5,47646	4,18410	750,84	4 48 62,7	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	4 52 38,9	**240**
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	5,48480	4,14938	757,12	4 56 16,7	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	5,48894	4,13223	760,27	4 59 96,1	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	5,49306	4,11523	763,41	4 63 77,0	243
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	6,2488	5,49717	4,09836	766,55	4 67 59,5	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	5,50126	4,08163	769,69	4 71 43,5	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	5,50533	4,06504	772,83	4 75 29,2	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2743	5,50939	4,04858	775,97	4 79 16,4	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	5,51343	4,03226	779,11	4 83 05,1	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	5,51745	4,01606	782,26	4 86 95,5	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	**250**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	**250**
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3080	5,52545	3,98406	788,54	4 94 80,9	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164	5,52943	3,96825	791,68	4 98 75,9	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247	5,53339	3,95257	794,82	5 02 72,6	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330	5,53733	3,93701	797,96	5 06 70,7	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413	5,54126	3,92157	801,11	5 10 70,5	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496	5,54518	3,90625	804,25	5 14 71,9	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579	5,54908	3,89105	807,39	5 18 74,8	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661	5,55296	3,87597	810,53	5 22 79,2	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743	5,55683	3,86100	813,67	5 26 85,3	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825	5,56068	3,84615	816,81	5 30 92,9	**260**
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907	5,56452	3,83142	819,96	5 35 02,1	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988	5,56834	3,81679	823,10	5 39 12,9	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070	5,57215	3,80228	826,24	5 43 25,2	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151	5,57595	3,78788	829,38	5 47 39,1	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2788	6,4232	5,57973	3,77358	832,52	5 51 54,6	265
266	7 07 56	18 821 096	16,3095	6,4312	5,58350	3,75940	835,66	5 55 71,6	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393	5,58725	3,74532	838,81	5 59 90,2	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473	5,59099	3,73134	841,95	5 64 10,4	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553	5,59471	3,71747	845,09	5 68 32,2	269
270	7 29 00	19 683 000	16,4317	6,4633	5,59842	3,70370	848,23	5 72 55,5	**270**
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713	5,60212	3,69004	851,37	5 76 80,4	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792	5,60580	3,67647	854,51	5 81 06,9	272
273	7 45 29	20 346 417	16,5227	6,4872	5,60947	3,66300	857,65	5 85 34,9	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951	5,61313	3,64964	860,80	5 89 64,6	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030	5,61677	3,63636	863,94	5 93 95,7	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108	5,62040	3,62319	867,08	5 98 28,5	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187	5,62402	3,61011	870,22	6 02 62,8	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265	5,62762	3,59712	873,36	6 06 98,7	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343	5,63121	3,58423	876,50	6 11 36,2	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	6 15 75,2	**280**
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499	5,63835	3,55872	882,79	6 20 15,8	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577	5,64191	3,54610	885,93	6 24 58,0	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654	5,64545	3,53357	889,07	6 29 01,8	283
284	8 06 56	22 906 304	16,8523	6,5731	5,64897	3,52113	892,21	6 33 47,1	284
285	8 12 25	23 149 125	16,8819	6,5808	5,65249	3,50877	895,35	6 37 94,0	285
286	8 17 96	23 393 656	16,9115	6,5885	5,65599	3,49650	898,50	6 42 42,4	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962	5,65948	3,48432	901,64	6 46 92,5	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039	5,66296	3,47222	904,78	6 51 44,1	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115	5,66643	3,46021	907,92	6 55 97,2	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191	5,66988	3,44828	911,06	6 60 52,0	**290**
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267	5,67332	3,43643	914,20	6 65 08,3	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343	5,67675	3,42466	917,35	6 69 66,2	292
293	8 58 49	25 153 757	17,1172	6,6419	5,68017	3,41297	920,49	6 74 25,6	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494	5,68358	3,40136	923,63	6 78 86,7	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1756	6,6569	5,68698	3,38983	926,77	6 83 49,3	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644	5,69036	3,37838	929,91	6 88 13,4	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719	5,69373	3,36700	933,05	6 92 79,2	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794	5,69709	3,35570	936,19	6 97 46,5	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869	5,70044	3,34448	939,34	7 02 15,4	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**

Digitized by Google

n	n^3	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	**300**
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	5,70711	3,32226	945,62	7 11 57,9	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	5,71043	3,31126	948,76	7 16 31,5	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	5,71373	3,30033	951,90	7 21 06,6	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	6,7240	5,71703	3,28947	955,04	7 25 83,4	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	5,72031	3,27869	958,19	7 30 61,7	305
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	6,7387	5,72359	3,26797	961,33	7 35 41,5	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	5,72685	3,25733	964,47	7 40 23,0	307
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	6,7533	5,73010	3,24675	967,61	7 45 06,0	308
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	6,7606	5,73334	3,23625	970,75	7 49 90,6	309
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	5,73657	3,22581	973,89	7 54 76,8	**310**
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	5,73979	3,21543	977,04	7 59 64,5	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	5,74300	3,20513	980,18	7 64 53,8	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	5,74620	3,19489	983,32	7 69 44,7	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	5,74939	3,18471	986,46	7 74 37,1	314
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	6,8041	5,75257	3,17460	989,60	7 79 31,1	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	5,75574	3,16456	992,74	7 84 26,7	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	5,75890	3,15457	995,88	7 89 23,9	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	5,76205	3,14465	999,03	7 94 22,6	318
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	6,8328	5,76519	3,13480	1002,2	7 99 22,9	319
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	8 04 24,8	**320**
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	5,77144	3,11526	1008,5	8 09 28,2	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	5,77455	3,10559	1011,6	8 14 33,2	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	5,77765	3,09598	1014,7	8 19 39,8	323
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	6,8683	5,78074	3,08642	1017,9	8 24 48,0	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	5,78383	3,07692	1021,0	8 29 57,7	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	5,78690	3,06748	1024,2	8 34 69,0	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	5,78996	3,05810	1027,3	8 39 81,8	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	5,79301	3,04878	1030,4	8 44 96,3	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	5,79606	3,03951	1033,6	8 50 12,3	329
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	5,79909	3,03030	1036,7	8 55 29,9	**330**
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	6,9174	5,80212	3,02115	1039,9	8 60 49,0	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	5,80513	3,01205	1043,0	8 65 69,7	332
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	6,9313	5,80814	3,00300	1046,2	8 70 92,0	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	5,81114	2,99401	1049,3	8 76 15,9	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	5,81413	2,98507	1052,4	8 81 41,3	335
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	6,9521	5,81711	2,97619	1055,6	8 86 68,3	336
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	6,9589	5,82008	2,96736	1058,7	8 91 96,9	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	5,82305	2,95858	1061,9	8 97 27,0	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	6,9727	5,82600	2,94985	1065,0	9 02 58,7	339
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	5,82895	2,94118	1068,1	9 07 92,0	**340**
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	6,9864	5,83188	2,93255	1071,3	9 13 26,9	341
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	6,9932	5,83481	2,92398	1074,4	9 18 63,3	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	5,83773	2,91545	1077,6	9 24 01,3	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	5,84064	2,90698	1080,7	9 29 40,9	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	5,84354	2,89855	1083,8	9 34 82,0	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	5,84644	2,89017	1087,0	9 40 24,7	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	5,84932	2,88184	1090,1	9 45 69,0	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338	5,85220	2,87356	1093,3	9 51 14,9	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	7,0406	5,85507	2,86533	1096,4	9 56 62,3	349
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	**350**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	**350**
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540	5,86079	2,84900	1102,7	9 67 61,8	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607	5,86363	2,84091	1105,8	9 73 14,0	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674	5,86647	2,83286	1109,0	9 78 67,7	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740	5,86930	2,82486	1112,1	9 84 23,0	354
355	12 60 25	44 738 875	18,8414	7,0807	5,87212	2,81690	1115,3	9 89 79,8	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873	5,87493	2,80899	1118,4	9 95 38,2	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940	5,87774	2,80112	1121,5	10 00 98	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006	5,88053	2,79330	1124,7	10 06 60	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072	5,88332	2,78552	1127,8	10 12 23	359
360	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	10 17 88	**360**
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204	5,88888	2,77008	1134,1	10 23 54	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269	5,89164	2,76243	1137,3	10 29 22	362
363	13 17 69	47 832 147	19,0526	7,1335	5,89440	2,75482	1140,4	10 34 91	363
364	13 24 96	48 228 544	19,0788	7,1400	5,89715	2,74725	1143,5	10 40 62	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466	5,89990	2,73973	1146,7	10 46 35	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531	5,90263	2,73224	1149,8	10 52 09	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596	5,90536	2,72480	1153,0	10 57 85	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661	5,90808	2,71739	1156,1	10 63 62	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726	5,91080	2,71003	1159,2	10 69 41	369
370	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791	5,91350	2,70270	1162,4	10 75 21	**370**
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855	5,91620	2,69542	1165,5	10 81 03	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920	5,91889	2,68817	1168,7	10 86 87	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984	5,92158	2,68097	1171,8	10 92 72	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048	5,92426	2,67380	1175,0	10 98 58	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112	5,92693	2,66667	1178,1	11 04 47	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177	5,92959	2,65957	1181,2	11 10 36	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240	5,93225	2,65252	1184,4	11 16 28	377
378	14 28 84	54 010 152	19,4422	7,2304	5,93489	2,64550	1187,5	11 22 21	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368	5,93754	2,63852	1190,7	11 28 15	379
380	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432	5,94017	2,63158	1193,8	11 34 11	**380**
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	7,2495	5,94280	2,62467	1196,9	11 40 09	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558	5,94542	2,61780	1200,1	11 46 08	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622	5,94803	2,61097	1203,2	11 52 09	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685	5,95064	2,60417	1206,4	11 58 12	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748	5,95324	2,59740	1209,5	11 64 16	385
386	14 89 96	57 512 456	19,6469	7,2811	5,95584	2,59067	1212,7	11 70 21	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874	5,95842	2,58398	1215,8	11 76 28	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936	5,96101	2,57732	1218,9	11 82 37	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999	5,96358	2,57069	1222,1	11 88 47	389
390	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061	5,96615	2,56410	1225,2	11 94 59	**390**
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124	5,96871	2,55754	1228,4	12 00 72	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186	5,97126	2,55102	1231,5	12 06 87	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248	5,97381	2,54453	1234,6	12 13 04	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310	5,97635	2,53807	1237,8	12 19 22	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372	5,97889	2,53165	1240,9	12 25 42	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434	5,98141	2,52525	1244,1	12 31 63	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496	5,98394	2,51889	1247,2	12 37 86	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	7,3558	5,98645	2,51256	1250,4	12 44 10	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	7,3619	5,98896	2,50627	1253,5	12 50 36	399
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	**400**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	**400**
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	12 88 25	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	13 20 25	**410**
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	13 39 65	413
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	13 46 14	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	13 85 44	**420**
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	6,04737	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	14 52 20	**430**
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	6,06843	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	15 20 53	**440**
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688	6,11147	2,21729	1416,9	15 97 51	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744	6,11368	2,21239	1420,0	16 04 60	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801	6,11589	2,20751	1423,1	16 11 71	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857	6,11810	2,20264	1426,3	16 18 83	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914	6,12030	2,19780	1429,4	16 25 97	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970	6,12249	2,19298	1432,6	16 33 13	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026	6,12468	2,18818	1435,7	16 40 30	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082	6,12687	2,18341	1438,8	16 47 48	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7138	6,12905	2,17865	1442,0	16 54 68	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194	6,13123	2,17391	1445,1	16 61 90	**460**
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250	6,13340	2,16920	1448,3	16 69 14	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306	6,13556	2,16450	1451,4	16 76 39	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362	6,13773	2,15983	1454,6	16 83 65	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418	6,13988	2,15517	1457,7	16 90 93	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473	6,14204	2,15054	1460,8	16 98 23	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529	6,14419	2,14592	1464,0	17 05 54	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584	6,14633	2,14133	1467,1	17 12 87	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639	6,14847	2,13675	1470,3	17 20 21	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695	6,15060	2,13220	1473,4	17 27 57	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750	6,15273	2,12766	1476,5	17 34 94	**470**
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805	6,15486	2,12314	1479,7	17 42 34	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860	6,15698	2,11864	1482,8	17 49 74	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915	6,15910	2,11416	1486,0	17 57 16	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970	6,16121	2,10970	1489,1	17 64 60	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025	6,16331	2,10526	1492,3	17 72 05	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079	6,16542	2,10084	1495,4	17 79 52	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134	6,16752	2,09644	1498,5	17 87 01	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188	6,16961	2,09205	1501,7	17 94 51	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243	6,17170	2,08768	1504,8	18 02 03	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	18 09 56	**480**
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352	6,17587	2,07900	1511,1	18 17 11	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406	6,17794	2,07469	1514,2	18 24 67	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460	6,18002	2,07039	1517,4	18 32 25	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514	6,18208	2,06612	1520,5	18 39 84	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568	6,18415	2,06186	1523,7	18 47 45	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622	6,18621	2,05761	1526,8	18 55 08	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676	6,18826	2,05339	1530,0	18 62 72	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730	6,19032	2,04918	1533,1	18 70 38	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784	6,19236	2,04499	1536,2	18 78 05	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837	6,19441	2,04082	1539,4	18 85 74	**490**
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891	6,19644	2,03666	1542,5	18 93 45	491
492	24 20 64	119 095 488	22,1811	7,8944	6,19848	2,03252	1545,7	19 01 17	492
493	24 30 49	110 823 157	22,2036	7,8998	6,20051	2,02840	1548,8	19 08 90	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051	6,20254	2,02429	1551,9	19 16 65	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105	6,20456	2,02020	1555,1	19 24 42	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158	6,20658	2,01613	1558,2	19 32 21	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211	6,20859	2,01207	1561,4	19 40 00	497
498	24 80 04	123 505 992	22,3159	7,9264	6,21060	2,00803	1564,5	19 47 82	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317	6,21261	2,00401	1567,7	19 55 65	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**

Digitized by Google

n	n^3	n^8	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	**500**
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	6,21661	1,99601	1573,9	19 71 36	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	6,21860	1,99203	1577,1	19 79 23	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	6,22059	1,98807	1580,2	19 87 13	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	6,22258	1,98413	1583,4	19 95 04	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	6,22456	1,98020	1586,5	20 02 96	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	6,22654	1,97628	1589,6	20 10 90	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	6,22851	1,97239	1592,8	20 18 86	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	6,23048	1,96850	1595,9	20 26 83	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	6,23245	1,96464	1599,1	20 34 82	509
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	6,23441	1,96078	1602,2	20 42 82	**510**
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	6,23637	1,95695	1605,4	20 50 84	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	6,23832	1,95312	1608,5	20 58 87	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	6,24028	1,94932	1611,6	20 66 92	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	6,24222	1,94553	1614,8	20 74 99	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	6,24417	1,94175	1617,9	20 83 07	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	6,24611	1,93798	1621,1	20 91 17	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	6,24804	1,93424	1624,2	20 99 28	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	6,24998	1,93050	1627,3	21 07 41	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7816	8,0363	6,25190	1,92678	1630,5	21 15 56	519
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	21 23 72	**520**
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	6,25575	1,91939	1636,8	21 31 89	521
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	8,0517	6,25767	1,91571	1639,9	21 40 08	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	6,25958	1,91205	1643,1	21 48 29	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	6,26149	1,90840	1646,2	21 56 51	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	6,26340	1,90476	1649,3	21 64 75	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	6,26530	1,90114	1652,5	21 73 01	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	6,26720	1,89753	1655,6	21 81 28	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	6,26910	1,89394	1658,8	21 89 56	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	6,27099	1,89036	1661,9	21 97 87	529
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	6,27288	1,88679	1665,0	22 06 18	**530**
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	6,27476	1,88324	1668,2	22 14 52	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	6,27664	1,87970	1671,3	22 22 87	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	6,27852	1,87617	1674,5	22 31 23	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	6,28040	1,87266	1677,6	22 39 61	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	6,28227	1,86916	1680,8	22 48 01	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	6,28413	1,86567	1683,9	22 56 42	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	6,28600	1,86220	1687,0	22 64 84	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	6,28786	1,85874	1690,2	22 73 29	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	6,28972	1,85529	1693,3	22 81 75	539
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	6,29157	1,85185	1696,5	22 90 22	**540**
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	6,29342	1,84843	1699,6	22 98 71	541
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	8,1533	6,29527	1,84502	1702,7	23 07 22	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	6,29711	1,84162	1705,9	23 15 74	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	6,29895	1,83824	1709,0	23 24 28	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	6,30079	1,83486	1712,2	23 32 83	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	6,30262	1,83150	1715,3	23 41 40	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	8,1783	6,30445	1,82815	1718,5	23 49 98	547
548	30 03 04	164 566 592	23,4094	8,1833	6,30628	1,82482	1721,6	23 58 58	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	8,1882	6,30810	1,82149	1724,7	23 67 20	549
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	**550**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	**550**
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982	6,31173	1,81488	1731,0	23 84 48	551
552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031	6,31355	1,81159	1734,2	23 93 14	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081	6,31536	1,80832	1737,3	24 01 82	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130	6,31716	1,80505	1740,4	24 10 51	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180	6,31897	1,80180	1743,6	24 19 22	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229	6,32077	1,79856	1746,7	24 27 95	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278	6,32257	1,79533	1749,9	24 36 69	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327	6,32436	1,79211	1753,0	24 45 45	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377	6,32615	1,78891	1756,2	24 54 22	559
560	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	24 63 01	**560**
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475	6,32972	1,78253	1762,4	24 71 81	561
562	31 58 44	177 504 328	23,7065	8,2524	6,33150	1,77936	1765,6	24 80 63	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573	6,33328	1,77620	1768,7	24 89 47	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621	6,33505	1,77305	1771,9	24 98 32	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670	6,33683	1,76991	1775,0	25 07 19	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719	6,33859	1,76678	1778,1	25 16 07	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768	6,34036	1,76367	1781,3	25 24 97	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8328	8,2816	6,34212	1,76056	1784,4	25 33 88	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865	6,34388	1,75747	1787,6	25 42 81	569
570	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913	6,34564	1,75439	1790,7	25 51 76	**570**
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962	6,34739	1,75131	1793,8	25 60 72	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010	6,34914	1,74825	1797,0	25 69 70	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059	6,35089	1,74520	1800,1	25 78 69	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107	6,35263	1,74216	1803,3	25 87 70	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155	6,35437	1,73913	1806,4	25 96 72	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203	6,35611	1,73611	1809,6	26 05 76	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251	6,35784	1,73310	1812,7	26 14 82	577
578	33 40 84	193 100 552	24,0416	8,3300	6,35957	1,73010	1815,8	26 23 89	578
579	33 52 41	194 104 539	24,0624	8,3348	6,36130	1,72712	1819,0	26 32 98	579
580	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396	6,36303	1,72414	1822,1	26 42 08	**580**
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443	6,36475	1,72117	1825,3	26 51 20	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491	6,36647	1,71821	1828,4	26 60 33	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539	6,36819	1,71527	1831,6	26 69 48	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587	6,36990	1,71233	1834,7	26 78 65	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634	6,37161	1,70940	1837,8	26 87 83	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682	6,37332	1,70648	1841,0	26 97 03	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730	6,37502	1,70358	1844,1	27 06 24	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777	6,37673	1,70068	1847,3	27 15 47	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825	6,37843	1,69779	1850,4	27 24 71	589
590	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872	6,38012	1,69492	1853,5	27 33 97	**590**
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919	6,38182	1,69205	1856,7	27 43 25	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967	6,38351	1,68919	1859,8	27 52 54	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014	6,38519	1,68634	1863,0	27 61 84	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061	6,38688	1,68350	1866,1	27 71 17	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108	6,38856	1,68067	1869,2	27 80 51	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	8,4155	6,39024	1,67785	1872,4	27 89 86	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	8,4202	6,39192	1,67504	1875,5	27 99 23	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	8,4249	6,39359	1,67224	1878,7	28 08 62	598
599	35 88 01	214 921 799	24,4745	8,4296	6,39526	1,66945	1881,8	28 18 02	599
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	**600**

ed by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	**600**
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	6,39859	1,66389	1888,1	28 36 87	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	6,40026	1,66113	1891,2	28 46 31	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	6,40192	1,65837	1894,4	28 55 78	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	6,40357	1,65563	1897,5	28 65 26	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	6,40523	1,65289	1900,7	28 74 75	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	6,40688	1,65017	1903,8	28 84 26	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	6,40853	1,64745	1906,9	28 93 79	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	6,41017	1,64474	1910,1	29 03 33	608
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	8,4763	6,41182	1,64204	1913,2	29 12 89	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	6,41346	1,63934	1916,4	29 22 47	**610**
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	6,41510	1,63666	1919,5	29 32 06	611
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	8,4902	6,41673	1,63399	1922,7	29 41 66	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	6,41836	1,63132	1925,8	29 51 28	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	6,41999	1,62866	1928,9	29 60 92	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	6,42162	1,62602	1932,1	29 70 57	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	6,42325	1,62338	1935,2	29 80 24	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	8,5132	6,42487	1,62075	1938,4	29 89 92	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	8,5178	6,42649	1,61812	1941,5	29 99 62	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	6,42811	1,61551	1944,6	30 09 34	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	8,5270	6,42972	1,61290	1947,8	30 19 07	**620**
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	6,43133	1,61031	1950,9	30 28 82	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	6,43294	1,60772	1954,1	30 38 58	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	6,43455	1,60514	1957,2	30 48 36	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	6,43615	1,60256	1960,4	30 58 15	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	6,43775	1,60000	1963,5	30 67 96	625
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	8,5544	6,43935	1,59744	1966,6	30 77 79	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	6,44095	1,59490	1969,8	30 87 63	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	6,44254	1,59236	1972,9	30 97 48	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	6,44413	1,58983	1976,1	31 07 36	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	6,44572	1,58730	1979,2	31 17 25	**630**
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	6,44731	1,58479	1982,3	31 27 15	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	6,44889	1,58228	1985,5	31 37 07	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	6,45047	1,57978	1988,6	31 47 00	633
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	8,5907	6,45205	1,57729	1991,8	31 56 96	634
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	8,5952	6,45362	1,57480	1994,9	31 66 92	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	6,45520	1,57233	1998,1	31 76 90	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	6,45677	1,56986	2001,2	31 86 90	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	6,45834	1,56740	2004,3	31 96 92	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	6,45990	1,56495	2007,5	32 06 95	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	32 16 99	**640**
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	6,46303	1,56006	2013,8	32 27 05	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	6,46459	1,55763	2016,9	32 37 13	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	6,46614	1,55521	2020,0	32 47 22	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	6,46770	1,55280	2023,2	32 57 33	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	6,46925	1,55039	2026,3	32 67 45	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	6,47080	1,54799	2029,5	32 77 59	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	8,6490	6,47235	1,54560	2032,6	32 87 75	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	8,6535	6,47389	1,54321	2035,8	32 97 92	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	8,6579	6,47543	1,54083	2038,9	33 08 10	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	**650**
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668	6,47851	1,53610	2045,2	33 28 53	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713	6,48004	1,53374	2048,3	33 38 76	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757	6,48158	1,53139	2051,5	33 49 01	653
654	42 77 16	279 726 264	25,5734	8,6801	6,48311	1,52905	2054,6	33 59 27	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845	6,48464	1,52672	2057,7	33 69 55	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6890	6,48616	1,52439	2060,9	33 79 85	656
657	43 16 49	283 593 393	25,6320	8,6934	6,48768	1,52207	2064,0	33 90 16	657
658	43 29 64	284 890 312	25,6515	8,6978	6,48920	1,51976	2067,2	34 00 49	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022	6,49072	1,51745	2070,3	34 10 83	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066	6,49224	1,51515	2073,5	34 21 19	**660**
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110	6,49375	1,51286	2076,6	34 31 57	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154	6,49527	1,51057	2079,7	34 41 96	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198	6,49677	1,50830	2082,9	34 52 37	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241	6,49828	1,50602	2086,0	34 62 79	664
665	44 22 25	294 079 625	25,7876	8,7285	6,49979	1,50376	2089,2	34 73 23	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329	6,50129	1,50150	2092,3	34 83 68	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373	6,50279	1,49925	2095,4	34 94 15	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416	6,50429	1,49701	2098,6	35 04 64	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460	6,50578	1,49477	2101,7	35 15 14	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503	6,50728	1,49254	2104,9	35 25 65	**670**
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547	6,50877	1,49031	2108,0	35 36 18	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590	6,51026	1,48810	2111,2	35 46 73	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634	6,51175	1,48588	2114,3	35 57 30	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677	6,51323	1,48368	2117,4	35 67 88	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721	6,51471	1,48148	2120,6	35 78 47	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764	6,51619	1,47929	2123,7	35 89 08	676
677	45 83 29	310 288 733	26,0192	8,7807	6,51767	1,47710	2126,9	35 99 71	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850	6,51915	1,47493	2130,0	36 10 35	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893	6,52062	1,47275	2133,1	36 21 01	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	36 31 68	**680**
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980	6,52356	1,46843	2139,4	36 42 37	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023	6,52503	1,46628	2142,6	36 53 08	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066	6,52649	1,46413	2145,7	36 63 80	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109	6,52796	1,46199	2148,8	36 74 53	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152	6,52942	1,45985	2152,0	36 85 28	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194	6,53088	1,45773	2155,1	36 96 05	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237	6,53233	1,45560	2158,3	37 06 84	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	8,8280	6,53379	1,45349	2161,4	37 17 64	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2488	8,8323	6,53524	1,45138	2164,6	37 28 45	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366	6,53669	1,44928	2167,7	37 39 28	**690**
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408	6,53814	1,44718	2170,8	37 50 13	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451	6,53959	1,44509	2174,0	37 60 99	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493	6,54103	1,44300	2177,1	37 71 87	693
694	48 16 36	334 255 384	26,3439	8,8536	6,54247	1,44092	2180,3	37 82 76	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578	6,54391	1,43885	2183,4	37 93 67	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621	6,54535	1,43678	2186,5	38 04 59	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8663	6,54679	1,43472	2189,7	38 15 53	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706	6,54822	1,43266	2192,8	38 26 49	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748	6,54965	1,43062	2196,0	38 37 46	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	**700**
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	6,55251	1,42653	2202,3	38 59 45	701
702	49 28 04	345 948 408	26,4953	8,8875	6,55393	1,42450	2205,4	38 70 47	702
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	6,55536	1,42248	2208,5	38 81 51	703
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	6,55678	1,42045	2211,7	38 92 56	704
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	6,55820	1,41844	2214,8	39 03 63	705
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	6,55962	1,41643	2218,0	39 14 71	706
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	6,56103	1,41443	2221,1	39 25 80	707
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	6,56244	1,41243	2224,2	39 36 92	708
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	6,56386	1,41044	2227,4	39 48 05	709
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	6,56526	1,40845	2230,5	39 59 19	**710**
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	6,56667	1,40647	2233,7	39 70 35	711
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	6,56808	1,40449	2236,8	39 81 53	712
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	6,56948	1,40252	2240,0	39 92 72	713
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	6,57088	1,40056	2243,1	40 03 93	714
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	6,57228	1,39860	2246,2	40 15 15	715
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	6,57368	1,39665	2249,4	40 26 39	716
717	51 40 89	368 601 813	26,7769	8,9503	6,57508	1,39470	2252,5	40 37 65	717
718	51 55 24	370 146 232	26,7955	8,9545	6,57647	1,39276	2255,7	40 48 92	718
719	51 69 61	371 694 959	26,8142	8,9587	6,57786	1,39082	2258,8	40 60 20	719
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	40 71 50	**720**
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	6,58064	1,38696	2265,1	40 82 82	721
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	6,58203	1,38504	2268,2	40 94 15	722
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	6,58341	1,38313	2271,4	41 05 50	723
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	6,58479	1,38122	2274,5	41 16 87	724
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	6,58617	1,37931	2277,7	41 28 25	725
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	6,58755	1,37741	2280,8	41 39 65	726
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	6,58893	1,37552	2283,9	41 51 06	727
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	6,59030	1,37363	2287,1	41 62 48	728
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	6,59167	1,37174	2290,2	41 73 93	729
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	6,59304	1,36986	2293,4	41 85 39	**730**
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	6,59441	1,36799	2296,5	41 96 86	731
732	53 58 24	392 223 168	27,0555	9,0123	6,59578	1,36612	2299,6	42 08 35	732
733	53 72 89	393 832 837	27,0740	9,0164	6,59715	1,36426	2302,8	42 19 86	733
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	6,59851	1,36240	2305,9	42 31 38	734
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	6,59987	1,36054	2309,1	42 42 93	735
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	6,60123	1,35870	2312,2	42 54 47	736
737	54 31 69	400 315 553	27,1477	9,0328	6,60259	1,35685	2315,4	42 66 04	737
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	6,60394	1,35501	2318,5	42 77 62	738
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	6,60530	1,35318	2321,6	42 89 22	739
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	6,60665	1,35135	2324,8	43 00 84	**740**
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	6,60800	1,34953	2327,9	43 12 47	741
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	6,60935	1,34771	2331,1	43 24 12	742
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	6,61070	1,34590	2334,2	43 35 78	743
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	6,61204	1,34409	2337,3	43 47 46	744
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	6,61338	1,34228	2340,5	43 59 16	745
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	6,61473	1,34048	2343,6	43 70 87	746
747	55 80 09	416 832 723	27,3313	9,0735	6,61607	1,33869	2346,8	43 82 59	747
748	55 95 04	418 508 992	27,3496	9,0775	6,61740	1,33690	2349,9	43 94 33	748
749	56 10 01	420 189 749	27,3679	9,0816	6,61874	1,33511	2353,1	44 06 09	749
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	**750**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	**750**
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896	6,62141	1,33156	2359,3	44 29 65	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937	6,62274	1,32979	2362,5	44 41 46	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977	6,62407	1,32802	2365,6	44 53 28	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	9,1017	6,62539	1,32626	2368,8	44 65 11	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057	6,62672	1,32450	2371,9	44 76 97	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098	6,62804	1,32275	2375,0	44 88 83	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138	6,62936	1,32100	2378,2	45 00 72	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178	6,63068	1,31926	2381,3	45 12 62	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218	6,63200	1,31752	2384,5	45 24 53	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	45 36 46	**760**
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298	6,63463	1,31406	2390,8	45 48 41	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338	6,63595	1,31234	2393,9	45 60 37	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378	6,63726	1,31062	2397,0	45 72 34	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418	6,63857	1,30890	2400,2	45 84 34	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458	6,63988	1,30719	2403,3	45 96 35	765
766	58 67 56	449 455 096	27,6767	9,1498	6,64118	1,30548	2406,5	46 08 37	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537	6,64249	1,30378	2409,6	46 20 41	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577	6,64379	1,30208	2412,7	46 32 47	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617	6,64509	1,30039	2415,9	46 44 54	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657	6,64639	1,29870	2419,0	46 56 63	**770**
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696	6,64769	1,29702	2422,2	46 68 73	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736	6,64898	1,29534	2425,3	46 80 85	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775	6,65028	1,29366	2428,5	46 92 98	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815	6,65157	1,29199	2431,6	47 05 13	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855	6,65286	1,29032	2434,7	47 17 30	775
776	60 21 76	467 288 576	27,8568	9,1894	6,65415	1,28866	2437,9	47 29 48	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933	6,65544	1,28700	2441,0	47 41 68	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973	6,65673	1,28535	2444,2	47 53 89	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012	6,65801	1,28370	2447,3	47 66 12	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052	6,65929	1,28205	2450,4	47 78 36	**780**
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091	6,66058	1,28041	2453,6	47 90 62	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130	6,66185	1,27877	2456,7	48 02 90	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170	6,66313	1,27714	2459,9	48 15 19	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209	6,66441	1,27551	2463,0	48 27 50	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248	6,66568	1,27389	2466,2	48 39 82	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287	6,66696	1,27226	2469,3	48 52 16	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326	6,66823	1,27065	2472,4	48 64 51	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365	6,66950	1,26904	2475,6	48 76 88	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404	6,67077	1,26743	2478,7	48 89 27	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443	6,67203	1,26582	2481,9	49 01 67	**790**
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482	6,67330	1,26422	2485,0	49 14 09	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521	6,67456	1,26263	2488,1	49 26 52	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560	6,67582	1,26103	2491,3	49 38 97	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599	6,67708	1,25945	2494,4	49 51 43	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638	6,67834	1,25786	2497,6	49 63 91	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	9,2677	6,67960	1,25628	2500,7	49 76 41	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	9,2716	6,68085	1,25471	2503,8	49 88 92	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	9,2754	6,68211	1,25313	2507,0	50 01 45	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	9,2793	6,68336	1,25156	2510,1	50 13 99	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	**800**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	**800**
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	6,68586	1,24844	2516,4	50 39 12	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	6,68711	1,24688	2519,6	50 51 71	802
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	9,2948	6,68835	1,24533	2522,7	50 64 32	803
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	9,2986	6,68960	1,24378	2525,8	50 76 94	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	6,69084	1,24224	2529,0	50 89 58	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	6,69208	1,24069	2532,1	51 02 23	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	6,69332	1,23916	2535,3	51 14 90	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	6,69456	1,23762	2538,4	51 27 58	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	6,69580	1,23609	2541,5	51 40 28	809
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	6,69703	1,23457	2544,7	51 53 00	**810**
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	6,69827	1,23305	2547,8	51 65 73	811
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	9,3294	6,69950	1,23153	2551,0	51 78 48	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	6,70073	1,23001	2554,1	51 91 24	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	6,70196	1,22850	2557,3	52 04 02	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	6,70319	1,22699	2560,4	52 16 81	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	6,70441	1,22549	2563,5	52 29 62	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	6,70564	1,22399	2566,7	52 42 45	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	6,70686	1,22249	2569,8	52 55 29	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	6,70808	1,22100	2573,0	52 68 14	819
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	6,70930	1,21951	2576,1	52 81 02	**820**
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	6,71052	1,21803	2579,2	52 93 91	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	6,71174	1,21655	2582,4	53 06 81	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	6,71296	1,21507	2585,5	53 19 73	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	6,71417	1,21359	2588,7	53 32 67	824
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	9,3789	6,71538	1,21212	2591,8	53 45 62	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	6,71659	1,21065	2595,0	53 58 58	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	6,71780	1,20919	2598,1	53 71 57	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	6,71901	1,20773	2601,2	53 84 56	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	6,72022	1,20627	2604,4	53 97 58	829
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	6,72143	1,20482	2607,5	54 10 61	**830**
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	6,72263	1,20337	2610,7	54 23 65	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	6,72383	1,20192	2613,8	54 36 71	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	6,72503	1,20048	2616,9	54 49 79	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	6,72623	1,19904	2620,1	54 62 88	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	6,72743	1,19760	2623,2	54 75 99	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	6,72863	1,19617	2626,4	54 89 12	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	6,72982	1,19474	2629,5	55 02 26	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	6,73102	1,19332	2632,7	55 15 41	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	6,73221	1,19190	2635,8	55 28 58	839
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	55 41 77	**840**
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	6,73459	1,18906	2642,1	55 54 97	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	6,73578	1,18765	2645,2	55 68 19	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	6,73697	1,18624	2648,4	55 81 42	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	6,73815	1,18483	2651,5	55 94 67	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	6,73934	1,18343	2654,6	56 07 94	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	6,74052	1,18203	2657,8	56 21 22	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	6,74170	1,18064	2660,9	56 34 52	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	6,74288	1,17925	2664,1	56 47 83	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	6,74406	1,17786	2667,2	56 61 16	849
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	**850**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	57 01 24	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	57 14 63	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	58 08 80	860
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	59 44 68	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	60 82 12	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	62 21 14	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	62 35 13	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	63 05 30	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	900

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	**900**
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6585	6,80351	1,10988	2830,6	63 75 87	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	6,80461	1,10865	2833,7	63 90 03	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6656	6,80572	1,10742	2836,9	64 04 21	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	6,80683	1,10619	2840,0	64 18 40	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	6,80793	1,10497	2843,1	64 32 61	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	6,80904	1,10375	2846,3	64 46 83	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	6,81014	1,10254	2849,4	64 61 07	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	6,81124	1,10132	2852,6	64 75 33	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	6,81235	1,10011	2855,7	64 89 60	909
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6905	6,81344	1,09890	2858,8	65 03 88	**910**
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	6,81454	1,09769	2862,0	65 18 18	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	6,81564	1,09649	2865,1	65 32 50	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	6,81674	1,09529	2868,3	65 46 84	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	6,81783	1,09409	2871,4	05 61 18	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	6,81892	1,09290	2874,6	65 75 55	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	6,82002	1,09170	2877,7	65 89 93	916
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	9,7153	6,82111	1,09051	2880,8	66 04 33	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	6,82220	1,08932	2884,0	66 18 74	918
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	9,7224	6,82329	1,08814	2887,1	66 33 17	919
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	6,82437	1,08696	2890,3	66 47 61	**920**
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	6,82546	1,08578	2893,4	66 62 07	921
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	9,7329	6,82655	1,08460	2896,5	66 76 54	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	6,82763	1,08342	2899,7	66 91 03	923
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	9,7400	6,82871	1,08225	2902,8	67 05 54	924
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	9,7435	6,82979	1,08108	2906,0	67 20 06	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	6,83087	1,07991	2909,1	67 34 60	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	6,83195	1,07875	2912,3	67 49 15	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	6,83303	1,07759	2915,4	67 63 72	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	6,83411	1,07643	2918,5	67 78 31	929
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	6,83518	1,07527	2921,7	67 92 91	**930**
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	6,83626	1,07411	2924,8	68 07 52	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	9,7680	6,83733	1,07296	2928,0	68 22 16	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	6,83841	1,07181	2931,1	68 36 80	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	6,83948	1,07066	2934,2	68 51 47	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	6,84055	1,06952	2937,4	68 66 15	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	6,84162	1,06838	2940,5	68 80 84	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	6,84268	1,06724	2943,7	68 95 55	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	6,84375	1,06610	2946,8	69 10 28	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	6,84482	1,06496	2950,0	69 25 02	939
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	6,84588	1,06383	2953,1	69 39 78	**940**
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	6,84694	1,06270	2956,2	69 54 55	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	6,84801	1,06157	2959,4	69 69 34	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	6,84907	1,06045	2962,5	69 84 15	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	6,85013	1,05932	2965,7	69 98 97	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	6,85118	1,05820	2968,8	70 13 80	945
946	89 49 16	846 590 536	30,7571	9,8167	6,85224	1,05708	2971,9	70 28 65	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	9,8201	6,85330	1,05597	2975,1	70 43 52	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	9,8236	6,85435	1,05485	2978,2	70 58 40	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	9,8270	6,85541	1,05374	2981,4	70 73 30	949
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	**950**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	**950**
951	90 44 01	860 085 351	30,8383	9,8339	6,85751	1,05152	2987,7	71 03 15	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374	6,85857	1,05042	2990,8	71 18 09	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408	6,85961	1,04932	2993,9	71 33 06	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443	6,86066	1,04822	2997,1	71 48 03	954
955	91 20 25	870 983 875	30,9031	9,8477	6,86171	1,04712	3000,2	71 63 03	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511	6,86276	1,04603	3003,4	71 78 04	956
957	91 58 49	876 467 493	30,9354	9,8546	6,86380	1,04493	3006,5	71 93 06	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580	6,86485	1,04384	3009,6	72 08 10	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614	6,86589	1,04275	3012,8	72 23 16	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	72 38 23	**960**
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683	6,86797	1,04058	3019,1	72 53 32	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717	6,86901	1,03950	3022,2	72 68 42	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751	6,87005	1,03842	3025,4	72 83 54	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785	6,87109	1,03734	3028,5	72 98 67	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819	6,87213	1,03627	3031,6	73 13 82	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854	6,87316	1,03520	3034,8	73 28 99	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888	6,87420	1,03413	3037,9	73 44 17	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922	6,87523	1,03306	3041,1	73 59 37	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956	6,87626	1,03199	3044,2	73 74 58	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990	6,87730	1,03093	3047,3	73 89 81	**970**
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024	6,87833	1,02987	3050,5	74 05 06	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058	6,87936	1,02881	3053,6	74 20 32	972
973	94 67 29	921 167 317	31,1929	9,9092	6,88038	1,02775	3056,8	74 35 59	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9126	6,88141	1,02669	3059,9	74 50 88	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160	6,88244	1,02564	3063,1	74 66 19	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194	6,88346	1,02459	3066,2	74 81 51	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227	6,88449	1,02354	3069,3	74 96 85	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261	6,88551	1,02249	3072,5	75 12 21	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295	6,88653	1,02145	3075,6	75 27 58	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329	6,88755	1,02041	3078,8	75 42 96	**980**
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363	6,88857	1,01937	3081,9	75 58 37	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	9,9396	6,88959	1,01833	3085,0	75 73 78	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430	6,89061	1,01729	3088,2	75 89 22	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464	6,89163	1,01626	3091,3	76 04 66	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497	6,89264	1,01523	3094,5	76 20 13	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531	6,89366	1,01420	3097,6	76 35 61	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565	6,89467	1,01317	3100,8	76 51 11	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598	6,89568	1,01215	3103,9	76 66 62	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632	6,89669	1,01112	3107,0	76 82 14	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666	6,89770	1,01010	3110,2	76 97 69	**990**
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699	6,89871	1,00908	3113,3	77 13 25	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733	6,89972	1,00806	3116,5	77 28 82	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766	6,90073	1,00705	3119,6	77 44 41	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800	6,90174	1,00604	3122,7	77 60 02	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833	6,90274	1,00503	3125,9	77 75 64	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	9,9866	6,90375	1,00402	3129,0	77 91 28	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	9,9900	6,90475	1,00301	3132,2	78 06 93	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	9,9933	6,90575	1,00200	3135,3	78 22 60	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	9,9967	6,90675	1,00100	3138,5	78 38 28	999
1000	100 00 00	1000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**

Digitized by Google

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1000	1 000 000	1 000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	**1000**
1001	1 002 001	1 003 003 001	31,6386	10,0033	6,90875	0,99900	3144,7	78 69 70	1001
1002	1 004 004	1 006 012 008	31,6544	10,0067	6,90975	0,99800	3147,9	78 85 43	1002
1003	1 006 009	1 009 027 027	31,6702	10,0100	6,91075	0,99701	3151,0	79 01 18	1003
1004	1 008 016	1 012 048 064	31,6860	10,0133	6,91175	0,99602	3154,2	79 16 94	1004
1005	1 010 025	1 015 075 125	31,7017	10,0166	6,91275	0,99502	3157,3	79 32 72	1005
1006	1 012 036	1 018 108 216	31,7175	10,0200	6,91374	0,99404	3160,4	79 48 51	1006
1007	1 014 049	1 021 147 343	31,7333	10,0233	6,91474	0,99305	3163,6	79 64 32	1007
1008	1 016 064	1 024 192 512	31,7490	10,0266	6,91573	0,99206	3166,7	79 80 15	1008
1009	1 018 081	1 027 243 729	31,7648	10,0299	6,91672	0,99108	3169,9	79 95 99	1009
1010	1 020 100	1 030 301 000	31,7805	10,0332	6,91771	0,99010	3173,0	80 11 84	**1010**
1011	1 022 121	1 033 364 331	31,7962	10,0365	6,91869	0,98912	3176,2	80 27 72	1011
1012	1 024 144	1 036 433 728	31,8119	10,0398	6,91968	0,98814	3179,3	80 43 61	1012
1013	1 026 169	1 039 509 197	31,8277	10,0431	6,92067	0,98717	3182,4	80 59 51	1013
1014	1 028 196	1 042 590 744	31,8434	10,0465	6,92166	0,98619	3185,6	80 75 43	1014
1015	1 030 225	1 045 678 375	31,8591	10,0498	6,92264	0,98522	3188,7	80 91 37	1015
1016	1 032 256	1 048 772 096	31,8748	10,0531	6,92363	0,98425	3191,9	81 07 32	1016
1017	1 034 289	1 051 871 913	31,8904	10,0563	6,92461	0,98328	3195,0	81 23 29	1017
1018	1 036 324	1 054 977 832	31,9061	10,0596	6,92559	0,98232	3198,1	81 39 27	1018
1019	1 038 361	1 058 089 859	31,9218	10,0629	6,92658	0,98135	3201,3	81 55 27	1019
1020	1 040 400	1 061 208 000	31,9374	10,0662	6,92756	0,98039	3204,4	81 71 28	**1020**
1021	1 042 441	1 064 332 261	31,9531	10,0695	6,92854	0,97943	3207,6	81 87 31	1021
1022	1 044 484	1 067 462 648	31,9687	10,0728	6,92952	0,97847	3210,7	82 03 36	1022
1023	1 046 529	1 070 599 167	31,9844	10,0761	6,93049	0,97752	3213,9	82 19 42	1023
1024	1 048 576	1 073 741 824	32,0000	10,0794	6,93147	0,97656	3217,0	82 35 49	1024
1025	1 050 625	1 076 890 625	32,0156	10,0826	6,93245	0,97561	3220,1	82 51 59	1025
1026	1 052 676	1 080 045 576	32,0312	10,0859	6,93342	0,97466	3223,3	82 67 70	1026
1027	1 054 729	1 083 206 683	32,0468	10,0892	6,93440	0,97371	3226,4	82 83 82	1027
1028	1 056 784	1 086 373 952	32,0624	10,0925	6,93537	0,97276	3229,6	82 99 96	1028
1029	1 058 841	1 089 547 389	32,0780	10,0957	6,93634	0,97182	3232,7	83 16 12	1029
1030	1 060 900	1 092 727 000	32,0936	10,0990	6,93731	0,97087	3235,8	83 32 29	**1030**
1031	1 062 961	1 095 912 791	32,1092	10,1023	6,93828	0,96993	3239,0	83 48 47	1031
1032	1 065 024	1 099 104 768	32,1248	10,1055	6,93925	0,96899	3242,1	83 64 68	1032
1033	1 067 089	1 102 302 937	32,1403	10,1088	6,94022	0,96805	3245,3	83 80 90	1033
1034	1 069 156	1 105 507 304	32,1559	10,1121	6,94119	0,96712	3248,4	83 97 13	1034
1035	1 071 225	1 108 717 875	32,1714	10,1153	6,94216	0,96618	3251,5	84 13 38	1035
1036	1 073 296	1 111 934 656	32,1870	10,1186	6,94312	0,96525	3254,7	84 29 65	1036
1037	1 075 369	1 115 157 653	32,2025	10,1218	6,94409	0,96432	3257,8	84 45 93	1037
1038	1 077 444	1 118 386 872	32,2180	10,1251	6,94505	0,96339	3261,0	84 62 22	1038
1039	1 079 521	1 121 622 319	32,2335	10,1283	6,94601	0,96246	3264,1	84 78 54	1039
1040	1 081 600	1 124 864 000	32,2490	10,1316	6,94698	0,96154	3267,3	84 94 87	**1040**
1041	1 083 681	1 128 111 921	32,2645	10,1348	6,94794	0,96061	3270,4	85 11 21	1041
1042	1 085 764	1 131 366 088	32,2800	10,1381	6,94890	0,95969	3273,5	85 27 57	1042
1043	1 087 849	1 134 626 507	32,2955	10,1413	6,94986	0,95877	3276,7	85 43 94	1043
1044	1 089 936	1 137 893 184	32,3110	10,1446	6,95081	0,95785	3279,8	85 60 34	1044
1045	1 092 025	1 141 166 125	32,3265	10,1478	6,95177	0,95694	3283,0	85 76 74	1045
1046	1 094 116	1 144 445 336	32,3419	10,1510	6,95273	0,95602	3286,1	85 93 17	1046
1047	1 096 209	1 147 730 823	32,3574	10,1543	6,95368	0,95511	3289,2	86 09 60	1047
1048	1 098 304	1 151 022 592	32,3728	10,1575	6,95464	0,95420	3292,4	86 26 06	1048
1049	1 100 401	1 154 320 649	32,3883	10,1607	6,95559	0,95329	3295,5	86 42 53	1049
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**

1049
1050

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1050	1 102 500	1 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	**1050**
1051	1 104 601	1 160 935 651	32,4191	10,1672	6,95750	0,95147	3301,8	86 75 51	1051
1052	1 106 704	1 164 252 608	32,4345	10,1704	6,95845	0,95057	3305,0	86 92 03	1052
1053	1 108 809	1 167 575 877	32,4500	10,1736	6,95940	0,94967	3308,1	87 08 56	1053
1054	1 110 916	1 170 905 464	32,4654	10,1769	6,96035	0,94877	3311,2	87 25 11	1054
1055	1 113 025	1 174 241 375	32,4808	10,1801	6,96130	0,94787	3314,4	87 41 68	1055
1056	1 115 136	1 177 583 616	32,4962	10,1833	6,96224	0,94697	3317,5	87 58 26	1056
1057	1 117 249	1 180 932 193	32,5115	10,1865	6,96319	0,94607	3320,7	87 74 85	1057
1058	1 119 364	1 184 287 112	32,5269	10,1897	6,96414	0,94518	3323,8	87 91 46	1058
1059	1 121 481	1 187 648 379	32,5423	10,1929	6,96508	0,94429	3326,9	88 08 09	1059
1060	1 123 600	1 191 016 000	32,5576	10,1961	6,96602	0,94340	3330,1	88 24 73	**1060**
1061	1 125 721	1 194 389 981	32,5730	10,1993	6,96697	0,94251	3333,2	88 41 39	1061
1062	1 127 844	1 197 770 328	32,5883	10,2025	6,96791	0,94162	3336,4	88 58 06	1062
1063	1 129 969	1 201 157 047	32,6037	10,2057	6,96885	0,94073	3339,5	88 74 75	1063
1064	1 132 096	1 204 550 144	32,6190	10,2089	6,96979	0,93985	3342,7	88 91 46	1064
1065	1 134 225	1 207 949 625	32,6343	10,2121	6,97073	0,93897	3345,8	89 08 18	1065
1066	1 136 356	1 211 355 496	32,6497	10,2153	6,97167	0,93809	3348,9	89 24 92	1066
1067	1 138 489	1 214 767 763	32,6650	10,2185	6,97261	0,93721	3352,1	89 41 67	1067
1068	1 140 624	1 218 186 432	32,6803	10,2217	6,97354	0,93633	3355,2	89 58 43	1068
1069	1 142 761	1 221 611 509	32,6956	10,2249	6,97448	0,93545	3358,4	89 75 22	1069
1070	1 144 900	1 225 043 000	32,7109	10,2281	6,97541	0,93458	3361,5	89 92 02	**1070**
1071	1 147 041	1 228 480 911	32,7261	10,2313	6,97635	0,93371	3364,6	90 08 84	1071
1072	1 149 184	1 231 925 248	32,7414	10,2345	6,97728	0,93284	3367,8	90 25 67	1072
1073	1 151 329	1 235 376 017	32,7567	10,2376	6,97821	0,93197	3370,9	90 42 51	1073
1074	1 153 476	1 238 833 224	32,7719	10,2408	6,97914	0,93110	3374,1	90 59 38	1074
1075	1 155 625	1 242 296 875	32,7872	10,2440	6,98008	0,93023	3377,2	90 76 26	1075
1076	1 157 776	1 245 766 976	32,8024	10,2472	6,98101	0,92937	3380,4	90 93 15	1076
1077	1 159 929	1 249 243 533	32,8177	10,2503	6,98193	0,92851	3383,5	91 10 06	1077
1078	1 162 084	1 252 726 552	32,8329	10,2535	6,98286	0,92764	3386,6	91 26 98	1078
1079	1 164 241	1 256 216 039	32,8481	10,2567	6,98379	0,92678	3389,8	91 43 92	1079
1080	1 166 400	1 259 712 000	32,8634	10,2599	6,98472	0,92593	3392,9	91 60 88	**1080**
1081	1 168 561	1 263 214 441	32,8786	10,2630	6,98564	0,92507	3396,1	91 77 85	1081
1082	1 170 724	1 266 723 368	32,8938	10,2662	6,98657	0,92421	3399,2	91 94 84	1082
1083	1 172 889	1 270 238 787	32,9090	10,2693	6,98749	0,92336	3402,3	92 11 85	1083
1084	1 175 056	1 273 760 704	32,9242	10,2725	6,98841	0,92251	3405,5	92 28 87	1084
1085	1 177 225	1 277 289 125	32,9393	10,2757	6,98933	0,92166	3408,6	92 45 90	1085
1086	1 179 396	1 280 824 056	32,9545	10,2788	6,99026	0,92081	3411,8	92 62 95	1086
1087	1 181 569	1 284 365 503	32,9697	10,2820	6,99118	0,91996	3414,9	92 80 02	1087
1088	1 183 744	1 287 913 472	32,9848	10,2851	6,99210	0,91912	3418,1	92 97 10	1088
1089	1 185 921	1 291 467 969	33,0000	10,2883	6,99301	0,91827	3421,2	93 14 20	1089
1090	1 188 100	1 295 029 000	33,0151	10,2914	6,99393	0,91743	3424,3	93 31 31	**1090**
1091	1 190 281	1 298 596 571	33,0303	10,2946	6,99485	0,91659	3427,5	93 48 44	1091
1092	1 192 464	1 302 170 688	33,0454	10,2977	6,99577	0,91575	3430,6	93 65 59	1092
1093	1 194 649	1 305 751 357	33,0606	10,3009	6,99668	0,91491	3433,8	93 82 75	1093
1094	1 196 836	1 309 338 584	33,0757	10,3040	6,99760	0,91408	3436,9	93 99 93	1094
1095	1 199 025	1 312 932 375	33,0908	10,3071	6,99851	0,91324	3440,0	94 17 12	1095
1096	1 201 216	1 316 532 736	33,1059	10,3103	6,99942	0,91240	3443,2	94 34 33	1096
1097	1 203 409	1 320 139 673	33,1210	10,3134	7,00033	0,91158	3446,3	94 51 55	1097
1098	1 205 604	1 323 753 192	33,1361	10,3165	7,00125	0,91075	3449,5	94 68 79	1098
1099	1 207 801	1 327 373 299	33,1512	10,3197	7,00216	0,90992	3452,6	94 86 04	1099
1100	1 210 000	1 331 000 000	33,1662	10,3228	7,00307	0,90909	3455,8	95 03 32	**1100**

Digitized by Google

B. Mantissen der Briggs-

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Digitized by Google

rhen Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Digitized by Google

Grad	Sinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	**60**
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cosinus							

Digitized by Google

Grad	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Sinus							

Grad	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cotangens							

Grad	Cotangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Tangens							

Digitized by Google

D. Tafeln der Hyperbelfunktionen.

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{1}{2}\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,940	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

Digitized by Google

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Cof}\,\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320*	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2,1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2,7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9136	0106*	0905*	1712*	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113*	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4401*	1347
3,3	13,5748	7108	8482	9871	1273*	2689*	4120*	5565*	7024*	8498*	1489
3,4	14,9999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

Digitized by Google

Briggsche Logarithmen der Hyperbelfunktion Sin φ für $\varphi = 0$ bis 5,09; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	$-\infty$	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

Digitized by Google

Briggesche Logarithmen der Hyperbelfunktion Cof. φ für φ = 0 bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43

Hyperbelfunktion Tg φ für φ = 0 bis 2,39.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0.0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0.1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1.0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2.0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3

Briggsche Logarithmen der Hyperbelfunktion Tg φ für φ = 0 bis 2,39; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0.0	— ∞	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	0396*	0771*	1115*	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1.0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2.0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	0867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

Digitized by Google

E. Kugelinhalte für die Durchmesser $d = 1$ bis 200.

d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$
1	0,523599	41	36086,95	81	278261,8	121	927587,2	161	2185125
2	4,188790	42	38792,39	82	288695,6	122	950775,8	162	2226094
3	14,13717	43	41629,77	83	299387,0	123	974347,7	163	2267574
4	33,51032	44	44602,24	84	310339,1	124	998305,9	164	2309565
5	65,44985	45	47712,94	85	321555,1	125	1022654	165	2352071
6	113,0973	46	50965,01	86	333038,2	126	1047394	166	2395096
7	179,5944	47	54361,60	87	344791,4	127	1072531	167	2438642
8	268,0826	48	57905,84	88	356817,9	128	1098066	168	2482713
9	381,7035	49	61600,87	89	369120,9	129	1124004	169	2527311
10	523,5988	50	65449,85	90	381703,5	130	1150347	170	2572441
11	696,9100	51	69455,91	91	394568,9	131	1177098	171	2618104
12	904,7787	52	73622,18	92	407720,1	132	1204260	172	2664305
13	1150,347	53	77951,81	93	421160,3	133	1231838	173	2711046
14	1436,755	54	82447,92	94	434892,8	134	1259833	174	2758331
15	1767,146	55	87113,75	95	448920,5	135	1288249	175	2806162
16	2144,660	56	91952,32	96	463246,7	136	1317090	176	2854543
17	2572,441	57	96966,83	97	477874,5	137	1346357	177	2903477
18	3053,628	58	102160,4	98	492807,0	138	1376055	178	2952967
19	3591,364	59	107536,2	99	508047,4	139	1406187	179	3003006
20	4188,790	60	113097,3	100	523598,8	140	1436755	180	3053628
21	4849,048	61	118847,0	101	539464,3	141	1467763	181	3104805
22	5575,280	62	124788,2	102	555647,2	142	1499214	182	3156551
23	6370,626	63	130924,3	103	572150,5	143	1531112	183	3208869
24	7238,229	64	137258,2	104	588977,4	144	1563457	184	3261761
25	8181,231	65	143793,3	105	606131,0	145	1596256	185	3315231
26	9202,772	66	150532,6	106	623614,5	146	1629511	186	3369282
27	10305,99	67	157479,1	107	641431,0	147	1663224	187	3423919
28	11494,04	68	164636,2	108	659583,7	148	1697398	188	3479142
29	12770,05	69	172006,9	109	678075,6	149	1732038	189	3534956
30	14137,17	70	179594,4	110	696910,0	150	1767146	190	3591364
31	15598,53	71	187401,8	111	716090,0	151	1802725	191	3648369
32	17157,28	72	195432,2	112	735618,6	152	1838778	192	3705973
33	18816,57	73	203688,8	113	755499,1	153	1875309	193	3764181
34	20579,53	74	212174,8	114	775734,6	154	1912321	194	3822996
35	22449,30	75	220893,2	115	796328,3	155	1949816	195	3882419
36	24429,02	76	229847,3	116	817283,2	156	1987799	196	3942456
37	26521,85	77	239040,1	117	838602,7	157	2026271	197	4003108
38	28730,91	78	248474,9	118	860289,5	158	2065237	198	4064379
39	31059,36	79	258154,6	119	882347,3	159	2104699	199	4126272
40	33510,32	80	268082,6	120	904778,7	160	2144660	200	4188790

ed by Google

F. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen

Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	60	1,0472	1,1340	7,81	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961	73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540

Zu einer gegebenen Bogenlänge l und Bogenhöhe h findet man den Halbmesser r aus $r = l : l_0$, wo l_0 die Bogenlänge ist, die beim Halbmesser 1 zu dem gegebenen $\frac{l}{h}$ gehört. Ist r der Kreishalbmesser und φ der Zentriwinkel in Grad, so ergibt sich

1) die Sehnenlänge $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$

2) die Bogenhöhe $h = r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$

3) die Bogenlänge $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0{,}0174532 \ldots r = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$ (angenähert)

und Kreisabschnitte für den Halbmesser 1.

Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogenlänge l	Bogenhöhe h	$\frac{l}{h}$	Sehnenlänge s	Inhalt des Kreisabschn.
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86971
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
95	1,6580	0,3244	5,11	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47844	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51846
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

4) der Inhalt des Kreisabschnittes $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\varphi - \sin\varphi\right)$

5) . . . Kreisausschnittes $= \frac{\varphi}{360}\pi r^2 = 0{,}008\,726\,65\ \varphi\, r^2$

6) $l = r$ entspricht $\varphi = 57^\circ\,17'\,44{,}806'' = 57{,}295\,779\,5^\circ = 206\,264{,}806''$

7) arc $1^\circ = \pi : 180 = 0{,}017\,453\,292\,52$; lg arc $1^\circ = 0{,}241\,877\,367\,6 - 2$

8) arc $1' = \pi : 10\,800 = 0{,}000\,290\,888\,21$; lg arc $1' = 0{,}463\,726\,117\,2 - 4$

9) arc $1'' = \pi : 648\,000 = 0{,}000\,004\,848\,14$; lg arc $1'' = 0{,}685\,574\,866\,8 - 6$

G. Länge der Kreisbogen

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	**0**
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02909	0,03200	1
2	0,03491	0,03782	0,04072	0,04363	0,04654	0,04945	2
3	0,05236	0,05527	0,05818	0,06109	0,06400	0,06690	3
4	0,06981	0,07272	0,07563	0,07854	0,08145	0,08436	4
5	0,08727	0,09017	0,09308	0,09599	0,09890	0,10181	5
6	0,10472	0,10763	0,11054	0,11345	0,11636	0,11926	6
7	0,12217	0,12508	0,12799	0,13090	0,13381	0,13672	7
8	0,13963	0,14253	0,14544	0,14835	0,15126	0,15417	8
9	0,15708	0,15999	0,16290	0,16581	0,16872	0,17162	9
10	0,17453	0,17744	0,18035	0,18326	0,18617	0,18908	**10**
11	0,19199	0,19489	0,19780	0,20071	0,20362	0,20653	11
12	0,20944	0,21235	0,21526	0,21817	0,22108	0,22398	12
13	0,22689	0,22980	0,23271	0,23562	0,23853	0,24144	13
14	0,24435	0,24725	0,25016	0,25307	0,25598	0,25889	14
15	0,26180	0,26471	0,26762	0,27053	0,27343	0,27634	15
16	0,27925	0,28216	0,28507	0,28798	0,29089	0,29380	16
17	0,29671	0,29961	0,30252	0,30543	0,30834	0,31125	17
18	0,31416	0,31707	0,31998	0,32289	0,32579	0,32870	18
19	0,33161	0,33452	0,33743	0,34034	0,34325	0,34616	19
20	0,34907	0,35197	0,35488	0,35779	0,36070	0,36361	**20**
21	0,36652	0,36943	0,37234	0,37525	0,37815	0,38106	21
22	0,38397	0,38688	0,38979	0,39270	0,39561	0,39852	22
23	0,40143	0,40433	0,40724	0,41015	0,41306	0,41597	23
24	0,41888	0,42179	0,42470	0,42761	0,43051	0,43342	24
25	0,43633	0,43924	0,44215	0,44506	0,44797	0,45088	25
26	0,45379	0,45669	0,45960	0,46251	0,46542	0,46833	26
27	0,47124	0,47415	0,47706	0,47997	0,48287	0,48578	27
28	0,48869	0,49160	0,49451	0,49742	0,50033	0,50324	28
29	0,50615	0,50905	0,51196	0,51487	0,51778	0,52069	29
30	0,52360	0,52651	0,52942	0,53233	0,53523	0,53814	**30**
31	0,54105	0,54396	0,54687	0,54978	0,55269	0,55560	31
32	0,55851	0,56141	0,56432	0,56723	0,57014	0,57305	32
33	0,57596	0,57887	0,58178	0,58479	0,58759	0,59050	33
34	0,59341	0,59632	0,59923	0,60214	0,60505	0,60796	34
35	0,61087	0,61377	0,61668	0,61959	0,62250	0,62541	35
36	0,62832	0,63123	0,63414	0,63705	0,63995	0,64286	36
37	0,64577	0,64868	0,65159	0,65450	0,65741	0,66032	37
38	0,66323	0,66613	0,66904	0,67195	0,67486	0,67777	38
39	0,68068	0,68359	0,68650	0,68940	0,69231	0,69522	39
40	0,69813	0,70104	0,70395	0,70686	0,70977	0,71268	**40**
41	0,71558	0,71849	0,72140	0,72431	0,72722	0,73013	41
42	0,73304	0,73595	0,73886	0,74176	0,74467	0,74758	42
43	0,75049	0,75340	0,75631	0,75922	0,76213	0,76504	43
44	0,76794	0,77085	0,77376	0,77667	0,77958	0,78249	44
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

für den Halbmesser 1.

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
45	0,78540	0,78831	0,79122	0,79412	0,79703	0,79994	45
46	0,80285	0,80576	0,80867	0,81158	0,81449	0,81740	46
47	0,82030	0,82322	0,82612	0,82903	0,83194	0,83485	47
48	0,83776	0,84067	0,84358	0,84648	0,84939	0,85230	48
49	0,85521	0,85812	0,86109	0,86394	0,86685	0,86976	49
50	0,87266	0,87557	0,87848	0,88139	0,88430	0,88721	**50**
51	0,89012	0,89303	0,89594	0,89884	0,90175	0,90466	51
52	0,90757	0,91048	0,91339	0,91630	0,91921	0,92212	52
53	0,92503	0,92793	0,93084	0,93375	0,93666	0,93957	53
54	0,94248	0,94539	0,94830	0,95120	0,95411	0,95702	54
55	0,95993	0,96284	0,96575	0,96866	0,97157	0,97448	55
56	0,97738	0,98029	0,98320	0,98611	0,98902	0,99193	56
57	0,99484	0,99775	1,00066	1,00356	1,00647	1,00938	57
58	1,01229	1,01520	1,01811	1,02102	1,02393	1,02684	58
59	1,02974	1,03265	1,03556	1,03847	1,04138	1,04429	59
60	1,04720	1,05011	1,05302	1,05592	1,05883	1,06174	**60**
61	1,06465	1,06756	1,07047	1,07338	1,07629	1,07920	61
62	1,08210	1,08501	1,08792	1,09083	1,09374	1,09665	62
63	1,09956	1,10247	1,10537	1,10828	1,11119	1,11410	63
64	1,11701	1,11992	1,12283	1,12574	1,12865	1,13156	64
65	1,13446	1,13737	1,14028	1,14319	1,14610	1,14901	65
66	1,15192	1,15483	1,15773	1,16064	1,16355	1,16646	66
67	1,16937	1,17228	1,17519	1,17810	1,18101	1,18392	67
68	1,18682	1,18973	1,19264	1,19555	1,19846	1,20137	68
69	1,20428	1,20719	1,21009	1,21300	1,21591	1,21882	69
70	1,22173	1,22464	1,22755	1,23046	1,23337	1,23627	**70**
71	1,23918	1,24209	1,24500	1,24791	1,25082	1,25373	71
72	1,25664	1,25955	1,26245	1,26536	1,26827	1,27118	72
73	1,27409	1,27700	1,27991	1,28282	1,28573	1,28863	73
74	1,29154	1,29445	1,29736	1,30027	1,30318	1,30609	74
75	1,30900	1,31191	1,31481	1,31772	1,32063	1,32354	75
76	1,32645	1,32936	1,33227	1,33518	1,33809	1,34099	76
77	1,34390	1,34681	1,34972	1,35263	1,35554	1,35845	77
78	1,36136	1,36427	1,36717	1,37008	1,37299	1,37590	78
79	1,37881	1,38172	1,38463	1,38754	1,39045	1,39335	79
80	1,39626	1,39917	1,40208	1,40499	1,40790	1,41081	**80**
81	1,41372	1,41663	1,41953	1,42244	1,42535	1,42826	81
82	1,43117	1,43408	1,43699	1,43990	1,44281	1,44571	82
83	1,44862	1,45153	1,45444	1,45735	1,46026	1,46317	83
84	1,46608	1,46899	1,47189	1,47480	1,47771	1,48062	84
85	1,48353	1,48644	1,48935	1,49226	1,49517	1,49807	85
86	1,50098	1,50389	1,50680	1,50971	1,51262	1,51553	86
87	1,51844	1,52134	1,52425	1,52716	1,53007	1,53298	87
88	1,53589	1,53880	1,54171	1,54462	1,54753	1,55043	88
89	1,55334	1,55625	1,55916	1,56207	1,56498	1,56789	89
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

Länge der Kreisbogen

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
90	1,57080	1,57370	1,57661	1,57952	1,58243	1,58534	**90**
91	1,58825	1,59116	1,59407	1,59698	1,59989	1,60279	91
92	1,60570	1,60861	1,61152	1,61443	1,61734	1,62025	92
93	1,62316	1,62606	1,62897	1,63188	1,63479	1,63770	93
94	1,64061	1,64352	1,64643	1,64934	1,65224	1,65515	94
95	1,65806	1,66097	1,66388	1,66679	1,66970	1,67261	95
96	1,67552	1,67842	1,68133	1,68424	1,68715	1,69006	96
97	1,69297	1,69588	1,69879	1,70170	1,70460	1,70751	97
98	1,71042	1,71333	1,71624	1,71915	1,72206	1,72497	98
99	1,72788	1,73078	1,73369	1,73660	1,73951	1,74242	99
100	1,74533	1,74824	1,75115	1,75406	1,75697	1,75987	**100**
101	1,76278	1,76569	1,76860	1,77151	1,77442	1,77733	101
102	1,78024	1,78314	1,78605	1,78896	1,79187	1,79478	102
103	1,79769	1,80060	1,80351	1,80642	1,80932	1,81223	103
104	1,81514	1,81805	1,82096	1,82387	1,82678	1,82969	104
105	1,83260	1,83550	1,83841	1,84132	1,84423	1,84714	105
106	1,85005	1,85296	1,85587	1,85878	1,86168	1,86459	106
107	1,86750	1,87041	1,87332	1,87623	1,87914	1,88205	107
108	1,88496	1,88786	1,89077	1,89368	1,89659	1,89950	108
109	1,90241	1,90532	1,90823	1,91114	1,91404	1,91695	109
110	1,91986	1,92277	1,92568	1,92859	1,93150	1,93441	**110**
111	1,93732	1,94023	1,94313	1,94604	1,94895	1,95186	111
112	1,95477	1,95768	1,96059	1,96350	1,96640	1,96931	112
113	1,97222	1,97513	1,97804	1,98095	1,98386	1,98676	113
114	1,98968	1,99258	1,99549	1,99840	2,00131	2,00422	114
115	2,00713	2,01004	2,01295	2,01586	2,01876	2,02167	115
116	2,02458	2,02749	2,03040	2,03331	2,03622	2,03913	116
117	2,04204	2,04494	2,04785	2,05076	2,05367	2,05658	117
118	2,05949	2,06240	2,06531	2,06822	2,07112	2,07403	118
119	2,07694	2,07985	2,08276	2,08567	2,08858	2,09149	119
120	2,09440	2,09730	2,10021	2,10312	2,10603	2,10894	**120**
121	2,11185	2,11476	2,11767	2,12057	2,12348	2,12639	121
122	2,12930	2,13221	2,13512	2,13803	2,14094	2,14385	122
123	2,14676	2,14966	2,15257	2,15548	2,15839	2,16130	123
124	2,16421	2,16712	2,17003	2,17293	2,17584	2,17875	124
125	2,18166	2,18457	2,18748	2,19039	2,19330	2,19621	125
126	2,19912	2,20202	2,20493	2,20784	2,21075	2,21366	126
127	2,21657	2,21948	2,22239	2,22529	2,22820	2,23111	127
128	2,23402	2,23693	2,23984	2,24275	2,24566	2,24857	128
129	2,25148	2,25438	2,25729	2,26020	2,26311	2,26602	129
130	2,26893	2,27184	2,27475	2,27765	2,28056	2,28347	**130**
131	2,28638	2,28929	2,29220	2,29511	2,29802	2,30093	131
132	2,30384	2,30674	2,30965	2,31256	2,31547	2,31838	132
133	2,32129	2,32420	2,32711	2,33001	2,33292	2,33583	133
134	2,33874	2,34165	2,34456	2,34747	2,35038	2,35329	134
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

für den Halbmesser 1.

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Grad
135	2,35619	2,35910	2,36201	2,36492	2,36783	2,37074	135
136	2,37365	2,37656	2,37947	2,38237	2,38528	2,38819	136
137	2,39110	2,39401	2,39692	2,39983	2,40274	2,40565	137
138	2,40855	2,41146	2,41437	2,41728	2,42019	2,42310	138
139	2,42601	2,42892	2,43183	2,43473	2,43764	2,44055	139
140	2,44346	2,44637	2,44928	2,45219	2,45510	2,45801	**140**
141	2,46091	2,46382	2,46673	2,46964	2,47255	2,47546	141
142	2,47837	2,48128	2,48419	2,48709	2,49000	2,49291	142
143	2,49582	2,49873	2,50164	2,50455	2,50746	2,51037	143
144	2,51327	2,51618	2,51909	2,52200	2,52491	2,52782	144
145	2,53073	2,53364	2,53654	2,53945	2,54236	2,54527	145
146	2,54818	2,55109	2,55400	2,55691	2,55982	2,56273	146
147	2,56563	2,56854	2,57145	2,57436	2,57727	2,58018	147
148	2,58309	2,58600	2,58890	2,59181	2,59472	2,59763	148
149	2,60054	2,60345	2,60636	2,60927	2,61218	2,61509	149
150	2,61799	2,62090	2,62381	2,62672	2,62963	2,63254	**150**
151	2,63545	2,63836	2,64126	2,64417	2,64708	2,64999	151
152	2,65290	2,65581	2,65872	2,66163	2,66454	2,66744	152
153	2,67035	2,67326	2,67617	2,67908	2,68199	2,68490	153
154	2,68781	2,69072	2,69362	2,69653	2,69944	2,70235	154
155	2,70526	2,70817	2,71108	2,71399	2,71690	2,71980	155
156	2,72271	2,72562	2,72853	2,73144	2,73435	2,73726	156
157	2,74017	2,74307	2,74598	2,74889	2,75180	2,75471	157
158	2,75762	2,76053	2,76344	2,76635	2,76926	2,77216	158
159	2,77507	2,77798	2,78089	2,78380	2,78671	2,78962	159
160	2,79253	2,79544	2,79834	2,80125	2,80416	2,80707	**160**
161	2,80998	2,81289	2,81580	2,81871	2,82162	2,82452	161
162	2,82743	2,83034	2,83325	2,83616	2,83907	2,84198	162
163	2,84489	2,84780	2,85070	2,85361	2,85652	2,85943	163
164	2,86234	2,86525	2,86816	2,87107	2,87398	2,87688	164
165	2,87980	2,88270	2,88561	2,88852	2,89143	2,89434	165
166	2,89725	2,90016	2,90306	2,90597	2,90888	2,91179	166
167	2,91470	2,91761	2,92052	2,92343	2,92634	2,92924	167
168	2,93215	2,93506	2,93797	2,94088	2,94379	2,94670	168
169	2,94961	2,95251	2,95542	2,95833	2,96124	2,96415	169
170	2,96706	2,96997	2,97288	2,97578	2,97870	2,98160	**170**
171	2,98451	2,98742	2,99033	2,99324	2,99615	2,99906	171
172	3,00197	3,00487	3,00778	3,01069	3,01360	3,01651	172
173	3,01942	3,02233	3,02524	3,02815	3,03106	3,03396	173
174	3,03687	3,03978	3,04269	3,04560	3,04851	3,05142	174
175	3,05433	3,05723	3,06014	3,06305	3,06596	3,06887	175
176	3,07178	3,07469	3,07760	3,08051	3,08341	3,08632	176
177	3,08923	3,09214	3,09505	3,09796	3,10087	3,10378	177
178	3,10669	3,10959	3,11250	3,11541	3,11832	3,12123	178
179	3,12414	3,12705	3,12996	3,13287	3,13577	3,13868	179
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	

H. Tafel zum Übergang aus der 90°-Teilung in die 100°-Teilung des Quadranten.

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,0000	0,1852	0,3704	0,5556	0,7407	0,9259	**0**
1	1,1111	1,2963	1,4815	1,6667	1,8519	2,0370	1
2	2,2222	2,4074	2,5926	2,7778	2,9630	3,1481	2
3	3,3333	3,5185	3,7037	3,8889	4,0741	4,2593	3
4	4,4444	4,6296	4,8148	5,0000	5,1852	5,3704	4
5	5,5556	5,7407	5,9259	6,1111	6,2963	6,4815	5
6	6,6667	6,8519	7,0370	7,2222	7,4074	7,5926	6
7	7,7778	7,9630	8,1481	8,3333	8,5185	8,7037	7
8	8,8889	9,0741	9,2593	9,4444	9,6296	9,8148	8
9	10,0000	10,1852	10,3704	10,5556	10,7407	10,9259	9
10	11,1111	11,2963	11,4815	11,6667	11,8519	12,0370	**10**
11	12,2222	12,4074	12,5926	12,7778	12,9630	13,1481	11
12	13,3333	13,5185	13,7037	13,8889	14,0741	14,2593	12
13	14,4444	14,6296	14,8148	15,0000	15,1852	15,3704	13
14	15,5556	15,7407	15,9259	16,1111	16,2963	16,4815	14
15	16,6667	16,8519	17,0370	17,2222	17,4074	17,5926	15
16	17,7778	17,9630	18,1481	18,3333	18,5185	18,7037	16
17	18,8889	19,0741	19,2593	19,4444	19,6296	19,8148	17
18	20,0000	20,1852	20,3704	20,5556	20,7407	20,9259	18
19	21,1111	21,2963	21,4815	21,6667	21,8519	22,0370	19
20	22,2222	22,4074	22,5926	22,7778	22,9630	23,1481	**20**
21	23,3333	23,5185	23,7037	23,8889	24,0741	24,2593	21
22	24,4444	24,6296	24,8148	25,0000	25,1852	25,3704	22
23	25,5556	25,7407	25,9259	26,1111	26,2963	26,4815	23
24	26,6667	26,8519	27,0370	27,2222	27,4074	27,5926	24
25	27,8778	27,9630	28,1481	28,3333	28,5185	28,7037	25
26	28,8889	29,0741	29,2593	29,4444	29,6296	29,8148	26
27	30,0000	30,1852	30,3704	30,5556	30,7407	30,9259	27
28	31,1111	31,2963	31,4815	31,6667	31,8519	32,0370	28
29	32,2222	32,4074	32,5926	32,7778	32,9630	33,1481	29
30	33,3333	33,5185	33,7037	33,8889	34,0741	34,2593	**30**
31	34,4444	34,6296	34,8148	35,0000	35,1852	35,3704	31
32	35,5556	35,7407	35,9259	36,1111	36,2963	36,4815	32
33	36,6667	36,8519	37,0370	37,2222	37,4074	37,5926	33
34	37,7778	37,9630	38,1481	38,3333	38,5185	38,7037	34
35	38,8889	39,0741	39,2593	39,4444	39,6296	39,8148	35
36	40,0000	40,1852	40,3704	40,5556	40,7407	40,9259	36
37	41,1111	41,2963	41,4815	41,6667	41,8519	42,0370	37
38	42,2222	42,4074	42,5926	42,7778	42,9630	43,1481	38
39	43,3333	43,5185	43,7037	43,8889	44,0741	44,2593	39
40	44,4444	44,6296	44,8148	45,0000	45,1852	45,3704	**40**
41	45,5556	45,7407	45,9259	46,1111	46,2963	46,4815	41
42	46,6667	46,8519	47,0370	47,2222	47,4074	47,5926	42
43	47,7778	47,9630	48,1481	48,3333	48,5185	48,7037	43
44	48,8889	49,0741	49,2593	49,4444	49,6296	49,8148	44
45	50,0000	50,1852	50,3704	50,5556	50,7407	50,9259	45

Zur Umrechnung eines Winkels $\alpha > 45^0$ in die 100°-Teilung suche den zu $\beta = \alpha - n\,45^0$ gehörigen Winkel dieser Teilung auf und zähle n 50 hinzu.

Digitized by Google

J. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\binom{n}{13}$	$\binom{n}{14}$	$\binom{n}{15}$
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

K. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1/2	0,57735	0,69336	1/7	0,37796	0,52276	1/8	0,35355	0,50000	4/9	0,66667	0,76314
2/3	0,81650	0,87358	2/7	0,53452	0,65863	3/8	0,61237	0,72112	5/9	0,74536	0,82207
3/4	0,50000	0,62996	3/7	0,65465	0,75395	5/8	0,79057	0,85499	7/9	0,88192	0,91964
3/4	0,86603	0,90856	4/7	0,75593	0,82983	7/8	0,93541	0,95647	1/12	0,28868	0,43679
1/6	0,40825	0,55032	5/7	0,84515	0,89390	1/9	0,33333	0,48075	5/12	0,64550	0,74690
5/6	0,91287	0,94104	6/7	0,92582	0,94991	2/9	0,47140	0,60571	7/12	0,76376	0,83555

L. Wichtige Zahlenwerte.

Gröfse	n	lg n	Gröfse	n	lg n	Gröfse	n	lg n
π	3,1415927	0,49715	$\pi^2 : 4$	2,4674011	0,39224	g	9,81	0,99167
2π	6,2831853	0,79818	$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64767	g^2	96,2361	1,98334
3π	9,4247780	0,97427	$\pi : \sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583
$\pi : 2$	1,5707963	0,19612	$2\sqrt{\pi}$	3,5449078	0,54960	$1 : 2g$	0,050968	0,70732 − 2
$\pi : 3$	1,0471976	0,02003	$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\pi : 4$	0,7853982	0,89509 − 1	$\sqrt{\pi : 2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
π^2	9,8696044	0,99430	$\sqrt{2 : \pi}$	0,797885	0,90194 − 1	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
π^3	31,006277	1,49145	$\sqrt{3 : \pi}$	0,977205	0,98998 − 1	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
$1 : \pi$	0,318310	0,50285 − 1	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,26606	$\pi : \sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$1 : \pi^2$	0,101321	0,00570 − 1	$\sqrt[3]{\pi : 2}$	1,162447	0,06537	$\pi : \sqrt{2g}$	0,709252	0,85080 − 1
$1 : \pi^3$	0,032252	0,50856 − 2	$\sqrt[3]{\pi : 4}$	0,922635	0,96503 − 1	e	2,718282	0,43420
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24857	$\sqrt[3]{2 : \pi}$	0,860254	0,93463 − 1	e^2	7,389056	0,86850
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	0,16572	$\sqrt[3]{3 : \pi}$	0,984745	0,99332 − 1	$1 : e$	0,367879	0,56571 − 1
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572				$1 : e^2$	0,135335	0,13141 − 1
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287				$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
$4\pi^2$	39,478418	1,59636				$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476

Digitized by Google

Anmerkungen zu den vorstehenden Tafeln.

Um ln, Num. ln, lg, Num. lg, die Werte der Kreisfunktionen, den Winkel für eine Kreisfunktion, Bogen- und Sehnenlänge für einen gegebenen Winkel oder den Winkel für eine gegebene Bogen- oder Sehnenlänge von Zahlen zu erhalten, die zwischen zwei Tafelwerten liegen, beachte man, daſs für kleine Zunahmen der gegebenen Gröſse die Zunahmen der gesuchten Gröſse den Zunahmen der gegebenen proportional genommen werden dürfen; z. B.:

1) Gesucht ln 289,5.

ln 289 = 5,666 43, ln 290 = 5,669 88; Unterschied = 0,003 45 entsprechend einer Zunahme des Num. um 1,0; Zunahme von ln für 0,1 0,000 345, also für 0,5 0,000 345 . 5 = 0,001 73; mithin ln 289,5 = 5,666 43 + 0,001 73 = 5,668 16.

2) Gesucht tg 58° 47′ 22,5″.

58° 47′ 22,5″ = 58° 47,375′; tg 58° 40′ = 1,64 256; tg 58° 50′ = 1,653 37; Unterschied = 0,010 81 = Zunahme von tg für 10′; für 1′ der 10te Teil, für 7,375′ Zunahme (0,010 81 : 10) . 7,375 = 0,007 97. Mithin tg 58° 47′ 22,5″ = 1,650 53.

3) Gesucht der Winkel, dessen Sinus gleich 0,636 62 ist (arc sin 0,636 62 = ?).

Der nächst niedrigere Tafelwert ist 0,636 08; arc sin 0,636 08 = 39° 30′; der nächst höhere Tafelwert ist 0,638 32 = 39° 40′, Unterschied 0,638 32 − 0,636 08 = 0,002 24; dem entsprechen 10′; Unterschied zwischen dem gegebenen Wert und dem nächst niedrigeren Tafelwert ist 0,636 62 − 0,636 08 = 0,000 54. Diesem Unterschied entsprechen dann (10 : 0,002 24) · 0,000 54 = 2,4107′. Mithin ergibt sich

$$\text{arc sin } 0{,}636\,62 = 39^\circ 30' + 2{,}4107' = 39^\circ 32{,}4107' = 39^\circ 32' 24{,}64''.$$

Für das Aufsuchen der Quadrat- und Kubikwurzeln nicht in der Tafel enthaltener Zahlen wende man die Formeln b. 11 und 12 S. 46 an (Näherungsverfahren).

Gesucht die Kreisfläche vom Durchmesser 1,784. Der Halbmesser 0,892 liefert $F_1 = 0{,}624\,913$ (S. 19); mithin ist die gesuchte Fläche $= 4\,F_1 = 4 \cdot 0{,}624\,913 = 2{,}499\,652$.

ln 2,738 = ln 273,8 − ln 100 = 5,612 40 − 4,605 17 = 1,007 23.

ln 2895 = ln 289,5 + ln 10 = 5,668 16 + 2,302 59 = 7,970 75.

Num. ln 1,062 99 = [Num. ln (1,062 99 + ln 100)] : 100
= [Num. ln (1,062 99 + 4,605 17)] : 100
= [Num. ln 5,668 16] : 100 = 289,5 : 100 = 2,895.

Anmerkungen zu den Tafeln der Hyperbelfunktionen (D).

1) Beispiele: Sin 1,34 = 1,7786. Sin 3,37 = 14,5221. Cof 0,65 = 1,2188. Cof 2,66 = 7,1831. lg Sin 4,52 = 11,6619 − 10 = 1,6619. lg Tg 0,17 = 9,2263 − 10.

2) Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert: $\operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Cof}\varphi = {}^1/_2\, e^{\varphi}$, u. zw. von $\varphi = 5{,}09$ bis 6,908 auf 1 Dezimale, von $\varphi = 6{,}908$ bis 9,210 auf 2 Dezimalen genau.

3) Für Werte von $\varphi = 2{,}39$ aufwärts nähert sich $\operatorname{Tg}\varphi$ mehr und mehr dem Werte 1.

4) Für kleine Werte von φ ist angenähert:

$$\lg \operatorname{Sin}\varphi = \lg\varphi + {}^1/_3 \lg \operatorname{Cof}\varphi; \quad \lg \operatorname{Tg}\varphi = \lg\varphi - {}^1/_3 \lg \operatorname{Cof}\varphi.$$

5) Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert:

$$\lg \operatorname{Sin}\varphi = \lg \operatorname{Cof}\varphi = 0{,}434\,29\,\varphi + 0{,}698\,97 - 1 \quad \text{und}$$
$$\varphi = 2{,}302\,59\,(\lg \operatorname{Sin}\varphi + 0{,}301\,03),$$

wobei lg 0,434 29 = 0,637 78 − 1 und lg 2,302 59 = 0,362 22.

6) Die Werte von lg Tg φ und lg Ctg φ ergeben sich auch (nach S. 32 u. 33) aus $\lg \operatorname{Tg}\varphi = \lg \operatorname{Sin}\varphi - \lg \operatorname{Cof}\varphi\,(-10)$; $\lg \operatorname{Ctg}\varphi = \lg \operatorname{Cof}\varphi - \lg \operatorname{Sin}\varphi\,(+10)$.

7) Die Summe der Tafelwerte von Cof φ und Sin φ für dasselbe φ ergibt den Wert e^{φ}, der Unterschied ergibt $e^{-\varphi}$; also $\operatorname{Cof}\varphi \pm \operatorname{Sin}\varphi = e^{\pm\varphi}$.

Digitized by Google

II Arithmetik.

A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

a. Potenzen.

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n}$
6. $a^m b^m = (ab)^m$
7. $a^m : b^m = (a:b)^m$
8. $1 : a^m = (1:a)^m = a^{-m}$
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
10. $a^0 = 1$; $0^a = 0$; $0^0 =$ unbestimmt (vgl. S. 68)
11. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
12. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
13. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
14. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
15. $$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$
16. $$\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + b^{2n}$$
17. $$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a+b} = a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots - b^{2n-1}$$
18. Wenn $a > 1$, so ist für $n = \infty$ $\lim a^n = \infty$ und $\lim \frac{1}{a^n} = 0$.

Binomischer Satz.

19. $$(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots$$

Die Reihe rechts ist endlich, wenn n eine ganze, positive Zahl; sie ist unendlich, wenn n gebrochen oder negativ ist; sie ist konvergent für $a > b$.

Die Koeffizienten der Potenzen heißen **Binomialkoeffizienten** *) Man schreibt kürzer

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} = \binom{n}{p} \text{ oder } (n)_p.$$

Lesart: n Zeiger p oder: n tief p, oder n über p.
Der Nenner $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p$ heißt „p **Fakultät**" $= p!$. Es ist $0! = 1$.

*) Tafel der Binomialkoeffizienten S. 43.

Regeln über Binomialkoeffizienten.

Wenn n (die Grundzahl) und p (der Zeiger) ganze, positive Zahlen sind, so ist

20. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ 21. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ 22. $\binom{n}{1} = n$

23. $\binom{n}{n+p} = 0$ 24. $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}$

25. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$

26. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p}$.

Anwendungen des binomischen Satzes.

Für beliebige Werte von n ist, wenn $-1 < x < +1$:

27. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \binom{n}{5} x^5 + \ldots$

28. $\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6 \mp x^7 + \cdots$

29. $\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3$
$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5 - \cdots$

30. $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots$

b. Wurzeln.

1. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$ 2. $\sqrt[m]{a\,b} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$

3. $\sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$ 4. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}$

5. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$ 6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

7. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{a\,b}}$

8. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$ 9. $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{x}$

10. $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}} = \sqrt[n]{i\sqrt{a}}$, also imaginär (S. 47).

11. $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$, } (angenähert,

12. $\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2}$, } wenn b gegen a sehr klein ist).

13. $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\,a + 0{,}398\,b$ (angenähert), wenn $a > b$. Der Fehler ist kleiner als 4 vH des wirklichen Wertes.

Genauer ist (nach Schlömilch) $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}9938\,a + 0{,}0703\,b + 0{,}3567\,\frac{b^2}{a}$.

gitized by Google

14. $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 0{,}939\,a + 0{,}389\,b + 0{,}297\,c$ (angenähert), wenn $a > b > c$. Der Fehler ist kleiner als 6 vH des wirklichen Wertes.

Imaginäre Größen.

15. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $\frac{1}{i} = -i$;

16. $i^{4n+m} = i^m$, also $i^{4n} = +1$; $i^{4n+1} = +i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

17. Jede komplexe Größe, d. i. jeder aus reellen und imaginären Größen zusammengesetzte Ausdruck, läßt sich auf die Form $a \pm bi$ bringen, in der a und b reelle Werte sind.

18. Wenn $a + bi = 0$, so ist $a = 0$, $b = 0$.
Wenn $a + bi = \alpha + \beta i$, so ist $a = \alpha$, $b = \beta$.

19. $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$; $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,i$

20. $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

21. Jede komplexe Größe läßt sich auf die Normalform bringen:
$$a \pm bi = r\,[\cos(\varphi + 2k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2k\pi)];$$
dabei ist $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ der Modul, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$,
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad k \text{ eine ganze Zahl.}$$

22. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$, } wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet (S. 48).

23. $1 : (\cos x + i \sin x) = \cos x - i \sin x$

24. $(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y)$

25. $(\cos x \pm i \sin x) : (\cos y \pm i \sin y) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y)$

26. **Moivrescher Satz.** (Gültig für beliebige Werte von n)
$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$$

27. $\sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi} = 2\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} = u$

Für $n = 3$ ist $u_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $u_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$,
$u_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$. r, φ und k s. Formel 21.

28. **Wurzeln der Einheit.**
$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$
$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$
} wo k eine ganze, positive Zahl zwischen 0 und $n-1$ ist.

c. Logarithmen.

1. Ist $\overset{b}{\lg} a = c$, so ist $b^c = a$.

Für $b > 1$ ist $\overset{b}{\lg} 0 = -\infty$; $\overset{b}{\lg} 1 = 0$; $\overset{b}{\lg} b = 1$; $\overset{b}{\lg} \infty = \infty$

2. $\overset{b}{\lg}(ac) = \overset{b}{\lg} a + \overset{b}{\lg} c$

3. $\overset{b}{\lg} \frac{a}{c} = \overset{b}{\lg} a - \overset{b}{\lg} c$

4. $\overset{b}{\lg}(a^n) = n \overset{b}{\lg} a$

5. $\overset{b}{\lg} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \overset{b}{\lg} a$

6. $\overset{b}{\lg} x = \overset{a}{\lg} x \cdot \overset{b}{\lg} a = \overset{a}{\lg} x : \overset{a}{\lg} b.$

7. Die Logarithmen für die Grundzahl $e = 2{,}718281828459 \ldots$ heifsen natürliche, die für die Grundzahl 10 dagegen Briggssche Logarithmen. Man schreibt statt $\overset{e}{\lg} a$ kürzer $\ln a$, statt $\overset{10}{\lg} a$ kürzer $\lg a$.

8. Es ist $\lg(10^n) = n$; $\lg(10^{-n}) = -n$; $\lg(a \cdot 10^n) = \lg a + n$; $\lg(a : 10^n) = \lg a - n$. Ferner $\ln(e^{\pm n}) = \pm n$; $\ln(a \cdot 10^n) = \ln a + \ln(10^n)$; $\ln(a : 10^n) = \ln a - \ln(10^n)$.

9. Die (positiven oder negativen) ganzen Einheiten eines Logarithmus nennt man die Charakteristik oder Kennziffer (K) und den echten Dezimalbruch die Mantisse (M) des Logarithmus. Für $10 > a > 1$ hat $\lg a$ die Kennziffer $K = 0$.

10. $\left.\begin{array}{l} \ln x = \ln 10 \lg x = 2{,}302585093 \lg x \\ \lg x = \lg e \ln x = 0{,}434294481 9 \ln x \end{array}\right\} \ln 10 \lg e = 1$

11. $\ln i = i \frac{\pi}{2}$

12. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}20788.$

B. Kombinationslehre.

1. Die Anzahl der möglichen **Permutationen** von n ungleichen Elementen beträgt $n!$ (n Fakultät.)

Befinden sich unter den n Elementen p gleiche einer Art, q gleiche einer anderen Art, r gleiche einer dritten Art usw., so ist die Anzahl der möglichen Permutationen $P = \frac{n!}{p!\,q!\,r! \ldots}$.

2. Die Anzahl der möglichen **Kombinationen** von n Elementen zur r^{ten} Klasse (d. h. zu je r Elementen) beträgt:

a) $\binom{n}{r}$ ohne Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element nur einmal enthält,

b) $\binom{n+r-1}{r}$ mit Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element r mal enthält.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen Kombinationen von n ungleichen Elementen ohne Wiederholung ist

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Digitized by Google

3. Die Anzahl der möglichen **Variationen** von n Elementen zur r^{ten} Klasse beträgt:

a) $\binom{n}{r} \cdot r!$ ohne Wiederholung (entsprechend wie unter 2a),

b) n^r mit Wiederholung (entsprechend wie unter 2b).

Man erhält die Variationen aus den Kombinationen, indem man die einzelnen Gruppen der letzteren permutiert.

C. Determinanten.

1. Eine Determinante von n Zeilen (wagerechten Reihen) und n Kolonnen (senkrechten Reihen) (n^2 Elementen) heißt vom n^{ten} Grade.

2. Die allgemeine Form der Determinante n^{ten} Grades ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \ldots . p_1 \\ a_2 b_2 c_2 \ldots . p_2 \\ a_3 b_3 c_3 \ldots . p_3 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n b_n c_n \ldots . p_n \end{vmatrix} = \Sigma (\pm a_1 b_2 c_3 \ldots . p_n),$$

wenn $a_1, b_1, \ldots . p_n$ n^2 Elemente bedeuten.

Die Determinante ist eine Summe von $n!$ Gliedern, welche, abgesehen vom Vorzeichen, aus der Diagonalreihe $a_1, b_2\ c_3 \ldots p_n$ durch Permutation (S. 48) der Zeiger entstehen. Die so entstehenden $n!$ Glieder sind zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ, u. zw. hat ein bestimmtes Glied das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Zahl der Umkehrungen (Inversionen) unter seinen Zeigern gerade oder ungerade ist.

Folgt in einer Permutation ein niedrigeres Element einem höheren, so bilden diese beiden Elemente eine Umkehrung (Inversion).

3. Eine Determinante vom n^{ten} Grade kann man berechnen, indem man sie in n Unterdeterminanten vom $(n-1)^{ten}$ Grade zerlegt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1);$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminante zum Element a_p wird erhalten, indem man in der ursprünglichen Determinante die Kolonne a und die p^{te} Zeile streicht. Sie ist mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu versehen, je nachdem der Zeiger ungerade oder gerade ist.

4. In einer Determinante kann man die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Kolonnen miteinander, so ist die neue Determinante gleich der ersten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

6. Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Kolonnen einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich null, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & n a_1 & b_1 \\ a_2 & n a_2 & b_2 \\ a_3 & n a_3 & b_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl geteilt, indem man alle Elemente einer Zeile oder einer Kolonne mit der Zahl multipliziert oder durch sie teilt, z. B.

$$p \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 & p b_1 & p c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 & b_1 & c_1 \\ p a_2 & b_2 & c_2 \\ p a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Sind die Elemente einer Zeile oder Kolonne Summen von gleicher Gliederzahl, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Teilreihen einsetzt.

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 + q_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + p_2 + q_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + p_3 + q_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 b_1 c_1 \\ p_2 b_2 c_2 \\ p_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 b_1 c_1 \\ q_2 b_2 c_2 \\ q_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile oder einer Kolonne die mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Elemente einer parallelen Zeile oder Kolonne zuzählt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + p b_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + p b_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + p b_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

D. Gleichungen.

a. Gleichungen ersten Grades.

1. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\left.\begin{aligned} a x + b y &= c \\ a_1 x + b_1 y &= c_1 \end{aligned}\right\} \quad x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b}$$

$$y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}.$$

2. Zwei homogene Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \end{aligned}$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = (b c_1 - b_1 c) : (c a_1 - c_1 a) : (a b_1 - a_1 b).$$

Digitized by Google

3. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned}$$

Setzt man $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D$, so ist

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \qquad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \qquad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} : D.$$

Ueber die arithmetische Bedeutung der Determinanten S. 49 u. f.

4. n Gleichungen mit n Unbekannten.

1. **Lösung mittels Determinanten,** entsprechend wie unter **3.**

2. **Eliminationsverfahren.** Man entfernt eine und dieselbe Unbekannte aus den gegebenen n Gleichungen, indem man $(n-1)$ mal je zwei der n Gleichungen vereinigt. Aus den so entstandenen $(n-1)$ neuen Gleichungen eliminiert man in gleicher Weise eine zweite Unbekannte usw., bis eine Gleichung mit einer (der n^{ten}) Unbekannten übrig bleibt, aus der sich diese n^{te} Unbekannte ergibt. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in eine der beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält man die $(n-1)^{\text{te}}$ Unbekannte usw., so daſs sich der Reihe nach auch die übrigen Unbekannten ergeben.

Beispiel:

	Faktoren.		
$2x - y + 3z + 5u = 29$	3	1	2
$5x + 2y - 2z + 3u = 15$	−5		
$3x - 4y + 7z - u = 12$		5	
$4x + 3y - 5z + 2u = 3$			−5
$-19x - 13y + 19z = 12$	−2	−31	
$17x - 21y + 38z = 89$	1		
$-16x - 17y + 31z = 43$		19	
$55x + 5y = 65$	16		
$285x + 80y = 445$	−1		

$595x = 595;$ $x = 1.$

$5y = 65 - 55x = 65 - 55 = 10;$ $y = 2.$

$19z = 12 + 19x + 13y = 12 + 19 + 26 = 57;$ $z = 3.$

$2u = 3 - 4x - 3y + 5z = 3 - 4 - 6 + 15 = 8;$ $u = 4.$

b. Gleichungen zweiten Grades.

1. Algebraische Auflösung.

1. $x^2 + px + q = 0 \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Ist $x_1 + x_2 = s$, $x_1 x_2 = p$, so sind x_1 und x_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - sx + p = 0.$$

2. Goniometrische Auflösung. (Zur Anwendung ununterbrochener logarithmischer Rechnung bei vielstelligen Zahlen.)

1. Fall. $x^2 \pm px - q = 0$ p und q positiv.

Man bestimme einen Winkel φ zwischen 0° und 90° so, dafs $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2 p}$; dann sind die Wurzeln

$$x_1 = \pm\sqrt{q}\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi, \qquad x_2 = \mp\frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi}.$$

2. Fall. $x^3 \pm px + q = 0$ p und q positiv.

Nach Berechnung des im ersten Quadranten liegenden Winkels φ aus $\sin\varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2 p}$ bestimmt man die Wurzeln mittels der Formeln

$$x_1 = \mp\sqrt{q}\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi, \qquad x_2 = \mp\frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi}.$$

Findet sich $\sin\varphi > 1$, so sind die Wurzeln imaginär, nämlich

$$x = \sqrt{q}(\cos\psi \pm i\sin\psi),$$

worin $\cos\psi = \mp\frac{{}^1/_2 p}{\sqrt{q}}$ (ψ zwischen 0° und 180°).

c. Gleichungen dritten Grades.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Setzt man $z = x - {}^1/_3 a$,

so entsteht eine reduzierte kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + px + q = 0.$$

1. Algebraische Auflösung. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

sind nach der Cardanischen Formel

$$x_1 = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

$$x_2 = w_1\sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + w_2\sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

$$x_3 = w_2\sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + w_1\sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

worin w_1 und w_2 die beiden imaginären Wurzeln von $\sqrt[3]{1}$ bezeichnen, nämlich

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ist $({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3 < 0$, so erscheinen alle drei Wurzeln in imaginärer Form, obgleich sie reell sind. Es ist dann die goniometrische Auflösung anzuwenden (S. 53, 3. Fall).

2. Auflösung mittels Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. Fall. $x^3 + px \pm q = 0$; p und q positiv. Man berechnet die Hülfsgröfse φ aus $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{{}^1/_2 q}{{}^1/_3 p\sqrt{{}^1/_3 p}}$; die Wurzeln sind dann

$$x_1 = \mp 2\sqrt{{}^1/_3 p}\operatorname{Sin}{}^1/_2\varphi, \quad x_2 = \pm\sqrt{{}^1/_3 p}\operatorname{Sin}{}^1/_2\varphi + i\sqrt{p}\operatorname{Cof}{}^1/_2\varphi,$$

$$x_3 = \pm\sqrt{{}^1/_3 p}\operatorname{Sin}{}^1/_2\varphi - i\sqrt{p}\operatorname{Cof}{}^1/_2\varphi.$$

Digitized by Google

2. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv, $(\frac{1}{3}p)^3 < (\frac{1}{2}q)^2$.

Man bestimmt φ aus $\mathfrak{Cof}\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$; die Wurzeln sind dann

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi, \qquad x_2 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi + i\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\mathfrak{Cof}\,\tfrac{1}{3}\varphi - i\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}\varphi.$$

3. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv; $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$.

Man bestimmt den Winkel φ aus $\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$; dann ist

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\tfrac{1}{3}\varphi, \qquad x_2 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$x_3 = \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi).$$

4. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv; $(\frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{2}q)^2$.

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \qquad x_2 = x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

d. Höhere algebraische und transzendente Gleichungen.

Man bestimme durch Versuche oder Zeichnung Näherungswerte für die Wurzeln; genügt deren Genauigkeit nicht, so kann sie durch eines der Annäherungsverfahren erhöht werden.

1. Bestimmung von Näherungswerten.

α) Durch Versuche.

Wird $y = f(x)$ für $x = p$ positiv und für $x = q$ negativ, so liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln, also mindestens eine zwischen p und q.

β) Durch Zeichnung.

Ist $f(x) = 0$ die aufzulösende Gleichung, so zeichnet man (etwa mittels Berechnung der Koordinaten einiger Punkte) die Kurve zur Gleichung $y = f(x)$; die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Wurzeln der Gleichung. Oft ist es besser, der aufzulösenden Gleichung die Form $f_1(x) = f_2(x)$ zu geben und die beiden Kurven

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

zu zeichnen, deren gegenseitige Schnittpunkte durch ihre Abszissen die gesuchten Wurzeln liefern.

2. Annäherungsverfahren.

Ist a ein Näherungswert einer Wurzel von $f(x) = 0$, so berechnet man die Verbesserung δ aus

$$\delta = -f(a)\,\frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)},$$

wo a_1 einen von a wenig verschiedenen Wert bezeichnet; oder nach dem **Newtonschen Verfahren** aus $\delta = -\frac{f(a)}{f'(a)}$,

unter $f'(a)$ die erste nach a genommene Ableitung von $f(a)$ verstanden, oder nach dem **Verfahren der Proportionalteile** aus

$$\delta = -\frac{f(a)}{P},$$

wo P (Proportionalteil) die in Einheiten irgend einer Dezimale ausgedrückte Aenderung von $f(a)$ bei der Zunahme von a um eine Einheit jener Dezimale bedeutet.*) Ist der angenäherte Wert $(a+\delta)$ noch nicht genau genug, so berechnet man eine neue Annäherung, indem man in die vorstehenden Formeln $(a+\delta)$ statt a einsetzt, usw.

E. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Der Wert K_n eines Kapitals K nach n Jahren beträgt bei einem Zinsfufse von k Prozent:

a) bei **jährlichen** Zinseszinsen $K_n = K p^n$, worin $p = 1 + \frac{k}{100} = \frac{100+k}{100}$ der jährliche Diskontfaktor genannt wird;

b) bei **halbjährlichen** Zinseszinsen $K_n = K q^{2n}$ worin $q = 1 + \frac{k}{2.100} = \frac{200+k}{200}$ der halbjährliche Diskontfaktor genannt wird;

c) bei **stetigen** Zinseszinsen (wobei die Zinsen in jedem Augenblicke zum Kapital geschlagen werden)

$$K_n = K e^{\frac{kn}{100}}; \quad (e \text{ S. 43 u. 48}).$$

Für **jährliche** Zinseszinsen gelten ferner folgende Regeln:

2. Legt man am Anfang jedes Jahres eine Summe R zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des n^{ten} Jahres einschliefslich der alsdann fälligen Zinsen $K_n = R \frac{p(p^n-1)}{p-1}$.

3. Legt man am Ende jedes Jahres die Summe R zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des n^{ten} Jahres

$$K_n = R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Die jährliche **Abschreibungssumme** eines nach n Jahren erlöschenden Wertes (z. B. eines Konzessionsrechtes) beträgt mithin in Prozenten:

$$100 \frac{R}{K_n} = 100 \frac{p-1}{p^n - 1}.$$

Abschreibungssumme.

Zinsfuss k vH	Der Wert erlischt in Jahren: 5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	75	80	90	100
3,0	18,836	8,723	5,376	3,722	2,742	2,101	1,653	1,326	1,078	0,886	0,613	0,433	0,367	0,311	0,225	0,164
3,25	18,741	8,623	5,278	3,627	2,653	2,018	1,575	1,252	1,010	0,823	0,558	0,387	0,324	0,272	0,193	0,138
3,5	18,648	8,524	5,183	3,536	2,567	1,937	1,499	1,183	0,945	0,763	0,508	0,346	0,286	0,238	0,166	0,115
3,75	18,555	8,426	5,087	3,446	2,483	1,858	1,427	1,115	0,884	0,707	0,462	0,308	0,253	0,208	0,141	0,096
4,0	18,462	8,329	4,994	3,358	2,401	1,783	1,357	1,052	0,826	0,655	0,420	0,274	0,222	0,181	0,120	0,081
4,25	18,370	8,233	4,902	3,272	2,321	1,709	1,290	0,991	0,771	0,606	0,381	0,243	0,196	0,157	0,102	0,067
4,5	18,279	8,137	4,811	3,187	2,243	1,639	1,227	0,934	0,720	0,560	0,345	0,216	0,172	0,137	0,087	0,055
5,0	18,097	7,950	4,634	3,024	2,095	1,505	1,107	0,827	0,626	0,477	0,282	0,169	0,132	0,102	0,062	0,038
5,5	17,917	7,766	4,462	2,868	1,954	1,380	0,997	0,732	0,543	0,406	0,230	0,132	0,101	0,076	0,044	0,026
6,0	17,739	7,586	4,296	2,718	1,822	1,264	0,897	0,646	0,470	0,344	0,187	0,103	0,076	0,057	0,031	0,017

*) Bei der Berechnung von $f(a)$ mittels Logarithmen- oder anderer Tafeln ergibt sich P nebenher, Z. f. Math. u. Physik, Bd. 36 S. 158 f.

Digitized by Google

4. Wird das Kapital K am Ende jedes Jahres um die gleiche Summe R vermehrt oder vermindert, so beträgt sein Wert nach n Jahren $K_n = Kp^n \pm R\,\frac{p^n-1}{p-1}$.

5. Das Kapital K wird unter denselben Bedingungen einem anderen Kapital K_1 gleich geworden sein nach

$$n = \frac{\lg[(p-1)K_1 \pm R] - \lg[(p-1)K \pm R]}{\lg p} \text{ Jahren.}$$

6. Wenn die jährlich fortgenommene Summe R (Rente) größer ist als die jährlichen Zinsen des Kapitals K, wird das Kapital aufgezehrt sein nach $n = \frac{\lg R - \lg[R-(p-1)K]}{\lg p}$ Jahren.

7. Soll eine Rente R für die folgenden n Jahre gekauft werden, so hat man dafür heute ein Kapital zu zahlen

$$K = R\,\frac{p^n-1}{p^n(p-1)}\,\mathcal{M}.$$

8. Die Rente, die ein Kapital K für den Zeitraum von n Jahren abzuwerfen vermag, beträgt $R = \frac{Kp^n(p-1)}{p^n-1}\,\mathcal{M}$.

F. Reihen.

Binomische Reihen S. 45 und 46.

a. Arithmetische Reihen.

Für die arithmetische Reihe $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots a+(n-1)d$ ist das n^{te} Glied

$$u = a + (n-1)d$$

und die Summe der n ersten Glieder

$$S = \tfrac{1}{2}(a+u)n = [a + \tfrac{1}{2}(n-1)d]\,n.$$

Höhere arithmetische Reihen.

Ist $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ eine höhere arithmetische Reihe,

$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \ldots \Delta a_{n-1}$ ihre erste,

$\Delta_2 a_1, \Delta_2 a_2, \ldots \Delta_2 a_{n-2}$ ihre zweite Differenzenreihe usw.,

ist also $\Delta a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta a_2 = a_3 - a_2$, $\Delta_2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$ usw., so ist das n^{te} Glied der Hauptreihe

$$a_n = a_1 + (n-1)\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta_2 a_1 + \binom{n-1}{3}\Delta_3 a_1 + \ldots$$

und die Summe der n ersten Glieder

$$\Sigma a_n = n a_1 + \binom{n}{2}\Delta a_1 + \binom{n}{3}\Delta_2 a_1 + \binom{n}{4}\Delta_3 a_1 + \ldots$$

(Ueber Binomialkoeffizienten S. 43 und 45.)

Ist eine höhere arithmetische Reihe von der k^{ten} Ordnung, so schliefst sowohl die Formel für a_n als auch für Σ_n mit dem Gliede ab, welches $\Delta_k a_1$ enthält.

Eine Reihe von n Gliedern kann höchstens von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sein, in welchem Falle vorstehende Formeln mit dem Gliede $\Delta_{n-1} a_1$ schliefsen.

Digitized by Google

b. Geometrische Reihen.

Für die geometrische Reihe a, aq, aq^2, ... aq^{n-1} ist das n^{te} Glied $u = aq^{n-1}$ und die Summe der n ersten Glieder

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qu - a}{q - 1}.$$

Ist $n = \infty$ und q ein positiver oder negativer echter Bruch, so wird $S = \frac{a}{1 - q}$.

c. Einige besondere Reihen.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$
3. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \cdots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$
4. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
7. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$

d. Exponential- und logarithmische Reihen.

1. $e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ (Wert von e S. 43 u. 48)
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots; \quad -\infty < x < +\infty$
3. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \cdots; -\infty < x < +\infty$
4. $\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \cdots; \quad -1 < x < +1$
5. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots\right); \quad -1 < x < +1$
6. $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right); -1 > x$ oder $x > +1$
7. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \cdots\right]$, wobei $0 < x < +\infty$
8. $\ln(a+x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots\right]$, wobei $0 < a < +\infty$ und $-a < x < +\infty$.

Digitized by Google

e. Reihen für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen.

In den Formeln 1. bis 4. ist $x = \frac{\pi\varphi}{180}$, wenn φ der Zentriwinkel in Grad ist.

1. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots; \quad -\infty < x < +\infty$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots; \quad -\infty < x < +\infty$

3. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3\cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2\cdot 5\cdot 7} + \frac{62x^9}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots; \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2\cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \frac{x^7}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} - \cdots; \quad -\pi < x < +\pi$

5. $\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots; \quad -1 \leqq x \leqq +1$

6. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots; \quad -1 \leqq x \leqq +1$

7. $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

III. Kreis- und Hyperbelfunktionen.

A. Kreisfunktionen.

(Tafeln der Kreisfunktionen S. 26 bis 29).

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60
sin =	0	+1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos =	+1	0	−1	0	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg =	0	∞	0	∞	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg =	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Ist α ein Winkel $< 90°$, so ist, vorausgesetzt dafs:

Funktion	Winkel φ liegt zwischen				Winkel φ in Grad = ..			
	0° u. 90°	90° u. 180°	180° u. 270°	270° u. 360°	$\pm\alpha$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$
sin φ =	+	+	−	−	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
cos φ =	+	−	−	+	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
tg φ =	+	−	+	−	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$
ctg φ =	+	−	+	−	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(45° \pm \alpha) = \cos(45° \mp \alpha)$; $\quad \operatorname{tg}(45° \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(45° \mp \alpha)$.

Digitized by Google

a. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

4. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ 5. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

6. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

7. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$

b. Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta] : [1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta]$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1] : [\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha]$

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin{}^1\!/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1\!/_2(\alpha-\beta)$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos{}^1\!/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos{}^1\!/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1\!/_2(\alpha-\beta)$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin{}^1\!/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1\!/_2(\alpha-\beta)$

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 10. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
12. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

13. $\sin\alpha\sin\beta = {}^1\!/_2\cos(\alpha-\beta) - {}^1\!/_2\cos(\alpha+\beta)$
14. $\cos\alpha\cos\beta = {}^1\!/_2\cos(\alpha-\beta) + {}^1\!/_2\cos(\alpha+\beta)$
15. $\sin\alpha\cos\beta = {}^1\!/_2\sin(\alpha+\beta) + {}^1\!/_2\sin(\alpha-\beta)$
16. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$
17. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$

c. Formeln für die Vielfachen und Teile eines Winkels.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \sin\alpha = 2\sin{}^1\!/_2\alpha\cos{}^1\!/_2\alpha$
2. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$
3. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Digitized by Google

4. $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$

5. $\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$

6. $\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$

7. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

8. $\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

9. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$

10. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha}$

11. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\qquad$ 12. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

13. $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$ $\qquad$ 14. $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$

15. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \pm\sqrt{1\pm\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \tfrac{1}{4}\pi)$

d. Potenzen von Sinus und Cosinus.

1. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ $\qquad$ 2. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$
3. $4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha$ $\qquad$ 4. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$
5. Wenn n eine ungerade Zahl:

$$\sin^n\alpha = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\left[\sin n\alpha - \binom{n}{1}\sin(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\sin(n-4)\alpha - \binom{n}{3}\sin(n-6)\alpha + \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\binom{n}{\frac{n-3}{2}}\sin 3\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha\right]$$

6. Wenn n eine gerade Zahl:

$$\sin^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}i^n}\left[\cos n\alpha - \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}}\binom{n}{\frac{n-4}{2}}\cos 4\alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{\frac{n-2}{n}}\cos 2\alpha\right] + (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2^n i^n}\right)$$

7. Wenn n eine ungerade Zahl:

$$\cos^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos n\alpha + \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha + \binom{n}{3}\cos(n-6)\alpha + \ldots + \left(\frac{n}{\frac{n-3}{2}}\right)\cos 3\alpha + \left(\frac{n}{\frac{n-1}{2}}\right)\cos\alpha\right]$$

8. Wenn n eine gerade Zahl:

$$\cos^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos n\alpha + \binom{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2}\cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots + \left(\frac{n}{\frac{n-4}{2}}\right)\cos 4\alpha + \left(\frac{n}{\frac{n-2}{2}}\right)\cos 2\alpha\right] + \left(\frac{n}{\frac{n}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(Ueber Binomialkoeffizienten S. 43 u. 45; über i S. 47.)

e. Formeln für die Arcus der verschiedenen Funktionen.

1. $\arcsin u = \arccos\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos u$

2. $\arccos u = \arcsin\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{\pi}{2} - \arcsin u$

3. $\operatorname{arc\,tg} u = \arcsin\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{u}$
$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arccos\frac{1-u^2}{1+u^2}$

4. $\arcsin u \pm \arcsin v = \arcsin\left(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}\right)$
$= \arccos\left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp uv\right)$

5. $\arccos u \pm \arccos v = \arcsin\left(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}\right)$
$= \arccos\left(uv \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\right)$

6. $\operatorname{arc\,tg} u \pm \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\frac{u \pm v}{1 \mp uv}$. (Weiteres S. 65.)

f. Beziehungen zwischen den drei Winkeln $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + 1$
3. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
4. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma - 1$
5. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$
6. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

Digitized by Google

8. $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma$

9. $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = 1$

10. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

11. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$

B. Ebene Dreiecke.

Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks S. 129.

Es seien a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die den Seiten gegenüberliegenden Winkel,
ϱ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises,
r der Halbmesser des umschriebenen Kreises,
$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die halbe Summe der Seiten.

(Da $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, so gelten auch die Formeln 1 bis 11 unter f. auf S. 60 u. f.)

a. Allgemeine Formeln.

1. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$

2. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$; $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$; $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$= (b + c)^2 - 4bc\cos^2\frac{1}{2}\alpha$
$= (b - c)^2 + 4bc\sin^2\frac{1}{2}\alpha$

4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$

5. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

6. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

7. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \dfrac{\varrho}{s-a}$ $\qquad \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\varrho}{s-b}$

8. $(a + b) : c = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

9. $(a - b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

10. $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

11. $\varrho = 4r\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4rs} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

12. Die nach c gehende Winkelhalbierende ist

$$w = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

13. Die nach c gehende Mittellinie ist

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Digitized by Google

b. Schiefwinklige Dreiecke.

gegeben	gesucht	Formeln
a, b, c	α	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; oder S. 61 B. a. Formel 5, 6 oder 7; Formel 5 für kleine Winkel, 6 für Winkel nahe 90°.
a, b, α	β	$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$
	γ	$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$
	c	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha}$
		Für $a > b$ ist $\beta < 90^0$ und $\beta < \alpha$.
		Für $b > a > b \sin\alpha$ ist für das eine der Dreiecke mit den gegebenen Elementen $\alpha < \beta < 90^0$; für das andere Dreieck ist $\beta > 90^0$.
		Für $b \sin\alpha > a$ gibt es kein Dreieck, dem die gegebenen Elemente zukommen.
a, α, β	b, c	$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ $\quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$
a, b, γ	α, β	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$ $\quad \beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$
		oder $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ und
		$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma$.
		$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$; $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$.
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$
		$= \frac{a - b}{\cos\varphi}$, wo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma}{a - b}$.

c. Rechtwinklige Dreiecke.

a und b Katheten, c Hypotenuse, α der Winkel, der a gegenüberliegt.

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ 2. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ 3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ 4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

5. $a^2 + b^2 = c^2$.

C. Kugeldreiecke.

Formel für den Flächeninhalt des Kugeldreiecks S. 136.

Es seien a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die den Seiten gegenüberliegenden Winkel,

Digitized by Google

$s = {}^1/_2(a+b+c)$,
$\sigma = {}^1/_2(\alpha+\beta+\gamma)$,
$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma - 180^0$ der sog. sphärische Exzefs.

a. Allgemeine Formeln.

1. $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$
2. $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$
3. $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$
4. $\cos a\sin b = \sin a\cos b\cos\gamma + \sin c\cos\alpha$
   $\operatorname{ctg} a\sin b = \sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha + \cos\gamma\cos b$
5. $\cos\alpha\sin\beta = \sin\gamma\cos a - \sin\alpha\cos\beta\cos c$
   $\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta = \sin c\operatorname{ctg} a - \cos c\cos\beta$
6. $\sin\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$; $\cos\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$
7. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$
8. $\operatorname{ctg}\dfrac{s}{2} = \dfrac{\operatorname{ctg}{}^1/_2 a\operatorname{ctg}{}^1/_2 b + \cos\gamma}{\sin\gamma}$
9. $\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}{}^1/_2 s\operatorname{tg}{}^1/_2(s-a)\operatorname{tg}{}^1/_2(s-b)\operatorname{tg}{}^1/_2(s-c)}$

b. Nepersche Analogien.

1. $\operatorname{tg}{}^1/_2(a+b) = \dfrac{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}$; $\operatorname{tg}{}^1/_2(a-b) = \dfrac{\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}$
2. $\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos{}^1/_2(a-b)}{\cos{}^1/_2(a+b)}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin{}^1/_2(a-b)}{\sin{}^1/_2(a+b)}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$

c. Gaufssche Formeln.

1. $\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2 c = \cos{}^1/_2(a+b)\sin{}^1/_2\gamma$
2. $\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2 c = \cos{}^1/_2(a-b)\cos{}^1/_2\gamma$
3. $\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)\sin{}^1/_2 c = \sin{}^1/_2(a+b)\sin{}^1/_2\gamma$
4. $\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)\sin{}^1/_2 c = \sin{}^1/_2(a-b)\cos{}^1/_2\gamma$

d. Rechtwinklige Kugeldreiecke.

Wenn c die Hypotenuse, also $\gamma = 90^0$ ist, gelten folgende Formeln:

1. $\cos c = \cos a\cos b = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$
2. $\cos a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$
3. $\cos b = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$
4. $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$
5. $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$
6. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$

Digitized by Google

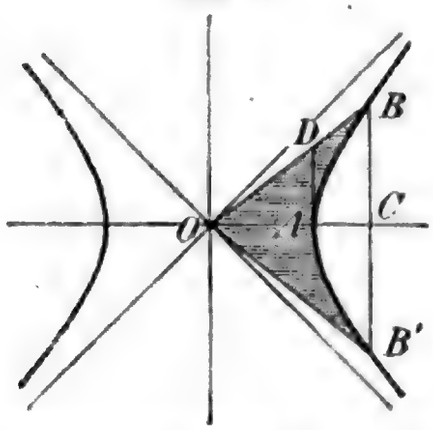
D. Hyperbelfunktionen.*)

(Tafel der Hyperbelfunktionen S. 30 bis 34.)

a. Grundformeln.

1. Die Hyperbelfunktionen stehen in ähnlicher Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel, wie die Kreisfunktionen zum Kreise. Es bezeichne (Abb. 1) O den Mittelpunkt, A den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel (S. 99), deren reelle Halbachse $OA = 1$ ist, B einen beliebigen Punkt der Kurve; ferner sei $BB' \perp OA$, C der Schnittpunkt von BB' mit OA, D der Schnittpunkt des Leitstrahles OB mit der Scheiteltangente AD. Man faßt die Strecken BC, OC und DA als Funktionen der gestrichelten Hyperbelfläche $OBAB'O$ auf und schreibt

Abb. 1.



$$BC = \mathfrak{Sin}\,\varphi,$$
$$OC = \mathfrak{Cof}\,\varphi,$$
$$DA = \mathfrak{Tg}\,\varphi^{**}),$$

wenn φ gleich der Fläche $OBAB'O$ ist.

Ferner bezeichnet man $\dfrac{1}{\mathfrak{Tg}\,\varphi}$ mit $\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

2. Es ist $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ $\qquad$ $\mathfrak{Cof}\,\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\mathfrak{Cof}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}};\quad \mathfrak{Ctg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Cof}\,\varphi}{\mathfrak{Sin}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$$

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi + \mathfrak{Sin}\,\varphi = e^{\varphi};\quad \mathfrak{Cof}\,\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi = e^{-\varphi};\quad \mathfrak{Cof}^2\varphi - \mathfrak{Sin}^2\varphi = 1.$$

(c S. 43 u. 48.)

3. Die Hyperbelfunktionen sind, wie die Kreisfunktionen, periodisch, jedoch ist die Periode imaginär, u. zw. bei den Funktionen $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ gleich $2i\pi$, bei den Funktionen $\mathfrak{Tg}$ und $\mathfrak{Ctg}$ gleich $i\pi$. Für reelle Werte der Veränderlichen φ ist

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi \geqq 1; \qquad -1 \lessgtr \mathfrak{Tg}\,\varphi \lessgtr +1; \qquad \mathfrak{Ctg}^2\varphi \geqq 1,$$

während $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ jeden (positiven oder negativen) Zahlenwert annehmen kann.

4. Es ist $\mathfrak{Sin}\,(-\varphi) = -\mathfrak{Sin}\,\varphi$; $\mathfrak{Cof}\,(-\varphi) = +\mathfrak{Cof}\,\varphi$;
$\mathfrak{Tg}\,(-\varphi) = -\mathfrak{Tg}\,\varphi$; $\mathfrak{Ctg}\,(-\varphi) = -\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

---

*) Eine ausführliche Sammlung von Formeln und Tafeln findet sich in Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen usw., Berlin 1890, Wilhelm Ernst & Sohn.

**) Eine andere Schreibweise ist: $\mathrm{sh}\,\varphi$ (= sinus hyperbolicus φ), $\mathrm{ch}\,\varphi$, $\mathrm{th}\,\varphi$.

Digitized by Google

5. Ist $\mathfrak{Sin}\, \varphi = u$, so schreibt man $\varphi = \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, u$, d. h., $\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, u$ bedeutet diejenige Hyperbelfläche, deren $\mathfrak{Sin}$ gleich u ist. Entsprechende Bedeutung haben $\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cof}\, u$, $\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Tg}\, u$, $\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Ctg}\, u$*). Man hat

$$\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Tg}\, u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$$

$$\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cof}\, u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Ctg}\, u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

b. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen.

Die für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen (S. 57 u. f., auch im Folgenden unter IV.) gegebenen Beziehungen gelten in der Form auch für die entsprechenden Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen, jedoch u. Umst. mit Abänderung der Vorzeichen. Man erhält nämlich aus einer Beziehung der Kreisfunktionen die entsprechende Beziehung der Hyperbelfunktionen, indem man in erstere $\alpha = ix$, $\beta = iy$ setzt, darauf die Gleichungen

$$\sin ix = i\, \mathfrak{Sin}\, x, \quad \cos ix = \mathfrak{Cof}\, x, \quad \operatorname{tg} ix = i\, \mathfrak{Tg}\, x, \quad \operatorname{ctg} ix = -i\, \mathfrak{Ctg}\, x$$

anwendet und, falls erforderlich, beiderseits durch i, i^2 .... teilt.

Beispiele:

1. Nach S. 58 b. 11. ist $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

Für $\alpha = ix$, $\beta = iy$ wird $\sin^2 ix - \sin^2 iy = \sin i(x+y)\sin i(x-y)$
oder $i^2\,\mathfrak{Sin}^2 x - i^2\,\mathfrak{Sin}^2 y = i\,\mathfrak{Sin}(x+y)\, i\,\mathfrak{Sin}(x-y) = i^2\,\mathfrak{Sin}(x+y)\,\mathfrak{Sin}(x-y)$;
mithin $\mathfrak{Sin}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 y = \mathfrak{Sin}(x+y)\,\mathfrak{Sin}(x-y)$.

2. Aus Formel e. 1., S. 57 folgt

$$\sin ix = \frac{ix}{1!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \ldots = i\left(\frac{x}{1!} - \frac{i^2x^3}{3!} + \frac{i^4x^5}{5!} - \ldots\right);$$

$$\text{mithin } \mathfrak{Sin}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots; \quad -\infty < x < +\infty.$$

c. Beziehungen zwischen den Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. $\sin x = -i\,\mathfrak{Sin}\, ix = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ 2. $\cos x = \mathfrak{Cof}\, ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

3. $\operatorname{tg} x = -i\,\mathfrak{Tg}\, ix = -i\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$ 4. $\operatorname{ctg} x = i\,\mathfrak{Ctg}\, ix = i\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$

5. $\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\, x = i\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 6. $\cos ix = \mathfrak{Cof}\, x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

7. $\operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\, x = i\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ 8. $\operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\, x = -i\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

9. $\operatorname{arc\,sin} x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, ix = -i \ln\left[ix + \sqrt{1-x^2}\right]$

10. $\operatorname{arc\,cos} x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x = -i \ln\left[x + i\sqrt{1-x^2}\right]$

11. $\operatorname{arc\,tg} x = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, ix = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1+ix}{1-ix}$ 12. $\operatorname{arc\,ctg} x = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\, ix = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{ix-1}{ix+1}$

*) Die Bezeichnung kommt von area = Fläche, Flächeninhalt.

Digitized by Google

13. $\operatorname{arc\,sin} ix = i \operatorname{Ar\,Sin} x = i \ln \left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$
14. $\operatorname{arc\,cos} ix = -i \operatorname{Ar\,Cos} ix = \frac{1}{2}\pi - i \ln \left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$
15. $\operatorname{arc\,tg} x = i \operatorname{Ar\,Tg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
16. $\operatorname{arc\,ctg} ix = -i \operatorname{Ar\,Ctg} x = -\frac{i}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.

Für die Formeln 9 bis 16 vgl. auch e., S. 60.

IV. Differential- und Integralrechnung.

A. Differentialformeln.

Ist $y = f(x)$, so ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und das Differential

$$dy = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\, dx = \frac{dy}{dx}\, dx.$$

In den folgenden Formeln können die Gröfsen x, y, z, u ... entweder unabhängig veränderlich oder Funktionen derselben Veränderlichen (t) sein.

1. $d(a+x) = dx$
2. $d(ax) = a\,dx$
3. $d(x+y+z+u\ldots) = dx + dy + dz + du + \ldots$
4. $d(xy) = x\,dy + y\,dx$
5. $d(xyzu\ldots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \ldots\right) xyzu\ldots$
6. $d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$
7. $dx^m = m x^{m-1}\, dx$
8. $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
9. $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$
10. $de^x = e^x\, dx$
11. $da^x = a^x \ln a\, dx$
12. $d \ln x = \frac{dx}{x}$
13. $d \overset{a}{\lg} x = \frac{1}{\ln a}\, \frac{dx}{x}$
14. $d \sin x = \cos x\, dx$
15. $d\frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$
16. $d \cos x = -\sin x\, dx$
17. $d\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$
18. $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$
19. $d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

Digitized by Google

20. $d \arcsin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $d \arccos x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$

23. $d \operatorname{arc\,ctg} x = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

24. $d \ln \sin x = \operatorname{ctg} x \cdot dx$

25. $d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx$

26. $d \ln \operatorname{tg} x = \dfrac{2\,dx}{\sin 2x}$

27. $d \ln \operatorname{ctg} x = -\dfrac{2\,dx}{\sin 2x}$

28. $d \mathfrak{Sin}\, x = \mathfrak{Cof}\, x\, dx$

29. $d \mathfrak{Cof}\, x = \mathfrak{Sin}\, x\, dx$

30. $d \mathfrak{Tg}\, x = \dfrac{dx}{\mathfrak{Cof}^2 x}$

31. $d \mathfrak{Ctg}\, x = -\dfrac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x}$

32. $dx^y = x^{y-1}(x \ln x\, dy + y\, dx)$.

Allgemein ist

33. $dF(x, y, z, u \ldots) = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}dz + \dfrac{\partial F}{\partial u}du + \ldots$

34. $d^n F(x, y, z, u \ldots) = \dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}dx^n + n\dfrac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \ldots$

oder (sinnbildlich) $= \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}dz + \ldots\right)^n$,

wenn man in dem nach dem binomischen Satze (S. 45) entwickelten Ausdruck auf der rechten Seite die n^{te} Potenz von ∂ im Zähler mit der n^{ten} partiellen Ableitung von F vertauscht.

B. Reihen von Maclaurin und Taylor.

1. Reihe von Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{n-2}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

$f(0), f'(0), f''(0), \ldots. f^{n-1}(0)$ sind die Werte, die $f(x), f'(x), f''(x), \ldots. f^{(n-1)}(x)$ für $x=0$ annehmen. R_n heifst das Restglied.

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\Theta x) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\Theta x),$$

worin Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

2. Reihe von Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + R_n.$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \Theta h) \text{ oder } R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \Theta h),$$

wenn Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die Reihen von Maclaurin und Taylor sind nur gültig, wenn $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen in dem Intervall 0 bis x bzw. x bis $x + h$ endlich und stetig bleibt.

C. Unbestimmte Formen.

1. $\frac{0}{0}$. Nimmt der Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so erhält man den wahren Wert, wenn man $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ bildet und darin $x = a$ setzt. Stellt sich auch $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ in der Form $\frac{0}{0}$ dar, so ist der wahre Wert $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$ usw.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Man verfährt wie bei $\frac{0}{0}$.

3. $0 \cdot \infty$. Wenn in $\varphi(x) f(x)$ für $x = a$ $\varphi(x) = 0$ und $f(x) = \infty$ wird, so setzt man zur Ermittlung des wahren Wertes $\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$ und erhält dann den Fall 1.

4. 0^0, 1^∞, ∞^0. Nimmt der Ausdruck $\psi(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine dieser Formen an, so setze man $\psi(x)^{\varphi(x)} = y$; dann wird $\ln y = \varphi(x) \cdot \ln \psi(x)$, mithin $y = e^{\varphi(x) \ln \psi(x)}$. Der Exponent $\varphi(x) \ln \psi(x)$ wird nun nach Fall 3. bestimmt.

5. $\infty - \infty$. Es wird $\varphi(x) - \psi(x) = \infty - \infty$ auf den Fall 1 zurückgeführt, indem man

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{x \cdot \infty}} = \frac{0}{0} \text{ setzt.}$$

D. Maxima und Minima.

1. Funktion mit einer Veränderlichen.

Die Werte von x, die $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, findet man aus der Gleichung

$$f'(x) = 0,$$

u. zw. ist für einen dieser Werte von x

y ein Maximum, wenn $f''(x) < 0$;
y „ Minimum, „ $f''(x) > 0$ wird.

Ist $f''(x) = 0$, so mufs auch $f'''(x) = 0$ sein, wenn der gefundene Wert von x ein Maximum oder Minimum von y ergeben soll; es wird y ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f''''(x) \lessgtr 0$; usw.

Digitized by Google

2. Unentwickelte Funktion: $f(x, y) = 0$.

Die Werte, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen, müssen die Gleichungen $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$, $f(x, y) = 0$, und die Bedingung $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \gtrless 0$ erfüllen.

y ist ein Maximum, wenn $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] < 0$;

y „ „ Minimum, „ $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] > 0$ wird.

3. Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen: $z = f(x, y)$.

Die Werte von x und y, die ein Maximum oder Minimum ergeben, finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

unter der Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]^2 > 0$,

u. zw. hat man, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beide < 0, ein Maximum;

„ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ „ > 0, „ Minimum.

4. Relative Maxima und Minima.

Sollen die Maxima und Minima der Funktion $v = f(x, y, z)$ unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ ermittelt werden, so setze man

1. $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
3. $\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$

Ferner ist

4. $\varphi(x, y, z) = 0$
5. $\psi(x, y, z) = 0.$

Aus den Gleichungen 1, 2 und 3 eliminiere man die Hülfsgröfsen λ und μ; man findet dann mit Hülfe der Gleichungen 4 und 5 die Werte von x, y, z, die einem Maximum oder Minimum entsprechen.

D. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche.

In Teilbrüche können nur echte rationale Brüche zerlegt werden, deren allgemeine Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q} \text{ ist.}$$

Man zerlege $F(x)$ in seine linearen Faktoren durch Auflösen der Gleichung $F(x) = 0$.

Sind α, β, γ, δ ... die n Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots$$

Alsdann können drei Fälle eintreten:

1. Die Wurzeln sind sämtlich **reell und verschieden.**

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{x-\beta} + \frac{\gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\delta_1}{x-\delta} + \ldots\ldots$$

Die Zähler α_1, β_1, γ_1.... bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}, \quad \gamma_1 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}, \quad \delta_1 = \frac{f(\delta)}{F'(\delta)}, \text{ usw.}$$

2. Die Wurzeln sind teilweise **gleich,**

etwa α μ-mal, β ν-mal, so dafs also

$$F(x) = (x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}(x-\gamma)(x-\delta)\ldots,$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{(x-\alpha)^{\mu}} + \frac{\alpha_2}{(x-\alpha)^{\mu-1}} + \frac{\alpha_3}{(x-\alpha)^{\mu-2}} + \cdots + \frac{\alpha_{\mu}}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{(x-\beta)^{\nu}}$$

$$+ \frac{\beta_2}{(x-\beta)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{\beta_{\nu}}{x-\beta} + \frac{\gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\delta_1}{x-\delta} + \ldots.$$

Die Zähler $\alpha_1 \ldots . \alpha_{\mu}$ ergeben sich als Koeffizienten der Potenzen $z^0, z^1, \ldots z^{\mu-1}$ in der Entwicklung des folgenden Ausdruckes nach steigenden Potenzen von z:

$$\frac{f(\alpha+z)}{(\alpha-\beta+z)^{\nu}(\alpha-\gamma+z)(\alpha-\delta+z)\ldots} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \cdots + \alpha_{\mu} z^{\mu-1} + \ldots.$$

Entsprechend findet man die $\beta_1, \ldots \beta_{\nu}$ aus der Entwicklung

$$\frac{f(\beta+z)}{(\beta-\alpha+z)^{\mu}(\beta-\gamma+z)(\beta-\delta+z)\ldots} = \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \cdots + \beta_{\nu} z^{\nu-1} + \ldots.$$

γ_1, δ_1 usw. findet man nach dem unter **1.** (s. o.) angegebenen Verfahren.

3. Die Wurzeln sind teilweise oder sämtlich **imaginär,** also etwa

$$F(x) = (x-p+qi)(x-p-qi)\Phi(x).$$

Sind die Wurzeln sämtlich verschieden, so verfährt man wie unter **1.** und erhält

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-p+qi} + \frac{\alpha_2}{x-p-qi} + \frac{q(x)}{\Phi(x)},$$

worin $\alpha_1 = \frac{f(p-qi)}{F'(p-qi)} = A - iB, \quad \alpha_2 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)} = A + iB.$

Digitized by Google

Soll die Rechnung reell durchgeführt werden, so fasse man die beiden imaginären (zugeordneten) Teilbrüche zusammen; es ergibt sich dann ein reeller Teilbruch mit einem Nenner zweiten Grades, und es wird

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A(x-p)-2Bq}{(x-p)^2+q^2} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}.$$

Treten gleiche imaginäre Wurzeln auf, so verfährt man entsprechend wie unter 2.

F. Integralformeln.

a. Allgemeine Regeln.

In den Formeln 1. bis 3. sind u und v Funktionen der Veränderlichen x.

1. $\int a\,du = a\int du = au + C$

2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ (Zerlegungsverfahren)

3. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (Teilweise Integration)

4. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy, \quad x = \varphi(y)$ (Substitutionsverfahren)

5. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$ (Differentiation unter dem Integralzeichen)

6. $\int dy \int f(x,y)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy$ (Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen)

b. Fundamental-Integrale.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl, ausgenommen $n = -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln cx$

3. $\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Digitized by Google

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C$

c. Rationale Funktionen.

1. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} + C$

2. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C = \frac{1}{b}\ln c(a+bx)$

3. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$ 4. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C$

5.*) $\int \frac{dx}{1-x^2} = {}^1/_2 \ln \frac{1+x}{1-x} + C = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x + C,$ wenn $x<1$

6.*) $\int \frac{dx}{x^2-1} = {}^1/_2 \ln \frac{x-1}{x+1} + C = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x + C,$ wenn $x>1$

7. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C$
$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) + C$
} wenn $a>0,\quad b>0$

9. $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$
$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C,$ wenn $ac-b^2>0;$
$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx} + C$
$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C,$
} wenn $b^2-ac>0;$

ferner $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx} + C,$ wenn $b^2=ac$

10. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c}\ln(a+2bx+cx^2) + \frac{\alpha c-\beta b}{c}\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$

*) Ueber die Hyperbelfunktionen S. 64 u. f.

Digitized by Google

11. Ist in $\int \frac{f(x)\,dx}{a+2bx+cx^2}$ der Zähler $f(x)$ eine ganze Funktion von höherem als dem ersten Grade, so stellt man die zu integrierende Funktion als Summe einer ganzen und einer echten gebrochenen rationalen Funktion dar und integriert die einzelnen Summanden.

12. $$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{(2p-3)c}{2(ac-b^2)(p-1)} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}$$

13. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2c(p-1)} \cdot \frac{1}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{\alpha c-\beta b}{c} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p}$$

14. $$\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)b} - \frac{(m-1)a}{(m+n)b} \int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx$$
$$= \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n} \int x^{m-1}(a+bx^{n-1}\,dx$$

15. Ist $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\cdots+Px+Q}{x^n+ax^{n-1}+\cdots px+q}\,dx$ und $m>n$, so sondere man durch Teilung eine ganze Funktion von x ab und zerlege die übrig bleibende, echt gebrochene Funktion in Teilbrüche (S. 69 u. f.), die man einzeln integriert.

d. Irrationale Funktionen.

1. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3 + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$

3. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta + \beta bx)\sqrt{a+bx} + C$

4. $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$ wird durch die Substitution $y = \sqrt{a+bx}$ auf die Form c. 7. und 8. (S. 72) gebracht. (Vgl. auch Nr. 5.)

5. $\int \frac{f\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}{\varphi\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}\,dx$. Man substituiere $\sqrt[n]{a+bx} = y$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$
$$= 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$$

7.*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right] + C = \tfrac{1}{2} \ln\left[\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{-x+\sqrt{a^2+x^2}}\right] + C$$
$$= \operatorname{Ar\,Sin} \frac{x}{a} + C$$

8.*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left[b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right] + C, \text{ wenn } c>0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar\,Sin} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C, \text{ wenn } ac-b^2>0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar\,Cof} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \text{ wenn } b^2-ac>0;$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \text{ wenn } c<0$$

9. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\beta}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}$$
$$+ \frac{\alpha c-\beta b}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C$$

10. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{x^{m-1}X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{X}$$
$$- \frac{(2m-1)b}{mc} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{X},$$

worin $X = \sqrt{a+2bx+cx^2}$

11.*) $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar\,Sin} \frac{x}{a} + C$$

12. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

13.*) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar\,Cof} \frac{x}{a} + C$$

---

*) Ueber die Hyperbelfunktionen S. 64 u. f.

Digitized by Google

14. $\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \frac{b+cx}{2c}\sqrt{a+2bx+cx^2} + \frac{ac-b^2}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C$

15. $\int \frac{dx}{(x-a)^p X}$ wird durch die Substitution $\frac{1}{x-a} = y$ auf die Form 10. (S. 74) gebracht.

16. $\int \frac{A+Bx}{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}\frac{dx}{X}$ wird durch die Substitution $x = \frac{py+q}{y+1}$, wenn man p und q aus den Gleichungen

$$\gamma pq + \beta(p+q) + \alpha = 0 \text{ und}$$
$$cpq + b(p+q) + a = 0$$

bestimmt und alsdann $y^2 = z$ setzt, auf zwei Integrale von der Form

$$\int \frac{dz}{(\alpha_1+\gamma_1 z)\sqrt{a_1+c_1 z}} \text{ und } \int \frac{dz}{(\alpha_2+\gamma_2 z)\sqrt{a_1 z+c_1 z^2}}$$

gebracht, die nach d. 4. (S. 73) und nach 15. (s. o.) zu behandeln sind.

17. Um $\int \frac{f(x)}{F(x)}\frac{dx}{X}$ zu bestimmen, zerlege man $\frac{f(x)}{F(x)}$, erforderlichen Falls nach Absonderung einer ganzen Funktion, in Teilbrüche; man erhält alsdann Integrale von der Form 15. (s. o.) und, wenn man zugeordnete imaginäre Teilbrüche zusammenfasst, von der Form 16.

18. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{X^3} = \frac{(a\beta-b\alpha)+(b\beta-c\alpha)x}{(b^2-ac)\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C.$

e. Transzendente Funktionen.

1. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \ldots \pm \frac{n!}{a^n x^n}\right] + C$

3. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

4. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

5. $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C$

Digitized by Google

6. $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

7. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

8. $\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$ 9. $\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C$

10. $\int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$

11. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$

12. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$

13. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C$ 14. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C$

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$ 16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

17. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$ 18. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$

19. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$ 20. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C$

21.*) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

22.*) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

23. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

24. $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$

25. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

26. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

*) Ist n eine ungerade Zahl, so wende man statt der gegebenen Reduktionsformeln die Substitutionen $\cos x = z$ oder $\sin x = z$ an. Die Integration kann auch erfolgen durch Benutzung der Formeln c. 1. und 2., S. 65, und von Nr. 8. und 9. s. o.

Digitized by Google

27.*) $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx$$

28.*) $$\int \sin^{-p} x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1}\int \sin^{-p+2} x \cos^q x\, dx$$

29.*) $$\int \sin^p x \cos^{-q} x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1}\int \sin^p x \cos^{-q+2} x\, dx$$

30. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C, \text{ wenn } a^2 > b^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x} + C, \Bigg| \text{ wenn } a^2 < b^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \mathfrak{Ar}\mathfrak{T}\mathfrak{g}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C, \Bigg|$$

31. $$\int \frac{\cos x\, dx}{a+b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\cos x} + C$$

32. $$\int \frac{\sin x\, dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x) + C$$

33. $$\int \frac{A + B\cos x + C\sin x}{a+b\cos x + c\sin x}\, dx = A\int \frac{dq}{a+p\cos q}$$

$$+ (B\cos\alpha + C\sin\alpha)\int \frac{\cos q\, dq}{a+p\cos q} - (B\sin\alpha - C\cos\alpha)\int \frac{\sin q\, dq}{a+p\cos q},$$

wenn man $b = p\cos\alpha$, $c = p\sin\alpha$ und $x - \alpha = q$ setzt.

34. $$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C$$

35. $$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C$$

36. $$\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x\operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

37. $$\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

38. $$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x\operatorname{arc\,tg} x - {}^1\!/_2\ln(1+x^2) + C$$

---

*) Ist p oder q eine ungerade Zahl, so gelingt die Integration leichter durch die Substitution $\cos x = z$ oder $\sin x = z$.

Digitized by Google

39. $\int \operatorname{arc\,ctg} x\,dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + {}^1/_2 \ln(1+x^2) + C$

40. Rationale Ausdrücke der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Tg}\,x$, $\mathfrak{Ctg}\,x$ (und deren Umkehrungen) werden mittels der entsprechenden Formeln für die Kreisfunktionen (oder für deren Umkehrungen) integriert, indem man $x = iy$ setzt und gemäß S. 65 die Beziehungen berücksichtigt:

$\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\,x$, $\quad \cos ix = \mathfrak{Cof}\,x$, $\quad \operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\,x$, $\quad \operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x$.

f. Integration durch Reihenentwicklung.

Kann man in $\int f(x)\,dx$ die Funktion $f(x)$ in eine Reihe verwandeln, welche innerhalb des gegebenen Integrations-Intervalls von x konvergent ist, so ist die durch Integration aller Glieder gewonnene Integralreihe für die gegebenen Grenzen konvergent.

Aus der Maclaurinschen Reihe (S. 67) folgt

1. $\int f(x)\,dx = f(0)\,x + f'(0)\,\frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!}\,\frac{x^4}{4} + \dots$

2. $\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = 0{,}5772156649\ldots + \ln(-\ln x) + \ln x + {}^1/_2\,\frac{(\ln x)^2}{2!} + {}^1/_3\,\frac{(\ln x)^3}{3!} + \cdots; \quad 0 < x < 1.$

3. $\int_0^x \frac{e^x\,dx}{x}$ führt durch die Substitution $e^x = s$ auf Nr. 2 zurück.

g. Bestimmte Integrale.

1. $\int_a^b = -\int_b^a \qquad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c \qquad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

3. $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a + bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$

4. $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}$

5. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, wenn $b > 0$

6. $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx = \infty$

Digitized by Google

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$,

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$,

} wenn n eine positive ganze Zahl ist.

9. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$ 10. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

11. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$, wenn a eine positive, n eine positive ganze Zahl ist.

12. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, wenn $0 < n < 1$.

h. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Gegeben $\int_a^b f(x)\,dx$. Man teile $b-a$ in n gleiche Teile: $\frac{b-a}{n} = h$ und berechne die zu den Werten $x = a,\ x = a+h,\ x = a+2h\ \ldots.$ gehörenden Werte $f(x) = y_0,\ y_1,\ y_2\ \ldots.$, dann ist unter der Voraussetzung, daſs $f(x)$ und ihre in den nachfolgenden Formeln vorkommenden Ableitungen für $x = a$ bis b endlich und stetig sind,

$$1.\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left[\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right]$$
$$- \frac{B_1 h^2}{2!}\left[f'(b) - f'(a)\right] + \frac{B_2 h^4}{4!}\left[f'''(b) - f'''(a)\right] - \ldots.$$
$$+ (-1)^{r-1}\frac{B_{r-1} h^{2r-2}}{(2r-2)!}\left[f^{(2r-3)}(b) - f^{(2r-3)}(a)\right] +$$
$$(-1)^r \frac{Br}{(2r)!}\varrho\,\frac{(b-a)^{2r+1}}{n^{2r}}M^{(2r)}$$

Hierin sind $B_1,\ B_2\ \ldots$ die Bernoullischen Zahlen, u. zw.

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$ usw.

Der wirkliche Restbetrag (Fehler) liegt zwischen den beiden Werten des letzten (Rest-) Gliedes, die sich ergeben für $\varrho = +1$ als obersten Grenzwert der positiven echten Brüche und für $M^{(2r)}$ gleich dem gröſsten bzw. kleinsten Wert von $f^{(2r)}(x)$ in den Grenzen $x = a$ bis b einschl. der zugehörigen Vorzeichen.

Digitized by Google

Für $r = 2$ erhält man

$$2. \int_a^b f(x)\,dx = h\,[\tfrac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,y_n] - \frac{1}{12}\,h^2\,[f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{720}\,\varrho\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,M''''.$$

3. **Simpsonsche Regel:** $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n] - \frac{1}{180}\,\varrho\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,M''''.$$

n muſs eine gerade Zahl sein. ϱ und M'''' s. o. Formel 2. ist bei gleichem Werte r genauer als 3.

G. Differentialgleichungen.

a. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. $$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0.$$

Lösung: $$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C.$$

2. **Trennung der Veränderlichen.**

$$f(x)\,\varphi(y)\,dx + F(x)\,\psi(y)\,dy = 0.$$

Lösung: $$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}\,dy = C.$$

3. $$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

ist die Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$$ erfüllt, so ist die Lösung:

$$\int f(x, y)\,dx + \int \left[\varphi(x, y) - \int \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C$$

oder $$\int \varphi(x, y)\,dy + \int \left[f(x, y) - \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C.$$

4. Ist die vorstehende Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, so wird sie hergestellt durch Multiplikation der Gleichung mit einem Faktor M, dem **integrierenden Faktor,** welcher der partiellen Differentialgleichung genügen muſs:

$$f(x, y)\,\frac{\partial M}{\partial y} - \varphi(x, y)\,\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right).$$

In manchen Fällen kann M bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{f(x, y)} = -\frac{dx}{\varphi(x, y)} = \frac{dM}{M\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]}.$$

Digitized by Google

5. Ergibt die Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, so heifst die Differentialgleichung **homogen.** Man löst sie, indem man

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{also} \quad y = xt; \quad dy = x\,dt + t\,dx \quad \text{setzt.}$$

Lösung: $$\ln x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$$

6. Die Differentialgleichung heifst **linear,** wenn sie die Form

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f(x)\,y + \varphi(x) = 0 \quad \text{hat.}$$

Man setze $y = uv$, wobei u und v Funktionen von x bedeuten, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Diese beiden Werte in die zu lösende Gleichung eingesetzt, gibt

$$f_1(x)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + f(x)\,uv + \varphi(x) = 0.$$

Man bestimme nun u aus der Gleichung $f_1(x)\frac{du}{dx} + f(x)\,u = 0$

und erhält $\ln\frac{u}{c} = -\int\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx$ oder $u = ce^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx}$.

Aus dieser Gleichung folgt dann für v die Bedingungsgleichung

$$f_1(x)\,u\frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0$$

oder $$v = -\int\frac{\varphi(x)}{uf_1(x)}\,dx + C_1 = -\int\left(\frac{\varphi(x)}{cf_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx}\right)dx + C_1.$$

Die Lösung wird daher:

$$y = uv = e^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx}\left[-\int\left(\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx}\right)dx + C\right].$$

7. Verfahren der **wiederholten Differentiation.**

$y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$. Man setze $\frac{dy}{dx} = z$ und differentiiere nach x, so folgt $z = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}$, womit bisweilen Fall 6 hergestellt ist. Den für z gefundenen Ausdruck setze man in $y = F(x, z)$ ein.

b. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$$

Lösungen: 1) $y = \int dx\int f(x)\,dx + Cx + C_1$.

2) $y = x\int f(x)\,dx - \int xf(x)\,dx + Cx + C_1$.

Digitized by Google

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y).$

Lösung: $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}} + C_1.$$

Allgemein: $F\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0.$

Man setze $\dfrac{dy}{dx} = z$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx}$ und eliminiere dx aus den beiden Gleichungen $F\left(\dfrac{dz}{dx}, y\right) = 0$ und $\dfrac{dy}{dx} = z$. Die Lösung ergibt sich durch die mittels Trennung der Veränderlichen auszuführende Integration der Gleichung $F\left(\dfrac{z\,dz}{dy}, y\right) = 0.$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Man setze $\dfrac{dy}{dx} = z$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dz}{dx}$; dann erhält man die beiden Gleichungen $x = \int \dfrac{dz}{f(z)} + C$ und $y = \int \dfrac{z\,dz}{f(z)} + C_1$, aus denen sich durch Elimination von z die Lösung ergibt.

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(\dfrac{dy}{dx}, x\right)$. Man setze $\dfrac{dy}{dx} = z$ und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $\dfrac{dz}{dx} = f(z, x)$ zu integrieren. Findet man $z = \varphi(x)$, so bleibt noch die Integration der Gleichung $dy = \varphi(x)\,dx$ übrig.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(\dfrac{dy}{dx}, y\right)$. Man setze $\dfrac{dy}{dx} = z$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = z\,\dfrac{dz}{dy}$ und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $z\,\dfrac{dz}{dy} = f(z, y)$ zu integrieren. Findet man $z = \varphi(y)$, so ist das Integral der gegebenen Gleichung: $$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

c. Lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit unveränderlichen Koeffizienten.

α) Ohne Störungsfunktion.

1. $$a\,\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\,\frac{dy}{dx} + a_n\,y = 0.$$

Integral: $y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x} + \ldots + C_ne^{\alpha_n x}.$

Digitized by Google

Die Größen $w_1, w_2, \ldots w_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$a w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots a_n = 0.$$

2. Tritt unter jenen Wurzeln eine imaginäre auf, z. B. $w_3 = p + qi$, so gibt es auch eine zweite imaginäre Wurzel $w_4 = p - qi$, falls die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämtlich reell sind. Das Integral der Differentialgleichung wird dann

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + e^{px}[C_3 \cos qx + C_4 \sin qx] + C_5 e^{w_5 x} + \ldots + C_n e^{w_n x}.$$

3. Sind mehrere Wurzeln einander gleich, $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_p$, so wird das Integral

$$y = e^{w_1 x}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_p x^{p-1}] + C_{p+1} e^{w_{p+1} x} + \ldots + C_n e^{w_n x}.$$

β) Mit Störungsfunktion.

$$a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

Integral: $y = z_1 e^{w_1 x} + z_2 e^{w_2 x} + \ldots + z_n e^{w_n x}$.

Die $w_1, w_2, \ldots w_n$ hierin bestimmen sich wie unter α). Die $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind zu berechnen aus den Gleichungen:

$$e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \ldots + e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1 e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2 e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3 e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \ldots + w_n e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1^2 e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^2 e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^2 e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \ldots + w_n^2 e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$w_1^{n-1} e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^{n-1} e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^{n-1} e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \ldots + w_n^{n-1} e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = f(x).$$

Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades ist, so erscheint y in der Form

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \ldots + C_n e^{w_n x} + F(x),$$

in der $F(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades bedeutet, deren Koeffizienten nach dem Verfahren der unbestimmten Koeffizienten ermittelt werden können.

Digitized by Google

γ) Mit einer Unveränderlichen als Störungsfunktion.

$$a\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = \mu = \text{konst.}$$

Integral (vgl. 1., S. 82): $y = \Sigma(Ce^{wx}) + \frac{\mu}{a_n}$.

V. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Beobachtungsfehler.

a. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Die **absolute Wahrscheinlichkeit** w eines Ereignisses wird dargestellt durch den Quotient aus der Anzahl a der dem Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl n der überhaupt möglichen Fälle

$$w = \frac{a}{n}.$$

$w = 0$ ist der Ausdruck für die Unmöglichkeit, $w = 1$ der Ausdruck für die Gewifsheit.

2. Sind w_1, w_2, w_3 ... die Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Ereignisse gleichzeitig oder in einer vorbestimmten Reihenfolge eintreten, $w = w_1 w_2 w_3 \ldots$.

3. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von mehreren zusammengehörenden Ereignissen, die für sich die absoluten Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3 ... haben, irgend eines dieser Ereignisse eintritt, ist

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.$$

4. **Relative Wahrscheinlichkeiten** zweier Ereignisse nennt man die Wahrscheinlichkeiten, die man erhält, wenn man die überhaupt keinem dieser Ereignisse günstigen Fälle bei der Anzahl der möglichen Fälle als nicht vorhanden betrachtet. Sind w_1, w_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse, so sind $\frac{w_1}{w_1 + w_2}$ und $\frac{w_2}{w_1 + w_2}$ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten.

5. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von zwei Ereignissen A und B, die für sich die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 haben, A m-mal und B n-mal in bestimmter Reihenfolge eintritt, ist $w = w_1^m w_2^n$.

Wenn die Reihenfolge beliebig ist,

so erhält man $w = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} w_1^m w_2^n$.

b. Theorie der Beobachtungsfehler.

Jede Beobachtung ist mit zufälligen Fehlern behaftet. Jeder Beobachtungsfehler ist anzusehen als die Summe einer unendlich grofsen Anzahl von elementaren Fehlern, welche ebenso leicht positiv wie negativ ausfallen können.

Digitized by Google

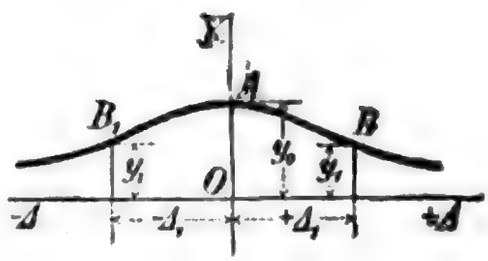
Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit w des Vorkommens eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ zu

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta,$$

die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ_1 und Δ_2 ist

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta.$$

Abb. 2.



Hierin ist die Unveränderliche h der Faktor, der jeder einzelnen Beobachtung zugeordnet werden mufs, um die Gröfse ihrer Genauigkeit auszudrücken, der also mit letzterer wächst und daher der **Genauigkeitskoeffizient** der Beobachtung genannt wird.

Setzt man $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$ und nimmt Δ als Abszissen, y als Ordinaten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes an, so stellt jene Gleichung die sog. **Wahrscheinlichkeitkurve** (Abb. 2) dar, w ist ein Flächenelement, W die zwischen den Abszissen Δ_1 und Δ_2 liegende Fläche der Kurve. Die Fläche der ganzen Kurve (von $\Delta = -\infty$ bis $+\infty$) ist $= 1$.

Für $\Delta = 0$ wird $y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642\,h = y_{max}$.

Die Kurve verläuft in zwei zur y-Achse gleichliegenden Aesten; die Δ-Achse ist Asymptote der Kurve. Für die Abszisse

$$\pm\Delta_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}707\,107}{h} = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

worin m die Anzahl der Fehler, und die zugehörige Ordinate $y_1 = 0{,}60653\,\frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}342\,198\,h$ ist, hat die Kurve je einen Wendepunkt B und B_1.

Der **wahrscheinliche Fehler** r einer Beobachtung ist derjenige Wert von Δ, welcher bei dieser Gattung von Beobachtungen von den positiven wie negativen Fehlern ebenso oft überschritten wie nicht erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Fehlers in den Grenzen $+r$ und $-r$ ist daher $= 1/2$, und es ist $\pm r$ die Abszisse der Wahrscheinlichkeitskurve, deren zugehörige Ordinate die rechts bzw. links vom Scheitel gelegene Fläche der Kurve halbiert.

Der wahrscheinliche Fehler r ist umgekehrt proportional dem Genauigkeits-Koeffizienten und dient als Einheit des Mafses zur Darstellung der Fehler.

Digitized by Google

Es ist $r = \frac{0{,}4769364}{h} = 0{,}67449\,\Delta_1 = 0{,}67449\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}}$, wenn m die Anzahl der Fehler bedeutet. Δ_1 Abb. 2, S. 85.

Um zu prüfen, ob die Anzahl der Versuche grofs genug war, dafs die Fehler wirklich zufällig gewesen, und um sich überhaupt über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu vergewissern, ist die **Verteilung der Gröfsen der Fehler** in Betracht zu ziehen, wofür die vorstehende Theorie folgende Angaben liefert:

Bei 1000 Beobachtungen liegen in den nach $0{,}1\,r$ fortschreitenden Zwischenräumen:

von 0 bis $1\,r$:	54, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 47, 46, 44:	zusammen 500 Fehler;
zwischen $1\,r$ und $2\,r$:	42, 40, 38, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23:	zusammen 323 Fehler;
zwischen $2\,r$ und $3\,r$:	21, 19, 17, 15, 14, 12, 11, 10, 8, 7:	zusammen 134 Fehler;
zwischen $3\,r$ und $3{,}5\,r$	. . . . .	25 Fehler;
zwischen $3{,}5\,r$ und $4\,r$	. . . . .	11 Fehler;
zwischen $4\,r$ und $5\,r$	. . . . .	6 Fehler;
		zusammen 999 Fehler.

Hiernach ist also eine Beobachtung, deren Fehler $> 5\,r$ ist, bereits als unzulässig anzusehen.

c. Methode der kleinsten Quadrate.

F sei eine bekannte Funktion von einer Anzahl unabhängiger Veränderlichen $x, y, z \ldots$ und der n Unveränderlichen $a, b, c \ldots$. Durch Beobachtung kennt man m Werte von F, die gegebenen Werten von $x, y, z \ldots$ entsprechen, und es sind nun die Werte der n Unveränderlichen zu bestimmen für den Fall, dafs $m > n$.

Wollte man je n Gleichungen zur Bestimmung der n Unveränderlichen verbinden, so würde man, weil die m beobachteten Werte von F mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, je nach Wahl der n Gleichungen andere Werte der Unveränderlichen erhalten. Die Aufgabe ist nun, die Gruppe von Werten der Unveränderlichen zu bestimmen, die für die m beobachteten Werte von F die wahrscheinlichste ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt, dafs dies bei den Werten der Fall ist, für die

$$\Sigma(h^2\Delta^2) = \text{min.}$$

Denkt man sich unter h eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs $\frac{h_1^2}{h^2}, \frac{h_2^2}{h^2}, \frac{h_3^2}{h^2}$ ganze Zahlen sind, die der Reihe nach mit $g_1, g_2, g_3 \ldots$ bezeichnet werden, so gilt die Bedingung der wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen:

$$\Sigma(g\Delta^2) = \text{min. für ungleiche Genauigkeiten,}$$
$$\Sigma(\Delta^2) = \text{min. für gleiche Genauigkeiten.}$$

Der erste Fall wird also auf den einfacheren zweiten zurückgeführt, wenn man die einzelnen Werte von Δ so oft in die Summe einsetzt, wie die zugehörigen Koeffizienten g anzeigen. g heifst das **Gewicht** der Beobachtung.

Digitized by Google

1. Ausgleich unmittelbarer Beobachtungen.

Ist die beobachtete Gröfse von keiner Veränderlichen abhängig, also

$$F = a,$$

so wird der wahrscheinlichste Wert von a: $a = \frac{\Sigma(Fh^2)}{\Sigma(h^2)} = \frac{\Sigma(Fg)}{\Sigma(g)}$;

bei m Beobachtungen von gleicher Güte: $a = \frac{\Sigma(F)}{m}$, d. h. bei Beobachtungen gleicher Güte einer unabhängigen Gröfse ist das **arithmetische Mittel** der wahrscheinlichste Wert der Gröfse.

Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler $r = 0{,}67449\sqrt{\frac{m}{m-1}\frac{\Sigma(gf^2)}{\Sigma(g)}}$.

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels $r_a = \frac{r}{\sqrt{m}}$.

2. Funktionen ersten Grades.

Die Funktion F sei in bezug auf die zu berechnenden Unveränderlichen vom ersten Grade, also von der Form

$$F = ax + by + cz + \ldots,$$

worin x, y, z .... unabhängige Veränderliche sind.

Die beobachteten Werte von F seien F_1, F_2, F_3...., die Beobachtungsfehler dabei Δ_1, Δ_2, Δ_3 .....

Bezeichnet m die Anzahl der Gleichungen, n die Anzahl der Unveränderlichen ($m > n$), so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen a, b, c .... aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Sigma(gFx) &= a\Sigma(gx^2) + b\Sigma(gxy) + c\Sigma(gxz) + \ldots.\\
\Sigma(gFy) &= a\Sigma(gyx) + b\Sigma(gy^2) + c\Sigma(gyz) + \ldots.\\
\Sigma(gFz) &= a\Sigma(gzx) + b\Sigma(gzy) + c\Sigma(gz^2) + \ldots.\\
&\text{usw.,}
\end{aligned}$$

worin z. B. $\Sigma(gyz) = g_1y_1z_1 + g_2y_2z_2 + \ldots.$ ist.

Bei gleicher Genauigkeit aller Beobachtungen fällt überall in den Gleichungen der Faktor g fort.

Wenn in der gegebenen Gleichung für F eine der zu ermittelnden Unveränderlichen mit keiner Veränderlichen verbunden ist (absolutes Glied), so ist in den vorstehenden Bestimmungsgleichungen der Wert der betreffenden Veränderlichen = 1 zu setzen.

Die Auflösungen der Bestimmungsgleichungen haben die Formen

$$\begin{aligned}
a &= A_1\Sigma(gFx) + B_1\Sigma(gFy) + C_1\Sigma(gFz) + \ldots.\\
b &= A_2\Sigma(gFx) + B_2\Sigma(gFy) + C_2\Sigma(gFz) + \ldots.\\
c &= A_3\Sigma(gFx) + B_3\Sigma(gFy) + C_3\Sigma(gFz) + \ldots. \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Berechnet man durch Einsetzen der so bestimmten wahrscheinlichsten Werte von a, b, c .... in die Gleichung $F = ax + by + cz + \ldots$ die Werte von F, welche den bei der Beobachtung benutzten Werten von x, y, z ... entsprechen, und bezeichnet die Unterschiede ent-

Digitized by Google

sprechender berechneter und beobachteter Werte von F mit Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \ldots$, so liegt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen in den Grenzen

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-n} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}} \left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right).$$

Für gleiche g: $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-n}} \left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right)$;

hierin ist $\Sigma(g\Delta^2) = \Sigma(gF^2) - a\Sigma(gFx) - b\Sigma(gFy) - \cdots$;

ferner $\Sigma(\Delta^2) = \Sigma(F^2) - a\Sigma(Fx) - b\Sigma(Fy) - \cdots$

Die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Unveränderlichen sind

$$r_a = r\sqrt{\frac{A_1 \Sigma(g)}{m}} \qquad r_b = r\sqrt{\frac{B_2 \Sigma(g)}{m}} \qquad r_c = r\sqrt{\frac{C_3 \Sigma(g)}{m}};$$

usw.;

für gleiche g: $r_a = r\sqrt{A_1}$; $r_b = r\sqrt{B_2}$; $r_c = r\sqrt{C_3}$ usw.

VI. Analytische Geometrie.

A. Punkt und gerade Linie in der Ebene.

In den folgenden Entwicklungen sind rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander l ist, ist ferner α der Winkel, den l mit der positiven Richtung der Abszissenachse (x-Achse) bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{l}; \qquad \sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{l}.$$

2. Teilt man die Strecke l zwischen den Punkten (x_2, y_2) und (x_1, y_1) im Verhältnis $m:n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x, y, so ist $x = \frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}$; $y = \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}$.

3. Gleichungen der geraden Linie.

Die Gleichungen einer geraden Linie, d. h. die Gleichungen zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes einer geraden Linie, sind Gleichungen ersten Grades.

α) Die allgemeine Form lautet:

$$Ax + By + C = 0.$$

β) Ist die Gerade unter einem Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so daſs $\operatorname{tg}\alpha = m$, und schneidet die Gerade auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung

$$y = mx + b$$

Digitized by Google

$x = a$, Gleichung einer Geraden, parallel zur y-Achse.
$y = b$, „ „ „ „ „ „ x-Achse.
$y = mx$. „ „ „ die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

γ) Geht die Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1), so ist ihre Gleichung

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

δ) Geht die Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), so ist ihre Gleichung $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

ε) Schneidet eine Gerade auf der x-Achse die Strecke a, auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Durch Vergleichung mit der allgemeinen Form findet man:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}, \quad m = -\frac{A}{B}.$$

ζ) Ist das Lot l vom Koordinatenanfangspunkt auf eine Gerade unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so lautet die Gleichung der Geraden:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - l = 0. \quad \textbf{(Normalform.)}$$

Um die allgemeine Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad l = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, dafs l positiv wird.

4. Der **Abstand** p eines Punktes (x_1, y_1) von einer geraden Linie, deren Gleichung die Normalform hat, ist

$$p = \pm(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - l);$$

p wird positiv, wenn der Punkt (x_1, y_1) und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Geraden liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

5. Sind

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ und}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden, so ist, wenn k eine beliebige Zahl bedeutet, die Gleichung aller Geraden, die durch den Schnittpunkt beider gehen, $A_1 x + B_1 y + C_1 + k(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$.

6. Der **Winkel** φ, den zwei gerade Linien (der unter 5. genannten Gleichungen) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Die Linien sind parallel ($\varphi = 0$), wenn $A_2 B_1 = A_1 B_2$ oder $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Die Linien stehen winkelrecht zueinander ($\varphi = 90^0$), wenn $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Digitized by Google

Sind die Gleichungen in entwickelter Form gegeben:

$$y = m_1 x + b_1, \qquad y = m_2 x + b_2,$$

so ist $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2};$$

die Geraden sind parallel, wenn $m_1 = m_2$,

sie stehen winkelrecht zueinander, wenn $m_1 m_2 + 1 = 0$

oder $$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

7. Die Gleichung einer Geraden, welche die Gerade $y = mx + b$ im Punkte (x_1, y_1) unter dem Winkel φ schneidet, ist

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg} \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \varphi} (x - x_1).$$

8. Die Winkel zweier Geraden (der unter 5. genannten Gleichungen) werden halbiert durch die Geraden

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

9. **Umwandlung der Koordinaten.**

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte Achsenkreuz werden mit x, y, auf das neue mit x', y' bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung des Achsenkreuzes. Sind f, g die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x', \quad y = g + y'.$$

β) Drehung des Achsenkreuzes um den Anfangspunkt. Bezeichnet α den Winkel, den die alte positive x-Achse bei ihrer Drehung nach der alten positiven y-Achse hin zurücklegen mufs, um in die Lage der neuen positiven x'-Achse zu kommen, so ist

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

γ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α) und β) entsprechend.

δ) Umwandlung des rechtwinkligen Achsenkreuzes in ein schiefwinkliges. Ist die x'-Achse um α, die y'-Achse um β gegen die x-Achse geneigt, so wird

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

ε) Umwandlung von Parallelkoordinaten in **Polarkoordinaten.** Bezeichnet r den Leitstrahl, φ den Polarwinkel, so ist, wenn der Pol mit dem Anfangspunkte und die Polarachse mit der positiven x-Achse zusammenfallen, für rechtwinklige Koordinaten:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Sind x, y die Koordinaten eines **schiefwinkligen** Achsenkreuzes mit dem Winkel ω, so hat man $$x = \frac{r \sin (\omega - \varphi)}{\sin \omega}, \qquad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

Digitized by Google

ζ) Umwandlung von Polarkoordinaten in Parallelkoordinaten. Bei den Bezeichnungen unter ε) ist für rechtwinklige Koordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$;

für schiefwinklige Koordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}, \quad \cos\varphi = \frac{x + y\cos\omega}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y\sin\omega}{r}.$$

B. Krumme Linien in der Ebene.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine krumme Linie in der Ebene, bezogen auf Parallelkoordinaten, wird dargestellt durch eine **Gleichung:**

$$F(x, y) = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung nach y erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form $y = f(x)$, die ebenso viele zusammenhängende oder getrennte Zweige der Kurve darstellen.

Dasselbe gilt für die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten: $F(r, \varphi) = 0$ oder $r = f(\varphi)$.

Häufig ist es für die Rechnung bequemer, die Kurve mittels einer Hülfsveränderlichen t (Parameter) durch zwei Gleichungen darzustellen:

$$x = \psi_1(t); \qquad y = \psi_2(t).$$

2. Den Winkel τ, den die nach der Seite der positiven y-Achse liegende **Tangente** mit der positiven x-Achse bildet (Abb. 3), findet man für rechtwinklige Koordinaten aus

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\tau = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx};$$

hierin ist das Differential des **Bogens**

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welches bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ mit dem für $\operatorname{tg}\tau$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden mufs.

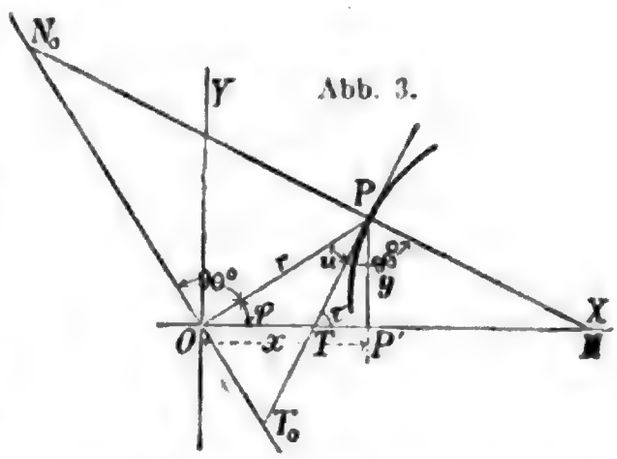


Abb. 3.

3. Bezeichnet man den Winkel, den die im Sinne des wachsenden φ gerichtete Tangente der Kurve mit der positiven Richtung des Leitstrahles r bildet, mit u (Abb. 3), so ist

$$\sin u = \frac{r\,d\varphi}{ds}, \qquad \cos u = \frac{dr}{ds}, \qquad \operatorname{tg} u = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Das Differential des Bogens $ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2}$ mufs bei der Bestimmung von $\sin u$ und $\cos u$ mit dem für $\operatorname{tg} u$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden.

Digitized by Google

4. Die **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y) der Kurve ist

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

worin ξ und η die laufenden Koordinaten bezeichnen.

In Abb. 3 ist die **Tangente** $PT = y\frac{ds}{dy} = y\frac{dx}{dy}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Subtangente . . . $P'T = y\frac{dx}{dy}$.

Polartangente . . $PT_0 = \frac{r\,ds}{dr} = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$.

Polarsubtangente . $OT_0 = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$.

In diesen Formeln soll auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht genommen werden. Sie liefern die Länge der Strecken, wenn rechts der absolute Wert genommen wird.

5. Die **Gleichung der Normale** im Punkte (x, y) ist für rechtwinklige Koordinaten, wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen.

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Normale $PN = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. **Subnormale** $P'N = y\frac{dy}{dx}$,

Polarnormale $PN_0 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$. **Polarsubnormale** $ON_0 = \frac{dr}{d\varphi}$.

6. Die Richtungswinkel der **unendlich fernen Punkte** einer Kurve findet man, indem man die Gleichung der Kurve auf Polarkoordinaten bezieht und diejenigen Winkel φ sucht, welche $r = \infty$ entsprechen. Ist die Kurve eine algebraische vom n^{ten} Grade, so teile man zuvor ihre Gleichung durch die höchste Potenz von r; hierzu schreibe man die Gleichung in der Form

$$F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots + F_1 + F_0 = 0,$$

worin F_k die homogenen Glieder k^{ter} Ordnung von $F(x, y)$ bezeichnet.

7. Die **Asymptoten** sind die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Kurve. Man erhält ihre Gleichung, indem man in der Tangentengleichung für den Berührungspunkt (x, y) Polarkoordinaten (r, φ) einführt, durch die höchste Potenz von r teilt, sodann $r = \infty$ werden läßt und für φ die unter 6. bestimmten Richtungswinkel der unendlich fernen Punkte der Reihe nach einsetzt.

8. Zwei Kurven, welche einen Punkt gemeinsam haben, bilden in diesem eine **Berührung** k^{ter} Ordnung, wenn die ersten k Ableitungen

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^ky}{dx^k}$$

in dem betreffenden Punkte für beide Kurven einander gleich sind.

Digitized by Google

Bei einer Berührung von gerader Ordnung schneiden sich die Kurven in dem gemeinsamen Punkte, bei einer Berührung von ungerader Ordnung berühren sie sich, ohne sich zu schneiden. Die **Tangente** einer Kurve bildet mit dieser im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung, der Krümmungskreis (s. u. 9.) im allgemeinen eine Berührung zweiter Ordnung.

9. Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkte (x, y) ist der Kreis, der mit der Kurve daselbst eine Berührung zweiter Ordnung (s. u. 8.) eingeht, oder, was dasselbe ist, drei unendlich nahe Punkte mit ihr gemein hat. Sein Mittelpunkt, der sog. Krümmungsmittelpunkt, ist der Schnittpunkt der im Punkte (x, y) und der im benachbarten Punkte $(x+dx, y+dy)$ errichteten Normale. Der **Krümmungshalbmesser** ist $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ oder

für rechtwinklige Koordinaten:

$$= \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

für Polarkoordinaten:

$$= \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Der reziproke Wert von ϱ heißt die **Krümmung** der Kurve im Punkte (x, y).

10. Die Koordinaten X, Y des **Krümmungsmittelpunktes** für den Punkt (x, y) sind $X = x - \varrho\frac{dy}{ds}$, $Y = y + \varrho\frac{dx}{ds}$;

oder $$X = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad Y = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

oder $$X = x - \frac{dy}{d\tau}, \qquad Y = y + \frac{dx}{d\tau};$$

oder $$X = x - \varrho\sin\tau, \qquad Y = y + \varrho\cos\tau.$$

11. Die **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte; die gegebene Kurve heißt Evolvente der Evolute.

Die Gleichung der Evolute findet man, indem man aus der Gleichung der Evolvente und den Gleichungen für die Koordinaten X und Y des Krümmungsmittelpunktes die Koordinaten x, y eliminiert und dann X, Y als veränderlich betrachtet.

Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale der Evolvente und Tangente der Evolute.

Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich dem Unterschiede der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungshalbmesser der Evolvente. Hieraus folgt, daß der Endpunkt eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, der auf die Evolute gewickelt ist, die Evolvente beschreibt, wenn der Faden, stets in Richtung der Tangente angezogen, von der Evolute abgewickelt wird.

Digitized by Google

Man findet umgekehrt, wenn die Evolute $F(X, Y) = 0$ gegeben ist, die Gleichung der **Evolvente** aus den folgenden Beziehungen:

$$x = X - S\frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S\frac{dY}{dS}, \quad F(X, Y) = 0,$$

wenn (X, Y) einen beliebigen Punkt der Evolute und S deren Bogenlänge bis zu diesem Punkte bezeichnet, von dem Punkte aus gezählt, wo die Abwicklung beginnt.

12. Eine Kurve **ist** nach der positiven Seite der y-Achse **konkav,** wenn $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$; **konvex,** wenn $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ist. In dem Punkte, wo $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, während $\frac{d^3y}{dx^3} \gtrless 0$, geht die Kurve aus der konkaven in die konvexe Form über, oder umgekehrt. Ein solcher Punkt heifst ein **Wendepunkt;** man ermittelt ihn durch Auflösung der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleichzeitig den sämtlichen Bedingungen

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0, \ \ldots \ \frac{d^ky}{dx^k} = 0, \quad \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} \gtrless 0$$

genügen, so ist der Punkt nur dann ein Wendepunkt, wenn k gerade ist; die Tangente hat alsdann (siehe 8.) eine Berührung gerader Ordnung mit der Kurve, schneidet diese also im Berührungspunkte. Ist hingegen k ungerade, so hat der Punkt die Eigenschaft, dafs seine Tangente mit der Kurve eine Berührung ungerader Ordnung eingeht, er ist aber kein Wendepunkt.

Für einen Wendepunkt ist $\varrho = \infty$.

13. Eine Kurve hat einen **Doppelpunkt,** wenn $F(x, y) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$;

in diesem Falle erscheint $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{dy}}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Der Wert für $\operatorname{tg} \tau$ wird bestimmt nach Seite 68, C; erhält man für $\operatorname{tg} \tau$ 2 reelle Werte, entsprechend 2 Tangenten, so ist der Punkt ein eigentlicher Doppelpunkt; bei 2 gleichen Werten für $\operatorname{tg} \tau$, 2 zusammenfallenden Tangenten, hat man einen Rückkehrpunkt (Spitze); sind die beiden Werte für $\operatorname{tg} \tau$ imaginär, so ist der Punkt ein isolierter oder zugeordneter Punkt.

14. **Inhalt der Fläche:**

α) zwischen der Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_0, y, die den Abszissen x_0, x entsprechen: $F = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$;

Digitized by Google

β) zwischen der Kurve und den zu den Polarwinkeln φ_0, φ gehörenden Leitstrahlen r_0, r: $F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi$.

15. **Bogenlänge.** Die Länge s einer Kurve, die zwischen zwei den Abszissen x_0, x entsprechenden Punkten liegt, ist

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Für Polarkoordinaten

$$\text{hat man} \quad s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr.$$

16. **Einhüllende Kurve.** Die durch die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, dargestellte Kurvenschar wird im allgemeinen von einer Kurve umhüllt, welche die einhüllende Kurve der Kurvenschar heifst. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \qquad F(x, y, p) = 0.$

Ist die Kurvenschar bestimmt durch die Gleichung $F(x, y, p, q) = 0$ mit zwei veränderlichen Parametern p und q, zwischen denen die Bedingungsgleichung $\varphi(p, q) = 0$ besteht, so ergibt sich die Gleichung der einhüllenden Kurve durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \qquad F(x, y, p, q) = 0, \qquad \varphi(p, q) = 0.$$

17. **Trajektorie.** Die Kurve, welche die Kurvenschar $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, rechtwinklig durchschneidet, heifst die rechtwinklige Trajektorie der Kurvenschar. Die Differentialgleichung der Trajektorie, deren Koordinaten ξ, η seien, ergibt sich, indem man aus den Gleichungen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad F(\xi, \eta, p) = 0$$

die Gröfse p eliminiert. Die Integration der entstandenen Gleichung liefert mit Rücksicht auf die willkürlich gewählte Unveränderliche eine Schar von Trajektorien.

b. Kegelschnitte.

1. Allgemeines.

1. Eine Meridianebene M, d. i. eine Ebene durch die Drehachse eines geraden Kreiskegels (S. 120), sei begrenzt durch die Mantellinien S_1 und S_2; die Kegelspitze sei s. Eine zu M winkelrechte

Digitized by Google

Ebene E schneidet den Kegel: 1) in einer **Ellipse,** wenn S_1 und S_2 von s aus auf derselben Seite durch E geschnitten werden; 2) in einer **Parabel,** wenn E parallel S_1 oder S_2 ist; 3) in einer **Hyperbel,** wenn E zwar S_1 und S_2 schneidet, jedoch die eine der beiden Mantellinien erst in ihrer Verlängerung über s hinaus. Diese drei Kurven heifsen daher Kegelschnitte. Ist im Falle 1) E winkelrecht zur Achse des Kegels, so ist die Schnittfigur ein **Kreis.** Im Falle 3) liefert eine zu E parallele und durch s gehende Ebene E_1 beim Schnitt des Kegelmantels zwei Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel (S. 97). Eine gleichseitige Hyperbel (für die $\alpha = 45^0$) erhält man nur bei Kegeln, deren Spitzenwinkel $\geqq 90^0$ ist.

2. Bewegt sich ein Punkt P in der Weise, dafs seine jedesmaligen Abstände PF von einem festen Punkte F und PQ von einer festen Geraden in einem unveränderlichen Verhältnis $PF : PQ = e$ stehen, so ist der geometrische Ort des Punktes eine Ellipse, wenn $e < 1$; eine Parabel, wenn $e = 1$; eine Hyperbel, wenn $e > 1$ ist. Das Verhältnis e ist die (numerische) Exzentrizität des betreffenden Kegelschnittes. Der feste Punkt F liegt auf der Hauptachse und ist ein Brennpunkt; die feste Gerade steht winkelrecht zur Hauptachse und heifst **Leitlinie** (Direktrix). Beim Kreis ist F der Mittelpunkt und die Leitlinie liegt im Unendlichen; hierbei ist $e = 0$.

3. a) Die **allgemeine Gleichung** der Kegelschnitte in Parallelkoordinaten hat die Form

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,a_1\,x + 2\,a_2\,y + a_0 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem die Diskriminante $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$ positiv, null oder negativ ist.

Die allgemeine Form der Parabelgleichung ist also

$$(a\,x + b\,y + c)^2 + A\,x + B\,y + C = 0.$$

b) Der **Mittelpunkt** von Ellipse und Hyperbel unter a) ist der Schnittpunkt der geraden Linien

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_2 = 0.$$

c) Aus der allgemeinen Gleichung von Ellipse und Hyperbel in rechtwinkligen Parallelkoordinaten findet man die **Mittelpunktsgleichung:**

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 = k$$

und die **Hauptachsengleichung:** $g_1\,x'^2 + g_2\,y'^2 = k$.

Der Winkel φ, um den das alte Koordinatenkreuz im positiven Sinne gedreht werden mufs, um in die Lage des neuen zu gelangen, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

g_1 und g_2 findet man als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$g^2 - g\,(a_{11} + a_{22}) + a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

$a_{11} + a_{22}$ heifst die Invariante der Kegelschnittgleichung.

d) Die allgemeine Kegelschnittgleichung ist die eines Kreises, wenn $a_{12} = 0$; $a_{11} = a_{22}$; a_{11} und k gleiches Vorzeichen haben.

Digitized by Google

2. Kreis.

1. **Allgemeine Gleichung** (Abb. 4): $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

2. **Mittelpunktsgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt im Mittelpunkt M):

$$x^2+y^2=r^2.$$

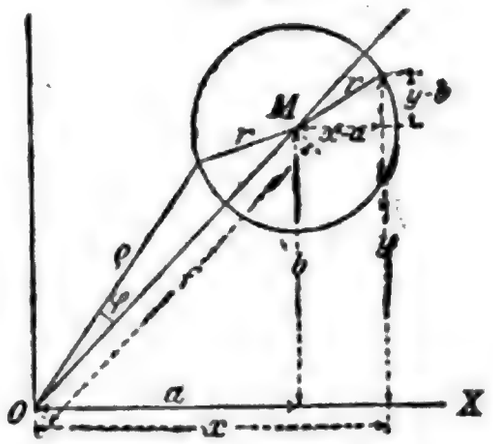
3. **Scheitelgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt in der Kreislinie, OX ein Durchmesser): $y^2=x(2r-x)$.

4. **Polargleichung** für die Achse OM:

$$\varrho^2-2\varrho f\cos\varphi+f^2=r^2.$$

5. **Umfang** und **Inhalt** der Kreisfläche S. 2 u. f., Inhalte der Kreisabschnitte und Kreisausschnitte S. 36, 37 u. 131.

Abb. 4.



3. Ellipse und Hyperbel.

Für die Ellipse (Abb. 5) gelten im folgenden die oberen, für die Hyperbel (Abb. 6) die unteren Zeichen.

1. **Mittelpunktsgleichung.** Bezieht man die Kurven auf ihre Hauptachse, so ist die Gleichung, wenn $OA=a$ und OB bezw. $AD=b$ die beiden Halbachsen bezeichnen,

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hieraus ergibt sich

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2-x^2)}.$$

Abb. 5.

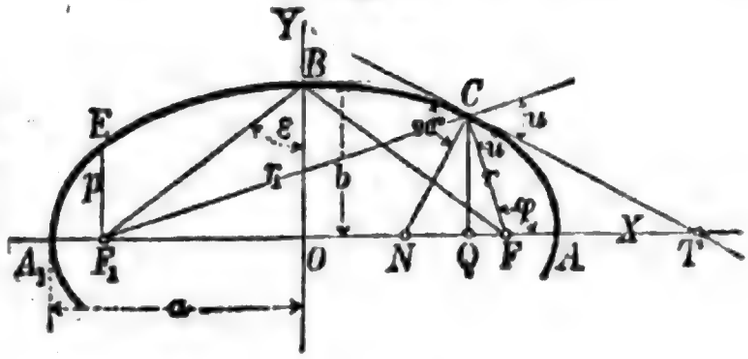
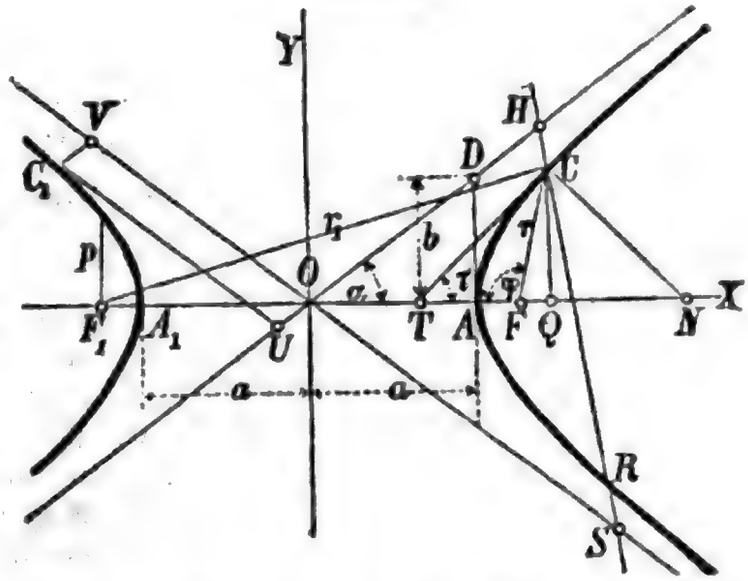


Abb. 6.



2. **Scheitelgleichung.** Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel A_1 (in der x-Achse), so ist die Gleichung:

$$\pm y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$=2px-\frac{px^2}{a}.$$

3. Die **Brennpunkte** F und F_1 haben auf der x-Achse von O den Abstand $OF=OF_1=\pm\sqrt{a^2\mp b^2}$.

Digitized by Google

Bei der Ellipse ist $BF = BF_1 = OA = a$, bei der Hyperbel $OF = OF_1 = OD$. Das Verhältnis

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = e = \sin \varepsilon, \text{ bezw. } \frac{OF}{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

heifst die (numerische) Exzentrizität des Kegelschnittes.

4. Die von den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes gezogenen **Leitstrahlen** sind

$$r = \pm (a - ex), \qquad r_1 = a + ex.$$

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Leitstrahlen unveränderlich, also ist bei der Ellipse $r + r_1 = 2a$ (Fadenkonstruktion), bei der Hyperbel $r - r_1 = \pm 2a$.

5. Die Ordinate in einem Brennpunkte ist

$$p = \pm a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Die Gröfse $2p$ heifst der **Parameter.**

6. **Zugeordnete** (konjugierte) **Durchmesser** nennt man solche Durchmesser, von denen der eine alle Sehnen halbiert, die zu dem anderen parallel sind. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zu dem diesem zugeordneten Durchmesser.

Bilden diese Durchmesser $2a_1$, $2b_1$ mit der ersten Hauptachse die Winkel α, β (Abb. 10 S. 101), so ist, wenn beide Winkel spitz sind,

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \quad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Die auf zwei zugeordnete Durchmesser als Achsen bezogene Gleichung beider Kegelschnitte in schiefwinkligen Koordinaten lautet $\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$.

7. **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y): $\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} = 1$.

Gleichung der Normale: $\frac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \frac{\eta - y}{a^2 y}$.

Hierbei bedeuten ξ und η die laufenden Koordinaten.

Tangente und Normale halbieren die Winkel der Leitstrahlen.

8. Die Hyperbel nähert sich auf ihren in das Unendliche gehenden Zweigen den **Asymptoten,** d. h. den beiden Geraden $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, immer mehr, ohne diese im Endlichen zu erreichen. Jede Asymptote bildet mit der x-Achse einen Winkel α, so dafs $\operatorname{tg} \alpha = b : a$ ist.

Zieht man eine Gerade HS (Abb. 6), welche die Hyperbel und die Asymptoten schneidet, so sind die beiden Stücke CH und RS zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich. Hieraus folgt eine einfache **Konstruktion der Hyperbel,** wenn die Asymptoten und ein Punkt C der Hyperbel gegeben sind.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer zur x-Achse winkelrechten Geraden wird durch einen Hyperbelast so geteilt, dafs das Produkt der Teile unveränderlich gleich b^2 ist.

Digitized by Google

Das zwischen den beiden Hyperbelästen liegende Stück einer zur x-Achse parallelen Geraden wird durch eine Asymptote so geteilt, daſs das Produkt der Teile unveränderlich gleich a^2 ist.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert. Die von beliebigen Tangenten und den Asymptoten gebildeten Dreiecke sind flächengleich.

Wenn C_1U und C_1V, Abb. 6, den Asymptoten parallel sind, so ist

$$C_1U \cdot C_1V = {}^1/_4 (a^2 + b^2).$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogene **Gleichung der Hyperbel** in schiefwinkligen Koordinaten lautet: $x' y' = {}^1/_4 (a^2 + b^2)$.

9. Für einen beliebigen Punkt C (x, y) (Abb. 5 u. 6) ist die

$$\textbf{Tangente } CT = \frac{a y}{b x} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)};$$

$$\textbf{Normale } CN = \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)};$$

$$\textbf{Subtangente } TQ = \mp \frac{a^2}{x} \pm x; \qquad \textbf{Subnormale } NQ = \mp \frac{b^2}{a^2} x.$$

10. **Gleichseitige Hyperbel.** Asymptoten winkelrecht zueinander. Mittelpunktsgleichung: $x^2 - y^2 = a^2$. Parameter: $2p = 2a$. Asymptotengleichung: $x' y' = {}^1/_2 a^2$.

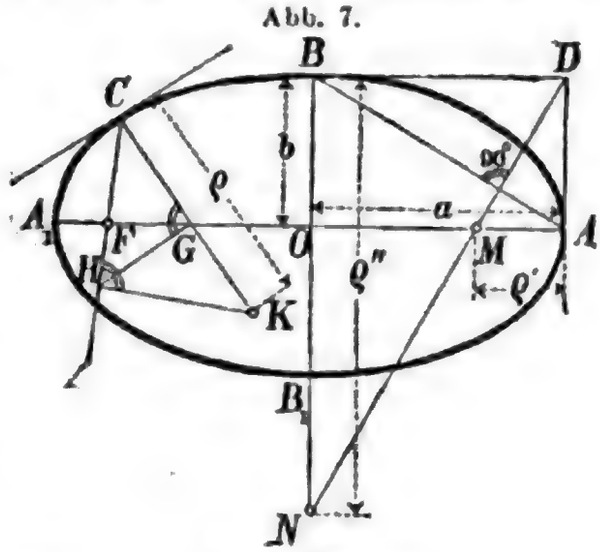
Ferner ist $a = b \qquad e = \sqrt{2} \qquad \alpha = 45^0$.

11. **Krümmungshalbmesser** im Punkte C (Abb. 5 u. 6, S. 97):

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r r_1)^{3/2}}{a b} = \frac{p}{\sin^3 FCT} = \frac{p}{\sin^3 u}.$$

Konstruktion (Abb. 7): Man errichte die Winkelrechte CG im Punkte C zur Tangente (Konstruktion der Tangente S. 100), ziehe CF' durch den Brennpunkt F, $GH \perp GC$, $HK \perp CH$, dann ist K der Krümmungsmittelpunkt.

Abb. 7.



Für den Scheitel A ist bei Ellipse und Hyperbel der Krümmungshalbmesser

$$\varrho' = AM = \frac{b^2}{a} = p;$$

für den Scheitel B ist bei der Ellipse der Krümmungshalbmesser

$$\varrho'' = BN = \frac{a^2}{b}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte M und N für die Scheitel der Ellipse erhält man (Abb. 7), indem man durch D eine Gerade winkelrecht zu AB zieht.

12. **Polargleichung** der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf den Brennpunkt F als Pol und FA als Polarachse (Abb. 5 u. 6):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \pm \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}.$$

Digitized by Google

13. **Fläche** der Ellipse (Abb. 5) $OBCQ = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist πab.

Hyperbelfläche (Abb. 6) $ACQ = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

Der Subtrahend stellt die Fläche OCA vor.

$$\text{Fläche } OA_1C_1V = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2OV}{OD}.$$

Fläche der gleichseitigen Hyperbel S. 64.

14. **Umfang der Ellipse:**

$$U = \pi(a+b)\left[1 + {}^1/_4\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + {}^1/_{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + {}^1/_{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \ldots\right]$$
$$= \pi(a+b)\,x.$$

Zur Berechnung von $\pi(a+b)$ kann man für $(a+b) = n$ die Tafel auf S. 2 bis 23, zur Berechnung von x folgende Angaben benutzen:

$\frac{a-b}{a+b} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$x =$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

15. **Konstruktion der Ellipse aus den beiden Halbachsen** a und b (Abb. 8).

α) Man beschreibe um O Kreise mit a, b und $a+b$, ziehe einen beliebigen Halbmesser $OJGH$ und durch J und G Parallele zum Achsenkreuz, so ist deren Schnittpunkt C ein Punkt der Ellipse und HCN die Normale in diesem Punkte.

Abb. 8.

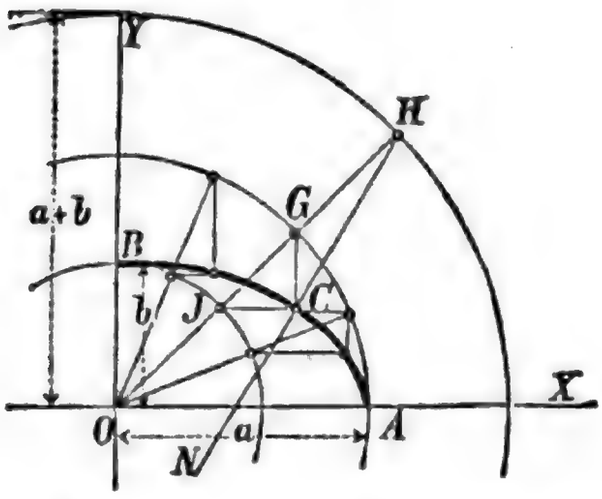
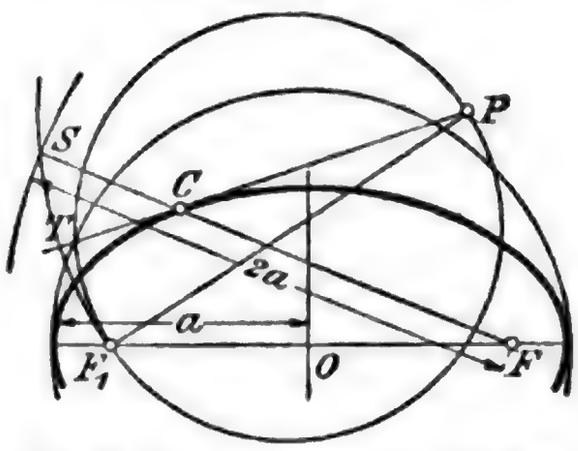


Abb. 9.



β) Man lasse die Strecke $a+b$ mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten. Der Teilpunkt zwischen a und b beschreibt dann die Ellipse.

16. **Konstruktion der Tangente**

α) **in einem Punkte** C. (Abb. 5 u. 6, S. 97.) Man halbiere den Winkel der Leitstrahlen CF und CF_1; vgl. unter 7., S. 98.

β) **von einem Punkte** P **außerhalb** (Abb. 9).

Man beschreibe um O mit a und über PF_1 als Durchmesser Kreise.

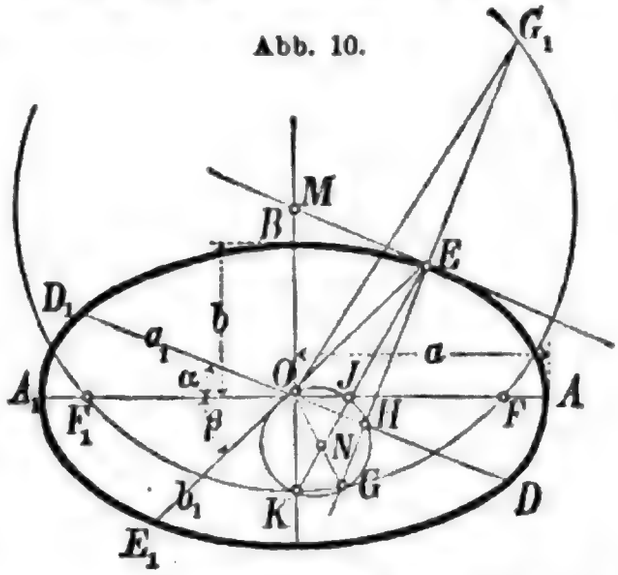
Digitized by Google

Die Verbindungslinie des Schnittpunktes T mit P ist die Tangente. Zieht man um P mit PF_1 und um F mit $2a$ Kreise, so findet man durch Verbindung des Schnittpunktes S mit F den Berührungspunkt C.

17. **Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse,** wenn gegeben sind $DD_1 = 2a_1$ und $EE_1 = 2b_1$ (Abb. 10) als zugeordnete Durchmesser der Gröfse und Lage nach. Man fälle $EH \perp DD_1$, mache $EG = EG_1 = OD_1 = a_1$, so ergibt sich die Lage einer Hauptachse durch Halbierung des Winkels GOG_1. Die Längen der Hauptachsen sind

$$2a = OG_1 + OG$$
$$2b = OG_1 - OG.$$

Abb. 10.



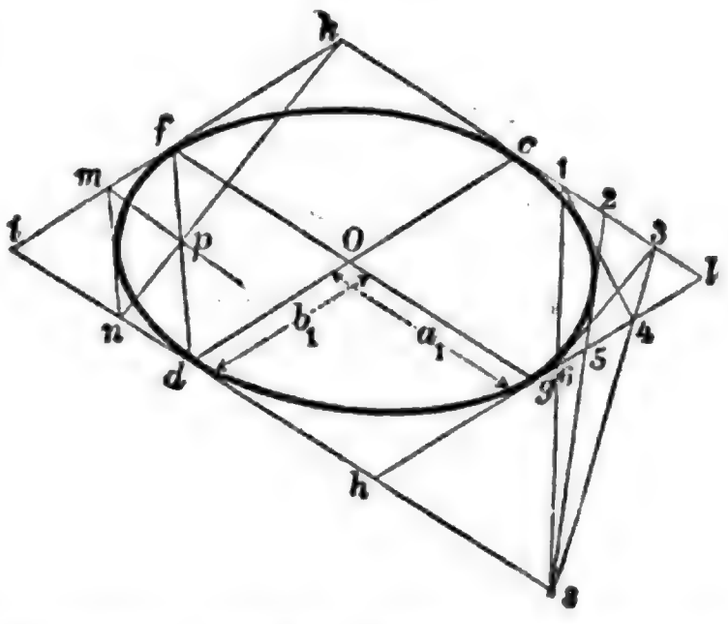
Oder: Man konstruiere OG wie vorhin, beschreibe über OG als Durchmesser einen Kreis und verbinde seinen Mittelpunkt N mit E. Die Schnittpunkte J und K der Geraden NE mit dem Kreise sind Punkte der Hauptachsen, ihre Entfernungen von E die Längen der halben Hauptachsen.

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt M in der kleinen Achse liegt, und der durch G und G_1 geht, schneidet die grofse Achse in den Brennpunkten F und F_1.

Führt man die Linie G_1EH so, dafs sich G_1 auf OG_1 und H auf DD_1 bewegt, so beschreibt der Punkt E die Ellipse.

Der vierte harmonische Punkt zu G_1, H und G, dem Punkte H zugeordnet, ist der Krümmungsmittelpunkt zu E.

Abb. 11.



18. **Konstruktion der Ellipse aus den zugeordneten Durchmessern** cd und fg (Abb. 11).

α) Man mache

$$hdi \parallel lck \parallel gf$$

und $lgh \parallel kfi \parallel cd$, verlängere ih um $hs = dh$, teile cl in beliebig viele (hier 4) gleiche Teile, ziehe $s3$, $s2$, $s1$; die Schnittpunkte mit gl seien 4, 5, 6, dann sind die Geraden 14, 25, 36 Tangenten an die Ellipse.

β) Man ziehe fd und nehme darauf beliebige Punkte p an, ziehe kpn und $pm \parallel gf$, so ist mn Tangente an die Ellipse.

Digitized by Google

4. Parabel.

1. **Scheitelgleichung:** $y^2 = 2px$, worin $2p$ der Parameter.

2. Der **Brennpunkt** F hat vom Scheitel A den Abstand $AF = {}^1/_2 p$ (Abb. 12), p ist die Ordinate im Brennpunkte F. Die Linie LL_1, die im Abstande $-{}^1/_2 p = AL$ zur y-Achse parallel läuft, heifst **Leitlinie.** (S. 96.)

Es ist dann für jeden Punkt der Parabel $FE = EB = x + {}^1/_2 p$.

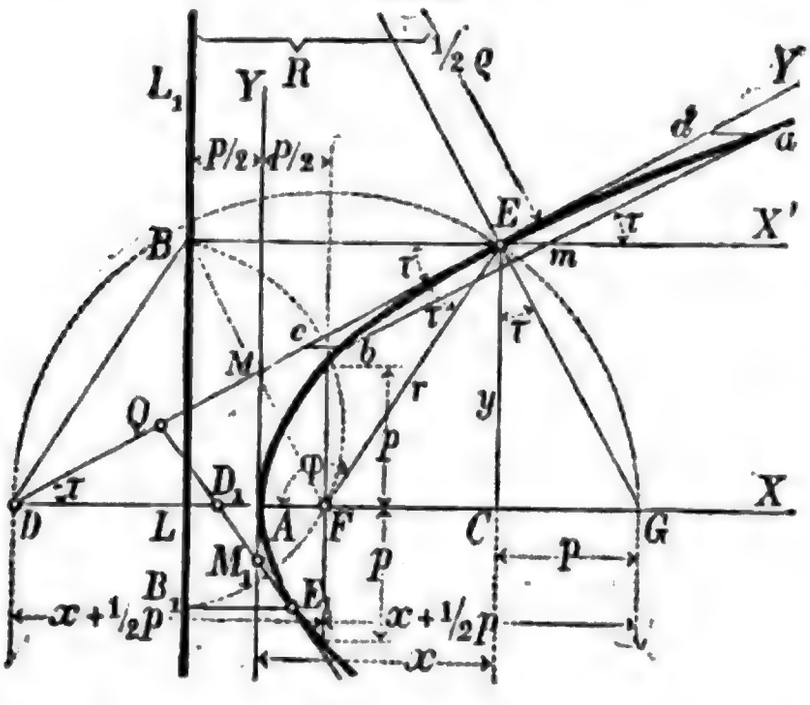
3. Ein Durchmesser EX der Parabel halbiert alle Sehnen ab, die zur Tangente EY' in seinem Endpunkte parallel sind, indem er mit diesen Sehnen den Winkel τ bildet; er ist parallel zu AX und heifst der der Richtung EY **zugeordnete Durchmesser.** Es ist also $am = mb$.

Betrachtet man EX' und EY' als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Parabel $y'^2 = \dfrac{2p}{\sin^2 \tau} x' = 2p' x'$.

4. **Gleichung der Tangente:** $\eta y = p(\xi + x)$.
Gleichung der Normale: $\eta - y = -\dfrac{y}{p}(\xi - x)$.
$\Big\}$ $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} u = \dfrac{p}{y}$. (S. 92.)

Hierin bezeichnen ξ, η die Koordinaten der Tangente bzw. der Normale. Die Tangente ED und die Normale EG halbieren die Winkel FEB und FEX'. Die Winkel CEG, BED, DEF, FDE sind $= \tau$. Ferner ist $DA = AC = x$; $DF = FE = FG = x + {}^1/_2 p$. Die y-Achse halbiert den Tangentenabschnitt zwischen der x-Achse und dem Berührungspunkte; also $DM = ME$ und $D_1 M_1 = M_1 E_1$.

Abb. 12.



Subtangente $DC = 2x$.
Subnormale $CG = p = \text{konst.}$

5. **Polargleichung,** bezogen auf F als Pol, FA als Polarachse: $r = \dfrac{p}{1 + \cos \varphi} = \dfrac{p}{2 \cos^2 {}^1/_2 \varphi}$.

6. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \dfrac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \dfrac{p}{\sin^3 \tau}$.

Die Projektion von ϱ auf die x-Achse ist gleich $2EF = 2EB$. Demnach ist $ER = {}^1/_2 \varrho$. Auch gilt die Konstruktion von ϱ, wie in Abb. 7 für Ellipse und Hyperbel angegeben (S. 99). Krümmungshalbmesser im Scheitel $= p$.

Digitized by Google

7. **Gleichung der Evolute:** $27\,p\,y^2 = 8\,(x-p)^3$. Es ist dies die Neilsche oder semikubische Parabel.*)

8. **Fläche** $AEC = {}^2/_3\,xy$; $aEb = {}^2/_3\,abcd$. Der Flächeninhalt eines beliebigen flachen Segmentes von der Grundlinie g und der Höhe h ist annähernd $F = {}^2/_3\,gh$.

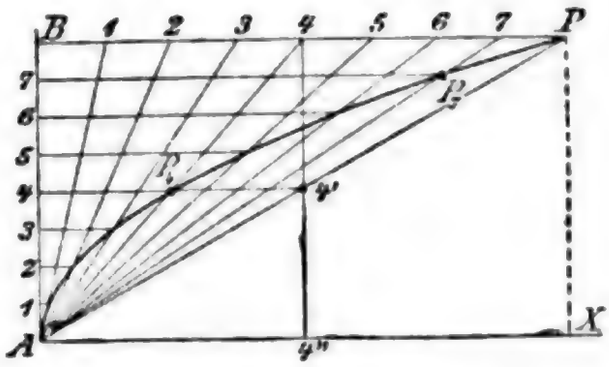
9. **Bogenlänge** AE (Abb. 12):

$$s = \frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\} = EM + \frac{p}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2},$$

$$s \sim y\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - {}^2/_5\left(\frac{x}{y}\right)^4\right], \quad \text{wenn } \frac{x}{y} \text{ ein kleiner Bruch ist.}$$

Dieselbe Formel gilt näherungsweise für die Länge eines beliebigen flachen Bogens, wenn man $\frac{2h}{g}$ für $\frac{x}{y}$ und g für y setzt (vgl. 8.).

Abb. 16.



10. **Konstruktion der Parabel.**

α) Gegeben Scheitel A, Achse AX und ein Punkt P der Parabel (Abb. 16).

Mache $AB \perp AX$ in A; $PB \perp AB$; PB und AB sind in gleich viele (hier 8) gleiche Teile geteilt. Verbinde z. B. Punkt 7 auf PB mit A, ziehe durch Punkt 7 auf AB eine Parallele zu AX, so ist P_7 ein Punkt der Parabel. Oder: Zieht man von einem beliebigen Punkt 4 der zu AX parallelen $PB\,44' \perp BP$ und $4'P_4 \parallel BP$, so ist deren Schnittpunkt P_4 mit $4A$ ein Punkt der Parabel.

---

*) **Konstruktion der semikubischen und der kubischen Parabel.** Gegeben der Scheitel A, die Achse AX und ein Punkt P der Parabel:

Konstruiere das Rechteck $ABPX$, teile AB (durch 1, 2, 3) und BP (durch a, b, c) in gleich viele (hier vier) gleiche Teile und beschreibe über BP einen Halbkreis. Mache dann z. B. in Abb. 13 die Sehne $Bc' = Bc$ und ziehe c'III winkelrecht zu BP (bzw. ziehe in Abb. 14 cc' winkelrecht zu BP und BIII = Sehne Bc'); AIII schneidet die zu AX parallele Linie 3 P_{III} im Punkte P_{III} der Parabel. Ist der Halbkreis für die Zeichnung unbequem, so verwende man Abb. 15 zur Konstruktion. Wähle c beliebig auf AP, acb, $a_1c_1b_1$, $c_2c_3b_2$ winkelrecht zu AX, cc_1c parallel zu XA, c_1 und c_3 auf Aa, c_2 auf Aa_1. Alsdann ist

c_1 ein Punkt der gemeinen Parabel,
c_2 ein Punkt der kubischen Parabel,
c_3 ein Punkt der semikubischen Parabel.

Abb. 13.
Kubische Parabel.

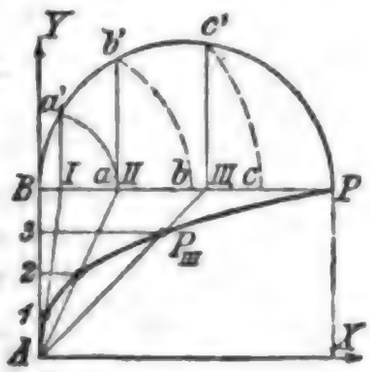


Abb. 14.
Semikubische Parabel.

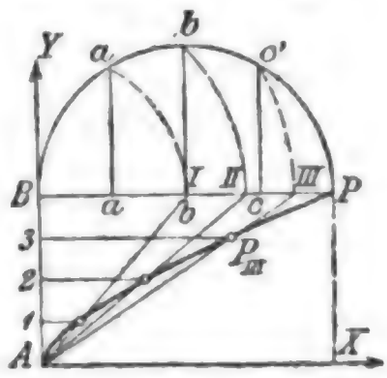
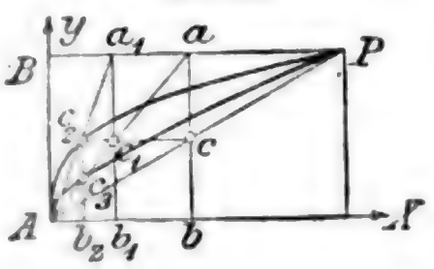


Abb. 15.



Digitized by Google

β) Gegeben Scheitel A und Brennpunkt F (Abb. 17). Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an AY so gleiten, dafs der eine Schenkel immer durch F geht; der andere Schenkel bildet alsdann jederzeit eine Tangente an die Parabel.

Abb. 17.

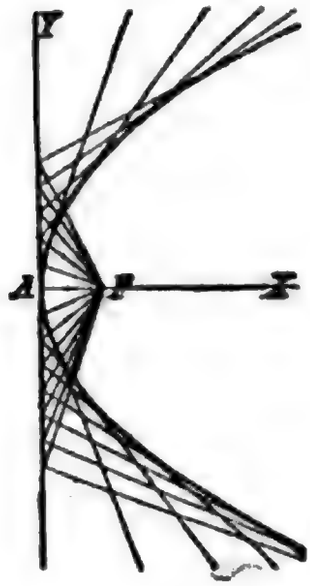
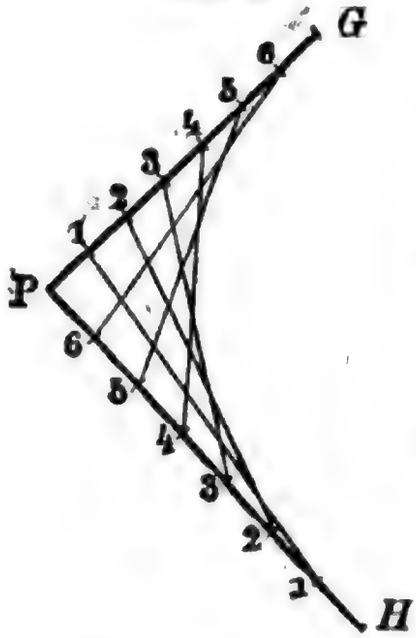


Abb. 18.



Oder (Abb. 12): Man ziehe in einem beliebigen Punkte C der x-Achse $CE \perp AF$, mache $CG = 2AF = p$. Ein Kreis um F mit FG bestimmt auf CE den Parabelpunkt E und ferner den Schnittpunkt D der Tangente ED mit der x-Achse.

γ) Gegeben zwei Tangenten PG und PH und ihre Berührungspunkte G und H (Abb. 18).

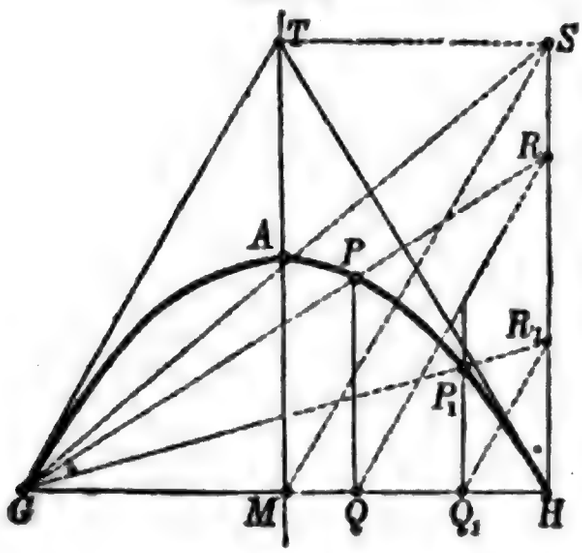
Man teile PG und PH in n (hier 7) gleiche Teile, so sind 11, 22, 33, 44, 55 und 66 Tangenten an die Parabel.

Diese Konstruktion kann mit Vorteil bei der Zeichnung flacher Bogen benutzt werden.

δ) Gegeben eine zur y-Achse parallele Sehne GH und ein Punkt P der Parabel (Abb. 19).

Man ziehe HR und $PQ \perp GH$, ferner GPR und QR. Ist $Q_1P_1 \perp GH$, $Q_1R_1 \parallel QR$, so schneidet GR_1 die Linie Q_1P_1 in dem Parabelpunkte P_1. — QR ist die Richtung der Tangente GT in G. Das Lot MT in der Mitte M auf GH ist die x-Achse und A der Scheitel, so daß $MA = AT$. Durch die Bestimmung der Tangenten GT und HT läßt sich das Verfahren auch auf die Konstruktion γ) zurückführen.

Abb. 19.



Sind H und P und die Lage der x-Achse MT gegeben, so fälle man $HM \perp MT$, verlängere HM um sich selbst bis G und konstruiere weiter, wie vorstehend angegeben.

11. Konstruktion einer Tangente an die Parabel

α) in einem Punkte E (Abb. 12 S. 102).

Man mache $AD = AC$ oder $DF = FE$, so ist DE die Tangente.

Digitized by Google

Oder: Eine Parallele durch E mit der x-Achse schneidet die Leitlinie LL_1 in B. BF wird durch die y-Achse in der Mitte M geschnitten, so daß $BM = MF$. EM ist die gesuchte Tangente.

β) **von einem Punkte Q außerhalb der Parabel** (Abb. 12 S. 102). Man beschreibe um Q mit QF einen Kreis, ziehe durch B und B_1 Parallele zu AX, dann sind E und E_1 Berührungspunkte der Tangenten QE und QE_1.

c. Zyklische Kurven.

1. Gemeine Zykloide.

1. Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt A einer Kreislinie AB beschreibt, wenn diese, ohne zu gleiten, sich auf einer Geraden AC abwälzt (Abb. 20).

2. **Konstruktion:** Man mache $AC =$ Bogen $AB = \pi r$, teile beides in n gleiche Teile, konstruiere die Schnittpunkte 1, 2, 3 und mache $1\alpha = aI$, $2\beta = bII$ und $3\gamma = cIII$, dann sind α, β, γ Punkte der Zykloide. Oder: Kreise, um die Teilpunkte von AC mit den Sehnen AI, AII, $AIII$ beschrieben, werden von der Zykloide umhüllt.

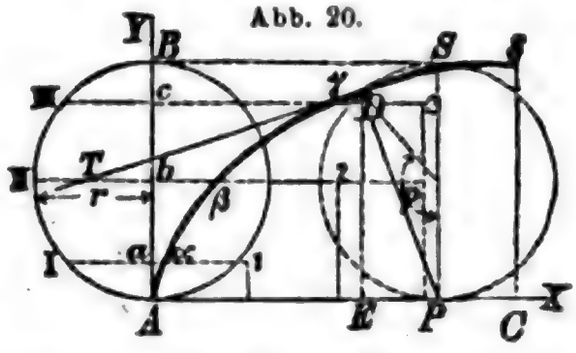
3. **Gleichungen** der Zykloide, bezogen auf AC als x-Achse und AB als y-Achse: $x = r(\varphi - \sin\varphi)$; $y = r(1 - \cos\varphi)$.

$$x = r \arccos\frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)y}.$$

4. Die **Normale** im Punkte D geht durch den Berührungspunkt P des erzeugenden Kreises und der Grundlinie AC. PD Normale, SDT Tangente.

$$PD = 2r\sin{}^1/_2\varphi = \sqrt{2ry}.$$

Abb. 20.



5. **Krümmungshalbmesser:**

$$\varrho = 4r\sin{}^1/_2\varphi = 2\sqrt{2ry}.$$

ϱ ist also doppelt so lang wie die Normale. Für den Scheitel δ ist $\varrho = 4r$; für A ist $\varrho = 0$.

6. Die **Evolute** der Zykloide ist eine der ursprünglichen Zykloide kongruente Kurve.

7. **Fläche** $AED = r^2({}^3/_2\varphi - 2\sin\varphi + {}^1/_4\sin 2\varphi)$

$$= {}^3/_2 rx - {}^1/_2 y\sqrt{(2r-y)y};$$

$$AC\delta = {}^3/_2\pi r^2.$$

8. **Bogen** $AD = 4r(1 - \cos{}^1/_2\varphi) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}$.

$$A\delta = 4r.$$

9. **Die verlängerte und die verkürzte Zykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt aufserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind $x = r\varphi - p\sin\varphi$; $y = r - p\cos\varphi$.

2. Epizykloide und Hypozykloide.

1. Ein Punkt A einer Kreislinie vom Halbmesser $AC = r$, die sich, ohne zu gleiten, auf einer Kreislinie vom Halbmesser $AO = R$

Digitized by Google

abwälzt, beschreibt eine **Epizykloide**, wenn die Berührung der Kreise aufsen (Abb. 21), eine **Hypozykloide**, wenn die Berührung innen (Abb. 22) stattfindet. R Halbmesser des Grundkreises, r der des erzeugenden Kreises.

2. **Konstruktion:** Man teile den Halbkreis-Bogen AB und den Winkel $AOD = \frac{r}{R} 180^0$ in n gleiche Teile, ziehe die Halbmesser 1, 2, 3, 4 durch O und die Kreisbogen 5, 6, 7, 8 um O; macht man nun $a_1 a = \alpha_1 \alpha$, $b_1 b = \beta_1 \beta$ und $c_1 c = \gamma_1 \gamma$, so sind A, a, b, c, D Punkte der Epizykloide (Abb. 21) bzw. der Hypozykloide (Abb. 22). Oder: Kreise, um die Schnittpunkte der Halbmesser 1, 2, 3 und des Grundkreises mit den Sehnen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ beschrieben, werden von der Kurve umhüllt.

3. **Gleichungen:**

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp r \cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r \sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

(Obere Zeichen für die Epizykloide, untere für die Hypozykloide.)

Die Hypozykloide R, r ist, jenachdem $r \lessgtr R$, übereinstimmend mit der Hypozykloide R, $R - r$ oder der Epizykloide R, $r - R$.

Abb. 21.

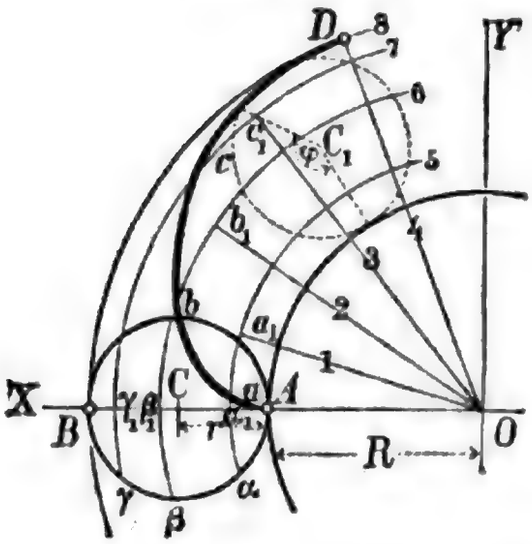
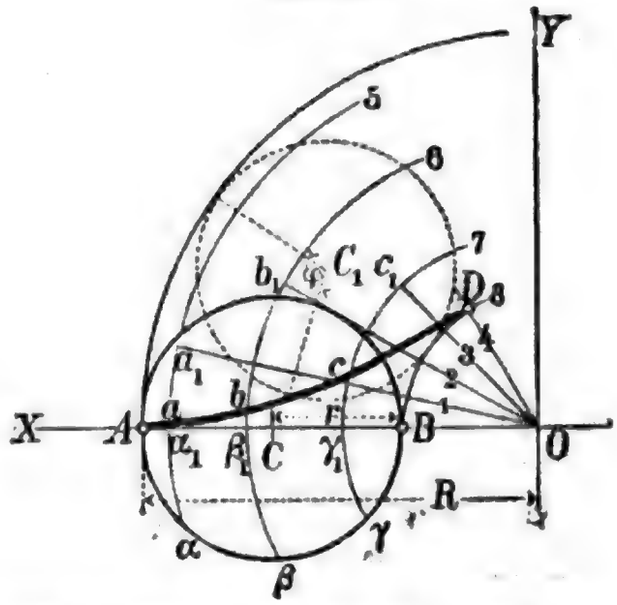


Abb. 22.



4. Die **Normale** für irgend einen Punkt geht durch den Berührungspunkt des erzeugenden Kreises und des Grundkreises für die betreffende Lage.

5. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Für A ist $\varrho = 0$, für D $\varrho = 4r \frac{R \pm r}{R \pm 2r}$.

6. Die **Evolute** ist eine ähnliche Epi- bzw. Hypozykloide.

7. **Fläche** zwischen OA, der Kurve und einem Leitstrahl:

$$F = \frac{r(R \pm r)(R \pm 2r)}{2R} (\varphi - \sin \varphi).$$

Digitized by Google

8. **Bogen** $s = 4r\frac{R \pm r}{R}(1 - \cos {}^1/_2 \varphi)$; Bogen $AD = 4r\frac{(R \pm r)}{R}$.

9. Die Gleichungen der Kurven werden (durch Elimination von φ) algebraisch, wenn R und r ein meßbares Verhältnis haben.

Für $r = {}^1/_2 R$ wird die Hypozykloide eine Gerade in der Richtung AO. Jeder nicht im Umfange des erzeugenden Kreises liegende Punkt beschreibt dann eine Ellipse.

Für $r = {}^1/_4 R$ wird die Hypozykloide zur **Astrois** (Sternkurve), ihre Gleichung lautet:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Für $r = R$ wird die Epizykloide zur **Kardioide** (Herzkurve). Die Gleichung der Kardioide lautet, wenn A (Abb. 21) der Koordinaten-Anfangspunkt und AO die positive Richtung der x-Achse ist:

$$(y^2 + x^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

oder in den entsprechenden Polarkoordinaten ϱ und ψ:

$$\varrho = 2R(1 + \cos\psi).$$

Für $r = \infty$ wird der rollende Kreis eine gerade Linie, die entsprechende Kurve eine Kreisevolvente.

10. **Die verlängerte und die verkürzte Epi- oder Hypozykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt außerhalb bzw. innerhalb des erzeugenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind

$$x = (R \pm r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp p\cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

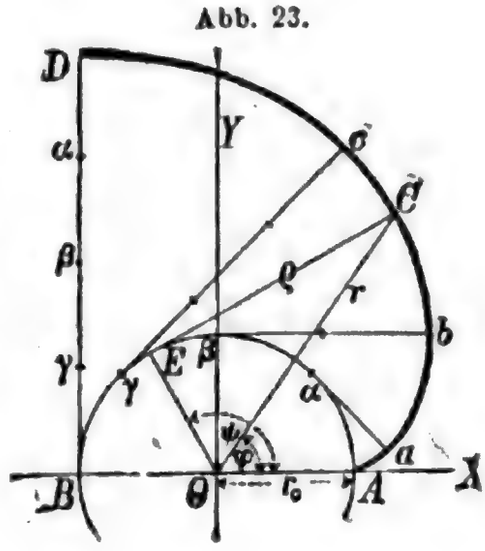
$$y = (R \pm r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - p\sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

3. Kreisevolvente.

1. Jeder Punkt einer Geraden, die sich, ohne zu gleiten, auf einem Kreise abwälzt, beschreibt eine Kreisevolvente. (Fadenkonstruktion.)

2. **Konstruktion** (Abb. 23): Man mache BD gleich dem Kreisbogen AB und teile beide in n (hier 4) gleiche Teile: αa ist Tangente in α von der Länge $\alpha D = {}^1/_4 BD$; βb ist Tangente in β von der Länge $\beta D = {}^2/_4 BD$, usw.

Abb. 23.



3. **Gleichungen:**

$$x = r_0(\cos\psi + \psi\sin\psi);$$
$$y = r_0(\sin\psi - \psi\cos\psi).$$

Polargleichung: $\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$.

4. Der **Krümmungshalbmesser** ϱ eines Punktes C ist die Tangente CE von C an den Grundkreis, also gleich der Länge des Kreisbogens AE.

Digitized by Google

5. **Bogenlänge:** $AC = s = \frac{\varrho^2}{2r_0} = \frac{r_0\psi^2}{2} = \frac{r^2 - r_0^2}{2r_0}$.

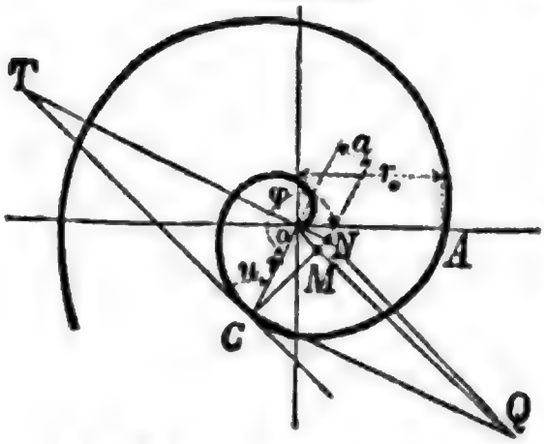
6. **Fläche:** $ACO = \frac{1}{6} r_0^2 \psi^3$.

d. Spiralen.

1. Archimedische Spirale.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn sich ein Punkt C (Abb. 24) mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Strahle OC bewegt, der sich seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt, den Pol O, dreht. Entspricht einer einmaligen Umdrehung von OC ($= 360^0$) der Weg r_0 des Punktes C auf OC, so ist nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung die Länge des Leitstrahles $r = \frac{r_0}{n}$, woraus sich die Konstruktion der Spirale ergibt.

Abb. 24.



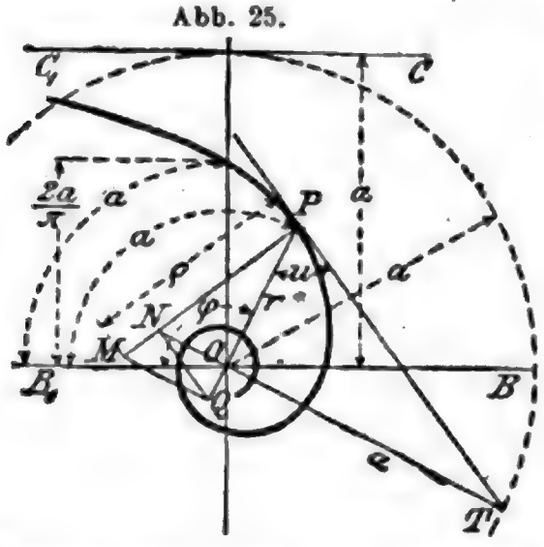
2. **Polargleichung:** $r = a\varphi = \frac{r_0}{2\pi}\varphi$, wenn r den Leitstrahl und φ den Polarwinkel, von OA aus gerechnet, bezeichnet.

3. Zieht man in einem beliebigen Punkte C die Tangente CT, ferner $OT \perp OC$ und $CN \perp CT$, so ist die **Polarsubtangente** $OT = \frac{r^2}{a}$; die **Polarsubnormale** $ON = a =$ konst. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale. (Vgl. hiermit die hyperbolische Spirale, u. 2.)

4. **Krümmungshalbmesser** $\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}$.

Konstruktion: Errichte auf CN (Abb. 24) in N und auf OC in C Winkelrechte; beide schneiden sich in Q; zieht man OQ, so schneidet diese die Normale CN im Krümmungsmittelpunkte M.

Abb. 25.



5. **Bogenlänge**

$$s = \frac{r_0}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{Ar\,Sin}\,\varphi\right],$$

angenähert (für viele Windungen):

$$s = \frac{r_0}{4\pi}\varphi^2.$$

2. Hyperbolische Spirale.

1. Trägt man von einem Durchmesser (Polarachse) BB_1 einer Schar konzentrischer Kreise aus auf alle diese Kreise nach derselben Seite hin Bögen von der Länge a ab, so ist der geometrische Ort ihrer Endpunkte eine hyperbolische Spirale (Abb. 25).

Digitized by Google

Ihre **Gleichung** ist $r\varphi = a$. Da für $\varphi = \infty$, $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein **asymptotischer Punkt**, um den die Spirale unendlich viele Windungen beschreibt, ohne ihn zu erreichen.

Für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$, d. h., die zur Polarachse BB_1 im Abstande a gezogene Parallele CC_1 ist **Asymptote** der Spirale.

2. **Polarsubtangente** $OT = -a = \text{konst.}$
Polarsubnormale $ON = -\frac{r^2}{a}$ } (S. 108).

Hieraus folgt die Konstruktion der Tangente an die Spirale.

3. **Krümmungshalbmesser** $\varrho = \frac{r}{\cos^3 OTP} = \frac{r}{\sin^3 u}$.

Konstruktion: Errichte auf PN in N eine Winkelrechte bis zum Schnitt mit der Verlängerung von PO in Q, ferner auf PQ in Q eine Winkelrechte; ihr Schnittpunkt M mit PN ist der Krümmungsmittelpunkt.

3. Logarithmische Spirale.

1. **Gleichung:** $r = ae^{m\varphi}$. Für $\varphi = 0$ ist $r = OA = a$ (Abb. 26). Da ferner für $\varphi = -\infty$, $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein **asymptotischer Punkt**, dem die Spirale für negative φ sich immer mehr nähert, ohne ihn zu erreichen.

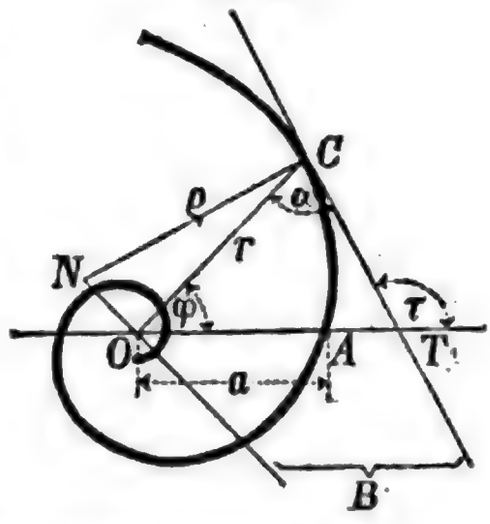
2. Die **Tangente** CT in einem beliebigen Punkte C bildet mit dem Leitstrahle OC den Winkel $u = \alpha = \text{konst.}$, so dafs $\operatorname{ctg}\alpha = m$.

3. **Polarsubnormale**

$$ON = r\operatorname{ctg}\alpha = rm.$$

Polarnormale $CN = r\sqrt{1+m^2} = \frac{r}{\sin\alpha}$.

Abb. 26.



= **Krümmungshalbmesser** ϱ in C.

4. Die **Evolute** der Spirale ist eine der gegebenen kongruente Kurve, gegen diese um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$ gedreht.

5. Die **Fläche**, die der Leitstrahl r von $\varphi = -\infty$ (Pol) bis $+\varphi$, d. h. bis zum Punkte C der Kurve beschreibt, ist gleich dem halben, vom Leitstrahle, der Tangente und der Polarsubtangente gebildeten Dreiecke OBC. $F = r^2 : 4m$.

6. Die **Bogenlänge** von C bis zum Pol ist $s = \frac{r}{\cos\alpha} = CB$, gleich der Länge der Tangente CT bis zum Schnitte mit NO.

e. Gemeine Kettenlinie.

Die gemeine Kettenlinie ist die Gleichgewichtslinie eines an zwei Punkten aufgehängten, vollkommen biegsam gedachten Fadens, dessen Belastung überall proportional seiner Länge ist. Der Parameter ist h.

Digitized by Google

1. **Gleichung:** $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h}$;

$$x = h \ln\left(\frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) = h \operatorname{Ar\,Cof} \frac{y}{h}.$$

Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt um $h = MO$ tiefer als der tiefste Punkt M der Kettenlinie KK' (Abb. 27).

2. Der Winkel τ der Tangente UP in einem beliebigen Punkte P mit der (wagerechten) x-Achse bestimmt sich aus

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1};\ \cos \tau = \frac{h}{y}.$$

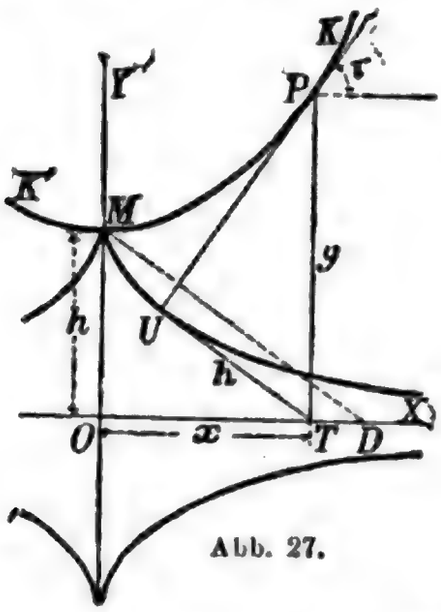


Abb. 27.

Führt man τ als die unabhängige Veränderliche ein, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen der Kettenlinie:

$$x = h \ln \frac{1 + \sin \tau}{\cos \tau} = h \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= h \operatorname{Ar\,Sin}(\operatorname{tg} \tau);\ y = \frac{h}{\cos \tau}.$$

3. Der **Krümmungshalbmesser** im Punkte P ist gleich und entgegengerichtet der Normale im Punkte P, gemessen von P bis zur x-Achse; $\varrho = \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2 \tau}$.

4. Die **Fläche** $OMPT$ hat den Inhalt

$$F = \tfrac{1}{2} h^2 \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h^2 \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = h^2 \operatorname{tg} \tau = h \sqrt{y^2 - h^2}.$$

5. **Bogenlänge** $MP =$

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = h \operatorname{tg} \tau = \sqrt{y^2 - h^2} = PU = OD,$$

wenn TU und $MD \perp PU$ sind.

$$x = h \ln\left[\frac{s}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2}\right] = h \operatorname{Ar\,Sin} \frac{s}{h}.$$

Die Tafeln der Hyperbelfunktionen $\operatorname{Cof} x$ und $\operatorname{Sin} x$ (S. 30 u. 31) geben ohne weiteres die Werte der Ordinaten bzw. Bogenlängen der Kettenlinie für den Parameter $h = 1$.

6. **Evolvente.** (**Huygenssche Traktorie** oder **Antifriktionskurve.**) Ist im Scheitel M der Beginn der Abwicklung, so ist die Gleichung der Evolvente (Abb. 27):

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 = \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \operatorname{Ar\,Cof}\left(\pm \frac{h}{y}\right)\right]^2,$$

je nachdem y (Ordinate der Evolvente) positiv oder negativ ist; oder

Digitized by Google

auch: $x = h\,(\mathfrak{Tg}\,\varphi - \varphi)$; $\quad y = \pm \frac{h}{\mathfrak{Cof}\,\varphi}$, wobei φ eine unabhängige Veränderliche bezeichnet. (Ueber $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}$ S. 65.)

Hierin ist h die unveränderliche Länge $UT = MO$ der Tangente von der Kurve bis zur x-Achse. Die Traktorie hat also die Eigenschaft, dafs die Länge der Tangente von der Kurve bis zur x-Achse unveränderlich ist. Die x-Achse ist die Asymptote der vier Kurvenzweige. Die Evolute der Traktorie (vgl. S. 93) ist die Kettenlinie KMK'. P ist der Krümmungsmittelpunkt; $\varrho = PU$ (s. o.).

Bogen $MU = h \ln (y : h)$.

7. Bezeichnet $2L$ die Länge einer Kette, $2l$ die wagerechte Entfernung, $2b$ die lotrechte Entfernung ihrer Aufhängepunkte, so findet man den Parameter h, den Anfangspunkt der Koordinaten und damit den tiefsten Punkt der Kettenlinie, wie folgt: Durch Versuche bestimmt man mit Hilfe der Tafel für $\lg \mathfrak{Sin}\,\varphi$ (S. 32) die Gröfse φ aus

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l}, \quad \text{bzw. aus}$$

$$\lg \mathfrak{Sin}\,\varphi - \lg \varphi = \tfrac{1}{2} \lg (L + b) + \tfrac{1}{2} \lg (L - b) - \lg l.$$

Dann ist $h = l : \varphi$. Berechnet man noch die Gröfse ψ aus $\mathfrak{Tg}\,\psi = b : L$ (Tafel S. 34), so liegt der Anfangspunkt der Koordinaten in einer Tiefe $= L\,\mathfrak{Ctg}\,\varphi$ unter dem Mittelpunkte derjenigen Strecke, welche die Aufhängepunkte der Kette verbindet, und in einem wagerechten Abstande $= \psi h$ von jenem Mittelpunkte, u. zw. nach dem tiefer gelegenen Aufhängepunkte zu.

8. Liegen die Aufhängepunkte der Kette gleich hoch, so ist

$$b = 0, \qquad \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}, \qquad h = \frac{l}{\varphi}.$$

Die Tiefe des Anfangspunktes der Koordinaten unter der Linie der Aufhängepunkte ist $y_0 = L\,\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

Der Aufhängewinkel α ergibt sich aus $\cos \alpha = \frac{h}{y_0} = \frac{l\,\mathfrak{Tg}\,\varphi}{L\,\varphi}$.

f. Gleichungen einiger anderer Kurven.

Kurve	Rechtwinklige Koordinaten	Polarkoordinaten
1. Zissoide.	$y^2 (a - x) = x^3$	$r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$
2. Lemniskate.	$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$	$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$
3. Konchoide.	$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2$	$r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a$
4. Descartessches Blatt.	$x^3 + y^3 = 3 a x y$	$r = \frac{3 a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$
5. Vierblatt.	$(x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 x^2 y^2$	$r = a \sin 2\varphi$

Digitized by Google

1. **Zissoide** (Efeublattkurve, Abb. 28). Gegeben ein Kreis vom Durchmesser a; im Endpunkte A eines festen Durchmessers OA, der x-Achse, die Tangente AB. Vom anderen Endpunkte O, dem Koordinaten-Anfangspunkte, werden beliebige Sekanten OB bis zum Schnitte mit AB gezogen. Macht man nun $BD = OC$ oder $OD = BC$, so bestimmen die Punkte D die Zissoide.

Abb. 28.

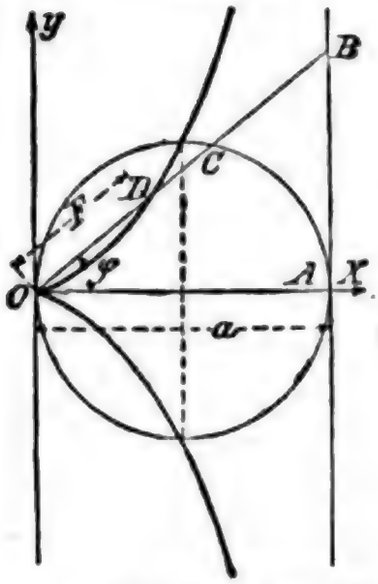


Abb. 29.

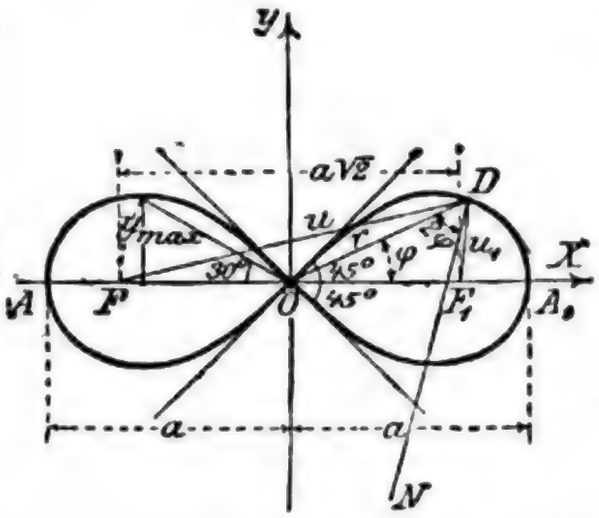
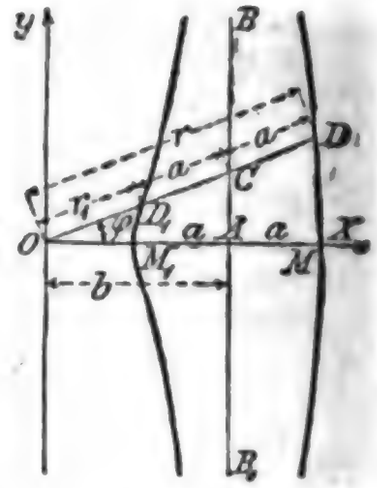


Abb. 30.



2. **Lemniskate** (Schleifenkurve, Abb. 29) ist der geometrische Ort aller Punkte D, für die das Produkt ihrer Abstände u und u_1 von zwei festen Punkten F und F_1 unveränderlich, u. zw. $= \frac{1}{2}a^2$ ist. Der Abstand $FF_1 = a\sqrt{2}$.

Die in der Mitte O der Strecke FF_1 (im Koordinaten-Anfangspunkte) sich schneidenden Kurvenäste stehen winkelrecht aufeinander.

Die Halbachse der Kurve ist a. Der Winkel zwischen Leitstrahl $OD = r$ und Normale DN ist 2φ. Für y_{max} ist $\varphi = 30^0$ und $r = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die ganze Fläche der Lemniskate ist $F = a^2$.

3. **Konchoide** (Muschelkurve, Abb. 30) ist der geometrische Ort der Endpunkte DD_1 der von einem Pole O nach einer Geraden BAB_1 gezogenen Strahlen OD_1CD, auf denen man, von ihren Schnittpunkten C mit BAB_1 aus, die unveränderliche Länge $\pm a$ abträgt. Die Entfernung der Geraden BAB_1 vom Pol O ist gleich b.

C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raume.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf drei zueinander rechtwinklige Raumkoordinaten.

1. Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander l ist; sind ferner α, β, γ die Winkel, die l mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{l} \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{l} \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Teilt man die vom Punkte (x_1, y_1, z_1) nach dem Punkte (x_2, y_2, z_2) gerichtete Strecke l im Verhältnis $m : n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x, y, z, so ist

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \qquad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}.$$

Digitized by Google

3. Der **Winkel** φ, den zwei durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 gegebene Richtungen miteinander einschließen, ist bestimmt durch $\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$.
Stehen beide Richtungen winkelrecht aufeinander ($\varphi = 90^0$), so ist
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

4. Nennt man λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale zu den beiden unter 3. angegebenen Richtungen, also zur Ebene des Winkels φ, mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist
$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1}{\sin\varphi};\quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1}{\sin\varphi}$$
$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}{\sin\varphi}.$$

Legt man eine Gerade von der Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) und eine zweite von der Richtung $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ durch den Punkt (x_2, y_2, z_2), so ist der kürzeste Abstand der Geraden voneinander gleich dem absoluten Werte von
$$p = (x_2 - x_1)\cos\lambda + (y_2 - y_1)\cos\mu + (z_2 - z_1)\cos\nu.$$

5. Eine **gerade Linie** im Raum ist durch die beiden Gleichungen bestimmt $y = m_1 x + b_1$ $\quad z = m_2 x + b_2$.
Geht eine Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und bildet sie mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so sind ihre Gleichungen $\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\cos\beta} = \dfrac{z - z_1}{\cos\gamma}$.
In den vorstehenden Gleichungen ist sonach $m_1 = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ $\quad m_2 = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

Die Gleichungen der durch die Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) gehenden geraden Linie sind $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

6. Bedingung dafür, daß sich zwei gerade Linien schneiden, ist, daß die Determinante der auf die Form $mx + ny + pz + q = 0$ gebrachten vier Gleichungen der beiden Geraden identisch verschwindet.

7. **Gleichungen der Ebene.**

α. Im allgemeinen ist eine Ebene durch die Gleichung ersten Grades bestimmt $Ax + By + Cz + D = 0$.
Alle Punkte also, deren Koordinaten einer Gleichung ersten Grades zwischen drei Veränderlichen genügen, liegen in einer Ebene.
$By + Cz + D = 0$: Gleichung einer Ebene parallel zur x-Achse
$Ax + Cz + D = 0$: „ „ „ „ „ y- „
$Ax + By + D = 0$: „ „ „ „ „ z- „
$Ax + By + Cz = 0$: „ „ „, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

β. Schneidet eine Ebene die Achsen in den Entfernungen a, b, c vom Anfangspunkte, so ist ihre Gleichung $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

$x = a$: Gleichung einer Ebene parallel zur yz-Ebene.
$y = b$: „ „ „ „ „ xz- „
$z = c$: „ „ „ „ „ xy- „

Digitized by Google

γ. Bildet eine vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgehende Strecke l mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist die Gleichung einer Ebene, die im Endpunkte von l winkelrecht auf l steht:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0. \quad \textbf{(Normalform.)}$$

δ. Um die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad l = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, dafs l positiv wird.

8. Der **Abstand** p eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von einer Ebene, deren Gleichung die Normalform (s. o.) hat, ist

$$p = \pm(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - l);$$

p wird positiv, wenn der Punkt (x_1, y_1, z_1) und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Ebene liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

9. Ist $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist die auf ihr in einem Punkte (x_1, y_1, z_1) errichtete **Winkelrechte** bestimmt durch $z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1)$; $\qquad z - z_1 = \frac{C}{B}(y - y_1)$.

10. Gehen zwei Richtungen ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$) durch denselben Punkt (x_1, y_1, z_1), so ist die Gleichung der Ebene, die durch die Richtungen und den Punkt bestimmt ist,

$$(x-x_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + (y-y_1)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + (z-z_1)(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1) = 0.$$

11. Sind $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen, so ist, wenn k eine beliebige Zahl,

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

die Gleichung aller Ebenen, die durch die Schnittlinie beider Ebenen gehen. Die Gleichung der Projektion dieser Schnittlinie auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination von z aus den Gleichungen beider Ebenen; entsprechend die Gleichungen der Projektionen auf die xz- bezw. yz-Ebene.

12. Der **Winkel** φ, den zwei Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\pm\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}.$$

Die Ebenen sind parallel ($\varphi = 0$), wenn $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Die Gleichungen zweier parallelen Ebenen sind

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ und}$$
$$k(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0.$$

Digitized by Google

Die Ebenen stehen winkelrecht zueinander ($\varphi = 90^0$), wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

13. Die Winkel zweier Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11.) werden halbiert durch die Ebenen

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0.$$

14. Umwandlung der Koordinaten.

Die Koordinaten des alten Systems werden mit x, y, z, die des neuen mit x', y', z' bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung der Achsen. Sind f, g, h die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x'; \quad y = g + y'; \quad z = h + z'.$$

β) Drehung der Achsen um den Anfangspunkt. Die Cosinus der Winkel, welche die neuen Achsen x', y', z' mit der alten Achse x bilden, seien: a', b', c',
entsprechend mit der alten Achse y: a'', b'', c'',
entsprechend mit der alten Achse z: a''', b''', c'''; dann ist

$$\begin{array}{l|l} x = a'x' + b'y' + c'z' & x' = a'x + a''y + a'''z \\ y = a''x' + b''y' + c''z' & y' = b'x + b''y + b'''z \\ z = a'''x' + b'''y' + c'''z'. & z' = c'x + c''y + c'''z. \end{array}$$

Es gelten folgende Beziehungen:

1) $\begin{array}{l} a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1 \\ b'^2 + b''^2 + b'''^2 = 1 \\ c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 1. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} a'b' + a''b'' + a'''b''' = 0 \\ b'c' + b''c'' + b'''c''' = 0 \\ c'a' + c''a'' + c'''a''' = 0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\ a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 = 1. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ a''a''' + b''b''' + c''c''' = 0 \\ a'''a' + b'''b' + c'''c' = 0. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} a' = b''c''' - c''b''' \\ b' = c''a''' - a''c''' \\ c' = a''b''' - b''a'''. \end{array}$

6) $\begin{array}{l} a'' = c'b''' - b'c''' \\ b'' = a'c''' - c'a''' \\ c'' = b'a''' - a'b'''. \end{array}$

7) $\begin{array}{l} a''' = b'c'' - c'b'' \\ b''' = c'a'' - a'c'' \\ c''' = a'b'' - b'a''. \end{array}$

γ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α) und β) entsprechend.

δ) Um die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes in **Polarkoordinaten** r, φ, ϑ zu verwandeln, suche man zunächst die Koordinaten x', y', z' des Punktes, bezogen auf ein rechtwinkliges System, dessen Anfangspunkt der Pol, dessen $x'y'$-Ebene die Aequatorebene und dessen x'-Achse die Polarachse ist, von der aus φ gezählt wird; dann ist $x' = r \cos\varphi \cos\vartheta$; $y' = r \sin\varphi \cos\vartheta$; $z' = r \sin\vartheta$.

Für die Punkte in der $x'y'$-Ebene ist $\vartheta = 0$.

D. Kurven doppelter Krümmung.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine Kurve doppelter Krümmung bezogen auf Parallelkoordinaten wird dargestellt durch zwei **Gleichungen**:

$$F_1(x, y, z) = 0; \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Sie ist die Schnittkurve der beiden Flächen, die diese Gleichungen, einzeln genommen, darstellen.

Digitized by Google

Die Kurve ist auch bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projektionen auf die xy- und die xz-Ebene: $y = \varphi_1(x)$; $z = \varphi_2(x)$.

2. Die Winkel α, β, γ, welche die **Tangente** im Punkte (x, y, z) mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

das **Bogendifferential** erhält man aus

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

3. Die **Gleichungen der Tangente** im Punkte (x, y, z) sind

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

4. Die **Gleichung der Normalebene** ist

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

5. Eine Ebene, die durch den Punkt (x, y, z) und die beiden benachbarten Punkte der Kurve geht, nennt man die **Schmiegungsebene** oder **Krümmungsebene** in dem Punkte (x, y, z). Setzt man

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

so ist die Gleichung der Krümmungsebene

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Die Winkel λ, μ, ν, welche die Normale zur Krümmungsebene, d. i. die sogen. Binormale, mit den Koordinatenachsen bildet, folgen aus $\cos\lambda = \frac{A}{D}$, $\cos\mu = \frac{B}{D}$, $\cos\nu = \frac{C}{D}$, wenn gesetzt wird:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$
$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

6. Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarten Tangenten mit $d\tau$, so ist

$$d\tau = \frac{D}{ds^2},$$

und der Halbmesser für die Krümmung in der Krümmungsebene oder der **ersten Krümmung** der Kurve ist $\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}$.

Die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind

$$x' = x + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \qquad y' = y + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \qquad z' = z + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

7. Zwei benachbarte Krümmungsebenen bilden miteinander einen Winkel

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$
$$= \frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{D^2}\,ds.$$

Digitized by Google

Man nennt $\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}$ den Halbmesser der **zweiten Krümmung** oder der Drehung der Kurve.

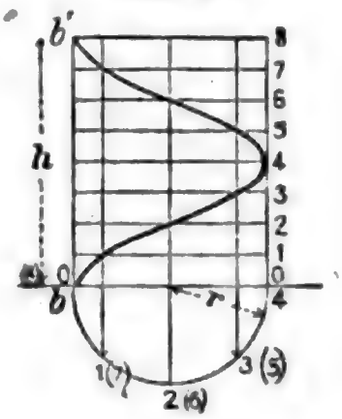
Die Kurve ist eine ebene Kurve, wenn für alle Punkte $d\vartheta = 0$ oder $A d^3x + B d^3y + C d^3z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$ ist.

b. Zylindrische Schraubenlinie.

1. Eine zylindrische Schraubenlinie wird durch einen Punkt erzeugt, der gleichförmig eine Kreislinie durchläuft, während sich diese in einer Richtung, die auf ihrer Ebene winkelrecht steht, gleichförmig fortbewegt, also den Mantel eines geraden Kreiszylinders beschreibt.

Der Halbmesser dieses Zylinders sei r, die Steigung der Schraube, d. h. der Weg, den der Kreis auf dem Zylindermantel zurücklegt, während der Punkt die Kreislinie einmal durchläuft, $bb' = h$ (Abb. 31), die Tangente des Steigungswinkles α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} = a$.

Abb. 31.



Die Achse des Zylinders sei die z-Achse; die x-Achse schneide die Schraubenlinie im Punkte b. Der Winkel, den die Projektion des Leitstrahles auf die xy-Ebene mit der x-Achse bildet, sei φ; alsdann sind die **Gleichungen der Schraubenlinie:**

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = ar\varphi,$$

oder $$x = r\cos\frac{z}{ar}, \quad y = r\sin\frac{z}{ar}.$$

2. Die **Gleichungen der Tangente** sind

$$\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{a}.$$

Die Tangente bildet mit der z-Achse und den Seiten des Zylinders den unveränderlichen Winkel $\gamma = 90^0 - \alpha$. Wickelt man daher den Mantel des Zylinders und mit ihm die Schraubenlinie in eine Ebene ab, so wird die Kurve eine gerade Linie.

3. Die **Krümmungshalbmesser** sind

$$\varrho_1 = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2\alpha} \quad \left(\frac{1}{\varrho_1} = \text{erste Krümmung}\right),$$

$$\varrho_2 = r\frac{1 + a^2}{a} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \left(\frac{1}{\varrho_2} = \text{zweite Krümmung}\right).$$

Es sind also ϱ_1 und ϱ_2 unveränderlich, aufserdem ist ϱ_1 stets winkelrecht zur z-Achse.

4. **Bogenlänge** $s = \frac{r}{\cos\alpha}\varphi = r\varphi\sqrt{1 + a^2}$.

5. **Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie** auf die xz-Ebene (Abb. 31). Man teile die Steigung $h = bb'$ in n (hier 8)

Digitized by Google

gleiche Teile, ebenso von b aus den als Kreis sich darstellenden Normalschnitt des Zylinders in n gleiche Teile. Durch die ersteren Teilpunkte lege man wagerechte, durch die letzteren lotrechte Linien; der Schnittpunkt einer Wagerechten mit der entsprechenden Lotrechten ist ein Punkt der Projektion der Schraubenlinie.

E. Krumme Flächen.

a. Allgemeine Sätze.

1. Die **Gleichung einer krummen Fläche** in rechtwinkligen Koordinaten hat die allgemeine Form $F(x, y, z) = 0$.

Durch Auflösung nach z wird die Gleichung $z = f(x, y)$.

Es werde bezeichnet

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Gleichung der **Tangentialebene** im Punkte (x, y, z) der Fläche:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

wenn ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bezeichnen.

3. Gleichungen der **Normale**: $\dfrac{\xi - x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \dfrac{\eta - y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \dfrac{\zeta - z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$

Die Winkel α, β, γ, welche die Normale mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos\alpha = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z},$$

worin $$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

4. Das **Element der krummen Fläche**, dessen Projektion auf die xy-Ebene $= dx\,dy$, ist $dM = \dfrac{dx\,dy\,W}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$

Die doppelte Integration dieses Ausdruckes (nach beliebigen oder voneinander abhängigen Grenzen) ergibt den Inhalt eines bestimmten Bereiches der krummen Fläche.

5. Jede durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittlinie, die man **Normalschnitt** nennt. Bildet die Tangente an diesen mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, so ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\cos\mu + t\cos^2\mu}.$$

6. **Satz von Meunier.** Eine Ebene, die durch die Tangente des Normalschnittes hindurchgeht und mit dessen Ebene einen Winkel ϑ

Digitized by Google

bildet, schneidet die Fläche in einem schiefen Schnitte; sein Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkte ist

$$\varrho' = \varrho \cos \vartheta.$$

7. Die aufeinander winkelrechten Normalschnitte, für welche ϱ ein Maximum ϱ_1 oder ein Minimum ϱ_2 wird, nennt man **Hauptnormalschnitte.** Die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 erhält man aus den Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1 + q^2)\, r - 2\, p\, q\, s + (1 + p^2)\, t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

8. **Satz von Euler.** Für einen beliebigen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene von ϱ_1 den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_2}.$$

9. Den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ nennt man das **Maß der Krümmung** und den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ die **mittlere Krümmung** der Fläche im Punkte (x, y, z).

b. Flächen zweiter Ordnung.

1. Die **allgemeine Form der Gleichung** der Flächen zweiter Ordnung ist

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2\, a_{12} x y + 2\, a_{23} y z + 2\, a_{31} z x + 2\, a_1 x + 2\, a_2 y + 2\, a_3 z + a = 0.$$

2. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_1; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_2$$

(wobei $a_{ik} = a_{ki}$), so ergeben sich folgende Bedingungen für die **Hauptflächen**, welche die allgemeine Gleichung darstellt, wenn $a_{11} > 0$ ist:

$\Delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\Gamma < 0$ Ellipsoid.

oder $\Delta < 0$, $\delta_1 > 0$, oder $\Delta > 0$, $\delta_1 < 0$:
- $\Gamma < 0$ einschaliges Hyperboloid.
- $\Gamma = 0$ Kegel.
- $\Gamma > 0$ zweischaliges Hyperboloid.

$\Delta = 0$:
- $\delta_1 < 0$ oder $\delta_2 < 0$ hyperbolisches Paraboloid.
- $\delta_1 > 0$ oder $\delta_2 > 0$ elliptisches Paraboloid.

3. **Mittelpunktflächen** ($\Delta \gtrless 0$). Der Mittelpunkt ergibt sich als Durchschnitt der Ebenen

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_1 = 0,$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_2 = 0,$$
$$a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_3 = 0.$$

Digitized by Google

4. Es ist die Gleichung bezogen auf den Mittelpunkt als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen in die Hauptachsen der Flächen fallen,

für das **Ellipsoid**: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

für das **einschalige Hyperboloid**: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$

für das **zweischalige Hyperboloid**: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Hierin bedeuten a, b, c die Halbachsen der Hauptschnitte; sie sind im ersten Falle sämtlich reell. Im zweiten Falle bedeutet c und im dritten Falle bedeuten b und c die imaginären Halbachsen der Hauptschnitthyperbeln.

5. **Kegel.** Jede homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=0$$

stellt einen Kegel dar.

Ist die Leitkurve des Kegels eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, deren Ebene in der Entfernung h winkelrecht zur z-Achse steht, so ist die Gleichung des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{h^2}=0.$

Ist die Leitkurve des Kegels ein ebensolcher Kreis vom Halbmesser a, so ist in vorstehender Gleichung $b=a$ zu setzen (Gleichung des geraden Kreiskegels). Vgl. auch b. 1. S. 95 u. 96.

6. **Kugel.** Mittelpunktgleichung: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, so ist ihre Gleichung: $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=r^2$.

Jede Gleichung von der Form

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

stellt eine Kugel dar; dabei ist $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$.

$$\xi=-\tfrac{1}{2}A;\quad \eta=-\tfrac{1}{2}B;\quad \zeta=-\tfrac{1}{2}C;$$

7. **Paraboloide.** Gleichung in einfachster Form: $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z.$

Das obere Zeichen gilt für das elliptische Paraboloid; p, q sind die Parameter der Hauptschnittparabeln. Für das hyperbolische Paraboloid ist p der Parameter der Hauptschnittparabel, $q=p\,\mathrm{tg}^2\varphi$; φ ist der halbe Winkel der Asymptotenebenen.

8. **Zylinder.** Die Gleichung eines auf einer Koordinatenebene winkelrecht stehenden Zylinders ist gleichlautend mit der Gleichung der Durchschnittskurve in der betreffenden Koordinatenebene.

Ist der Durchschnitt eines Zylinders mit der xy-Ebene eine Ellipse oder Hyperbel, deren Halbachsen a und b sind, und bilden die Zylinderseiten mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist die Gleichung des Zylinders

$$\frac{\left(x-z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2}{a^2}\pm\frac{\left(y-z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^2}{b^2}=1.$$

Digitized by Google

Hierbei gilt + für den elliptischen und — für den hyperbolischen Zylinder.

Die Gleichung des parabolischen Zylinders ist

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{2y}{p} - \frac{2x}{q} = 0.$$

VII. Vektorrechnung.*)

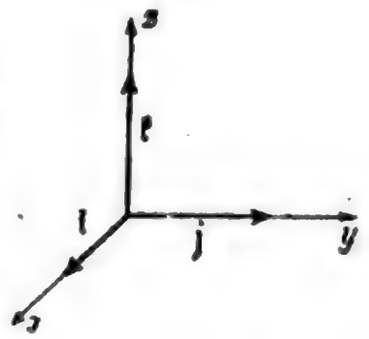
1. Als **„Vektor"** („**gerichtete** Gröfse") bezeichnet man jede Gröfse, die aufser ihrem Zahlenwert („Betrag") noch eine Richtung und einen Richtungssinn hat, z. B. Kraft, Verrückung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, elektrische und magnetische Feldstärke. Zwei Vektoren sind als gleich anzusehen, wenn sie aufser im Betrage noch in Richtung, Pfeil und Dimensionen übereinstimmen.

Als **Skalar** bezeichnet man jede Gröfse, die nur einen Zahlenwert, aber keine Richtung besitzt, wie Arbeit, Dichte, Temperatur, spezifisches Gewicht, Leitfähigkeit, Elektrizitätsmenge.

Vektoren werden durch gotische, ihre Beträge durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ein Vektor vom Betrage Eins heifst **Einheitsvektor.** Seine Dimensionen werden dem Betrage beigelegt.

Im allgemeinen ist der Vektor $\mathfrak{A}$ eine Ortsfunktion $\mathfrak{A}(x, y, z)$. Unter einem Vektorfelde mit der Intensität oder Feldstärke A versteht man einen Raum, wo jedem Punkt in umkehrbar eindeutiger Weise ein Vektor zugeordnet ist (z. B. das Schwerkraftfeld). Diejenige Kurve, deren Tangente in jedem Punkte mit der Richtung des Vektors zusammenfällt, heifst **Vektorlinie.** Zwei Vektorlinien eines Feldes können sich nicht schneiden. Ebenso bestimmt eine skalare Ortsfunktion ein Skalarfeld (z. B. das Temperaturfeld). Alle die Punkte, die demselben Wert des Skalars entsprechen, bestimmen eine Niveaufläche. Zwei Niveauflächen eines Feldes können sich nicht schneiden.

Abb. 32.



2. Jeder Vektor $\mathfrak{A}$ eines Feldes, der parallel mit sich selber verschoben werden darf, ohne sich zu ändern, läfst sich durch drei Vektoren, die nicht ein und derselben Ebene parallel sind, linear und homogen darstellen. Versteht man also unter $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{f}$ drei Einheitsvektoren, die zueinander senkrecht stehen und ein Rechtssystem bilden, d. h. wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand aufeinander folgen (Abb. 32), so ist der Vektor

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{f}$$

und hat die Komponenten $A_1 = A\cos(\mathfrak{i}, \mathfrak{A})$, $A_2 = A\cos(\mathfrak{j}, \mathfrak{A})$,

*) Bearbeitet von Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin. — Ausführlichere Angaben s. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität I; Gans, Einführung in die Vektoranalysis; Jahnke, Vorlesungen über die Vektorrechnung; v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Leipzig, B. G. Teubner.

Digitized by Google

$A_3 = A \cos(\mathfrak{k}, \mathfrak{A})$ und den Betrag $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$, zuweilen auch bezeichnet durch $|\mathfrak{A}|$. Jede Vektorgleichung läfst sich demnach in drei skalare Gleichungen auflösen; und umgekehrt kann man ein System von drei Gleichungen für die Komponenten A_1, A_2, A_3 zu einer Vektorgleichung zusammenfassen. So folgt aus $\mathfrak{A} = 0$, dafs $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, und umgekehrt.

Besteht bereits zwischen drei Vektoren ein linearer homogener Zusammenhang, dann liegen sie parallel zu ein und derselben Ebene und umgekehrt. Und ist endlich $\mathfrak{B} = m\,\mathfrak{A}$, dann stellt $\mathfrak{B}$ einen Vektor dar, der zum Vektor $\mathfrak{A}$ parallel gerichtet ist, der den Betrag $B = m\,A$ hat und dessen Pfeil dem Pfeil von $\mathfrak{A}$ gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem m positiv oder negativ ist.

3. Vektoren werden in derselben Weise addiert, wie Kräfte nach dem Satz vom Krafteck zusammengesetzt werden (geometrische Addition). Die geometrische Addition wird von der gewöhnlichen, algebraischen, mitunter durch die Zeichen $\vec{+}$, $\vec{-}$, $\vec{\Sigma}$ unterschieden.

Die Vektorgleichung $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n = 0$, wonach die Vektoren ein geschlossenes n-Eck bilden, bedeutet für die Mechanik des Massenpunktes, wenn $\mathfrak{A}_i$ Kräfte bedeuten, dafs der Massenpunkt im Gleichgewicht ist; sie liefert für die Elektrizitätslehre, wenn die $\mathfrak{A}_i$ als Stromstärken der in einem Knotenpunkt zusammenfliefsenden effektiven Ströme eines Wechselstromnetzes gedeutet werden, die Kirchhoffsche Regel.

4. Die Multiplikation zweier Vektoren kann entweder skalar oder vektoriell erfolgen. Das skalare Produkt $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ oder $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})$ ist gleich $A\,B \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, so dafs $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}$, d. h. die Faktoren eines skalaren Produktes können ohne weiteres vertauscht werden. Stehen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufeinander senkrecht, dann ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 0$, daher

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} = 0, \qquad \mathfrak{j}\,\mathfrak{k} = 0, \qquad \mathfrak{k}\,\mathfrak{i} = 0.$$

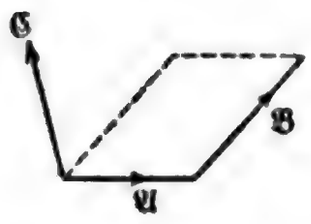
Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Richtung, dann ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \pm A\,B$, je nachdem die Pfeile gleich oder entgegengesetzt sind. Insbesondere ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = A^2$ daher

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{i} = \mathfrak{i}^2 = 1, \qquad \mathfrak{j}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{j}^2 = 1, \qquad \mathfrak{k}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^2 = 1.$$

Wird $\mathfrak{A} = A_1\,\mathfrak{i} + A_2\,\mathfrak{j} + A_3\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{B} = B_1\,\mathfrak{i} + B_2\,\mathfrak{j} + B_3\,\mathfrak{k}$ gesetzt, dann erhält man

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = A_1\,B_1 + A_2\,B_2 + A_3\,B_3.$$

Abb. 33.



5. Das vektorielle Produkt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$, zuweilen noch durch $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezeichnet, stellt den Vektor $\mathfrak{C}$ dar, der auf der Ebene, zu der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel liegen, also sowohl auf $\mathfrak{A}$ wie auf $\mathfrak{B}$, senkrecht steht und einen solchen Pfeil hat, dafs eine Drehung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, auf kürzestem Wege, und eine Schiebung in Richtung von $\mathfrak{C}$ eine Rechtsschraubung ergibt. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bilden daher ein Rechtssystem. Die Länge des Vektors $\mathfrak{C}$ ist gleich $A\,B \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wird also durch den Inhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gemessen (Abb. 33). Daher ist

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]^2 = \mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}^2 - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})^2 = A^2\,B^2 - A^2\,B^2 \cos^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Es ist $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}]$, d. h. das vektorielle Produkt zweier Vektoren ändert bei Vertauschung der Faktoren sein Vorzeichen. Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Richtung, dann ist $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = 0$, insbesondere verschwindet auch $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}]$; also

$$[\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}] = 0, \qquad [\mathfrak{j}\,\mathfrak{j}] = 0, \qquad [\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}] = 0$$
$$[\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}, \qquad [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}, \qquad [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}.$$

Digitized by Google

Mit Benutzung der Vektorkomponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (A_2 B_3 - A_3 B_2)\,\mathfrak{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\,\mathfrak{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\,\mathfrak{k}.$$

6. Hiernach läfst sich die mechanische Arbeit als skalares Produkt von Kraftvektor und Wegvektor auffassen, die Leistung als skalares Produkt von Kraftvektor und Geschwindigkeitsvektor, die lebendige Kraft als halbes skalares Produkt von Impulsvektor und Geschwindigkeitsvektor. Dagegen sind Kräftepaar, Drehung, Drehmoment Vektoren, die durch ihre Länge den Zahlenwert und durch ihre Richtung die Achse von Kräftepaar, Drehung und Drehmoment bestimmen.

Die sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers lassen sich in die beiden Vektorgleichungen zusammenziehen: $\Sigma\,\mathfrak{P}_i = 0$, $\Sigma\,[\mathfrak{r}_i \mathfrak{P}_i] =$ wo $\mathfrak{P}_i = X_i\,\mathfrak{i} + Y_i\,\mathfrak{j} + Z_i\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_i = x_i\,\mathfrak{i} + y_i\,\mathfrak{j} + z_i\,\mathfrak{k}$ gesetzt ist. Dabei ist die $\mathfrak{i}$-Komponente von $[\mathfrak{r}_i \mathfrak{P}_i]$ gleich $y_i Z_i - z_i Y_i$.

Man kann auch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, die Dichte des Leitungsstromes $\mathfrak{J}$ und die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ als Vektoren auffassen. Dann liefert das skalare Produkt der elektrischen Feldstärke und der Dichte des Leitungsstromes die entwickelte Joulesche Wärme; und das vektorielle Produkt der Dichte des Leitungsstromes und der magnetischen Induktion liefert die ponderomotorische Kraft auf die Volumeinheit eines stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld.

7. Rechenregeln für die Vektormultiplikation:

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{A},$$
$$[\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{C}\mathfrak{A}].$$

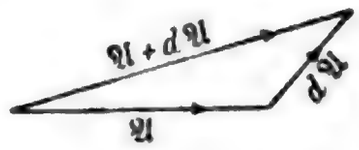
Das skalare Produkt eines Vektors mit dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren stellt das Volumen eines Quaders mit den Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dar, daher ist

$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}\,[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]; \text{ folglich } \mathfrak{A}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = 0.$$

Für die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren gilt die Formel:

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Abb. 34.



8. Das Differential $d\mathfrak{A}$ eines Vektors $\mathfrak{A}$ stellt wieder einen Vektor dar (Abb. 34). Für das skalare Produkt gilt $d\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\,d\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\,d\mathfrak{A}$, also $d\,(\mathfrak{A}^2) = 2\,\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}$. Ist der Betrag A konstant, so ist das skalare Produkt $\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A} = 0$, d. h. der Vektor $d\mathfrak{A}$ steht auf $\mathfrak{A}$ senkrecht. Für das vektorielle Produkt gilt $d\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\,d\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}\,d\mathfrak{A}]$, wobei auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten ist.

9. Aus einem Feldvektor $\mathfrak{A} = A_1\,\mathfrak{i} + A_2\,\mathfrak{j} + A_3\,\mathfrak{k} = \mathfrak{A}\,(x, y, z)$ entspringen zwei Vektoren und ein Skalar nach der Vorschrift:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A}^*) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathfrak{k}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}^*) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{grad}\alpha^*) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,\mathfrak{k}.$$

10. Bezeichnet $\mathfrak{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit von der Dichte ρ nach Gröfse und Richtung für einen bestimmten Punkt des Raumes, dann gibt

*) Sprich: rotor $\mathfrak{A}$, divergenz $\mathfrak{A}$, Gradient α. Statt rot $\mathfrak{A}$ findet man auch curl $\mathfrak{A}$.

Digitized by Google

div $(\rho\,\mathfrak{v})$ an, wieviel mehr Flüssigkeit aus der Volumeinheit in der Zeiteinheit aus- als eingeströmt ist, so daſs $\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v}) = 0$ ist; der halbe Rotor $\frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{v}$ bestimmt die Wirbelgeschwindigkeit. Der halbe Rotor der Weggeschwindigkeit eines starren Körpers ist gleich seiner Drehgeschwindigkeit. Der Gradient von α zeigt die Richtung des gröfsten Anstieges des Skalars α an.

11. Für jede geschlossene Kurve s, die ein Flächenstück F begrenzt, dessen mit einem Umlaufsinn versehenes Flächenelement durch den dazu normalen Vektor $d\mathfrak{F}$ dargestellt wird, ist

$$\int_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{F} = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} \quad \text{(Stokesscher Satz).}$$

Dieser Satz ermöglicht die Umwandlung eines Linienintegrals in ein Flächenintegral. Ist F eine geschlossene Fläche, dann ist

$$\int_{\mathfrak{O}} \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{F} = 0.$$

Ist V ein Raumgebiet, das von der Fläche F begrenzt wird, dann gilt $\int_{(V)} \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dV = \int_{\mathfrak{O}} \mathfrak{A}_n\, d\mathfrak{F}$ (Gausssscher Satz).

Dieser Satz verwandelt ein Oberflächenintegral in ein Raumintegral und umgekehrt.

Dabei ist die Flächennormale nach **aufsen** gerichtet zu nehmen.

12. Formeln:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$$
$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \operatorname{div}\mathfrak{A} + \operatorname{div}\mathfrak{B}, \quad \operatorname{rot}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \operatorname{rot}\mathfrak{A} + \operatorname{rot}\mathfrak{B}$$
$$\operatorname{div}(\alpha\mathfrak{A}) = \alpha \operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\operatorname{grad}\alpha$$
$$\operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}.$$

VIII. Fouriersche Reihen und Harmonische Analyse.*)

1. Fouriersche Reihen sind Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Arguments fortschreiten. Ein Beispiel bietet die **harmonische Schwingung**, dargestellt durch $y = a\sin(qt+q)$ oder $y = a\cos(qt+q)$, wo a die Amplitude, y die Ordinate des Massenpunktes in bezug auf die Ruhelage oder den Schwingungsmittelpunkt zur Zeit t, c die konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit und q den **Phasenwinkel** der Schwingung bedeuten. Ihre Periode ist $\frac{2\pi}{q} = T$ und deren reziproker Wert die **Frequenz.** Eine harmonische Schwingung ist durch drei Gröfsen, Amplitude, Frequenz und Phase, vollständig

*) Bearbeitet von Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin. — Ausführlichere Angaben siehe C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig, Göschen; E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig, Vieweg u. Sohn; C. Runge, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl. 1908 und E. T. Z. 1909, S. 817; F. F. Martens, Arch.-Math. Ph. (3) 17.

Digitized by Google

bestimmt. Beispiel einer Sinusschwingung: Bewegung des Kreuzkopfes einer liegenden Dampfmaschine mit sehr langer Schubstange oder des Pendels für kleine Werte des Ausschlagwinkels.

2. Harmonische Schwingungen von gleicher Frequenz lassen sich durch Vektoren (S. 121) darstellen, deren Längen durch die Maßzahlen der Amplituden und deren Richtungen durch die Phasenwinkel bestimmt sind; sie lassen sich wie Vektoren nach dem Satz vom Vektoreck zusammensetzen. Der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel wird Phasenverschiebungswinkel zwischen den beiden Sinuswellen genannt.

3. Ist die Schwingung nicht einfach sinusförmig, aber doch periodisch, so kann man sie durch Uebereinanderlagerung mehrerer Sinus- oder Cosinusschwingungen mit verschiedenen Perioden, d. h. als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen, deren Perioden gleich der Periode der gegebenen Funktion oder gleich aliquoten Teilen dieser Periode sind.

4. Allgemein kann man jede periodische Funktion $y = f(x)$ mit der Periode 2π wie folgt darstellen:

$$y = f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

$$= A_0 + A_1 \sin (x + \varphi_1) + A_2 \sin (2x + \varphi_2) + \ldots,$$

wo $\quad A_0 = \frac{1}{2} b_0, \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k},$

$$\sin \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \qquad \cos \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Dabei lassen sich die Koeffizienten a_k, b_k (einschl. b_0) aus den bestimmten Integralen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) - f(-x)] \sin kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)] \cos kx\, dx$$

zahlenmäßig berechnen, wenn die darzustellende Funktion $f(x)$ durch ihr analytisches Gesetz gegeben ist.

Digitized by Google

5. Ist die Periode der Funktion $f(x)$ nicht 2π, sondern $2p$, dann hat man $\frac{x\pi}{p}$ statt x einzuführen. Ist die darzustellende Funktion gerade (d. h. ändert sie sich nicht, wenn x durch $-x$ ersetzt wird), dann enthält die Fouriersche Reihe nur Cosinusglieder; die a_k sind dann sämtlich gleich Null. Ist $f(x)$ ungerade (d. h. ändert sie nur das Vorzeichen, falls x durch $-x$ ersetzt wird), dann treten nur Sinusglieder auf; die b_k verschwinden einschl. b_0.

6. Ist die Schwingung nur angenähert periodisch, etwa eine gedämpfte Schwingung, so ist sie innerhalb eines beliebig herausgegriffenen Intervalls ebenfalls durch eine Fouriersche Reihe darstellbar, deren Periode das beliebig gewählte Intervall ist.

Eine solche Darstellung gilt nur für diesen beschränkten Bereich.

7. Graphische Darstellungen einiger Fourierscher Reihen:

1) $$y = h + \frac{4h}{\pi}\left(\sin qx + \frac{1}{3}\sin 3qx + \ldots\right).$$

Die Kurve setzt sich aus einzelnen Linienteilen, parallel zur x-Achse, zusammen und ist an den Stellen $x = 0, \pm\frac{T}{2}, \pm T \ldots$ unstetig (Abb. 35).

2) $$y = \frac{2h}{\pi}\left(\sin qx - \frac{1}{2}\sin 2qx + \frac{1}{3}\sin 3qx - \ldots\right).$$

Abb. 35.

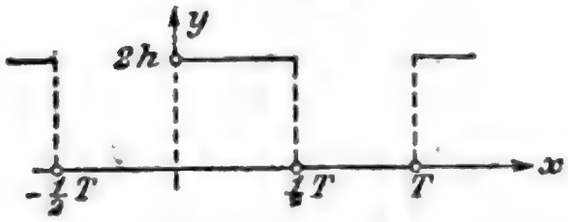
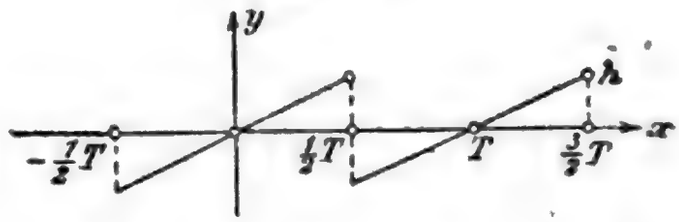


Abb. 36.

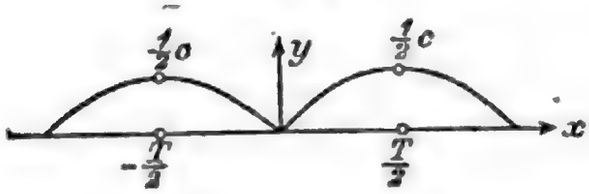


Der Kurvenzug besteht aus Parallelen durch die Punkte $x = 0, \pm T, \pm 2T, \ldots$ der x-Achse und ist unstetig an den Stellen $x = \pm\frac{T}{2}, \pm\frac{3T}{2}, \ldots$ (Abb. 36.)

3) $$y = \frac{c}{3} - \frac{2c}{\pi^2}\left(\cos qx + \frac{1}{4}\cos 2qx + \frac{1}{9}\cos 3qx + \ldots\right).$$

Der Kurvenzug besteht aus Parabelbögen, die an den Stellen $\pm\frac{T}{2}, \pm\frac{3T}{2}, \ldots$ die Höhe $\frac{c}{2}$ haben (Abb. 37).

Abb. 37.



8. Wenn die Kurve $y = f(x)$ nicht durch ihr analytisches Gesetz, sondern als Kurvendiagramm oder nur für eine beschränkte Zahl von Punkten gegeben ist, so treten Summen an die Stelle der Integrale. Um ein solches Diagramm, z. B. die durch den Oscillographen aufgenommenen Strom- und Spannungskurven eines Wechselstroms, durch

Digitized by Google

ine Fouriersche Reihe darzustellen, schlage man folgendes Verfahren in (harmonische Analyse):

Man teile*) vom Anfangspunkt der Koordinaten aus auf der Abszissenachse die Periode 2π in $4r$ gleiche Teile, Teilpunkte $x_1, x_2, \ldots x_{4r}$, $x_n = \frac{n\pi}{2r}$; zugehörige Funktionswerte $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{4r}$, wo $y_0 = y_{4r}$, $y_n = f\left(\frac{n\pi}{2r}\right)$ gesetzt ist. Alsdann setze man an

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2r-1} a_k \sin kx + b_0 + \sum_{k=1}^{2r-1} b_k \cos kx$$

und berechne die Koeffizienten a_k, b_k aus den Formeln

$$a_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \sin kx_n, \qquad b_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \cos kx_n,$$

$$k = 1, 2, \ldots (2r-1)$$

$$b_0 = \frac{1}{4r} \sum_{n=1}^{4r} y_n, \qquad b_{2r} = \frac{1}{4r} \sum_{n=1}^{4r} (-1)^n y_n, \qquad x_n = \frac{n\pi}{2r}.$$

9. Die Rechnung wird vereinfacht durch Einführung der Summen und Differenzen je zweier untereinander stehender Werte des Schemas

			y_1		y_2	y_3	$\ldots$	y_{2r-1}	y_{2r}
		y_{4r}	y_{4r-1}		y_{4r-2}	y_{4r-3} $\ldots$		y_{2r+1}	
Summe	. .	u_0	u_1		u_2	u_3	$\ldots$	u_{2r-1}	u_{2r}
Differenz	. .		v_1		v_2	v_3	$\ldots$	v_{2r-1}	
	u_0	u_1	$\ldots$	u_{r-1}	u_r	v_1	v_2	$\ldots$ v_{r-1}	v_r
	u_{2r}	u_{2r-1}	$\ldots$	u_{r+1}		v_{2r-1}	v_{2r-2} $\ldots$	v_{r+1}	
Summe .	w_0	w_1	$\ldots$	w_{r-1}	w_r	z_1	z_2	$\ldots$ z_{r-1}	z_r
Differenz	w_0'	w_1'	$\ldots$	w'_{r-1}		z_1'	z_2'	$\ldots$ z'_{r-1}	

Hiernach berechnet man die Koeffizienten der Fourierschen Reihe aus den Formeln:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{r} z_n \sin kx_n & (k = 1, 3, 5, \ldots 2r-1) \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{r} z_n' \sin kx_n & (k = 2, 4, 6, \ldots 2r-2) \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{r} w_n' \cos kx_n & (k = 1, 3, 5, \ldots 2r-1) \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{r} w_n \cos kx_n & (k = 2, 4, 6, \ldots 2r-2) \end{cases}$$

$$b_0 = \frac{1}{4r} \sum_{n=0}^{r} w_n, \qquad b_{2r} = \frac{1}{4r} \sum_{n=0}^{r} (-1)^n w_n.$$

*) C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904, Göschen.

Digitized by Google

10. Sind Ordinaten, die einen Abstand von einer halben Periode haben, einander entgegengesetzt gleich, so dafs positive und negative Kurvenhälfte einander spiegelbildlich gleich sind, so enthält die Fouriersche Reihe nur Glieder **ungerader** Ordnung (k ungerade). Alsdann ist $y_{2r+n} = -y_n$, und die Koeffizienten der Fourierschen Reihe ergeben sich aus:

$$a_k = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{r-1}(y_n + y_{2r-n})\sin\frac{kn\pi}{2r} + y_r \sin\frac{k\pi}{2}$$

$$(k = 1, 3, \ldots 2r-1)$$

$$b_k = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{r-1}(y_n - y_{2r-n})\cos\frac{kn\pi}{2r} - y_{2r},$$

während für $k = 0, 2, 4, 6, \ldots 2r$ die a_k und b_k verschwinden.

11. Rechenschema*) für den Fall $r = 6$, wo $\frac{\pi}{2r} = 15^0$:

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Summe . .		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Differenz .	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	

d. h. $u_1 = y_1 + y_{11}$, $v_1 = y_5 - y_7, \ldots, u_6 = y_6$, $v_6 = -y_{12}$. Alsdann ist

$$6\,a_k = u_1 \sin 15\,k + u_2 \sin 30\,k + \ldots + u_5 \sin 75\,k + u_6 \sin 90\,k$$

$$(k = 1, 2, \ldots 11)$$

$$6\,b_k = v_5 \cos 15\,k + v_2 \cos 30\,k + \ldots + v_1 \cos 75\,k + v_6.$$

Verwandelt man alle vorkommenden Winkelfunktionen in Sinus von Winkeln des ersten Quadranten und setzt die Zahlenwerte für die Sinus ein, so ergibt sich folgende Tabelle:

0,04314	u_1	u_1	u_5	u_5		
0,08333	u_2	$-u_2$	u_2	$-u_2$		
0,11785	u_3	u_3	$-u_3$	$-u_3$	$u_1 + u_3 - u_5$	$u_1 + u_3 - u_5$
0,14434	u_4	$-u_4$	$-u_4$	u_4		
0,16099	u_5	u_5	u_1	u_1		
0,16667	u_6	$-u_6$	u_6	$-u_6$	$u_2 - u_6$	$-(u_2 - u_6)$
	a_1	a_{11}	a_5	a_7	a_3	a_9
	b_1	$-b_{11}$	b_5	$-b_7$	$-b_3$	b_9

Dabei hat man die u jeder Vertikalen mit den linker Hand stehenden Werten der (durch 6 dividierten) Winkelfunktion zu multiplizieren und die Produkte zu addieren, um die a_k zu erhalten. Ersetzt man überall die u durch die v mit gleichen Indizes, so ergeben sich die b_k.

*) Vgl. hierzu E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, Bd. VII der Elektrotechnik in Einzeldarstellungen, her. von Benischke, Braunschweig, Vieweg u. Sohn oder E. Orlich, Arch. Math. u. Ph. (3) **12**, 159 bis 167, 230 bis 240.

Digitized by Google

So ist $a_7 = 0{,}04314\,u_5 - 0{,}08333\,u_2 - 0{,}11785\,u_3 + 0{,}14434\,u_4 + 0{,}16099\,u_1 - 0{,}16667\,u_6$

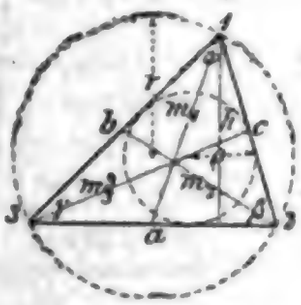
$b_9 = 0{,}11785\,(v_1 + v_3 - v_5) - 0{,}16667\,(v_2 - v_6)$.

Neben dieser von Bessel und Runge herrührenden Methode gibt es noch eine andere von Bruns und Fischer-Hinnen (ETZ 1901, 336).

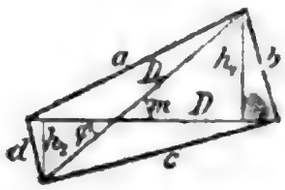
12. Außer dieser rechnerischen Methode gibt es auch graphische Verfahren. Ferner hat man für die Berechnung einer Fourierschen Reihe zu einem gegebenen Diagramm wie für die Lösung der umgekehrten Aufgabe Apparate konstruiert (harmonische Analysatoren). Der vollkommenste unter ihnen ist der Apparat von Michelson und Stratton, welcher gestattet, auf mechanischem Wege 160 Koeffizienten zu bestimmen und umgekehrt eine trigonometrische Reihe von 160 Gliedern zu summieren.

IX. Inhalte von Flächen und Körpern.

A. Flächeninhalte ebener Gebilde.

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
1. Dreieck (Vgl. S. 61)	Abb. 38.  h die Höhe zur Seite a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ m_1, m_2, m_3 die Mittellinien $s_0 = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)$ $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten der Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz	$F = \frac{1}{2} a h$ $= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ $= \frac{1}{2} a b \sin\gamma$ $= \frac{a^2}{2} \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}$ $= 2 r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ $= \varrho^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma$ $= \varrho s = \frac{a b c}{4 r}$ $= \frac{4}{3}\sqrt{s_0\,(s_0-m_1)\,(s_0-m_2)\,(s_0-m_3)}$ $= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ + x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{Bmatrix}$
	Der Koordinaten-Anfangspunkt liegt in der Ecke 3: $[x_3 = 0,\ y_3 = 0]$.	$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$
Rechtwinkliges Dreieck (Vgl. S. 62)	a, b Katheten c Hypotenuse α der a gegenüberliegende Winkel	$F = \frac{1}{2} a b$ $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg}\alpha$ $= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg}\alpha$ $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$. $\Big\vert\ a^2 + b^2 = c^2$

Digitized by Google

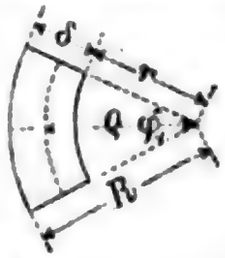
Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
2. Viereck (D und D_1 die Diagonalen, φ der zwischen ihnen liegende Winkel.)	Abb. 39.  m die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen	$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D = \frac{D D_1 \sin\varphi}{2}$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = D^2 + D_1^2 + 4m^2$
Kreisviereck	a, b, c, d die 4 Seiten $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$	$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ $D D_1 = ac + bd$
Trapez	a, b die parallelen Seiten h die Höhe	$F = \frac{a+b}{2} h = \frac{D D_1 \sin\varphi}{2}$
Parallelogramm	a, b die Seiten h der Abstand der Seiten b γ der Winkel	$F = bh = ab\sin\gamma = \frac{1}{2} D D_1 \sin\varphi$ $2(a^2 + b^2) = D^2 + D_1^2$
Rechteck	a, b die Seiten	$F = ab = \frac{1}{2} D^2 \sin\varphi$
Rhombus	a Seite γ Winkel	$F = a^2 \sin\gamma = \frac{1}{2} D D_1$
8. Vieleck	$x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ .... $x_n y_n$ die Koordinaten der n Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz [Die Summe der inneren Winkel beträgt $(n-2)\,180^0$].	$F = \pm \frac{1}{2}\{(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \cdots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1)\}$ F kann auch bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen.
Regelmäfsiges Vieleck (Vgl. die nachst. Tafel.)	R der Halbmesser des umliegenden, r der des einliegenden Kreises $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ die Seite n die Anzahl der Seiten $\varphi = 180^0 : n$ U der Umfang	$F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2} n R^2 \sin 2\varphi = n r^2 \operatorname{tg}\varphi$. $U = na = 2nR\sin\varphi = 2nr\operatorname{tg}\varphi$. Der Winkel des Vielecks $= 180^0 - 2\varphi$

Digitized by Google

n	$\frac{F}{a^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

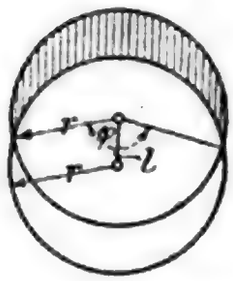
Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
4. Kreis (Tafel für F und U S. 1 bis 23.)	r der Halbmesser d der Durchmesser U der Umfang	$F = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4} U d$ $= 0{,}785\,398\,163\,4\, d^2$ $U = \pi d.$
Kreisring (Für F ist die Tafel auf S. 1 bis 23 zu benutzen.)	R äufserer, r innerer Halbmesser D äufserer, d innerer Durchmesser ϱ mittlerer Halbmesser δ Ringbreite	$F = \pi (R^2 - r^2)$ $= \frac{1}{4}\pi (D^2 - d^2)$ $= \frac{1}{4}\pi D^2 - \frac{1}{4}\pi d^2$ $= 2\pi\varrho\delta$
Kreisabschnitt (Tafel S. 36 u. 37.)	r der Halbmesser φ^0 der Zentriwinkel in Grad b die Bogenlänge s die Sehnenlänge h die Bogenhöhe	$F = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\varphi^0 \pi}{180} - \sin\varphi \right)$ $= \frac{r(b-s) + sh}{2}$
Kreisausschnitt Für F kann die Tafel auf S. 1 bis 23 benutzt werden.)	r der Halbmesser b die Bogenlänge φ^0 der zum Bogen b gehörende Zentriwinkel in Grad φ der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen	$F = \frac{1}{2} br$ $= \frac{\varphi^0}{360}\pi r^2$ $= \frac{1}{2} q r^2$ $\varphi = \frac{\varphi^0 \pi}{180}$ $\quad b = \frac{\varphi^0 \pi}{180} r$

Digitized by Google

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt F
Kreisringstück	Abb. 40. 	$F = \frac{\varphi^0 \pi}{360}(R^2 - r^2)$ $= \frac{\varphi^0 \pi}{180} \varrho \delta$ $= \varphi \varrho \delta$

Kreissichelstück

Abb. 41.



$$F = r^2\left(\pi - \frac{\pi}{180}\varphi + \sin\varphi\right) = r^2\eta.$$

l	$\frac{d}{10}$	$\frac{2d}{10}$	$\frac{3d}{10}$	$\frac{4d}{10}$	$\frac{5d}{10}$	$\frac{6d}{10}$	$\frac{7d}{10}$	$\frac{8d}{10}$	$\frac{9d}{10}$
η	0,40	0,79	1,18	1,56	1,91	2,25	2,55	2,81	3,02

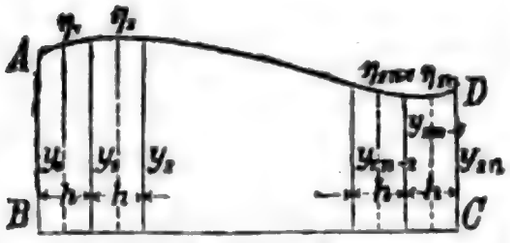
5. Kegelschnitte. Ellipse und Ellipsenabschnitt; Hyperbel und Hyperbelabschnitt S. 97 u. f. Parabelabschnitt S. 103.

Die Flächen anderer Kurven S. 105 bis 112.

6. Beliebige Fläche.

α. Die Fläche sei begrenzt auf drei Seiten durch gerade Linien, von denen $AB = y_0$ und $CD = y_{2n}$ (Abb. 42) winkelrecht zu BC stehen. Man teile BC in eine **gerade** Anzahl $(2n)$ gleicher Teile h, errichte in den Teilpunkten Ordinaten $y_1, y_2 \ldots y_{2n-1}$ und bezeichne die mittleren Höhen der so gebildeten Flächenteile mit $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{2n}$, so ermittelt sich näherungsweise der Inhalt der Fläche $ABCD$ aus einer der folgenden, nach fortschreitender Genauigkeit geordneten Formeln:

Abb. 42.



1. $F = h\,(\frac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + \frac{1}{2}\,y_{2n})$.
2. $F = h\,\Sigma(\eta)$.
3. $F = \frac{1}{3}h\,(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + \ldots + 2\,y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n})$.
4. $F = \frac{3}{8}h\,(y_0 + 3\,y_1 + 3\,y_2 + 2\,y_3 + 3\,y_4 + 3\,y_5 + 2\,y_6 + 3\,y_7 + \ldots + 2\,y_{m-3} + 3\,y_{m-2} + 3\,y_{m-1} + y_m)$.
5. $F = h\,\Sigma\,[\eta + \frac{1}{12}\,(y_0 - \eta_1) + \frac{1}{12}\,(y_{2n} - \eta_{2n})]$.
6. $F = h\,\Sigma\,[\eta + \frac{1}{72}\,(8\,y_0 + \eta_2 - 9\,\eta_1) + \frac{1}{72}\,(8\,y_{2n} + \eta_{2n-1} - 9\,\eta_{2n})]$.

In Formel 4. ist die Anzahl der Ordinaten $m + 1 = 3n + 1$; also ist die Anzahl m der gleichen Teile h durch 3 teilbar.

Digitized by Google

Formel 3., die sog. **Simpsonsche Regel**, liefert in dem Falle genaue Werte, wenn y eine ganze Funktion höchstens dritten Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist; alsdann braucht nur y_m, die mittlere Ordinate zwischen y_0 und y_{2n}, gemessen oder berechnet zu werden. Es ist, wenn H die ganze Höhe BC bezeichnet, $F = \frac{1}{6} H (y_0 + 4 y_m + y_{2n})$.

β. Hat man 5 je um h voneinander abstehende Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 gemessen oder berechnet, so ist auch

$$F = \frac{2}{45} h [7 (y_0 + y_4) + 32 (y_1 + y_3) + 12 y_2].$$

Diese Formel ist genau richtig, wenn y eine ganze Funktion höchstens fünften Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist.

γ. Weitere Näherungsformeln finden sich auf S. 79 u. 80, insofern das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Inhalt der Fläche $ABCD$ darstellt, wenn BC die x-Achse, $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve AD ist und a und b die zu AB und DC gehörigen Abszissen sind.

δ. **Verfahren von Tschebyscheff** (sehr genau) Band II, Abschn. Schiffbau bei der Berechnung der Verdrängung usw.

B. Inhalte und Oberflächen von Körpern.

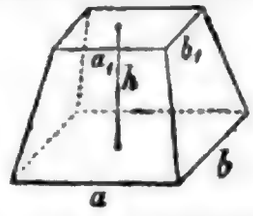
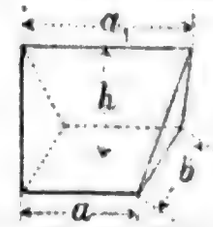
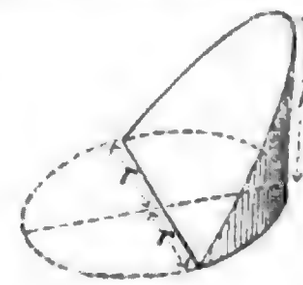
Die vorstehenden Regeln für eine beliebige Fläche gelten auch für den Inhalt eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers, wenn unter $y_0 \ldots\ldots y_{2n}$ die Flächeninhalte der durch parallele Ebenen gebildeten Querschnitte verstanden werden.

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
1. Prisma	F Grundfläche, h Höhe.	$V = Fh$
Würfel	a Kante, d Diagonale. $d^2 = 3a^2$.	$V = a^3$ $\quad O = 6a^2$
Schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma	a, b, c die Längen der drei parallelen Kanten N der Querschnitt, winkelrecht zu den Kanten.	$V = \frac{1}{3}(a + b + c) N$

Schief abgeschnittenes n-seitiges Prisma (und schief abgeschnittener Zylinder). Ist l die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen, N der zu l winkelrechte Querschnitt, so ist $V = Nl$.

Rechtwinkliges Parallelepipedon (Rechtkant)	a, b, c die Längen der drei Kanten einer Ecke d die Diagonale.	$V = abc$ $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $O = 2(ab + ac + bc)$

Digitized by Google

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
2. Pyramide	F Grundfläche h Höhe.	$V = \frac{1}{3} F h$
Dreiseitige Pyramide	$x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ die Koordinaten von drei Eckpunkten; der Anfangspunkt liegt in der vierten Ecke.	$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}$
Abgestumpfte Pyramide	F, f die parallelen Endflächen h ihr Abstand A und a zwei entsprechende Seiten zu F und f	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$ $= \frac{1}{3} h F \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right]$ **)
3. Obelisk (Abb. 42)	Abb. 42. 	$V = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1]$ $= \frac{1}{6} h [ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1]$
4. Keil (Abb. 43)	Abb. 43. 	$V = \frac{1}{6} (2a + a_1) b h$
5. Zylinder	F Grundfläche h Höhe.	$V = F h$
Kreiszylinder	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe	$V = \pi r^2 h$ $M = 2 \pi r h$ $O = 2 \pi r (r + h)$
Schief abgeschn. gerader Kreiszylinder	h_1 die kürzeste Zylinderseite h_2 die längste r der Halbmesser d. Grundfl.	$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$ $M = \pi r (h_1 + h_2)$
Zylinderhuf*) (Abb. 44)	Abb. 44. 	$V = \frac{2}{3} r^2 h$ $M = 2 r h$ Der Schnitt geht durch den Mittelpunkt der Grundfläche; der Grundriss ist also ein Halbkreis, d. h. $a = b = r$ (vgl. Fussnote).

*) Ist der Huf-Grundriss grösser oder kleiner als ein Halbkreis, $2a$ seine gerade Seite (Hufkante), b die Länge des Lotes vom Fusspunkte von h auf $2a$, 2φ der Zentriwinkel des Huf-Grundrisses in Grad, so ist allgemein

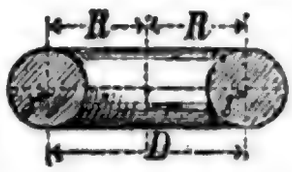
$$V = \frac{h}{3b} \left[a (3r^2 - a^2) + 3 r^2 (b - r) \frac{\varphi \pi}{180}\right]; \qquad M = \frac{2rh}{b} \left[(b - r) \frac{\varphi \pi}{180} + a\right].$$

**) Zentralbl. Bauv. 1899 S. 68.

Digitized by Google

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt = V Oberfläche = O Mantelfläche = M
Hohlzylinder (Rohr)	R der äufsere Halbmesser r der innere Halbmesser h die Höhe $s = R - r$ die Dicke $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ der mittlere Halbmesser	$V = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h s (2R - s)$ $= \pi h s (2r + s)$ $= 2\pi h s \varrho$
6. Kreiskegel	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe s die Seite	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$
Abgestumpfter Kreiskegel	Wie vorstehend; ferner R der Halbmesser der anderen Grundfläche. $\sigma = R + r$ $\delta = R - r$ $s = \sqrt{\delta^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$ $= \frac{h}{4}\left[\pi\sigma^2 + \frac{1}{3}(\pi\delta^2)\right]$ $M = \pi s \sigma$
7. Kugel (Für V ist die Tafel S. 35, für O Tafel S. 1 bis 23 zu benutzen)	r der Halbmesser, u. zw. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620351\sqrt[3]{V}$ $d = 2r$ der Durchmesser	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}188790205\, r^3$ $= \frac{1}{6}\pi d^3 = 0{,}523598776\, d^3$ $O = 4\pi r^2 = \pi d^2$ $= 4 \times$ Inhalt des gröfsten Kreises
Hohlkugel (Tafel S. 35)	R äufserer, r innerer Halbm. D „ d „ Durchm.	$V = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6}\pi (D^3 - d^3)$
Kugelabschnitt (Kugelkalotte)	h die Höhe des Abschnittes r der Halbmesser der Kugel a der Halbmesser der Grundfläche.	$V = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$ $M = 2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$ $a^2 = h (2r - h)$
Kugelzone	h die Höhe der Zone r der Halbmesser der Kugel a, b die Halbmesser der Endflächen; $(a > b)$	$V = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h$ $r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$
Kugelausschnitt (Abb. 45)	Abb. 45.	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ $= 2{,}094395\,1024\, r^2 h$ $O = \pi r (2h + a)$
Kugelzweieck	φ^0 der Winkel, den die begrenzenden gröfsten Kugelkreise bilden.	$M = \frac{\varphi^0}{90}\pi r^2$ $= 0{,}0349066\, \varphi^0 r^2$

Digitized by Google

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt $= V$ Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$
Kugeldreieck	ε^0 der sphärische Exzefs, d. h. Ueberschufs der Winkelsumme über 180^0	$M = \frac{\varepsilon^0}{180}\pi r^2$ $= 0{,}0174533\,\varepsilon^0 r^2$
8. Ellipsoid	a, b, c die 3 Halbachsen	$V = {}^4/_3\,\pi abc$
Umdrehungsellipsoid	1) wenn $2a$ die Drehachse: 2) „ $2b$ „ „ :	$V = {}^4/_3\,\pi ab^2$ $V = {}^4/_3\,\pi a^2 b$
9. Umdrehungs-Paraboloid	r der Halbmesser der Grundfläche h die Höhe	$V = {}^1/_2\,\pi r^2 h = 1{,}570796\,r^2 h$ $=$ der Hälfte des Kreiszylinders für r und h
Abgestumpftes Paraboloid	R, r die Halbmesser der parallelen Endflächen h die Höhe	$V = {}^1/_2\,\pi (R^2 + r^2) h$ $=$ Mittelfläche $\times$ Höhe
10. Zylindrischer Ring (Abb. 46)	Abb. 46.  $d = 2r$	$V = 2\pi^2 R r^2 = 19{,}739\,R r^2$ $= {}^1/_4\pi^2 D d^2 = 2{,}4674\,D d^2$ $O = 4\pi^2 R r = 39{,}478\,R r$ $= \pi^2 D d = 9{,}8696\,D d$
11. Kübel	Endflächen beliebige Ellipsen mit den Halbachsen a, b und a_1, b_1	$V = {}^1/_6\,\pi h\,[2\,(ab + a_1 b_1) + a b_1 + a_1 b]$
12. Faſs	D der Durchmesser am Spund d der Bodendurchmesser h die Höhe	$V = {}^1/_{12}\,\pi h\,(2\,D^2 + d^2)$ angenähert für kreisförmige Dauben $V = {}^1/_{15}\,\pi h\,(2\,D^2 + Dd + {}^3/_4\,d^2)$ genau für parabolische Dauben
13. Kappengewölbe (preufsisches)	s die halbe Spannweite r der innere Gewölbehalbmesser δ die Gewölbestärke h die Pfeilhöhe l die Länge des Gewölbes	$V = \frac{\varphi^0\pi}{360}\,(2r\delta + \delta^2)\,l$, wenn $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}$
14. Kreuzgewölbe über dem Rechtecke $2S \times 2s$	s, r, δ, h, $2S$ (statt l) und φ die Bezeichnungen unter 13. für die eine Kappe S, R, Δ, h, $2s$, ψ dieselben Abmessungen für die andere Kappe.	$V = \frac{\varphi^0\pi}{360}\,(2r\delta + \delta^2)\,S + \frac{\psi^0\pi}{360}\,(2R\Delta + \Delta^2)\,s$ $\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h};\ \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{S}{R-h}\right)$.

Digitized by Google

15. Wird von der Kugelzone (S. 135) der abgestumpfte Kegel mit den Halbmessern a und b der Endflächen und der Höhe h fortgenommen, so ist, wenn s die Kegelseite, der Inhalt des übrigbleibenden Ringes, $V = \frac{1}{6}\pi h s^2$.

16. Prismatoide, d. s. Körper, begrenzt von zwei parallelen Grundflächen F_0 und F_{2n} und beliebig vielen Seitenflächen (Dreiecken, Trapezen, Parallelogrammen und windschiefen Flächen) werden nach der Simpsonschen Regel (S. 133) berechnet: $V = \frac{1}{6} H (F_0 + 4 F_m + F_{2n})$.

Beispiele: 1. Sind bei einem **Obelisken** von der Höhe h (S. 134) die Grundflächen Trapeze mit den Mittelparallelen m und m_1 und den Höhen c und c_1, so ist

$$V = \tfrac{1}{6} h [(2m + m_1) c + (2 m_1 + m) c_1] = \tfrac{1}{6} h [m c + (m + m_1)(c + c_1) + m_1 c_1].$$

2. **Wegerampe.** Ist h die Höhe des Hauptdammes, b die Wegbreite der Rampe, $1 : n$ das Neigungsverhältnis der Rampe, $1 : m$ das Böschungsverhältnis des Hauptdammes und der Rampe, so ist $V = \frac{1}{6} h^2 (n - m) [3 b + 2 h m (1 - m : n)]$, z. B. ist für $n = 45$ und $m = 1{,}5$: $V = 21{,}75\, h^2 (b + 0{,}9667\, h)$.

17. Guldinsche (Pappussche) Regeln.*)

1. Bezeichnet

s die Länge einer Kurve, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Flächeninhalt der erzeugten **Umdrehungsfläche**

$M = 2\pi x_0 s =$ Weg des Schwerpunktes $\times$ Länge der Kurve.

2. Bezeichnet

F den Inhalt einer ebenen Fläche, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Inhalt des erzeugten **Umdrehungskörpers**

$V = 2\pi x_0 F =$ Weg des Schwerpunktes $\times$ Inhalt der Fläche.

3. Für zwei parallele Umdrehungsachsen im Abstand a ist allgemein, wenn sich M_1 und V_1 auf die eine, M_2 und V_2 auf die andere Achse beziehen, $M_1 = 2\pi a s \pm M_2$ und $V_1 = 2\pi a F \pm V_2$.

Hierbei gilt $-$, wenn s oder F zwischen den parallelen Achsen liegt; im anderen Falle gilt $+$.

4. Ist allgemein $y = f(x)$ die Gleichung der Meridianlinie in bezug auf die Umdrehungsachse als x-Achse und sind M und V von zwei, in den Abständen x_1 und x_2 vom Anfangspunkte der Koordinaten zur x-Achse winkelrecht gelegten Ebenen begrenzt, so ist

$$M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, ds \quad \text{und} \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx.$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist das Differential des Bogens der Meridianlinie.

5. Stellen sich s oder F als algebraische Summen von Kurvenlängen $s_1, s_2, s_3 \ldots$ oder von Flächeninhalten $F_1, F_2, F_3 \ldots$ dar,

*) Vgl. auch Chr. Nehls, Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Kurven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrößen, Archiv der Mathematik und Physik, 2. Reihe, Bd. XIII, 1894.

Digitized by Google

deren Schwerpunktsabstände x_{01}, x_{02}, x_{03} .... von der Umdrehungsachse bekannt sind, so ist

$$M = 2\pi\,(s_1 x_{01} + s_2 x_{02} + s_3 x_{03} + \dots) \text{ bzw.}$$
$$V = 2\pi\,(F_1 x_{01} + F_2 x_{02} + F_3 x_{03} + \dots).$$

6. Für Teile der Kreisdrehung sind (in 1. bis 5.) die Werte von M und V mit $\varphi^0 : 360$ zu multiplizieren, wenn φ^0 der Zentriwinkel der Drehung in Grad ist. (Vgl. z. B. **13.** S. 136.)

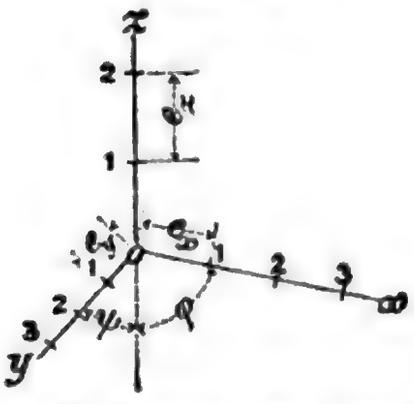
7. Die vorstehenden Regeln sind für jede beliebige Bewegung des Schwerpunktes sinngemäfs anwendbar, wenn die Ebene der sich bewegenden Fläche stets zur Richtung der Bewegung winkelrecht bleibt.

X. Parallel-Perspektive.

1. Um einen körperlichen Gegenstand durch eine Zeichnung darzustellen, die einen möglichst vollständigen Einblick in die Gestalt und den Zusammenhang seiner Teile gewährt, bedient man sich mit Vorteil der Parallelprojektion, die zwar weniger naturgetreue, aber leichter herstellbare Bilder liefert als die Zentralprojektion. Die Herstellung geschieht am besten nach dem sog. **axonometrischen Verfahren.** Man nimmt drei zueinander rechtwinklige Achsen, auf die man den Körper bezieht, und in jeder einen Mafsstab an, projiziert die Achsen samt den Mafsstäben und trägt alle Strecken, die im Körper einer Achse parallel sind, in der Zeichnung parallel der Projektion jener Achse nach dem zugehörigen Mafsstabe auf. Die z-Achse wird lotrecht genommen.

2. Bei **schiefer Projektion** können die Achsenrichtungen und die Längeneinheiten der Mafsstäbe beliebig angenommen werden, vorausgesetzt, dafs höchstens zwei Achsenrichtungen gleich sind und die Längeneinheit höchstens eines Achsenmafsstabes null ist (Satz von Pohlke).

Abb. 47.



Einfache Fälle (Bezeichnungen Abb. 47):

1) $e_x = e_z = 1$; $e_y = 1,\ ^1/_2,\ ^1/_3$;
$\varphi = 90^0$; $\psi = 45^0,\ 60^0$.
(Kavalierperspektive.)

2) $e_x = e_y = e_z = 1$; $\varphi + \psi = 90^0$.
(Militärperspektive).

3. Treten an dem Körper nicht blofs gerade Linien und ebene Flächen auf, sondern Kreise in verschiedenen Stellungen, Kreiszylinder-, Kreiskegel-, Kugel- und beliebige Umdrehungsflächen, so ist **rechtwinklige Projektion** vorzuziehen. Bei dieser sind die Verhältnisse der Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe durch die Achsenrichtungen und umgekehrt letztere durch erstere bestimmt. In folgender Tafel

Digitized by Google

sind für die gebräuchlichsten Verhältnisse*) die nötigen Angaben zusammengestellt. Es bezeichnet

e die Längeneinheit des wahren Mafsstabes der Zeichnung,

e_x, e_y, e_z die Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe,

φ und ψ die spitzen Winkel zwischen der x- bzw. y-Achse und der z-Achse.

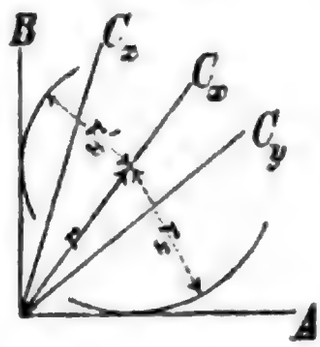
Rechtwinklige Projektionen.

Art der Projektion.	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	ctg φ (angenähert)	ctg ψ (angenähert)
Isometrische Projektion.	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = \psi = 60^0$	
Dimetrische Projektionen.	1 : 1/2 : 1	0,9428	1 : 8	7 : 8
	1 : 1/3 : 1	0,9733	1 : 18	17 : 18
	1 : 1/4 : 1	0,9847	1 : 32	31 : 32
Trimetrische Projektionen.	5/6 : 2/3 : 1	0,9670	1 : 5	1 : 3
	9/10 : 1/2 : 1	0,9853	1 : 11	1 : 3

Die letzte Spalte dient zur Konstruktion der Achsenrichtungen.

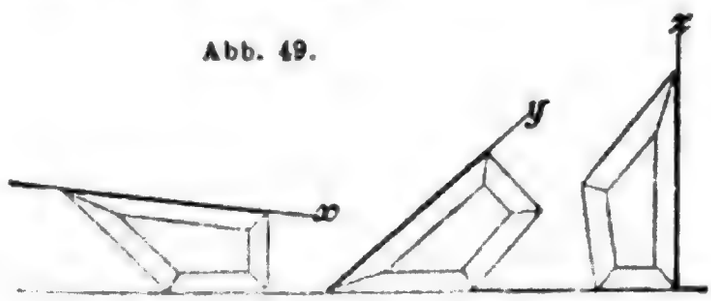
4. Man bezeichne mit r_x, r_y, r_z die Strecken, die, mit dem x-, y-, z-Mafsstabe gemessen, die gleiche Längenzahl r ergeben (so dafs also $r_z = r\,(e_x : e)$ usw.). Ohne Benutzung der Achsenmafsstäbe können diese Strecken auch durch nebenstehende Verkleinerungsvorrichtung (Abb. 48) gefunden werden, in der die Strahlen C_x, C_y, C_z gegen A unter solchen Winkeln gezogen sind, dafs ihre Sinus die Werte $e_x : e$, $e_y : e$, $e_z : e$ haben.

Abb. 48.



*) Für gewöhnliche Fälle empfiehlt sich die Anwendung der Projektion 1 : 1/2 : 1 der einfachsten nächst der isometrischen Projektion, die meist unschöne Bilder liefert. Es bringt grofsen Gewinn an Zeit, wenn man die Parallelen zu den Achsen mittels eines besonderen, hierneben in den drei zu benutzenden Stellungen abgebildeten Schiebevierecks (Abb. 49) zeichnet.

Abb. 49.



2. ABSCHNITT.

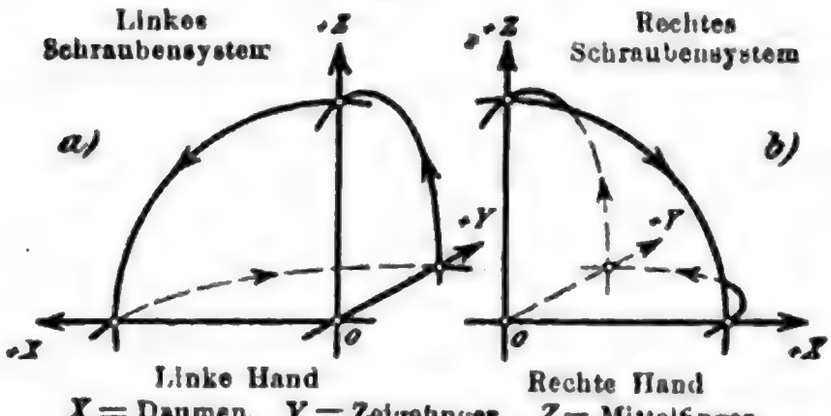
Mechanik starrer Körper.

I. Grundbegriffe der Mechanik.

1. Vorbemerkungen.

1. Für **Lagenbestimmungen** wird in den meisten Fällen ein rechtwinkliges Achsenkreuz benutzt. — Einige Formeln der Mechanik ändern das Vorzeichen, wenn man statt des in der darstellenden Geometrie und Technik bevorzugten **Links-Systems** das dazu symmetrische **Rechts-System** wählt (Abb. 1a u. 1b).

Abb. 1a u. b

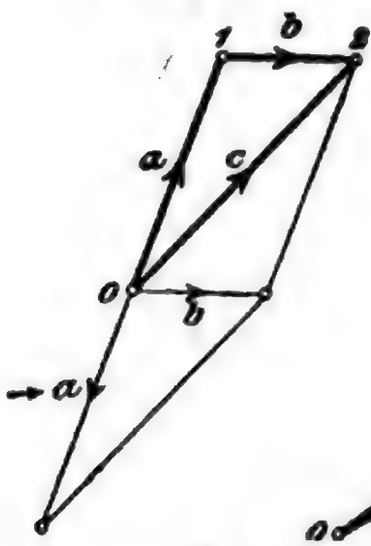


X = Daumen, Y = Zeigefinger, Z = Mittelfinger.

2. **Skalare** (richtungslose) **Größen** sind durch Angabe eines Zahlenwertes (mit Benennung und Vorzeichen) bestimmt (z. B. Zeit, Volumen, Temperatur).

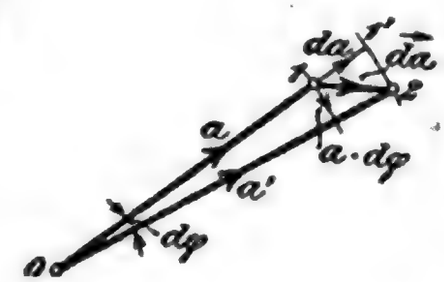
Vektoren (gerichtete Größen) bedürfen der Angabe eines Zahlenwertes (mit Benennung), einer Richtung und eines Pfeilsinnes (z. B. Wegstrecke, Geschwindigkeit, Kraft, Moment).

Abb. 2.



Skalare Größen werden algebraisch, Vektorgrößen geometrisch (Parallelogramm- oder Dreieckskonstruktion) addiert.

Abb. 3.



In Abb. 2 ist $c = a \overset{1)}{+\!\!\rightarrow} b$, $b = c \overset{2)}{\rightarrow} a$.

Sind in Abb. 3 die Richtungen der beiden Vektoren a und a' unendlich wenig verschieden, so ist: $11' \overset{3)}{=} a' \overset{4)}{\rightarrow} a = da$; $da \overset{5)}{=} da \overset{1)}{+\!\!\rightarrow} a \cdot d\varphi$.

$|a|$ bedeutet den Zahlenwert des Vektors a.

---

1) lies: plus geometrisch. 2) lies: minus geometrisch. 3) lies: 12 nach Größe und Richtung. 4) lies: da geometrisch. 5) lies da algebraisch.

Digitized by Google

3. **Starr** heifst ein Körper, wenn die gegenseitige Entfernung aller seiner Punkte unveränderlich ist.

Die Bewegung eines starren Körpers heifst **Schiebung** (Translation), wenn alle Punkte gleiche und parallele Bahnen beschreiben; sie heifst **Drehung** (Rotation) um die Gerade **(Achse)** a, wenn alle Punkte Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte in a liegen und deren Ebenen senkrecht zu a sind.

Positiver Drehsinn und positive Richtung der Drehachse stehen beim Links-Koordinatensystem in dem durch Abb. 1a dargestellten Zusammenhang: gegen die Pfeilspitze der Achse gesehen, verläuft die positive Drehung im Uhrzeigersinne; oder: Drehung im positiven Sinne und Fortschreitung (Schiebung) im positiven Sinne geben zusammen eine linksgängige Schraubung.

2. Geschwindigkeit und Beschleunigung.

a. Geradlinige Bewegungen.

1. Auf der Bahn des Punktes wird ein Nullpunkt 0 und eine positive Richtung gewählt. Der Abstand des Punktes von 0 zu Beginn der Zeitzählung ($t = 0$) und zur beliebigen Zeit t heifse s_0 bzw. s.

Zeichnerische Darstellung durch die Zeit-Weg-Kurve: Abszisse t, Ordinate s.

2. **Gleichförmige Bewegung:** In gleichen Zeitabschnitten (Δt) werden gleiche Wegstrecken (Δs) durchlaufen.

Also $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s_3$ usw.; wird $\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$ (Geschwindigkeit s. unter 4) gesetzt, so folgt als

Bewegungsgleichung: $s = s_0 + c\,t$.

Zeit-Weg-Kurve eine Gerade (Steigung = Tangens des Neigungswinkels gegen die wagerechte Zeitachse $= c$; vgl. unter 4).

Die kräftefreie Bewegung des materiellen Punktes ist eine geradlinig gleichförmige Bewegung (**Trägheitsgesetz**). Vgl. S. 149.

3. **Gleichmäfsig beschleunigte Bewegung:** Die Wegstrecken (Δs), die in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten (Δt) durchlaufen werden, nehmen regelmäfsig um den gleichen Betrag (δ) zu.

Also $\Delta s_2 = \Delta s_1 + \delta$, $\Delta s_3 = \Delta s_2 + \delta$ usw.; wird $\frac{\delta}{\Delta t^2} = p$ (Beschleunigung s. unter 5) und $\frac{\Delta s_1 - \frac{\delta}{2}}{\Delta t} = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit s. unter 4) gesetzt, so folgt als

Bewegungsgleichung: $s = s_0 + v_0\,t + \frac{p}{2}\,t^2$.

Zeit-Weg-Kurve eine Parabel.

4. **Geschwindigkeit** heifst der auf die Zeiteinheit bezogene Weg.

Also für die gleichförmige Bewegung:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konst (s. unter 2).}$$

Digitized by Google

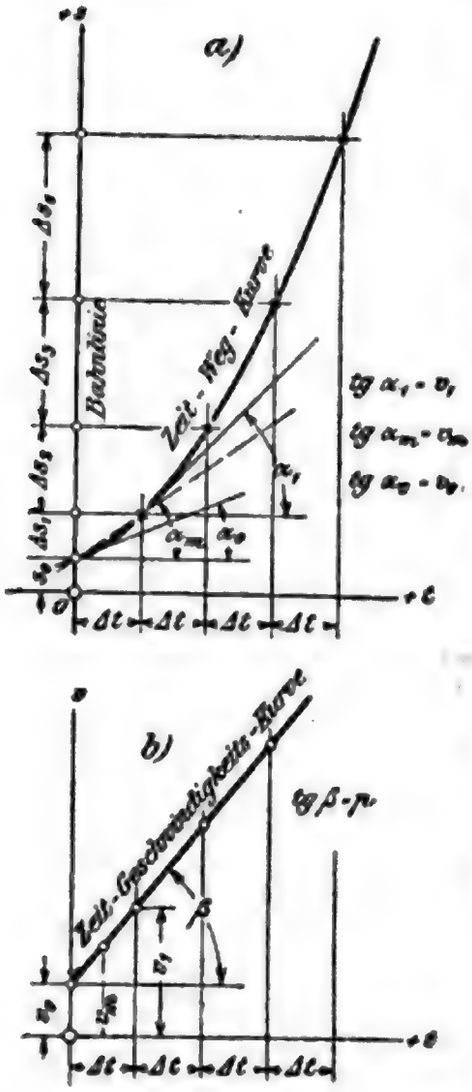
Für die ungleichförmige Bewegung ist

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit für den Zeitabschnitt Δt,

$v = \frac{ds}{dt}$ die augenblickliche Geschwindigkeit zur Zeit t.

Geometrische Deutung: v_m = Steigung der zum Zeitabschnitt Δt gehörigen Sekante, v = Steigung der zum Zeitpunkt t gehörigen Tangente der Zeit-Weg-Kurve (Abb. 4).

Abb. 4a u. b.



Zeichnerische Darstellung durch die Zeit-Geschwindigkeits-Kurve: Abszisse t, Ordinate v.

Mifst man die Wege in m, die Zeiten in sk, so erhält man die Geschwindigkeiten in m/sk (für Eisenbahngeschwindigkeiten üblich km/st, für Krangeschwindigkeiten m/min).

Bei zahlenmäfsigen Rechnungen ist stets auf gleiche Mafseinheiten für Wege bzw. Zeiten umzurechnen und bei zeichnerischen Darstellungen auf die Mafsstäbe (z. B. 1 sk = ξ mm, 1 m = η mm) zu achten.

Für die gleichmäfsig beschleunigte Bewegung ist die Geschwindigkeit

$$v = v_0 + p\,t,$$

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit (s. unter 3).

Zeit-Geschwindigkeits-Kurve eine Gerade mit der Steigung p (s. unter 5).

5. **Beschleunigung** heifst die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitszunahme.

Also für die gleichförmige Bewegung $p = 0$,

für die gleichmäfsig beschleunigte Bewegung

$$p = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\delta}{\Delta t^2} = \text{konst (s. unter 3)},$$

für die ungleichmäfsig beschleunigte Bewegung ist

$p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ die mittlere Beschleunigung für den Zeitabschnitt Δt,

$p = \frac{dv}{dt}$ die augenblickliche Beschleunigung zur Zeit t.

Geometrische Deutung: p_m = Steigung der Sekante, p = Steigung der Tangente der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve.

Zeichnerische Darstellung durch die Zeit-Beschleunigungs-Kurve, Abszisse t, Ordinate p.

Digitized by Google

Mifst man die Wege in m, die Zeiten in sk, so erhält man die Beschleunigungen in m/sk².

6. Der **freie Fall** im luftleeren Raum ist eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung auf der Lotrechten. Die Fallbeschleunigung beträgt für das mittlere Deutschland (50° Breite)

$$g = 9{,}81 \text{ m/sk}^2.$$

Rechnet man Zeiten und Wege vom Augenblick und Ort des Loslassens ($s_0 = 0$) und erfolgt der Fall aus der Ruhelage ($v_0 = 0$), so gilt (h statt s geschrieben):

$$h = \frac{g}{2} t^2; \qquad v = g t; \qquad h = \frac{v^2}{2g}; \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

$\frac{v^2}{2g}$ heifst auch die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe (d. i. Steighöhe beim senkrechten Aufwärtswurf mit der Anfangsgeschwindigkeit v). Tafeln für $\frac{v^2}{2g}$ und $\sqrt{2gh}$ s. Mechanik tropfbar flüssiger Körper.

b. Zusammensetzung geradliniger Bewegungen.

1. Unterliegt ein Punkt gleichzeitig zwei Bewegungsvorgängen, so vollführt er eine von den beiden Teilbewegungen verschiedene zusammengesetzte oder **Mittelbewegung.**

Jede Teilbewegung geht unabhängig und ungestört von der anderen vor sich: **Prinzip der Unabhängigkeit** (Superposition) **der Einzelbewegungen.**

Bei geradlinigen Teilbewegungen gilt demnach für die Mittelbewegung: Der Ort des Punktes ist die vierte Ecke des aus den Teilwegen s_I und s_{II} gebildeten Parallelogramms **(Bewegungsparallelogramm;** die Diagonale ist der Fahrstrahl, nicht der Weg); Mittelgeschwindigkeit und -beschleunigung sind die geometrischen Summen aus den betreffenden Teilgröfsen:

$$v = v_I + v_{II};$$
$$p = p_I + p_{II}.$$

Umgekehrt kann jede ebene Bewegung eines Punktes in 2, jede räumliche Bewegung in 3 geradlinige Teilbewegungen (z. B. nach den Richtungen der Koordinatenachsen) zerlegt werden.

2. Die Mittelbewegung zweier gleichförmiger Bewegungen ist wieder eine gleichförmige Bewegung.

3. Die Mittelbewegung einer gleichförmigen und einer gleichmäfsig beschleunigten Bewegung ist (wenn ihre Richtungen nicht zusammenfallen) eine krummlinige Bewegung.

Beispiel I. Wurfbewegung ohne Luftwiderstand (Abb. 5 S. 144). Der materielle Punkt vollführt nach dem Trägheitsgesetz (S. 141 unter 2) eine gleichförmige Bewegung mit der ihm beim Abwerfen (unter dem Winkel α gegen die Wagerechte) erteilten Geschwindigkeit v_0 und unabhängig davon die gleichmäfsig beschleunigte Fallbewegung, der alle nicht unterstützten Körper an der Erdoberfläche unterliegen.

Rechnet man Zeiten und Wege vom Augenblick und Ort des Abwerfens, so gilt (S. 141 unter 2 und S. 143 unter 6) $s_I = v_0 t$, $s_{II} = \frac{g}{2} t^2$; $v_I = v_0$, $v_{II} = g t$; $p_I = 0$, $p_{II} = g$. Demnach: $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2$;

daraus die Gleichung der Bahn:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2\alpha} \text{ (Parabel mit senkrechter Achse).}$$

Digitized by Google

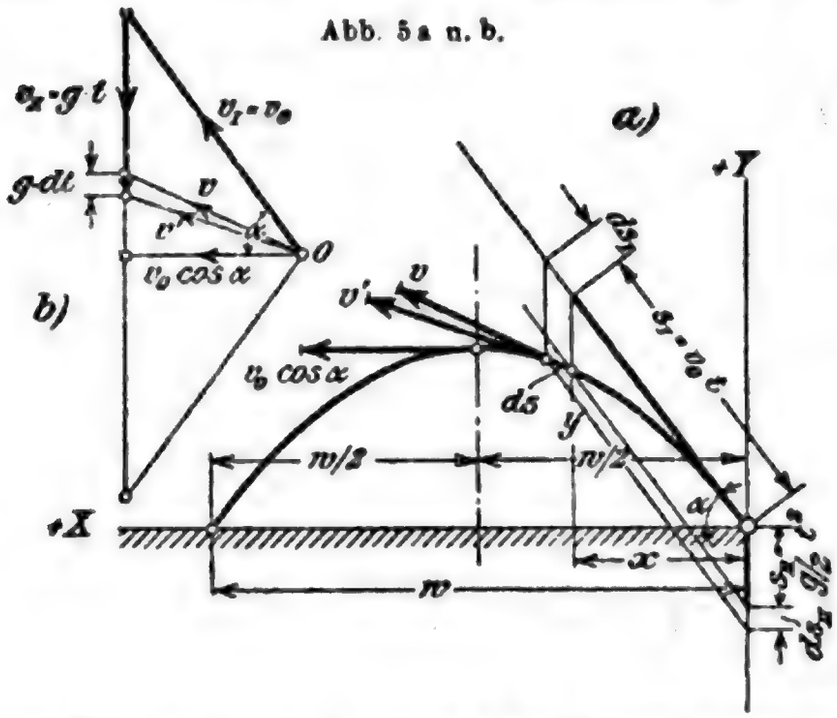
Die Geschwindigkeit ist $v = v_0 + g t$ in Richtung der Bahntangente

$$v_x = v_0 \cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g t = \frac{dy}{dt},$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2 g y}.$$

Die Beschleunigung ist für den ganzen Verlauf der Bewegung unverändert gleich g lotrecht nach unten gerichtet; die Geschwindigkeiten in zwei benachbarten Zeitelementen unterscheiden sich um das geometrische Differential $\vec{dv} = g \cdot dt$ (Abb. 5b).

Abb. 5a u. b.



Wurfzeit (für $y = 0$)

$$t = \frac{2 v_0}{g} \sin\alpha,$$

Wurfweite (für $y = 0$)

$$w = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Höchster Bahnpunkt (für $v_y = 0$)

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad x = \frac{w}{2}$$

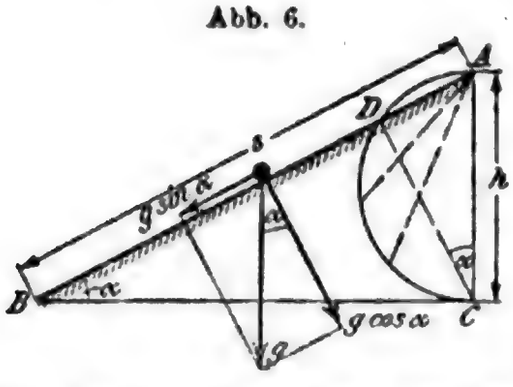
$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

Schufswinkel für eine vorgeschriebene Wurfweite bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 folgt aus $\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2} w$ (zwei Winkel α_1 und α_2, die sich zu 90° ergänzen, flacher Schufs, Bogenschufs).

Gröfste Wurfweite

$$w_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \text{doppelte Geschwindigkeitshöhe ergibt sich für } \alpha = 45°.$$

Abb. 6.



Beispiel 2. Fall auf der schiefen Ebene (Abb. 6). Die lotrecht abwärts gerichtete Beschleunigung g des freien Falles wird senkrecht und parallel zur schiefen Ebene in die Komponenten $g\cos\alpha$ und $g\sin\alpha$ zerlegt; erstere kommt wegen des Widerstandes der schiefen Ebene nicht zur Wirkung, letztere bestimmt eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung längs AB. Ist in A Zeit t und Geschwindigkeit v gleich null, so gilt:

$$s = \frac{g \sin\alpha}{2} t^2, \qquad v = g \sin\alpha \cdot t = \sqrt{2 g h}$$

d. h. die Geschwindigkeit hängt nur von dem Höhenunterschied gegen die Anfangslage ab. Zum Durchfallen der lotrechten Strecke h gebraucht ein Punkt die aus der Formel $h = \frac{g}{2} t'^2$ folgende Zeit t'; in der gleichen Zeit wird auf der schiefen Ebene die Strecke $AD = h \sin\alpha$ zurückgelegt, d. h. alle von A aus gezogenen Sehnen des eingezeichneten Halbkreises werden in derselben Zeit durchlaufen.

c. Krummlinige Bewegung.

1. Die **Geschwindigkeit** ist $v = \frac{\vec{ds}}{dt}$ (vgl. Vorbemerkung 2, S. 140); ihr Zahlenwert also $|v| = \frac{ds}{dt}$, ihre Richtung die des **Bahnelements** ds (Abb. 7a S. 145).

Digitized by Google

Zeichnerische Darstellung durch den Geschwindigkeitsriß (Hodograph): Von einem Punkte 0 (Abb. 7b) aus werden die Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung als Fahrstrahlen aufgetragen.

2. Die **Beschleunigung** ist $p = \frac{d\bar{v}}{dt}$; ihr Zahlenwert also $|p| = \frac{d\sigma}{dt}$, ihre Richtung die des Hodographenelements $d\sigma$ (Abb. 7).

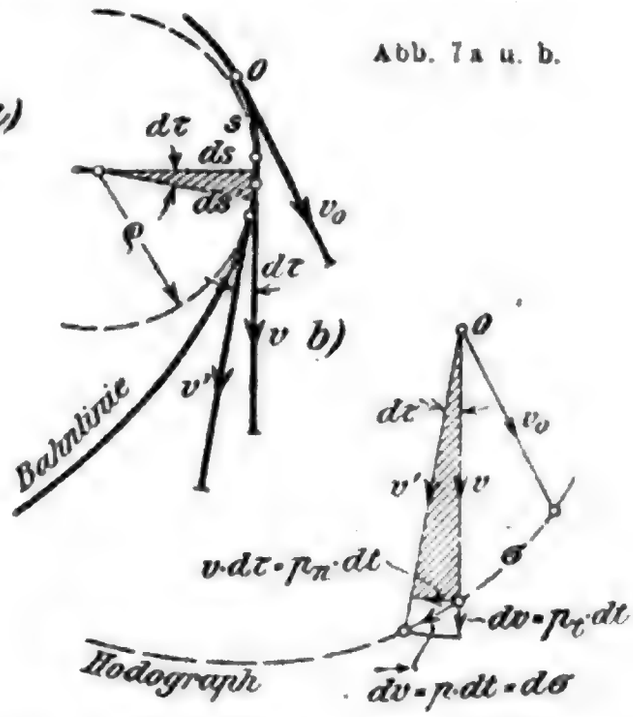


Abb. 7a u. b.

Die Zerlegung von p in Richtung der Bahntangente und -normalen liefert (vgl. die unendlich kleinen schraffierten Dreiecke in Abb. 7a und 7b, ϱ = Krümmungshalbmesser):

die **Tangentialbeschleunigung** (Größenänderung der Geschwindigkeit)

$$p_t = \frac{dv}{dt},$$

die **Normal(Zentripetal-)beschleunigung** (Richtungsänderung der Geschwindigkeit) $p_n = v \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{v^2}{\varrho}$

$$p = p_t \dashrightarrow p_n, \qquad |p| = \sqrt{p_t^2 + p_n^2}.$$

Der Pfeil der Normalbeschleunigung weist stets vom Bahnpunkte zum Krümmungsmittelpunkte. Bei doppelt gekrümmter Bahnkurve liegt Abb. 7a in der Schmiegungsebene des betreffenden Bahnpunktes; dann ist statt Normale Hauptnormale, statt Krümmungshalbmesser erster Krümmungshalbmesser zu setzen (S. 116 unter b u. 6).

3. Sind die Bewegungsgleichungen des Punktes für ein rechtwinkliges Achsenkreuz:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

so berechnen sich Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie folgt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi', \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \psi', \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \chi',$$

$$v = v_x \dashrightarrow v_y \dashrightarrow v_z, \qquad |v| = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2 + (\chi')^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|}, \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{|v|}, \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{|v|}$$

(α, β, γ = Winkel zwischen v und den Achsen),

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \varphi'', \qquad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \psi'', \qquad p_z = \frac{dv_z}{dt} = \chi'',$$

$$p = p_x \dashrightarrow p_y \dashrightarrow p_z, \qquad |p| = \sqrt{(\varphi'')^2 + (\psi'')^2 + (\chi'')^2},$$

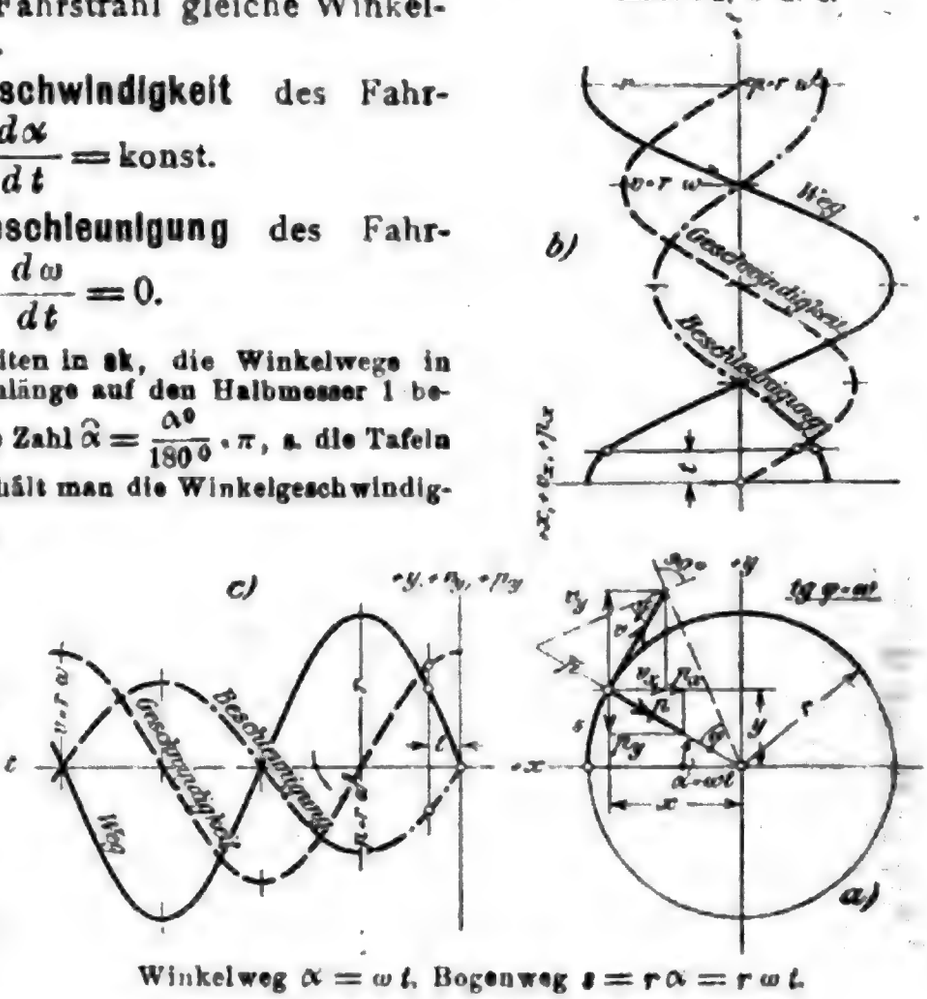
$$\cos\lambda = \frac{p_x}{|p|}, \qquad \cos\mu = \frac{p_y}{|p|}, \qquad \cos\nu = \frac{p_z}{|p|}$$

(λ, μ, ν = Winkel zwischen p und den Achsen).

Digitized by Google

4. Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** (Abb. 8) werden in gleichen Zeitabschnitten vom Punkte gleiche Bogenwege, vom Fahrstrahl gleiche Winkelwege durchlaufen.

Abb. 8 a, b u. c.



Die **Winkelgeschwindigkeit** des Fahrstrahls ist: $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{konst.}$

Die **Winkelbeschleunigung** des Fahrstrahls ist: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$

Mifst man die Zeiten in **sk**, die Winkelwege in **Bogenmafs** (als Bogenlänge auf den Halbmesser 1 bezogen eine unbenannte Zahl $\widehat{\alpha} = \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi$, s. die Tafeln auf S. 36 bis 41), so erhält man die Winkelgeschwindigkeiten in $\frac{1}{\text{sk}}$, die Winkelbeschleunigungen in $\frac{1}{\text{sk}^2}$.

Mit n als **Umlaufzahl** für die Minute folgt

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = 0{,}10472 \cdot n \left(\frac{1}{\text{sk}}\right).$$

Winkelweg $\alpha = \omega t$, Bogenweg $s = r\alpha = r\omega t$.

Ferner gilt:

Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = r\omega,$

Tangentialbeschleunigung $p_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = 0,$

Normalbeschleunigung $p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$

(Konstruktion von p_n am einfachsten mit Hilfe des gleich grofsen, entgegengesetzt gerichteten $\overline{p_n}$).

Die Zerlegung nach der x- und y-Achse liefert

$x = r\cos\omega t,$	$y = r\cdot\sin\omega t,$
$v_x = -\omega r\sin\omega t,$	$v_y = +\omega\cdot r\cdot\cos\omega t,$
$p_x = -\omega^2 r\cos\omega t = -\omega^2 x;$	$p_y = -\omega^2\cdot r\cdot\sin\omega t = -\omega^2\cdot y,$

d. h. die Beschleunigung proportional der Ablenkung aus der Mittellage (Grundgesetz der harmonischen oder elastischen Schwingung, S. 221).

Die Zeitdauer eines Umlaufs, d. i. zugleich die Schwingungsdauer (für Hin- und Hergang) der projizierten Bewegungen ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(Zusammensetzung zweier Schwingungen zu einer Kreisbewegung: Optik, Wechselstromtechnik).

d. Absolut- und Relativbewegung.

1. Unter der **Absolutbewegung** eines Punktes versteht man seine Bewegung gegen den festen Raum (Koordinatensystem x, y, z), unter

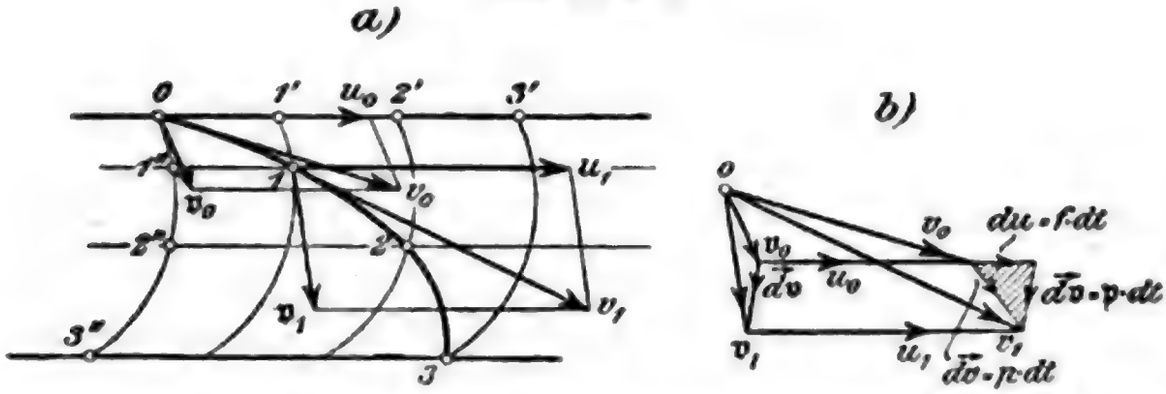
Digitized by Google

der **Relativbewegung** seine Bewegung gegen einen beweglichen Raum (**Fahrzeug**; Koordinatensystem ξ, η, ζ).

Bei den Aufgaben der Technik gilt als Absolutbewegung die Bewegung gegen die Erde.

2. Das Fahrzeug erfährt eine **Schiebung**. Konstruktion der

Abb. 9a u. b.



Absolutbahn 0 1 2 3 bei gegebener Fahrzeugbewegung 0 1′ 2′ 3′ und gegebener Relativbahn 0 1″ 2″ 3″ (Abb. 9).

Alle Punkte des Fahrzeuges haben in jedem Augenblick die gleiche Geschwindigkeit u und die gleiche Beschleunigung f nach Gröfse und Richtung; es gilt:

$$v = \mathfrak{v} + u, \qquad p = \mathfrak{p} + f,$$
$$\mathfrak{v} = v - u, \qquad \mathfrak{p} = p - f,$$

v bzw. $\mathfrak{v}$ = Absolut- bzw. Relativgeschwindigkeit,
p bzw. $\mathfrak{p}$ = Absolut- bzw. Relativbeschleunigung.

Für den Sonderfall $u \parallel v$ ist die Relativgeschwindigkeit $= v - u$ bzw. $= v + u$ bei gleichsinniger bzw. gegensinniger Bewegung von Punkt und Fahrzeug.

(**Drehung** des Fahrzeuges S. 223.)

3. Die Formeln unter 2. gelten unverändert für die Relativbewegung eines Punktes gegen einen zweiten in Bewegung begriffenen Punkt.

u ist dann die Absolutgeschwindigkeit, f die Absolutbeschleunigung des Bezugspunktes.

3. Kraft, Gewicht, Masse.

1. Wirkt an einem Körper eine **Kraft**, so beobachtet man zwei Erscheinungen:

a) Der frei bewegliche Körper erfährt eine Beschleunigung (dynamische Wirkung).

Die Beschleunigungsrichtung wird auch als Richtung der Kraft angesehen.

b) Der festgehaltene Körper übt auf die Befestigung einen Druck oder Zug aus (statische Wirkung).

Der Druck ist mefsbar mittels einer Federwage, deren Achse in die Kraftrichtung gebracht wird (s. unter 3).

2. Jeder Körper übt auf eine wagerechte Unterlage einen Druck aus und fällt mit gleichbleibender Beschleunigung g lotrecht nach

Digitized by Google

unten, wenn die Unterstützung entfernt wird (S. 143 unter 6). — Auf jeden Körper an der Erdoberfläche wirkt also eine lotrecht nach unten gerichtete Kraft, sein **Gewicht** (Schwerkraft).

3. Die Kraft- und insbesondere Gewichtseinheit ist das **Kilogramm (kg)**, d. i. der Schweredruck des vom internationalen Mafs- und Gewichtsbureau aufbewahrten Platin-Iridium-Blocks in Sèvres bei Paris (Normalstelle für die Gewichtsbestimmung).

Das Gewicht des Urkilostückes ist sehr angenähert gleich dem Gewicht von 1 cdcm destillierten Wassers von 4° C.

Kopien des Urkilostückes sowie von seinen Vielfachen und Bruchteilen in geeigneter Zusammenstellung bilden einen **Gewichtsatz.**

An einer in Paris mit kg-Teilung versehenen (oder nach kg geeichten) Federwage kann der Gewichtsdruck G eines Körpers an jedem Orte unmittelbar abgelesen werden.

4. Ein Körper hat die **Gewichtsmenge** a kg, wenn er an einer (mit beliebiger Gradeinteilung versehenen) Federwage denselben Ausschlag hervorbringt, wie ein a kg-Stück — oder an einer gleicharmigen Hebelwage einem a kg-Stück das Gleichgewicht hält.

Die Gewichtsmenge ist unabhängig vom Orte, wo sie bestimmt wird, und gleich dem Gewichtsdruck G_0 an der Normalstelle. — Alle Wägungen des Warenhandels, der Chemie usw. sind Bestimmungen der Gewichtsmenge.

Für technische Rechnungen kann der Unterschied zwischen Gewichtsdruck und Gewichtsmenge vernachlässigt werden (s. 6. und 5.).

Die Gewichtsmenge eines Körpers bleibt bei allen physikalischen und chemischen Veränderungen, die er erleidet, unverändert.

5. Die Fallbeschleunigung g ist am selben Orte unabhängig vom Gewicht und Stoff des fallenden Körpers.

Mit der geographischen Breite φ und der Höhe h (in m) über dem Meeresspiegel ändert sich g (in m/sk²) nach folgender Formel:

$$g = 9{,}806056 - 0{,}025028 \,.\, \cos 2\varphi - 0{,}000003 \,.\, h.$$

Also in Meereshöhe am Aequator: $g_a = 9{,}781$ m/sk²; an den Polen $g_p = 9{,}831$ m/sk²:

für das mittlere Deutschland: $g = 9{,}81$ m/sk²; $\dfrac{g_p - g_a}{g} = \sim 1/_2$ vH.

In Paris, an der Normalstelle für die Gewichtsbestimmung, ist die Fallbeschleunigung $g_0 = 9{,}80665$ m/sk².

6. Der Gewichtsdruck G eines Körpers und die Fallbeschleunigung g ändern sich von Ort zu Ort verhältnisgleich, d. h.

$$\frac{G}{g} = \frac{G_0}{g_0} = \frac{G'}{g'} = \frac{G''}{g''} = \ldots = \text{konst} = m.$$

m heifst die **Masse** des Körpers.

Der Schweredruck eines a kg-Stückes an einem Orte mit der Fallbeschleunigung g' ist demnach

$$a' = a \frac{g'}{g_0} \text{ kg}.$$

Die Einheit der Masse ist die Masse eines 9,80665 kg-Stückes und beträgt $1 \text{ kg } \frac{\text{sk}^2}{\text{m}}$ (vgl. unter 5).

7. **Dynamische Grundgleichung.** Für jede an einem Körper von der Masse m angreifende Kraft P und die zugehörige Beschleunigung p gilt:

Digitized by Google

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g} = m;\ \textbf{Kraft} = \textbf{Masse} \times \textbf{Beschleunigung}.$$

Für die Beschleunigung ist im allgemeinsten Fall zu setzen: $p = \frac{dv}{dt}$ (Abschn. 1c). Mit $p = 0$ folgt das

8. **Trägheitsgesetz.** Jeder kräftefreie Körper bleibt in Ruhe oder behält die einmal erteilte Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung bei.

Der Widerstand, den der Körper der Aenderung seiner Geschwindigkeit entgegensetzt, heifst **Trägheitswiderstand.**

Die Masse kann hiernach auch aufgefafst werden als der auf die Beschleunigungseinheit bezogene Trägheitswiderstand.

9. **Wechselwirkungsgesetz.** Die beiden Kräfte, die zwei Körper gegenseitig aufeinander ausüben, fallen in dieselbe Gerade, sind gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet (Gegenkräfte).

Z. B. die an dem bewegten Körper angreifende beschleunigende Kraft und der an dem bewegenden Körper (Zugmittel) angreifende Trägheitswiderstand.

10. **Technisches Mafssystem — Dimensionsformeln.** Alle mechanischen Gröfsen können aus den drei voneinander unabhängigen Grundgröfsen: Länge (L), Zeit (T) und Kraft (K) abgeleitet werden. Der Zusammenhang zwischen den Grundgröfsen und einer abgeleiteten Gröfse heifst deren Dimension.

Z. B. für die Geschwindigkeit dim $v = L/T$,
„ „ Beschleunigung dim $p = L/T^2$,
„ „ Masse dim $m = K\,T^2/L$.

In den Formeln der Mechanik müssen alle durch $+$, $-$ oder $=$ verbundenen Glieder dieselbe Dimension haben und bei Zahlenrechnungen auch in denselben Einheiten ausgedrückt werden (bei technischen Rechnungen meist m, sk, kg) — Rechenprobe.

11. **Physikalisches Mafssystem; C. G. S.-System.** Als unabhängige Grundgröfsen werden gewählt: Länge (L), Zeit (T) und Masse (M).

Für die Kraft gilt dann dim $P = M\,L\,T^2$.

Im C. G. S.-System ist die Längeneinheit 1 cm; die Zeiteinheit 1 sk (Fallbeschleunigung an der Normalstelle 980,665 cm/sk²); die Masseneinheit 1 Massen-Gramm (1 g*), d. i. der 1000ste Teil der Masse des in Sèvres bei Paris aufbewahrten Platin-Iridiumblocks (s. unter 8). — Die Krafteinheit ist demnach

$$1\ g^* \times 1\ cm/sk^2 = 1\ Dyn.$$

Für die Krafteinheiten im technischen und im C. G. S.-System gilt

$$1\ kg = 1000\ g^* \times 980{,}665\ cm/sk^2 = 0{,}980665 \cdot 10^6\ Dyn,$$
$$1\ Dyn = 1{,}0197 \cdot 10^{-6}\ kg = \sim 1{,}02\ mg;$$

für die Masseneinheiten:

$$1\ kg\,\frac{sk^2}{m} = 9{,}80665 \times 1000\ g^* = 0{,}980665 \cdot 10^4\ g^*,$$
$$1\ g^* = 1{,}0197 \cdot 10^{-4}\ kg\,\frac{sk^2}{m}.$$

12. **Spezifisches Volumen, Gewicht, Masse.** Bei einem in allen Teilen gleichartigen (homogenen) Körper vom Volumen V, der Gewichtsmenge G_0 und der Masse M heifst

das Volumen der Gewichtseinheit $v = V/G_0$
das spezifische Volumen,
das Gewicht der Volumeinheit $\gamma = G_0/V$
das spezifische Gewicht,
die Masse der Volumeinheit $\delta = M/V$
die spezifische Masse oder Dichte.

Digitized by Google

Die Zahl, die angibt, wievielmal der Körper schwerer ist als ein gleiches Volumen Wasser, heifst das relative Gewicht des Körpers (bezogen auf Wasser).

Es ist: $\gamma \cdot v = 1$; $\delta = \gamma / g_0$

($g_0 = 9{,}80665$ m/sk² s. unter 5).

Mifst man das Volumen in ccm, das Gewicht in g, die Masse in g*, so erhält man für das spezifische Gewicht das relative Gewicht und die Dichte gleiche Zahlenwerte, da für Wasser $\gamma = \delta = 1$ ist.

Häufig wird γ auch in kg/cdcm oder in t/cbm angegeben.

Bei einem ungleichartigen (inhomogenen) Körper ist das spezifische Gewicht an einer bestimmten Stelle zu setzen: $\gamma = \frac{dG_0}{dV}$.

4. Arbeit und Leistung.

1. An einem geradlinig bewegten Punkte wirke in Richtung der Bewegung die gleichbleibende Kraft P. Dann heifst das Produkt $A = P \cdot \Delta s$ die **Arbeit** der Kraft P auf dem Wege Δs.

Z. B. die Arbeit eines um die Strecke h sinkenden Gewichtes G ist $G \cdot h$; sie wird verbraucht entweder zum Heben eines gleichgrofsen Gewichtes G um die gleiche Strecke h ohne Geschwindigkeitssteigerung, oder zum Heben eines kleineren Gewichtes G' um die Strecke h unter gleichzeitiger Geschwindigkeitserhöhung, oder ausschliefslich zur Geschwindigkeitssteigerung der sinkenden Masse (Rolle mit darübergelegtem, an beiden Enden belasteten Faden (S. 152, 3).

Allgemein (veränderliche Kraft und krummliniger Weg) gilt für die Arbeit:

$$A = \int_{s_0}^{s} P_t \cdot ds = \int_{s_0}^{s} P \cdot \cos\varphi \cdot ds, \quad \text{wo } \varphi = \sphericalangle (P, ds).$$

Die Dimension der Arbeit ist im technischen Mafssystem dim $A = \mathrm{K\,L}$, die Einheit 1 mkg; im physikalischen Mafssystem dim $A = \mathrm{M\,L^2/T^2}$ bzw. 1 cm Dyn = 1 Erg. (Weitere Arbeitseinheiten nachstehend unter 3.)

$$1 \text{ Erg} = \sim 1{,}02 \cdot 10^{-8} \text{ mkg},$$
$$1 \text{ mkg} = \sim 9{,}81 \cdot 10^{7} \text{ Erg}$$
$$= \sim 9{,}81 \text{ Joule}.$$

Zeichnerische Darstellung durch die Fläche der Weg-Kraftkurve (Abszisse s, Ordinate P_t), z. B. Indikatordiagramm.

2. **Leistung** heifst die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit.

Also bei gleichförmig geradliniger Bewegung unter dem Einfluss der gleichbleibenden Kraft P, die einen gleichgrofsen Widerstand überwindet,

$$N = P \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = P \cdot c, \qquad \text{wo } c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

die unveränderte Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung ist.

Allgemein gilt:

$$N = \frac{dA}{dt} = P v \cos\varphi, \qquad \text{wo } v = \frac{ds}{dt}$$

die augenblickliche Geschwindigkeit ist.

Die Dimension der Leistung ist im technischen Mafssystem dim $N = \mathrm{K\,L/T}$, die Einheit 1 mkg/sk; im physikalischen Mafssystem dim $N = \mathrm{M\,L^2/T^3}$ bzw. 1 Erg/sk;

Digitized by Google

10^{10} Erg/sk heißen 1 **Kilowatt** (KW) = 1000 Watt. — Im Maschinenbau ist die bisher gebräuchlichste Leistungseinheit 1 **Pferdestärke** (PS) = 75 mkg/sk.

1 PS = 75 mkg/sk = 0,736 KW,
1 KW = 1,36 PS = $\sim$ 102 mkg/sk,
1 mkg/sk = $\sim$ 9,81 Watt.

3. Aus der Leistung ergibt sich die Arbeit für veränderliches und gleichbleibendes N zu:

$$A = \int_{t_0}^{t} N \, dt = \int_{t_0}^{t} P v \cos\varphi \, dt \quad \text{bzw.} \quad A = N \cdot \Delta t = P c \cdot \Delta t.$$

Hiernach folgen als weitere Arbeitseinheiten (unter 1) 1 **Pferdekraftstunde** (PSst bzw. 1 **Kilowattstunde** (KWst)

1 PSst = 270 000 mkg = 270 mt,
1 KWst = $\sim$ 367 000 mkg = $\sim$ 367 mt.

Zeichnerische Darstellung durch die Fläche der Zeit-Leistungs-Kurve (Abszisse t, Ordinate N).

4. Setzt sich die Kraft (nach dem Parallelogrammgesetz) aus mehreren Teilkräften zusammen, so gilt:

Die Arbeit der Gesamtkraft ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Teilkräfte.

Setzt sich der Weg (nach dem Parallelogrammgesetz) aus mehreren Teilwegen zusammen, so gilt:

Die Arbeit auf dem Gesamtwege ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten auf den Teilwegen.

Entsprechendes gilt für die Leistung. Kräfte und Wege sind Vektorgrößen, Arbeit und Leistung skalare Größen (S. 140 unter 2).

Sind X, Y, Z die Komponenten der Kraft P; dx, dy, dz die des Wegelementes ds, so gilt demnach

$$A = \int_{s_0}^{s} P \cos\varphi \, . \, ds = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x,y,z} (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) \quad \text{oder}$$

$$A = \int_{t_0}^{t} P v \cos\varphi \, . \, dt = \int_{t_0}^{t} (X v_x + Y v_y + Z v_z) \, . \, dt.$$

5. Lebendige Kraft und Energie.

1. Ist v die augenblickliche Geschwindigkeit eines Punktes mit der Masse m, so heißt

$$L = m \frac{v^2}{2} \text{ die } \textbf{lebendige Kraft} \text{ oder } \textbf{Wucht} \text{ des Punktes.}$$

Dimensionen und Einheiten sind die gleichen wie für die Arbeit (S. 150 4, 1).

2. Für die beliebige krummlinige Bewegung gilt (S. 145 unter 2)

$$p_t = p \cos\varphi = \frac{dv}{dt}, \qquad \varphi = \sphericalangle (p, ds),$$

also:

$$m p_t \cdot ds = m p \cos\varphi \, . \, ds = m v \, . \, dv;$$

$$\int_{s_0}^{s} P_t \, . \, ds = \int_{s_0}^{s} P \cos\varphi \, . \, ds = m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2},$$

Digitized by Google

worin $P = mp$ die Mittelkraft aller am Punkte angreifenden Kräfte, P_t die Seitenkraft von P in Richtung von ds ist.

Die Aenderung der lebendigen Kraft eines Massenpunktes bei Zurücklegung irgend eines Weges ist gleich der auf diesem Wege geleisteten Arbeit aller am Punkte angreifenden Kräfte (Prinzip der lebendigen Kraft).

3. Fafst man die am Massenpunkte in Richtung der Bahntangente wirkenden Seitenkräfte zu einer resultierenden Triebkraft P_t und einem resultierenden Widerstand W_t zusammen, so gilt

$$P_t = W_t + m\frac{dv}{dt}, \text{ folglich}$$

$$\int_{s_0}^{s} P_t \,.\, ds = \int_{s_0}^{s} W_t \,.\, ds + m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2}.$$

$\int_{s_0}^{s} W_t \,.\, ds$ ist der Teil der Arbeit, der zur Ueberwindung des Widerstandes, $m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2}$ der Teil, der zur Geschwindigkeitssteigerung gebraucht wird (vgl. Anmerkung S. 150 unter 4, 1).

$-\int_{s_0}^{s} W_t \,.\, ds$ ist die Arbeit des Widerstandes selbst ($\varphi = 180^0$).

Ist $P_t = 0$, so folgt $m\frac{v_0^2}{2} - m\frac{v^2}{2} = \int_{s_0}^{s} W_t \cdot ds$, d. h. durch Verringerung der Geschwindigkeit ($v < v_0$) kann ein Widerstand überwunden werden (Heranziehung von Schwungmassen zur Arbeitsleistung).

4. **Energie** nennt man in der Physik jede Gröfse, die einer Arbeit gleichwertig ist.

In diesem Sinne heifst die lebendige Kraft auch **Bewegungs-** oder **kinetische Energie** (bei Flüssigkeiten Strömungs-E.).

Ein Gewicht G, das sich in der Höhe H über dem Erdboden in Ruhe befindet, hat eine **potentielle Energie** oder **Energie der Lage** vom Betrage $G \,.\, H$ gegenüber der Erde.

Andere Energieformen sind die potentielle E. der gespannten Feder, die Wärme-E., magnetische E., elektrische E., Strahlungs-E., chemische E.

Energie kann weder erzeugt noch zerstört, sondern nur umgewandelt werden. Für je zwei Energieformen geschieht die Umwandlung nach einer ganz bestimmten Verhältniszahl. **Prinzip der Erhaltung der Energie.**

Z. B. gilt für die Umwandlung: Wärmeenergie — mechanische Energie die Beziehung

$$1 \text{ WE} = 427 \text{ mkg}$$

(mechanisches Aequivalent der Wärmeeinheit; 1 Kilogramm-Kalorie = 1 WE ist die Wärmemenge, durch die 1 kg Wasser von $14^1/_2{}^0$ C auf $15^1/_2{}^0$ C erwärmt wird).

Digitized by Google

II. Statik.

1. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht der Kräfte.

a. Allgemeines.

1. Kräfte werden als Vektorgrößen nach dem Parallelogrammgesetz vereinigt. — **Komponenten** oder Seitenkräfte; **Resultierende** oder Mittelkraft.

2. Am starren Körper (der seine Gestalt unter dem Einfluß von Kräften nicht ändert) gilt:

In jeder beliebigen Geraden dürfen zwei beliebige gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte (Gegenkräfte) hinzugefügt werden.

Jede Kraft darf in ihrer Wirkungsgeraden beliebig verschoben werden (Kraft = linienflüchtiger Vektor).

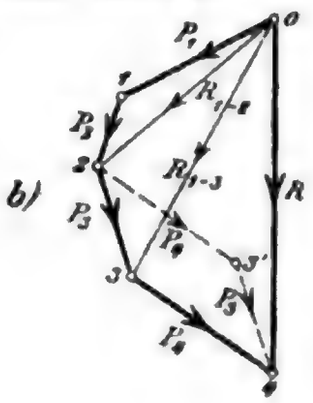
3. Ist das Ergebnis der Kräftezusammensetzung Null, heben sich also die Kräfte gegenseitig auf, so herrscht **Gleichgewicht.**

b. Zeichnerische Zusammensetzung der Kräfte.

α. Kräfte in der Ebene.

1. **Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte. Krafteck.** Abb. 10 für 4 Kräfte. In einer besonderen Figur (Abb. 10b) reiht man, von einem beliebigen Punkte O ausgehend, die gegebenen Kräfte (Abb. 10a) der Größe und Richtung nach mit gleichlaufendem Pfeilsinn aneinander; die Schlußseite $\overline{04}$ dieses Kraftecks oder Kräftezuges 0 1 2 3 4, Pfeil vom Anfangspunkte zum Endpunkte weisend, ist nach Größe, Richtung und Sinn die gesuchte Mittelkraft, die in die Hauptfigur an den gemeinsamen Angriffspunkt zu übertragen ist.

Abb. 10a u. b.



Die Reihenfolge der Kräfte ist gleichgültig (s. Punkt 3); die Teilresultierenden R_{1-2}, R_{1-3} können fortgelassen werden.

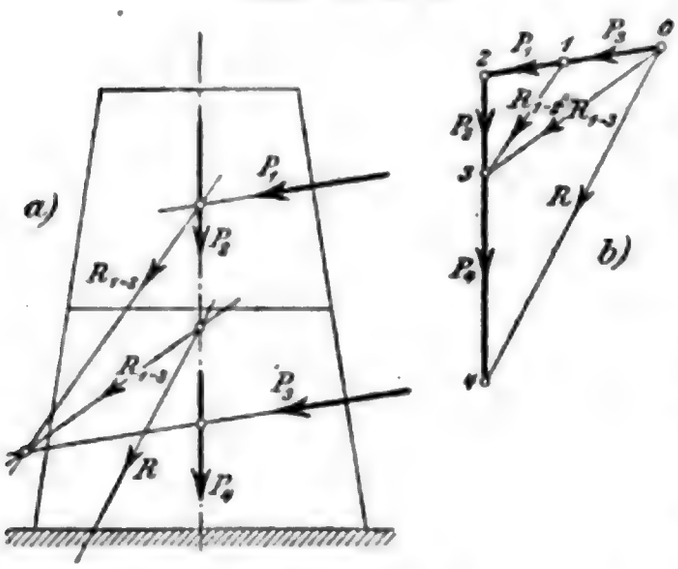
Für zwei Kräfte erhält man das Kräftedreieck (Hälfte des Parallelogramms, Abb. 19, S. 159).

Im allgemeinen folgt eine Einzelkraft. Sonderfall: Der Endpunkt des Kräftezuges fällt auf den Anfangspunkt, d. h. das Krafteck schließt sich von selbst. — Gleichgewicht.

2. **Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten. a) Mittelkraftlinie.** Abb. 11 für 4 Kräfte. Der Kräftezug 0 1 2 3 4 (s. unter 1)

liefert die Teilresultierenden R_{1-2}, R_{1-3} und die Gesamtmittelkraft R nach Gröfse, Richtung und Pfeilsinn (Abb. 11 b). Die Wirkungsgerade von R_{1-2} geht durch den Schnittpunkt von P_1 und P_2, die von R_{1-3} durch den Schnittpunkt von R_{1-2} und P_3, die von R durch den Schnittpunkt von R_{1-3}, P_4. Der Linienzug P_1, R_{1-2}, R_{1-3}, R heifst **Mittelkraftlinie.**

Abb. 11 a u. b.



Bei der praktischen Anwendung (Drucklinien von Gewölben, Futtermauern usw.) mufs eine bestimmte Reihenfolge der Kräfte eingehalten werden.

b) **Seileck.** Abb. 12 für 4 Kräfte. Von einem beliebigen Punkte O (Abb. 12 b) als Pol zieht man die Seil- oder Polstrahlen $O0$, $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ nach den Eckpunkten des Kräftezuges 0 1 2 3 4 (s. unter 1), der R bereits nach Gröfse, Richtung und Sinn

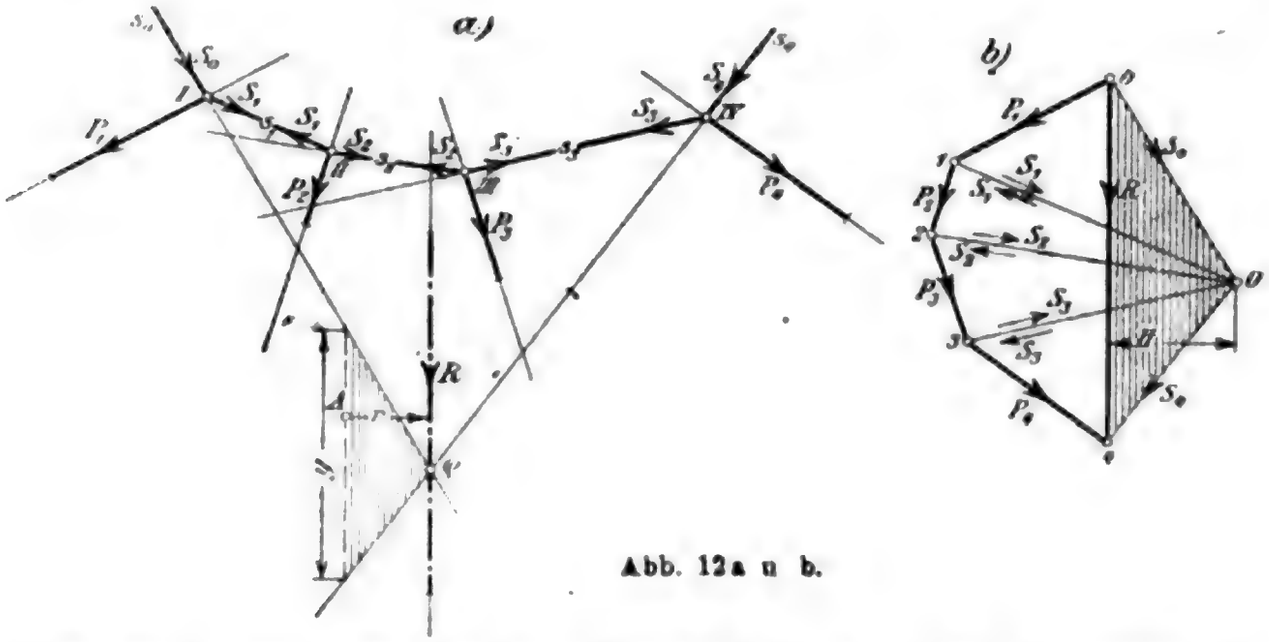


Abb. 12 a u. b.

bestimmt; ziehe dann in Abb. 12 a: $s_0 \parallel O0$ bis 1 auf P_1, durch I: $s_1 \parallel O1$ bis II auf P_2, durch II: $s_2 \parallel O2$ bis III auf P_3, durch III: $s_3 \parallel O3$ bis IV auf P_4, durch IV: $s_4 \parallel O4$; die beiden äufseren Seileckseiten s_0 und s_4 schneiden sich in einem Punkte ϱ der Wirkungsgeraden von R.

Begründung: Fasse die Seilstrahlen als Kräfte $S_0\,S_1\,S_2\,S_3\,S_4$ auf; füge in den mittleren Seileckseiten $s_1\,s_2\,s_3$ bzgl. zwei Kräfte $S_1\,S_2\,S_3$ mit entgegengesetztem Pfeilsinn zu; dann heben sich bei II die Kräfte $P_2\,S_1\,S_2$, bei III die Kräfte $P_3\,S_2\,S_3$ fort (vgl. die Kräftedreiecke $O12$ und $O23$) und es bleiben bei I die Kräfte $P_1\,S_1$, die zusammen S_0, und bei IV die Kräfte $P_4\,S_3$, die zusammen S_4 liefern (vgl. die Kräftedreiecke $O01$ und $O34$).

Das Krafteck mit den Seilstrahlen (Abb. 12 b) heifst **Kräfteplan,** der Linienzug $s_0\,s_1\,s_2\,s_3\,s_4$ (Abb. 12 a) **Seileck.**

Digitized by Google

Die Mittelkraft von P_1 und P_2 geht durch den Schnittpunkt von s_0 und s_2, $\parallel \overline{02}$ im Krafteck; die Mittelkraft von $P_1 P_2 P_3$ geht durch den Schnittpunkt von s_0 und s_3, $\parallel \overline{03}$ im Krafteck.

Im allgemeinen folgt eine Einzelkraft. Sonderfall: 1. Der Endpunkt des Kräftezuges fällt auf den Anfangspunkt, d. h. das Krafteck schliefst sich von selbst; die äufseren Seileckseiten s_0 und s_n werden parallel, die Kräfte S_0 und S_n gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet. — Kräftepaar (Drehkraft). Näheres β). 2. Der Endpunkt des Kräftezuges fällt auf den Anfangspunkt, und die letzte Seileckseite s_n fällt auf die erste s_0, d. h. Krafteck und Seileck schliefsen sich von selbst; die Kräfte S_0 und S_n heben sich fort. — Gleichgewicht.

Wählt man den Anfangspunkt 0 des Kraftecks zum Pol, so wird das Seileck zur Mittelkraftlinie (s. unter a) der gegebenen Kräfte.

β. Kräftepaare und Momente.

1. Zwei gleich grofse, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte heifsen ein **Kräftepaar.** Ein Kräftepaar läfst sich nicht auf eine Einzelkraft zurückführen.

Fügt man (nach dem hier allein anwendbaren Verfahren des Seilecks, S. 154) in der beliebigen Geraden I II (Abb. 13) die Gegenkräfte S_1, S_1 zu, so werden die Mittelkräfte S_0, S_2 von P_1, S_1 bzw. P_2, S_1 wieder parallel, gleich grofs und gegensinnig. Das neue Kräftepaar hat denselben Drehsinn wie das alte; überdies gilt $P \cdot a = S \cdot m$ (folgt sofort aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $O01$ und II III I bzw. der rechtwinkligen Dreiecke I III m und II III a).

2. **Verlegung und Verwandlung eines Kräftepaares.** Jedes Paar darf in seiner Ebene beliebig verschoben werden; dabei dürfen Kräfte-

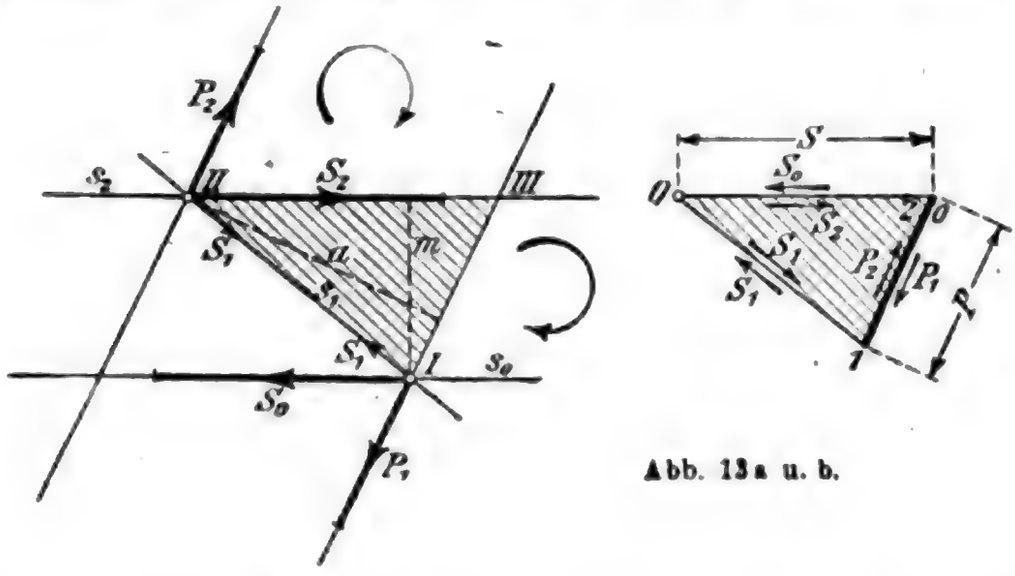


Abb. 13a u. b.

abstand und Kraftgröfse verändert werden, wenn nur ihr Produkt (Moment s. unter 3) dasselbe bleibt (Abb. 13). Jedes Paar darf aus seiner Wirkungsebene in eine Parallelebene verschoben werden.

Bei diesen erlaubten Verlegungen bleibt der Drehsinn derselbe.

3. **(Dreh-) Moment** des Kräftepaares P, P heifst das Produkt aus der Gröfse P und dem Abstande a der beiden Kräfte (a = Arm des Paares)

$$M = P \cdot a.$$

Digitized by Google

Mifst man die Kräfte in kg, die Längen in cm, so ist die Einheit des **Drehmomentes** = 1 cmkg. Im C. G. S.-System (S. 149) ist die Einheit des Drehmomentes = 1 cm Dyn = 1 g^* cm²/sk² = 1 Erg.

Das Moment wird veranschaulicht durch den Flächeninhalt des von den Kräften P, P gebildeten Parallelogramms.

Drehmomente von Kräftepaaren, die in derselben Ebene liegen, werden als positiv oder negativ bezeichnet, je nachdem sie im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt drehend erscheinen.

Im allgemeinen Falle wird ein Kräftepaar P, a nach Gröfse, Richtung (seiner Wirkungsebene) und Drehsinn vollständig bestimmt durch seinen **Momentvektor** (Achsenmoment), d. i. eine Strecke, die winkelrecht zur Ebene des Paares steht, in den Halbraum hineinweist, von dem aus gesehen die Drehung des Paares im Sinne des Uhrzeigers erscheint, und deren Länge in einem bestimmten Mafsstabe gleich dem Moment $P \cdot a$ ist (Abb. 14).

Nach 2. darf der Momentvektor beliebig in seiner Geraden und parallel verschoben werden (Momentvektor = freier Vektor).

4. Kräftepaare werden zusammengesetzt, indem man ihre Momentvektoren nach der Parallelogrammregel an einem beliebigen Punkte geometrisch wie Kräfte zusammensetzt. Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen addieren sich demnach algebraisch.

Schliefst sich das Vieleck der Momentvektoren von selbst, so halten sich die Kräftepaare das Gleichgewicht.

5. Kräftepaar P, a und Einzelkraft Q in derselben Ebene E. Paar P, a darf nach 2. durch ein beliebig in E gelegenes gleichsinniges Paar Q, b ersetzt werden, wenn $Q \cdot b = P \cdot a = M$ ist; legt man das neue Paar so, dafs die Einzelkraft Q durch die eine Paarkraft aufgehoben wird, so bleibt die andere übrig, d. h.:

Durch Hinzufügung eines Kräftepaares vom Momente $M = P \cdot a$ wird eine Einzelkraft Q um die Strecke $b = M/Q$ parallel verschoben.

Umgekehrt:

Soll eine Kraft Q um eine Strecke b parallel verschoben werden, so ist ein Kräftepaar vom Momente $Q \cdot b$ zuzufügen.

6. Das (Dreh-) Moment $\dot{M}$ einer Einzelkraft P in bezug auf einen Punkt O ist das Produkt aus der Kraft P und dem winkelrechten Abstande O, P.

Es wird veranschaulicht durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks O, P (Abb. 14).

Einheit des Momentes und Vorzeichenregel für den Fall, dafs die Kräfte sämtlich in einer Ebene liegen, die auch den Bezugspunkt enthält, wie bei Kräftepaaren (s. unter 3).

Der nach 3. bestimmte Momentvektor $\dot{M}$ ist im Bezugspunkte aufzutragen und darf weder parallel, noch in seiner Geraden verschoben werden (gebundener Vektor).

7. Das (Dreh-) Moment $\overline{M}$ einer Einzelkraft P in bezug auf eine Gerade g ist das in einer zu g winkelrechten Ebene bestimmte Moment der Projektion P' von P in bezug auf den Durchstofspunkt O' von g (Abb. 14).

Digitized by Google

Es wird dargestellt durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks O', P'.

Der nach 3. bestimmte Momentvektor $\overline{M}$ ist in der Bezugsgeraden aufzutragen und darf in ihr beliebig verschoben werden (linienflüchtiger Vektor); $\overline{M}$ ist positiv oder negativ, je nachdem P' von der als positiv

Abb. 14.

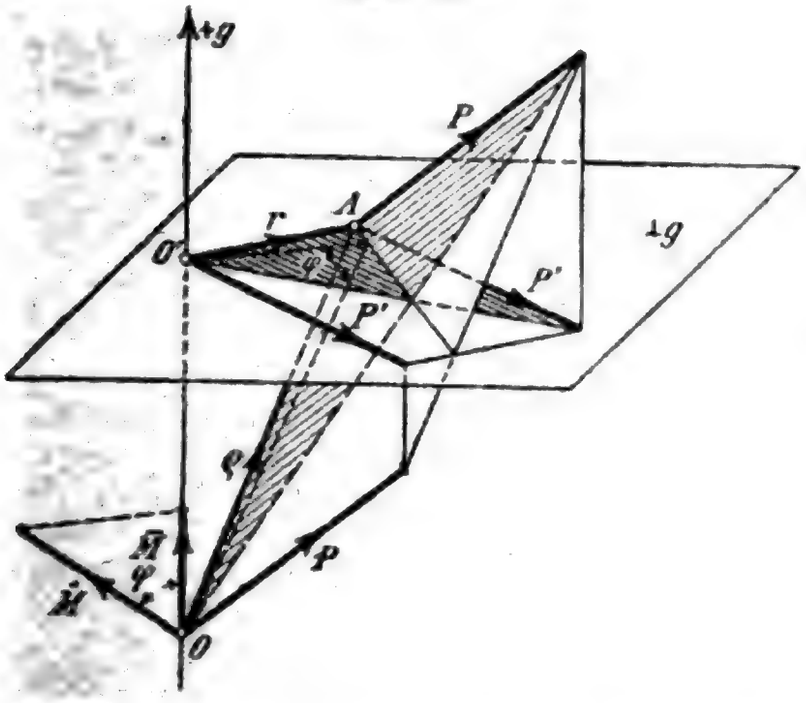
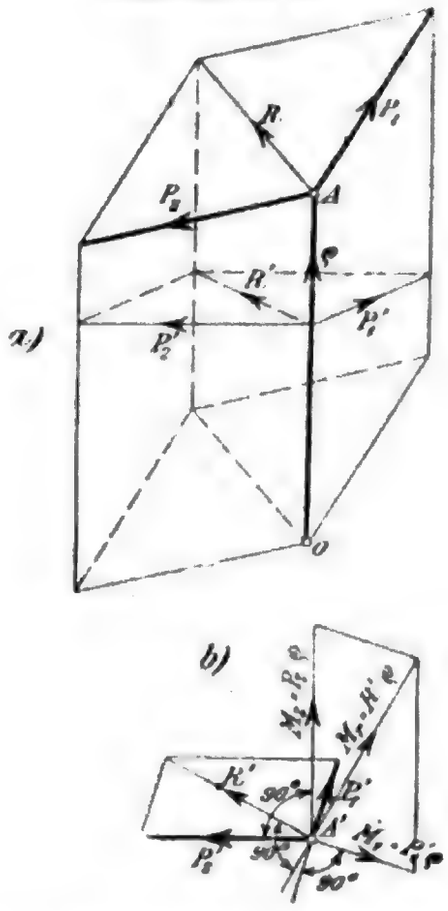


Abb. 15a u. b.



gewählten g-Richtung aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers dreht oder entgegengesetzt (der Pfeil von $\overline{M}$ mit dem der $+g$-Richtung übereinstimmt oder nicht).

Zwischen dem Moment $\dot{M}$ in bezug auf einen Punkt O und dem Moment $\overline{M}$ in bezug auf eine durch O gehende Gerade g besteht die Beziehung

$$\overline{M} = \dot{M} \cos \varphi$$

[$\varphi = \sphericalangle (\dot{M}, \overline{M})$ = Neigungswinkel der Ebenen O, P und O', P'] (Abb. 14).

8. **Allgemeiner Momentensatz.** Ist R (Abb. 15) die Mittelkraft der beiden am Punkte A angreifenden Kräfte P_1 P_2, so gilt für jeden Bezugspunkt O: Das Moment der Mittelkraft ist gleich der **geometrischen** Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

$$\dot{M}_r = \dot{M}_1 + \dot{M}_2.$$

Beweis: S. Abb. 15, in der die Momente durch Parallelogrammflächen dargestellt sind; Abb. 15b ist der Normalschnitt des Prismas mit den Momentvektoren. Für den Normalschnitt gilt $R' = P_1' + P_2'$; die Momentvektoren von P_1, P_2 und R stehen senkrecht auf $P_1' P_2' R'$ und haben die Längen $P_1' \cdot \rho$, $P_2' \cdot \rho$, $R' \cdot \rho$, d. h. sie bilden ebenfalls ein Parallelogramm, das gegen das Parallelogramm $P_1' P_2'$ um 90° gedreht und ihm ähnlich ist.

Einfacher Momentensatz. Liegen die Kräfte P_1, P_2 und folglich auch ihre Mittelkraft R mit dem Momentenbezugspunkte O in derselben Ebene, so gilt

Digitized by Google

das Moment der Mittelkraft ist gleich der **algebraischen** Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

Beweis: Fasse Abb. 15a nicht als perspektivisches Bild eines Prismas, sondern als ebene Figur auf; dann liest man aus den Flächeninhalten der Parallelogramme sofort ab: $\sharp(\rho, R) = \sharp(\rho, P_2) - \sharp(\rho, P_1)$ (Moment von P_1 negativ).

9. Zeichnerische Darstellung des Momentes im Seileck. Das auf den Punkt A bezogene Moment der Mittelkraft R (Abb. 12 S. 154) folgt aus dem Seileck zu $M = R \cdot r = H \cdot y$; darin ist H der Abstand des Krafteck-Poles O von R (Polweite der Kraft R) und y die Strecke, die auf einer Parallelen zu R durch A von den Seilstrahlen (s_0 und s_4) abgeschnitten wird, die sich auf der Wirkungslinie von R schneiden. Obige Gleichung folgt sofort aus der Aehnlichkeit des schraffierten Dreiecks y, ϱ mit dem Dreieck O_{04} (vgl. auch Abb. 47 S. 176).

H ist im Kräftemafsstab, *y* im Längenmafsstab zu messen oder umgekehrt.

γ. Kräfte im Raume.

1. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte. Grundrifs und Aufrifs des nach α. 1. (S. 153) gebildeten **räumlichen Kräftezuges** erhält man, indem man, von einem beliebigen Punkte 0 (Grundrifs 0′, Aufrifs 0″) ausgehend, die Grundrifs- und Aufrifsprojektionen der gegebenen Kräfte mit gleichlaufendem Pfeilsinn aneinanderreiht. Die Schlufslinien des Grundrifs- und Aufrifskraftecks sind Grundrifs und Aufrifs der Mittelkraft R (Abb. 22 S. 160).

Ergebnis: Einzelkraft oder Gleichgewicht wie unter α. 1. (S. 153).

2. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

a) **Zusammensetzung an einem Punkte.** Man verschiebt alle Kräfte parallel an den Bezugspunkt und setzt sie hier nach α. 1. (s. oben) zusammen; die nach β. 5. (S. 156) hinzuzufügenden Kräftepaare vereinigt man nach β. 4. mit Hülfe ihrer Momentvektoren (in Grund-, Auf- und Seitenrifs).

Abb. 16.

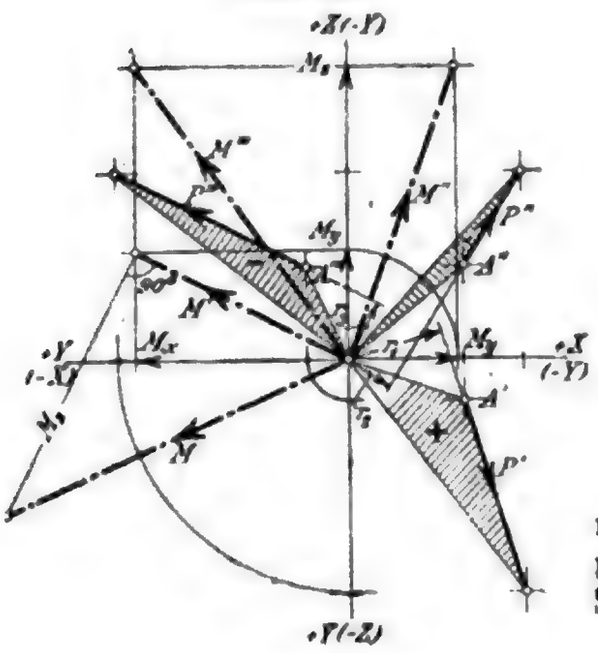


Abb. 17.

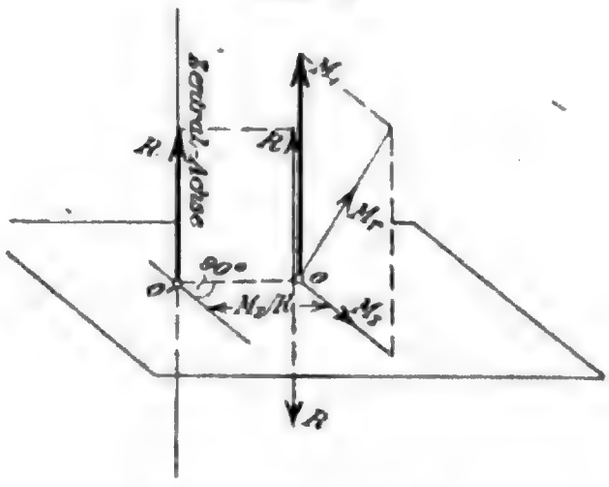


Abb. 16. Konstruktion für eine Kraft P, Bezugspunkt O = Nullpunkt des Koordinatensystems. Die doppelten Flächeninhalte der schraffierten Dreiecke O, P''', O, P'' und O, P' stellen nach β. 7. die Momente von P in bezug auf die x-, y- und z-Achse,

Digitized by Google

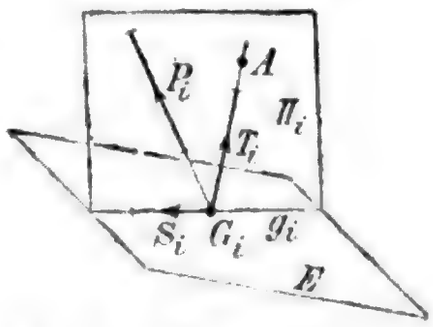
d. i. zugleich die Drehmoment-Komponenten des bei der Parallelverschiebung zuzufügenden Kräftepaares dar; der Zahlenwert der Momente ergibt sich aus Grundlinie und Höhe der Dreiecke unter Berücksichtigung von Kräfte- und Längenmafsstab und ist in einem bestimmten Momentenmafsstab auf den Achsen aufzutragen, wobei auf den Drehsinn zu achten ist (M_x und M_y negativ, M_z positiv); M_y und M_z geben zusammen den Seitenrifs, M_z und M_x den Aufrifs, M_x und M_y den Grundrifs des Momentvektors M.

Im allgemeinen folgt eine Einzelkraft R und ein Kräftepaar M_r. Sonderfälle: 1. Das Krafteck schliefst sich von selbst. — Kräftepaar. 2. Das Vieleck der Momentvektoren schliefst sich von selbst. — Einzelkraft. 3. Krafteck und Momentenzug schliefsen sich von selbst. — Gleichgewicht.

b) Zurückführung auf eine **Kraftschraube**, d. i. eine Einzelkraft R und ein Kräftepaar in einer zu R winkelrechten Ebene. Man zerlege das am Bezugspunkte O erhaltene M_r in Richtung und senkrecht zu R in die Komponenten M_1 und M_2; das M_2 entsprechende Kräftepaar liegt mit R in einer Ebene und bewirkt nach β. 5. (S. 156) eine Parallelverschiebung von R um die Strecke $\frac{M_2}{R}$ in dieser Ebene. Die Wirkungsgerade des neuen R heifst die Zentralachse des Kräftesystems, das übrigbleibende Moment M_1 das Hauptmoment (Abb. 17).

c) Zurückführung auf ein **Kraftkreuz**, d. h. zwei sich kreuzende Kräfte. Man wähle (Abb. 18) beliebig eine Ebene E und einen Punkt A aufserhalb E; die durch A und die Systemkraft P_i gelegte Ebene H_i schneidet E in der Geraden g_i; P_i trifft g_i im Punkte G_i. Man zerlegt P_i nach Richtung von g_i und G_iA in die Seitenkräfte S_i und T_i. Das Kräftebündel der S_i am Punkte A und das Kräftesystem der T_i in der Ebene E liefern nach γ. 1. (s. oben) und α. 2. (S. 153) zwei Einzelkräfte S und T, die sich im allgemeinen nicht schneiden.

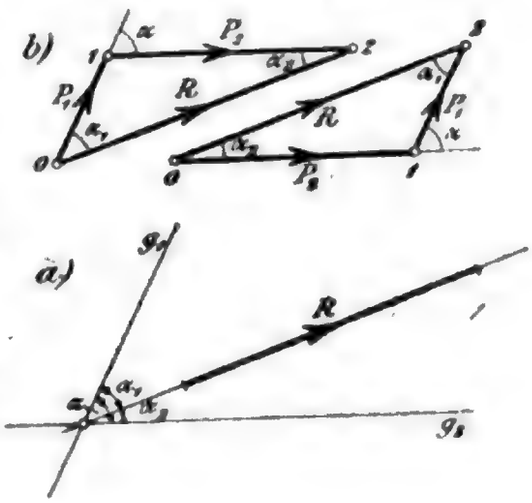
Abb. 18.



Die Zurückführung kann, da A und E beliebig wählbar sind, auf unendlich viele Weisen geschehen (Nullsystem, Theorie der Cremonaschen Kräftepläne, Bd. III S. 90).

c. Zerlegung einer Kraft R. Ermittlung der Kräfte, die einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

Abb. 19a u. b.



1. Zerlegung nach zwei gegebenen Richtungen g_1 und g_2. g_1 und g_2 müssen mit R in einer Ebene liegen und sich auf R schneiden (Abb. 19a u. b).

Mache in der Nebenfigur $02 \rightleftarrows R$; ziehe durch 0: $\overline{01} \parallel g_1$ und durch 2: $\overline{21} \parallel g_2$ oder umgekehrt.

Digitized by Google

Sonderfall: g_1 und g_2 parallel R (Abb. 20).

Ziehe durch den beliebigen Punkt ρ von R zwei beliebige Gerade s_0 und s_2, die g_1 und g_2 in I und II schneiden; im Kräfteplan mache $\overline{0\,O} \parallel s_0$ und $\overline{2\,O} \parallel s_2$; $\overline{O1} \parallel$ I II zerlegt R in die gesuchten Seitenkräfte P_1 und P_2 (Beweis: $O\,0\,1\,2$ Krafteck, s_0 I II s_2 Seileck zu P_1 und P_2, deren Mittelkraft R).

2. Zerlegung nach drei gegebenen Richtungen $g_1\ g_2\ g_3$ in der Ebene. $g_1\ g_2\ g_3$ dürfen sich nicht in einem Punkte schneiden (Abb. 21).

Abb. 20a u. b.

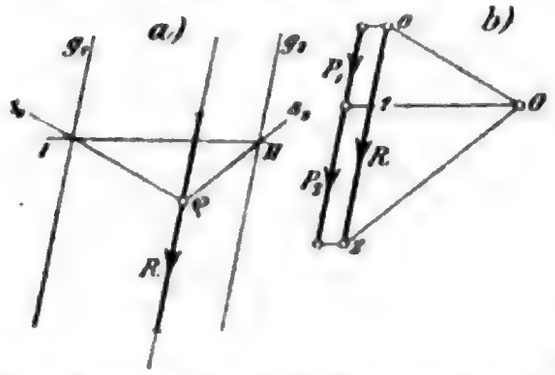
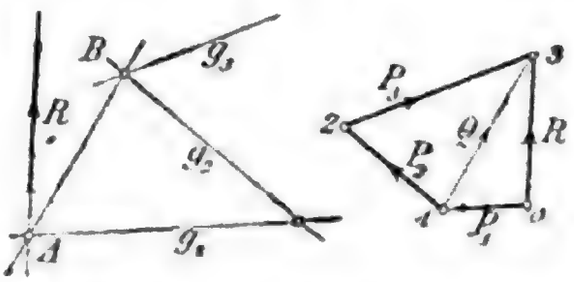


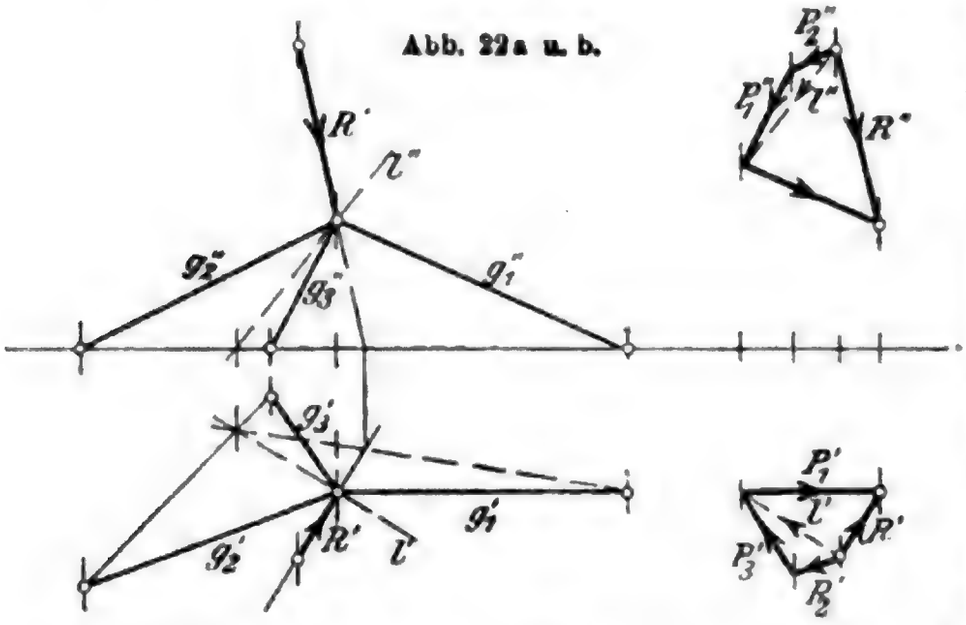
Abb. 21a u. b.



R schneidet g_1 in A, g_2 und g_3 schneiden sich in B; zerlege R nach g_1 und $\overline{AB}$ in P_1 und Q und dann Q im Punkte B nach g_2 und g_3 in P_2 und P_3.

γ) Zerlegung nach drei gegebenen Richtungen $g_1\ g_2\ g_3$ im Raume. $g_1\ g_2\ g_3$ müssen sich auf R schneiden und dürfen nicht in einer Ebene liegen (Abb. 22).

Abb. 22a u. b.



Ebene R, g_1 schneidet Ebene g_2, g_3 in der Geraden l; zerlege R nach g_1 und l in P_1 und Q und dann Q nach g_2 und g_3 in P_2 und P_3. Konstruktion in Grundriss und Aufriss.

4. Kehrt man die Pfeile der nach α, β, γ gefundenen Seitenkräfte um, so erhält man zwei bzw. drei Kräfte, die der gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

d. Rechnerische Zusammensetzung der Kräfte. Gleichgewichtsbedingungen.

1. Man zerlegt jede Kraft P_i (Koordinaten des Angriffspunktes x_i, y_i, z_i: Neigungswinkel gegen die positive x-, y-, z-Achse $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$) in drei rechtwinklige Seitenkräfte $X_i = P_i \cos \alpha_i$, $Y_i = P_i \cos \beta_i$, $Z_i = P_i \cos \gamma_i$. Die algebraische Addition aller X_i, Y_i, Z_i liefert die 3 Komponenten der resultierenden Einzelkraft R, d. h.

Digitized by Google

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i,$$

$$|R| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{|R|}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{|R|}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{|R|}$$

(α, β, γ Winkel zwischen R und den Achsen).

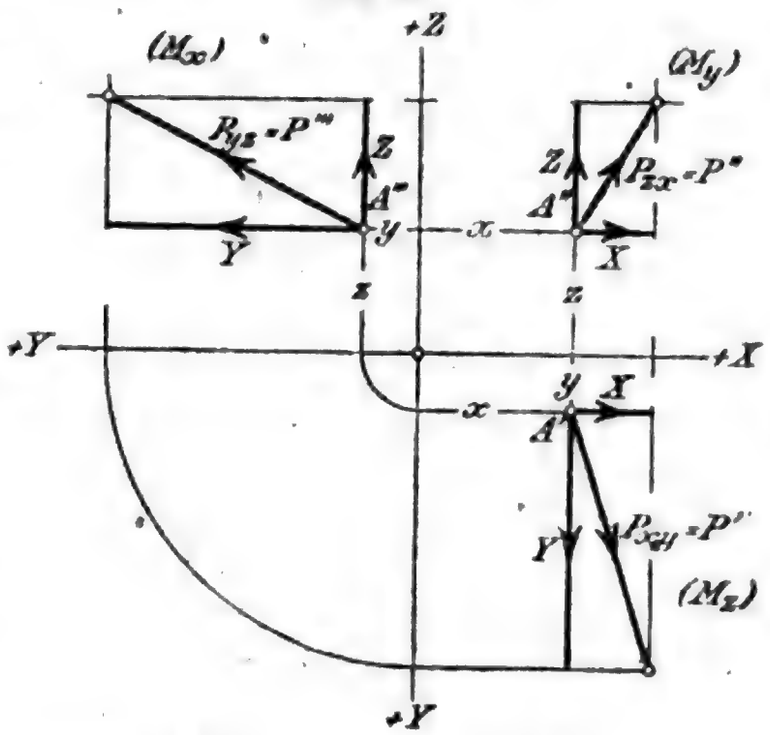
2. Nach dem einfachen Momentensatze (S. 157) folgen die Momente der Kraft P_i für die positive x-, y- und z-Achse aus Abb. 23 zu:

$$M_{xi} = y_i Z_i - z_i Y_i,$$
$$M_{yi} = z_i X_i - x_i Z_i,$$
$$M_{zi} = x_i Y_i - y_i X_i,$$

folglich gilt für das resultierende Moment M_r:

$$M_x = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i),$$
$$M_y = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i),$$
$$M_z = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i),$$
$$|M_r| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

Abb. 23.



$$\cos\lambda = \frac{M_x}{|M_r|}, \qquad \cos\mu = \frac{M_y}{|M_r|}, \qquad \cos\nu = \frac{M_z}{|M_r|}$$

(λ, μ, ν Winkel zwischen M_r und den Achsen).

Beim Rechtskoordinatensystem (S. 140) erhalten die Momente die entgegengesetzten Vorzeichen, d. h. $M_{xi} = Y_i z_i - Z_i y_i$, $M_{yi} = Z_i x_i - X_i z_i$, $M_{zi} = X_i y_i - Y_i x_i$.

3. Der Winkel zwischen R und M_r berechnet sich aus:

$$\cos\varphi = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{|R|\,|M_r|}$$ (vgl. Anal. Geom. S. 113),

das **Hauptmoment** (S. 159) aus:

$$M_1 = |M_r| \cos\varphi = \frac{(X M_x + Y M_y + Z M_z)}{|R|}.$$

Es folgt als Ergebnis der Kräftezusammensetzung ein Kräftepaar, wenn $R = 0$, d. h. $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; es folgt eine Einzelkraft, wenn $M_1 = 0$, d. h. $X M_x + Y M_y + Z M_z = 0$.

4. Für ein **ebenes Kräftesystem** gilt:

$$X = \Sigma P_i \cos\alpha_i, \qquad Y = \Sigma P_i \sin\alpha_i, \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$
$$M = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i).$$

Liegen nur zwei Kräfte vor, so benutzt man die Dreiecksformeln:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos\alpha},$$
$$R : P_1 : P_2 = \sin\alpha : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 \text{ (Abb. 19 S. 159).}$$

Digitized by Google

Liegen alle Kräfte in einer Geraden, so tritt algebraische Addition ein.

5. Gleichgewichtsbedingungen.

α) Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte: $R=0$; d. h.
im Raume $X=0, \quad Y=0, \quad Z=0$ (3 Gleichungen),
in der Ebene $X=0, \quad Y=0$ (2 Gleichungen).

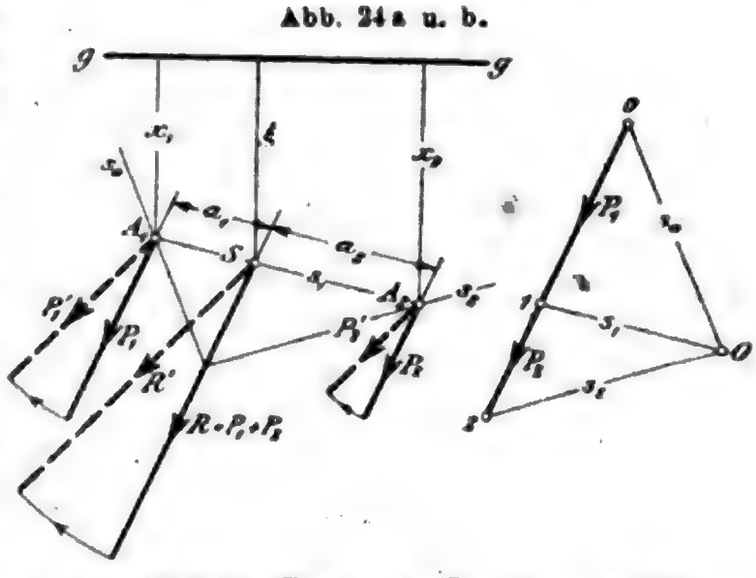
β) Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten:
$R=0; \quad M=0$; d. h.
im Raume $X=0, \quad Y=0, \quad Z=0$
$M_x=0, \quad M_y=0, \quad M_z=0$ } (6 Gleichungen),
in der Ebene $X=0, \quad Y=0, \quad M=0$ (3 Gleichungen)
oder $X=0, \quad M_1=0, \quad M_2=0$
(die Verbindungslinie der beiden Momentendrehpunkte darf aber nicht senkrecht zur X-Richtung stehen)
oder $M_1=0, \quad M_2=0, \quad M_3=0$
die 3 Momentendrehpunkte dürfen aber nicht auf einer Geraden liegen).

2. Schwerpunkt. Stabilität.

a. Mittelpunkt der Parallelkräfte; statische Momente.

1. Die Mittelkraft $R=P_1+P_2$ zweier gleichsinniger Parallelkräfte P_1 und P_2 (Konstruktion nach dem Seileckverfahren, Abb. 24) schneidet die Verbindungslinie der Angriffspunkte $A_1 A_2$ im Punkte S; für die Abschnitte a_1 und a_2 gilt $a_1 : a_2 = P_2 : P_1$, d. h. nur abhängig von der Gröfse (nicht von der Richtung) der beiden Kräfte. Dreht man P_1 und P_2 um die Punkte A_1 und A_2 unter Beibehaltung der Parallelität in die Lagen P_1' und P_2', so geht die neue Mittelkraft wieder durch den Punkt S, den **Mittelpunkt der Parallelkräfte.**

Abb. 24 a u. b.



Zieht man in der Ebene der Kräfte P_1 und P_2 eine beliebige Gerade gg, von der die Punkte A_1, A_2 und S die Abstände x_1, x_2 und ξ haben, so ist

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = R\xi = (P_1 + P_2)\,\xi, \qquad \xi = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}.$$

2. Für beliebig viele gleichsinnige Parallelkräfte $P_1 P_2 \ldots$, deren Angriffspunkte die Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ haben, folgen demnach die Koordinaten des Mittelpunktes aus:

$$\xi \,.\, \Sigma P = \Sigma P x, \qquad \eta \,.\, \Sigma P = \Sigma P y, \qquad \zeta \,.\, \Sigma P = \Sigma P z.$$

Digitized by Google

Die Produkte $P_1 x_1$, $P_1 y_1$, $P_1 z_1$ heifsen die **statischen Momente** der Kraft P_1 in bezug auf die yz-, zx- und xy-Ebene.

b. Allgemeines über den Schwerpunkt.

1. Die Gewichte (dG) der unendlich kleinen Teile, in die man den starren Körper zerlegt denken kann, bilden ein System von Parallelkräften, dessen Mittelpunkt der **Schwerpunkt** des Körpers heifst. Nach a. 1. geht das Gesamtgewicht (G) in jeder Lage des Körpers durch diesen Punkt. Für die Schwerpunktkoordinaten gilt nach a. 2.

$$\xi G = \int x \,.\, dG, \qquad \eta G = \int y \,.\, dG, \qquad \zeta G = \int z \,.\, dG.$$

Setzt man $dG = g \,.\, dm$, $G = g \,.\, m$ (dm = Masse des Teilchens, m = Gesamtmasse, g = Fallbeschleunigung, S. 148 unter 6), so folgt:

$$\xi m = \int x \,.\, dm, \qquad \eta m = \int y \,.\, dm, \qquad \zeta m = \int z \,.\, dm$$

(Schwerpunkt = **Massenmittelpunkt**).

2. Zerlegt man den Körper in endliche Teile mit den Gewichten (Massen) $G_1 G_2 \ldots$ (m_1, $m_2 \ldots$) und den Schwerpunktkoordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$, so folgt für den Gesamtschwerpunkt:

$$\xi G = \Sigma x_i G_i, \qquad \eta G = \Sigma y_i G_i, \qquad \zeta G = \Sigma z_i G_i \qquad \text{bzw.}$$

$$\xi m = \Sigma x_i m_i, \qquad \eta m = \Sigma y_i m_i, \qquad \zeta m = \Sigma z_i m_i.$$

Insbesondere gilt bei Zerlegung in zwei Teile mit den Schwerpunkten S_1 und S_2: Der Gesamtschwerpunkt S liegt auf der Strecke $S_1 S_2$ und teilt diese so, dafs $SS_1 : SS_2 = G_2 : G_1$ ist (s. unter a. 1).

3. Ein **Körper** heifst **homogen**, wenn das auf die Raumeinheit bezogene Gewicht $\gamma = \frac{dG}{dv}$ (spezifisches Gewicht) an jeder Stelle denselben Wert hat; eine **materielle Fläche** heifst **homogen**, wenn das auf die Flächeneinheit bezogene Gewicht $\gamma_f = \frac{dG}{df}$ an jeder Stelle denselben Wert hat; eine **materielle Linie** heifst **homogen**, wenn das auf die Längeneinheit bezogene Gewicht $\gamma_l = \frac{dG}{dl}$ an jeder Stelle denselben Wert hat. Dann gilt für die Schwerpunktkoordinaten:

$$\xi v = \int x \,.\, dv = \Sigma x_i v_i, \qquad \eta v = \int y \,.\, dv = \Sigma y_i v_i, \qquad \zeta v = \int z \,.\, dv = \Sigma z_i v_i,$$

bzw.

$$\xi f = \int x \,.\, df = \Sigma x_i f_i, \qquad \eta f = \int y \,.\, df = \Sigma y_i f_i, \qquad \zeta f = \int z \,.\, df = \Sigma z_i f_i,$$

bzw.

$$\xi l = \int x \,.\, dl = \Sigma x_i l_i, \qquad \eta l = \int y \,.\, dl = \Sigma y_i l_i, \qquad \zeta l = \int z \,.\, dl = \Sigma z_i l_i.$$

4. Für jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene ist die algebraische Summe der statischen Momente Null.

Hat ein homogenes Gebilde eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt der Schwerpunkt in diesen.

Digitized by Google

c. Schwerpunktermittlung homogener Gebilde.

α. Allgemeines.

1. Man zerlegt das Gebilde (meist maßstäblich gezeichneter Querschnitt) in Teile, deren Schwerpunktlagen bekannt sind (gegebenenfalls in so schmale Streifen, daß diese als Rechtecke oder Trapeze angesehen werden können); aus der Figur entnimmt man Streifeninhalt und Schwerpunktabstand von der Bezugslinie und wendet den Satz der statischen Momente an (s. unter b 3, S. 163).

Die Rechnung wird am besten tabellarisch durchgeführt. Hat man keine Symmetrielinie, so muß das Verfahren mit einer zweiten, etwa auf der ersten senkrecht stehenden Bezugslinie wiederholt werden.

2. Man verfährt wie unter 1., trägt aber die Streifeninhalte in einem bestimmten Maßstabe als Parallelkräfte, angreifend in den Streifenschwerpunkten, auf; die Mittelkraft, mit Hülfe des Kraft- und Seilecks bestimmt (S. 154), geht durch den gesuchten Schwerpunkt.

Die Streifeninhalte bestimmt man wie unter 1. rechnerisch nach Ausmessen der maßgebenden Größen (Höhe, Grundlinie usw.). Hat man keine Symmetrielinie, so muß das Verfahren wiederholt werden, indem man alle Parallelkräfte um die Streifenschwerpunkte etwa in eine zur früheren rechtwinklige Lage dreht.

β. Besondere Regeln.

1. Der Schwerpunktabstand eines homogenen Körpers von einer Ebene ändert sich nicht, wenn beliebige Teile des Körpers parallel zur Ebene verschoben werden.

Gelegentlich kann eine ebene Fläche so in unendlich viele Flächenstreifen zerlegt werden, daß deren Schwerpunkte eine Kurve bilden; der Schwerpunkt der Fläche fällt dann zusammen mit dem dieser Kurve, über die sich die Belastung (d. s. die Flächeninhalte der Streifen) im allgemeinen nicht gleichmäßig verteilt (Dreieck, Kreisausschnitt). Entsprechendes gilt für Körper.

2. Dreht sich die ebene Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse, so sind die Schwerpunktabstände der Umdrehungsfläche bzw. des Umdrehungskörpers vom Koordinatennullpunkte:

$$\xi_{\text{Fläche}} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\,y \cdot ds}{\int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds}, \qquad \xi_{\text{Körper}} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\,y^2 \cdot dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx}.$$

3. Für den Schwerpunkt des abgeschrägten geraden Körpers (Abb. 25) gilt:

$$\xi = \frac{\int x^2 \cdot df}{\int x \cdot df}; \qquad \eta = \frac{\int xy \cdot df}{\int x \cdot df}; \qquad \zeta = \frac{1}{2}\,\xi \operatorname{tg}\alpha.$$

$M_y = \int x \cdot df$ ist das statische Moment, $J_y = \int x^2 \cdot df$ das Trägheitsmoment der Grundfläche in bezug auf die y-Achse, $Cxy = \int xy \cdot df$ das Zentrifugalmoment der Grundfläche für die x- und y-Achse (S. 191 u. 192).

Digitized by Google

Ist die Grundfläche symmetrisch in bezug auf eine Parallele zur y-Achse, so gilt: $\eta = \frac{\int y \cdot df}{\int df}$, d. h. gleich dem Schwerpunktabstande der Grundfläche.

4. Für den Sektor eines Ringkörpers (Abb. 26) gilt: der Schwerpunkt fällt zusammen mit dem eines Kreisbogens vom Halbmesser $\varrho = \frac{\int x^2 \cdot df}{\int x \cdot df} = \frac{J_z}{M_z}$; ist α der halbe Zentriwinkel des Sektors, so ist also nach S. 166 unter α. 4. der Schwerpunktabstand von der Drehachse

$$\xi = \varrho \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$$

und der Schwerpunktabstand von der xy-Ebene

$$\zeta = \frac{\int xz \cdot df}{\int x \cdot df} = \frac{C_{xz}}{M_z} \quad \text{(s. unter 3.)}.$$

Abb. 25.

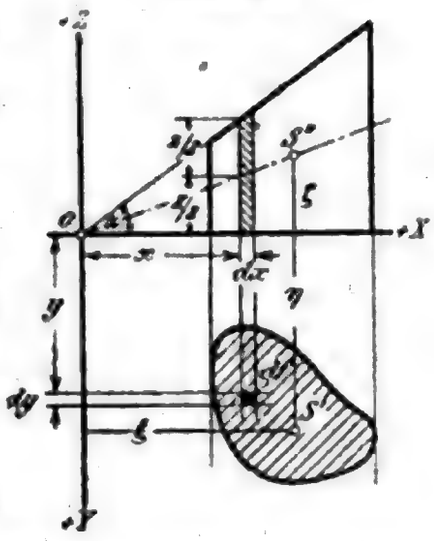
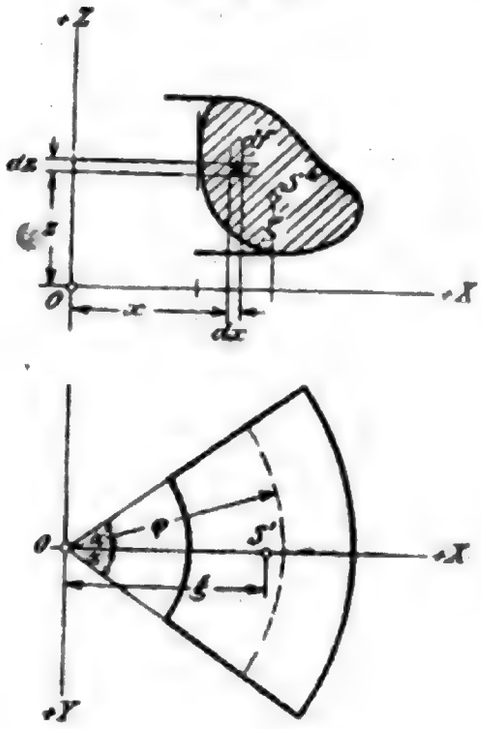


Abb. 26.



Ist die erzeugende Fläche des Ringkörpers symmetrisch in bezug auf eine Parallele zur Drehachse, so gilt:

$$\zeta = \frac{\int z \cdot df}{\int df},$$

d. h. gleich dem Schwerpunktabstande der Erzeugungsfläche.

5. Gelegentlich empfiehlt sich eine Bestimmung der Schwerpunktlage durch den Versuch (Sicherheitsventilhebel: Ausbalancieren über einer Schneide; Flächenstücke: Aufhängen des in Papier ausgeschnittenen Stückes an einem dünnen Faden).

6. Schwerpunktbestimmung von Schiffen Bd. II 4. Abschn. Schiffbau.

7. Guldin-Pappussche Regeln über den Zusammenhang zwischen Schwerpunktlagen und Oberfläche bzw. Inhalt von Drehungskörpern s. unter Mathematik S. 137.

d. Schwerpunktlagen für die technisch wichtigsten Linien, Flächen und Körper.

Schwerpunkte von Walzprofilen s. 5. Abschn. Stoffkunde.

In den nachfolgenden Abbildungen ist der Schwerpunkt mit S bezeichnet.

α. Schwerpunkt von Linien.

1. **Gerade Strecke:** S liegt im Mittelpunkte der Strecke.

2. **Dreieckumfang:** Sind A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, so liegt S im Mittelpunkte des dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ eingeschriebenen Kreises.

Digitized by Google

Der Abstand ξ_a des Schwerpunktes von der Seite a ist

$$\xi_a = \frac{h_a}{2}\,\frac{b+c}{a+b+c},$$

worin h_a die zur Seite a gehörende Höhe ist.

Abb. 27.

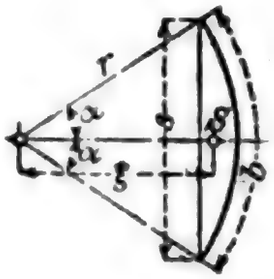


Abb. 28.

3. **Parallelogrammumfang:** S liegt im Schnittpunkte der Diagonalen.

4. **Kreisbogen** (Abb. 27): S liegt auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels in der Entfernung

$$\xi = r\,\frac{s}{b} = r\,\frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} \text{ vom Mittelpunkte,}$$

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\,\pi = \left\{\begin{array}{l}\text{Bogenmaß des halben}\\ \text{Zentriwinkels.}\end{array}\right.$$

Halbkreisbogen: $\xi = 2r : \pi = 0{,}6366\,r$,

Viertelkreisbogen: $\xi = 2r\sqrt{2} : \pi = 0{,}9003\,r$,

Sechstelkreisbogen: $\xi = 3r : \pi = 0{,}9549\,r$.

5. **Beliebiger flacher Bogen** (Abb. 28): Abstand $x \sim {}^2/_3\,h$.

Genauigkeit: x wird beim Sechstelkreisbogen um weniger als 0,5 %, beim Viertelkreisbogen um weniger als 1,1 % zu groß gegenüber dem genauen (nach 4 zu berechnenden) Wert.

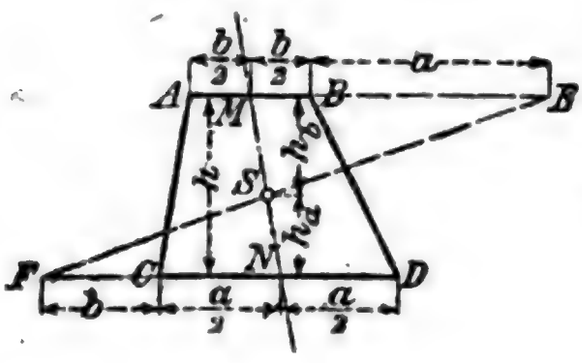
β. Schwerpunkt von Flächen.

1. **Dreieck:** S liegt im Schnittpunkte der Mittellinien. Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe.

Sind die Koordinaten der Eckpunkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, so sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = {}^1/_3\,(x_1 + x_2 + x_3),\quad \eta = {}^1/_3\,(y_1 + y_2 + y_3),\quad \zeta = {}^1/_3\,(z_1 + z_2 + z_3).$$

Abb. 29.



2. **Parallelogramm:** S liegt im Schnittpunkte der Diagonalen.

3. **Trapez:** α) S liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte M und N der parallelen Seiten a und b (Abb. 29). Die Abstände h_a und h_b sind

$$h_a = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b},$$

$$h_b = \frac{h}{3}\,\frac{2a+b}{a+b};$$

daraus die Konstruktion: auf den Verlängerungen der parallelen Seiten trage man $BE = a$, $CF = b$ ab. EF schneidet MN in S.

Digitized by Google

Auf der Parallelen zu AB und CD durch S schneiden AC, MN, BD zwei gleiche Strecken ab von der Größe

$$\xi = \tfrac{1}{3}\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

β) Man zerlegt das Trapez in 2 Dreiecke (Abb. 30) mit den Schwerpunkten S_1 und S_2. S_1S_2 schneidet MN in S.

4. **Viereck:** Man zerlege das Viereck durch die eine Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten S_1 und S_2 (Abb. 31), durch die

Abb. 30.

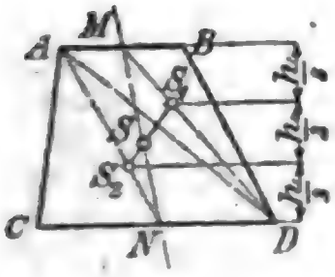


Abb. 31.

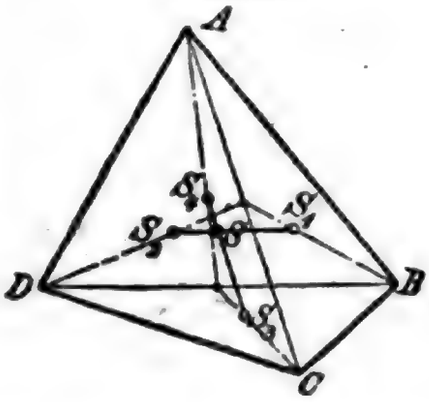
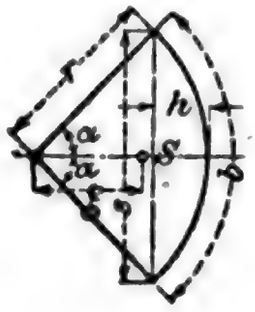


Abb. 32.



andere Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten S_3 und S_4. S_1S_2 und S_3S_4 schneiden sich in S (dabei ist $S_1S_2 \parallel BD$; $S_3S_4 \parallel CA$, so daß man nur die Schwerpunkte S_1 und S_3 zu bestimmen braucht).

5. **Vieleck:** α) Wende sinngemäß das unter 4 angegebene Verfahren an mit Beachtung des Satzes unter b. 2., S. 163

oder β) nach dem allgemeinen Verfahren u. c. α, S. 164.

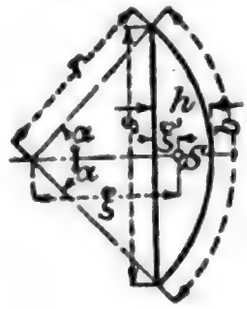
Regelmäßiges Vieleck: Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkte des Vielecks.

6. **Kreisausschnitt:** (Abb. 32). Mit $\operatorname{arc}\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\pi$ ist

$$\xi = \frac{2}{3}r\frac{s}{b} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = 38{,}1972\frac{r\sin\alpha}{\alpha^0} = \frac{r^2 s}{3F},$$

worin $F = r^2 \operatorname{arc}\alpha$ der Flächeninhalt des Ausschnittes.

Abb. 33.



Halbkreisfläche: $\xi = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0{,}4244\,r$,

Viertelkreisfläche: $\xi = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi}r = 0{,}6002\,r$,

Sechstelkreisfläche: $\xi = \frac{2}{\pi}r = 0{,}6366\,r$.

7. **Kreisabschnitt** (Abb. 33): Es ist

$$\xi = \frac{s^3}{12F} = \frac{2}{3}\frac{r^3\sin^3\alpha}{F} = \frac{4}{3}\frac{r\sin^3\alpha}{\operatorname{arc}2\alpha - \sin 2\alpha},$$

worin $F = \frac{1}{2}r^2(\operatorname{arc}2\alpha - \sin 2\alpha)$ der Inhalt des Kreisabschnittes.

Digitized by Google

8. **Kreisringstück** (Abb. 34):

$$\xi = \frac{2}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\operatorname{arc}\alpha} = 38{,}1972\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}.$$

9. **Ellipsenabschnitt:** (Abb. 35). Die Schwerpunkte S der symmetrischen Ellipsenabschnitte A_1B_1C und A_2B_2C fallen mit dem Schwerpunkte des Abschnittes ABC eines Kreises zusammen, dessen Durchmesser die zur Sehne des Ellipsenabschnittes senkrechte Hauptachse ist.

10. **Parabelfläche:** (Abb. 36)

$$\xi_1 = {}^3/_5\,a, \qquad \eta_1 = {}^3/_8\,b \text{ für } S_1,$$
$$\xi_2 = {}^3/_{10}\,a, \qquad \eta_2 = {}^3/_4\,b \text{ für } S_2.$$

Abb. 34.

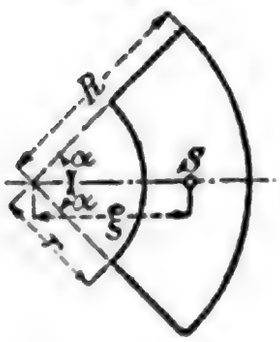


Abb. 35.

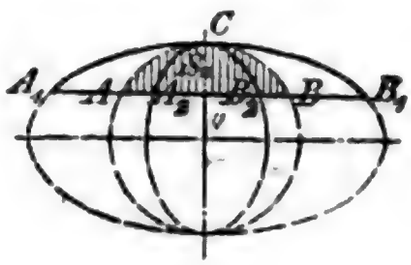
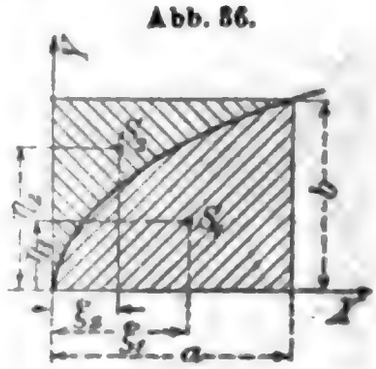


Abb. 36.



11. **Kugelzone und Kugelhaube:** S liegt in der Mitte der Höhe.

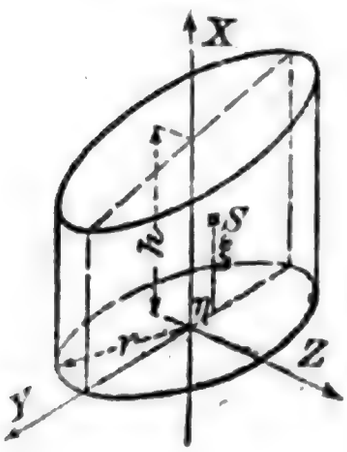
12. **Mantel der Pyramide oder des Kegels:** S liegt in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der Spitze (Schwerachse), um ein Drittel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

13. **Mantel des abgestumpften Kreiskegels:** Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, r der Halbmesser der oberen, R der der unteren Endfläche, so ist der Schwerpunktabstand von dieser

$$\xi = \frac{h}{3}\,\frac{R + 2r}{R + r}.$$

γ. Schwerpunkt von Körpern.

Abb. 37.



1. **Prisma und Zylinder mit parallelen Endflächen:** S liegt in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten der Endflächen.

2. **Schief abgeschnittener gerader Kreiszylinder:** Es sei (Abb. 37) die xy-Ebene die Symmetrieebene,

h die Länge der Achse,
r der Halbmesser des Grundkreises,
α der Neigungswinkel der schiefen Schnittfläche gegen die Grundfläche,

so ist

$$\eta = \frac{1}{4}\,\frac{r^2\operatorname{tg}\alpha}{h}, \qquad \xi = \frac{h}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{h}.$$

Digitized by Google

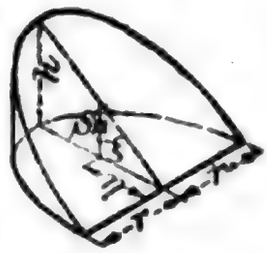
3. **Zylinderhuf** (Abb. 38):

$$\eta = {}^3/_{16}\,\pi r, \qquad \xi = {}^3/_{32}\,\pi h.$$

Abb. 38.

Hufmantel:

$$\eta = {}^1/_4\,\pi r, \qquad \xi = {}^1/_8\,\pi h.$$



Hohler Huf (R, r, H, h):

$$\eta = {}^3/_{16}\,\pi\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}, \qquad \xi = {}^3/_{32}\,\pi\,\frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}.$$

4. **Pyramide und Kegel:** S liegt in der Schwerachse (vgl. 12 auf S. 168) um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

5. **Pyramidenstumpf:** Ist h die Höhe des Pyramidenstumpfes, und sind A und B die Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Fläche A

$$\xi = \frac{h}{4}\,\frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

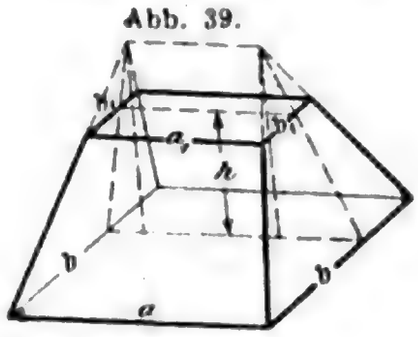
6. **Abgestumpfter Kreiskegel:** Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, und sind R und r die Halbmesser der Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche mit dem Halbmesser R

$$\xi = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

7. **Obelisk** (Abb. 39): Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ab ist

$$\xi = \frac{h}{2}\,\frac{ab + ab_1 + a_1 b + 3a_1 b_1}{2ab + ab_1 + a_1 b + 2a_1 b_1}.$$

Abb. 39.



8. **Keil:** Mit $b_1 = 0$ folgt aus vorstehender Formel der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ab zu

$$\xi = \frac{h}{2}\,\frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

9. **Kugelabschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 33, S. 167.

$$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Diese Formel gilt auch für den Abschnitt desjenigen **Umdrehungsellipsoids**, dessen Drehungsachse gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Der Abstand von der Fläche des Schnittkreises mit dem Durchmesser $s = 2\varrho$ ist

$$\xi' = \frac{h}{2}\,\frac{h^2 + 2\varrho^2}{h^2 + 3\varrho^2} = \frac{h}{4}\,\frac{4r - h}{3r - h}.$$

Halbkugel: $\xi = {}^3/_8\,r.$

Halbe Hohlkugel: $\xi = \frac{3}{8}\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$

10. **Kugelausschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 32, S. 167.

$$\xi = {}^3/_8\,(1 + \cos\alpha)\,r = {}^3/_8\,(2r - h).$$

Digitized by Google

11. **Umdrehungsparaboloid:** Ist die Achse der erzeugenden Parabel die Umdrehungsachse, h der Abstand des Scheitels von der Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche

$$\xi = {}^1/_3\, h.$$

12. **Dreiachsiges Ellipsoid** mit den Halbachsen a, b, c. Für einen Oktanten ist

$$\xi = {}^3/_8\, a, \qquad \eta = {}^3/_8\, b, \qquad \zeta = {}^3/_8\, c.$$

e. Arten des Gleichgewichtes.

Ein nur der Schwere unterworfener Körper, der in einem Punkte (allseitig beweglich) befestigt ist, befindet sich im Gleichgewicht, wenn Befestigungspunkt und Schwerpunkt auf einer Lotrechten liegen (Widerstand der Befestigung gleich grofs und entgegengesetzt dem Gewicht des Körpers).

Das Gleichgewicht ist **stabil** (sicher), wenn der Schwerpunkt unter dem Befestigungspunkte liegt; der Körper kehrt, unendlich wenig aus der Gleichgewichtslage gebracht, losgelassen wieder in diese zurück; bei der Lagenänderung wird der Schwerpunkt gehoben, wozu Arbeit aufgewendet werden mufs; die potentielle Energie (S. 152) hat in der Gleichgewichtslage einen Kleinstwert.

Das Gleichgewicht ist **labil** (unsicher), wenn der Schwerpunkt über dem Befestigungspunkte liegt; der Körper entfernt sich, unendlich wenig aus der Gleichgewichtslage gebracht, losgelassen weiter von ihr; bei der Lagenänderung sinkt der Schwerpunkt; es mufs Arbeit aufgewendet werden, um die Lagenänderung rückgängig zu machen; die potentielle Energie hat in der Gleichgewichtslage einen Gröfstwert.

Das Gleichgewicht ist **indifferent** (neutral, unentschieden), wenn der Schwerpunkt in den Befestigungspunkt fällt; eine unendlich kleine Lagenänderung gibt wieder eine Gleichgewichtslage; weder zum Herbeiführen noch Rückgängigmachen der Lagenänderung ist Arbeit aufzuwenden.

Entsprechende Ueberlegungen gelten bei anderen Stützungsarten (Körper gestützt durch wagerechte Drehachse, Kugel auf Kugel, Zylinder auf Zylinder usw.) und auf Körper unter dem Einfluss anderer Kräfte.

f. Standsicherheit.

Ruht ein Körper ohne besondere Befestigung auf einer Ebene (z. B. ein Kran mit Ausleger), so kommt als einziger Widerstand gegen eine umstürzende Kraft (die zu hebende Last) das Eigengewicht des Körpers (einschl. eines etwaigen Gegengewichts) in Betracht. Das Drehmoment des Eigengewichts in bezug auf die in Frage kommende Kippkante heifst das **Stabilitätsmoment**, das Drehmoment der umstürzenden Kräfte in bezug auf die Drehkante das **Kippmoment**. Soll der Körper nicht umstürzen, so mufs stets gelten: Stabilitätsmoment $>$ Kippmoment.

Unter dem **dynamischen Stabilitätsmoment** versteht man das Produkt $A = G \cdot h$ aus dem Eigengewicht G des Körpers und der Höhe h, um die der Schwerpunkt gehoben werden mufs, bis er senkrecht über der fraglichen Kippkante liegt. A ist die zum Kippen des Körpers aufzuwendende Arbeit.

Digitized by Google

3. Gleichgewicht am gestützten Körper. Fachwerk.

a. Allgemeines und Lagerungen.

1. Vollkommen starre Körper gibt es nicht. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Sätze der Statik ist eine so geringe Formänderung der „starren" Körper unter Einwirkung der Kräfte, dafs die Lagenänderung der Angriffspunkte ohne merklichen Einfluſs ist.

Wird ein unter der Wirkung von gegebenen Kräften **(Lasten)** stehender, in Ruhe befindlicher Körper K von anderen Körpern gestützt, so treten an den Berührungspunkten (Auflager, Widerlager) und im Inneren von K Formänderungen und Kräfte auf. Die Formänderungen dauern so lange an, bis an allen Stellen Gleichgewicht herrscht. K befindet sich im Spannungszustande.

Die vom Körper K auf die Stützkörper ausgeübten Kräfte **(Auflagerdrücke)** sind gleich groſs und entgegengesetzt gerichtet den von den Stützkörpern auf K übertragenen Kräften **(Lagerwiderstände, Stützwiderstände, Lagerreaktionen).** Vgl. Wechselwirkungsgesetz.

Alle Kräfte in der Natur erscheinen paarweise als Gegenkräfte (in derselben Geraden liegend, gleich groſs, einander entgegengesetzt gerichtet). Grenzt man ein bestimmtes Gebiet ab, so nennt man innere Kräfte die, welche darin paarweise auftreten äufsere Kräfte die, welche einzeln auftreten, deren Gegenkräfte also auſserhalb des Gebietes liegen; z. B. immer die Gewichte der Körper, deren Gegenkräfte am Mittelpunkte der Erde angreifen. Trennt man einen im Spannungszustande befindlichen Körper durch einen Schnitt in zwei Teile, so werden die an den Schnittstellen auftretenden Kräfte, die für den ganzen Körper innere sind, zu äuſseren in bezug auf die beiden Teile.

Die inneren Kräfte bilden ein Gleichgewichtssystem, demnach gilt:

a) für den ganzen Körper K: die Lasten und die Stützwiderstände sind im Gleichgewicht (Bestimmung der unbekannten Stützwiderstände),

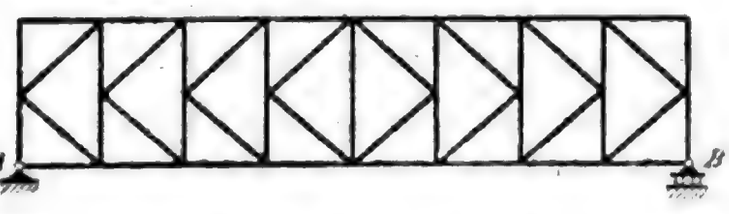
b) für jeden Teil des Körpers K: die Lasten, die Stützwiderstände und die Kräfte an den Schnittstellen sind im Gleichgewicht (Bestimmung der Spannkräfte S. 178 und Festigkeitslehre Bd. I, sowie Statik der Baukonstruktionen Bd. III).

2. Wenn irgend möglich (d. h. wenn keine statisch unbestimmte Lagerung vorliegt, S. 173 unter b. 2.) soll der Berechnung einer Tragkonstruktion die Bestimmung der Stützwiderstände vorausgehen (Freimachen des Körpers). Hierfür ist die konstruktive Ausbildung der Lager maſsgebend.

Lagerungen im Brücken- und Eisenbau. — Ebene Tragkonstruktion, alle Kräfte in der Konstruktionsebene liegend.

a) Bewegliches Auflagergelenk (Walzenlager, Abb. 40 bei B, oder Pendelsäule bzw. Hängependel); das Lager läſst eine Drehung um den Gelenkpunkt und eine Verschiebung auf einer Geraden oder einem Kreisbogen zu; der Stützwiderstand muſs daher durch den Gelenkpunkt gehen und senkrecht zur Auflagerbahn sein; 1 Auflager-Unbekannte

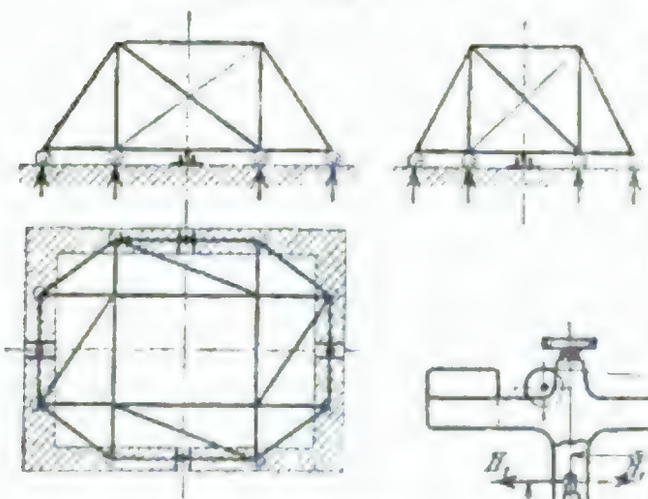
Abb. 40.



Digitized by Google

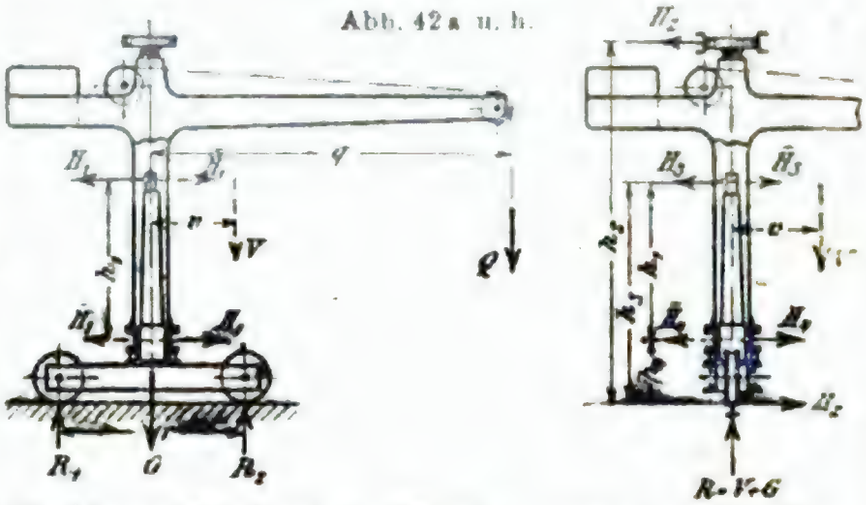
= Gröfse des Stützwiderstandes. b) Festes Auflagergelenk (Bolzenkipplager, Abb. 40 bei *A*); das Lager läfst eine Drehung um den Gelenkpunkt zu; der Stützwiderstand mufs daher durch den Gelenkpunkt gehen; 2 Auflager-Unbekannte = wagerechte und senkrechte Komponente des Stützwiderstandes. c) Feste Einspannung; die Konstruktion ruht in einer ebenen Fläche (Schnitt mit der Konstruktionsebene eine Gerade) auf dem Stützkörper und ist mit diesem durch Schraubanker verspannt; 3 Auflager-Unbekannte = wagerechte und senkrechte Komponente des Stützwiderstandes sowie dessen Drehmoment für einen beliebig gewählten Punkt. — Räumliche Tragkonstruktion. a) Flächenbewegliches Auflagergelenk; das Lager läfst eine allseitige Drehung um den Gelenkpunkt (Kugelgelenk) und eine allseitige Verschiebung auf einer Ebene oder Kugelfläche zu; der Stützwiderstand geht durch den Gelenkpunkt und steht senkrecht zur Bahnfläche; 1 Auflager-Unbekannte = Gröfse des Stützwiderstandes. b) Linienbewegliches Auflagergelenk; das Lager läfst eine allseitige Drehung um den Gelenkpunkt und eine Verschiebung auf einer Geraden oder einem Kreisbogen zu; der Stützwiderstand geht durch den Gelenkpunkt und liegt in einer auf der Auflagerbahn senkrechten Ebene; 2 Auflager-Unbekannte = wagerechte und senkrechte Komponente des Stützwiderstandes in dieser Ebene. c) Festes Auflagergelenk; das Lager läfst eine allseitige Drehung um den Gelenkpunkt zu; der Stützwiderstand geht durch den Gelenkpunkt; 3 Auflager-Unbekannte = x-, y-, z-Komponente des Stützwiderstandes. — Gasbehälterglocken werden gegen das Führungsgerüst abgestützt entweder durch Radialrollen oder durch Tangentialrollen. — Bei der Zimmermannschen Kuppel des Reichstagsgebäudes in Berlin (Abb. 41) sind zur Aufnahme wagerechter Kräfte in der Mitte der Stäbe des Grundringes Lager angeordnet, die nur Kräfte in Richtung der Mauerflucht auf die Stützmauern übertragen können.

Abb. 41 a, b u. c.



Lagerungen des Maschinenbaues. — Halslager und die gewöhnlichen Transmissionslager können keine achsialen Kräfte, die gewöhnlichen Kugel- oder Rollenstützlager können keine quer zur gestützten Welle wirkenden Kräfte aufnehmen. — Oft werden die

Abb. 42 a u. b.



Lager so angeordnet, daſs bei verschiedenen Belastungsarten verschiedene Lagergruppen in Tätigkeit treten (Körper von veränderlicher Stützung). Beim Zweiradkran (Abb. 42) treten, je nachdem ob der Ausleger parallel zur Fahrschiene oder quer dazu steht, die in Abb. 42a bzw. 42b dargestellten Stützwiderstände und Lagerdrücke auf; V ist die Mittelkraft aller am drehbaren Teil angreifenden senkrechten Kräfte, G das Eigengewicht des Kranwagens mit Säule; es gilt im ersten Falle für die Stützwiderstände H_1 bzw. Lagerdrücke $\overline{H_1}$: $H_1 = \overline{H_1} = \frac{V \cdot v}{h_1}$ und für die Stützwiderstände R_1 und R_2:

$$R_1 = \frac{G+V}{2} - \frac{Vv}{r} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{G+V}{2} + \frac{Vv}{r};$$

im zweiten Falle gilt für die Stützwiderstände H_2 an Radflansch und oberer Schienenführung $H_2 = \frac{Vv}{h_2}$, für die Stützwiderstände und Lagerdrücke an den beiden Halslagern der Kransäule $H_3 = \overline{H_3} = \frac{H_2 h_4}{h_1}$ bzw. $H_4 = \overline{H_4} = \frac{H_2 h_3}{h_1}$ für den senkrechten Stützwiderstand $R = G + V$; in beiden Fällen wirkt am Kugellager der Stützwiderstand V nach oben und der Lagerdruck $\overline{V}$ nach unten (nicht eingezeichnet).

b. Grundbegriffe der Fachwerklehre.

1. Das Fachwerk ist eine Verbindung von geraden Stäben, die in den Knotenpunkten (d. i. Schnittpunkten der Stabachsen) durch reibungslose Gelenke (ebenes Fachwerk: Bolzengelenke; räumliches Fachwerk: Kugelgelenke) aneinandergeschlossen sind.

Wirken die äuſseren Kräfte (Lasten und Lagerwiderstände) ausschlieſslich in den Knotenpunkten, dann werden die Stäbe nur in Richtung der Achse, also nur auf Zug oder Druck beansprucht.

Bei den Fachwerken der Praxis treten wegen der festen Knotenpunktverbindungen auch Biegungs(Neben-)spannungen auf, die nur mit Hülfe der Elastizitätstheorie bestimmt werden können.

Beim ebenen Fachwerk liegen die Stäbe und die äuſseren Kräfte in einer und derselben Ebene, andernfalls hat man ein räumliches Fachwerk.

2. Ein Fachwerk heiſst **statisch bestimmt**, wenn für jedes gegebene Lastensystem die unbekannten Stabspannungen und Stützwiderstände aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte eindeutig ermittelt werden können.

Das Fachwerk heiſst innerlich statisch bestimmt, wenn die unbekannten Stabspannungen für jedes gegebene Gleichgewichtssystem äuſserer Kräfte (Lasten und Stützwiderstände) aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte berechnet werden können.

Das Fachwerk heiſst statisch bestimmt gelagert oder äuſserlich statisch bestimmt, wenn für jedes gegebene Lastensystem die

Digitized by Google

unbekannten Stützwiderstände aus den 3 (ebenes Fachwerk) bzw. 6 (räumliches Fachwerk) Gleichgewichtsbedingungen für die äufseren Kräfte eindeutig berechnet werden können.

Bedeutet k die Zahl der Knotenpunkte, s die Zahl der Stäbe, l' die Zahl der festen, l'' die der linienbeweglichen, l''' die der flächenbeweglichen Auflagergelenke (nur beim räumlichen Fachwerk), so mufs bei statischer Bestimmtheit des ganzen Fachwerks bzw. der Lagerung und des Stabsystems für sich gelten:

ebenes Fachwerk:	räumliches Fachwerk:
$2k = s + 2l' + l''$,	$3k = s + 3l' + 2l'' + l'''$,
$3 = 2l' + l''$,	$6 = 3l' + 2l'' + l'''$,
$2k - 3 = s$.	$3k - 6 = s$.

3. Ein als Tragkonstruktion brauchbares Fachwerk mufs **unbeweglich** (stabil) sein; dabei kann eine etwaige Beweglichkeit des Stabsystems durch entsprechende Anordnung der Lager ausgeglichen werden.

Die vorstehenden Formeln geben zugleich an, wieviel Systemstäbe und Auflagerbedingungen mindestens erforderlich sind, wenn das ganze Fachwerk bzw. die Lagerung und das Stabsystem für sich unbeweglich sein sollen.

Insbesondere ist auch der Fall der unendlich kleinen Beweglichkeit zu vermeiden, wo die Stabspannungen sehr (theoretisch unendlich) grofs werden.

Z. B. der Dreigelenkbogen (Abb. 43) erhält unendlich kleine Beweglichkeit, wenn das Scheitelgelenk C in die Verbindungsgerade der beiden Kämpfergelenke A und B fällt

Abb. 43.

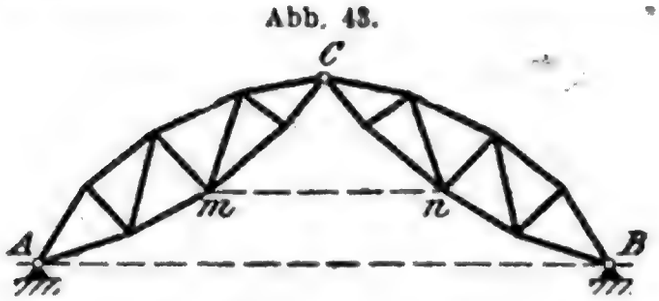


Abb. 44.

4. Ist die Stabzahl gröfser, so ist das Fachwerk kinematisch überbestimmt und **statisch unbestimmt.**

D. h. die Länge eines oder mehrerer (überzähliger) Stäbe ist durch die der anderen (notwendigen) bereits gegeben. — Die Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte genügen nur in Ausnahmefällen (besondere Belastungsarten oder Symmetrie) zur Bestimmung der Stabkräfte; im allgemeinen müssen hierzu die Formänderungen des Fachwerks in Rücksicht gezogen werden (S. 183).

Ist die Stabzahl kleiner, so ist das Fachwerk **beweglich** und statisch überbestimmt.

D. h. die gegebenen Lasten müssen, wenn Gleichgewicht möglich sein soll, nach Richtung bzw. Gröfse so viel Bedingungen erfüllen, als notwendige Stäbe fehlen.

5. Richtige Stabzahl vorausgesetzt, erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen nur dann eindeutige Werte für die Stabspannungen und Lagerwiderstände, wenn die aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildete Nennerdeterminante D (s. Mathematik, S. 51 unter 3.) von Null verschieden ist. — Die Entscheidung wird wesentlich vereinfacht durch das Ersatzstabverfahren (Bd. III, Statik der Baukonstruktionen).

Bei den meisten Fachwerken der Praxis kann man aber bereits am Aufbau erkennen, ob statische Bestimmtheit vorliegt.

Die einfachsten statisch bestimmten, statisch unbestimmten und beweglichen ebenen **Fachwerkelemente** sind das Dreieck, das Viereck mit 2 Diagonalen und das Viereck ohne Diagonalen. — Das einfachste ebene statisch bestimmte Stab-

Digitized by Google

system ist das **Dreiecknetz**, das aus einem Dreieck durch schrittweises Anschliefsen weiterer Knotenpunkte mittels je zweier Stäbe entsteht. — Die einfachste statisch bestimmte Lagerung des ebenen Fachwerks besteht aus einem beweglichen und einem festen Auflagergelenk; ein so gelagerter Fachwerkträger heifst, wenn nur lotrechte Lasten wirken, **Balkenträger** (Abb. 40). — Das einfachste ebene statisch unbestimmt gelagerte Fachwerk ist der **Zweigelenkbogen** (Abb. 44); durch Entfernung des Stabes ik entsteht der statisch bestimmte **Dreigelenkbogen** (Abb. 43); wird bei diesem das eine Lager beweglich gemacht und durch Einschalten einer Spannstange mn zwischen die beiden Trägerhälften die Beweglichkeit des Fachwerks wieder aufgehoben, so entsteht der allgemeine **Poloncean-Träger**. — Aus dem zweifach statisch unbestimmt gelagerten **kontinuierlichen Fachwerkträger** (Abb. 45) entsteht durch Wegnehmen der beiden Stäbe ik und lm der statisch bestimmte **Gerbersche Gelenkträger**. — Das einfachste statisch bestimmte räumliche Stabgebilde ist das **Flechtwerk**, d. i. eine aus Dreiecken bestehende Mantelfläche, die einen inneren Raum völlig umschliefst; bilden dabei mehrere zusammenhängende Dreiecke ein ebenes Vieleck, so müssen die Eckpunkte dieser Dreiecke sämtlich auf dem Rande des Vielecks liegen. — Die **Zimmermannsche Kuppel** (Abb. 41) entsteht aus dem zugehörigen Flechtwerk durch Entfernen der 1 Diagonale aus dem oberen und der 5 Diagonalen aus dem unteren Vieleck und Ersatz durch 6 Auflagerbedingungen. — Abb. 46 stellt das zu einer vollständigen Parallelträgerbrücke gehörige Flechtwerk dar; aus praktischen Gründen können in vielen Fällen die Diagonalen in den Endquerfachen nicht ausgeführt werden; dann müssen statt dessen Steifrahmen oder besondere Windjoche zur Erzielung der Quersteifigkeit angeordnet werden. — Die einfachste statisch bestimmte Lagerung des räumlichen Fachwerks besteht in einem festen Auflagergelenk, einem Linien- und einem Flächenlager oder in 3 Linienlagern; aus praktischen Gründen mufs meist Stützung in 4 Punkten vorgenommen werden, wobei statische Unbestimmtheit auftritt.

Abb. 45.

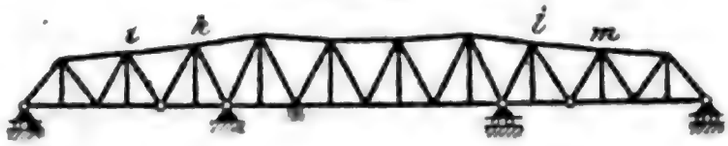
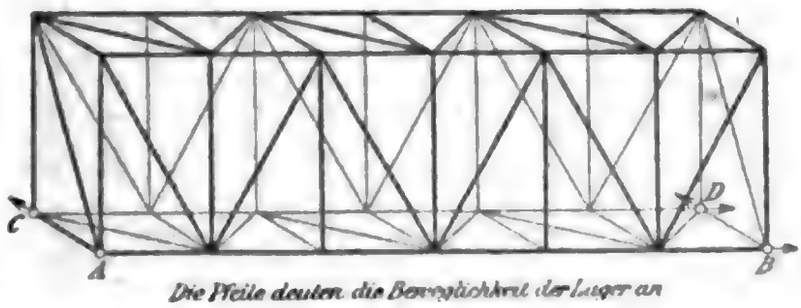


Abb. 46.



Die Pfeile deuten die Beweglichkeit der Lager an

6. Kennzeichnend für statisch bestimmte Stabsysteme ist, dafs beim Fehlen äufserer Kräfte keine Spannungen in ihnen auftreten können, während statisch unbestimmte Stabgebilde sehr wohl **Eigenspannungen** (hervorgerufen durch Temperaturänderungen oder künstliche Anspannung von Stäben) haben können (vgl. Dreieck und Viereck mit gekreuzten Diagonalen).

Bei statisch bestimmter Lagerung gilt entsprechendes; die Stützwiderstände sind hierbei unabhängig von der Ausbildung des Trägers (ob gegliedert oder vollwandig).

7. Da alle Gleichgewichtsbedingungen in den Lasten P sowie den notwendigen und überzähligen Stabkräften S und X vom ersten Grade sind, so folgt:

Die Spannkräfte in den notwendigen Stäben sind lineare Funktionen der gegebenen Lasten und der überzähligen Stabkräfte, d. h.

$$S = \mathfrak{S} + \sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \ldots., \text{ wo } \mathfrak{S} = \mathfrak{s}_1 P_1 + \mathfrak{s}_2 P_2 + \ldots.$$

Entsprechendes gilt für die Stützwiderstände.

Digitized by Google

4. Grundaufgaben der graphischen Statik.

a. Querkräfte und Biegungsmomente des einfachen Balkens

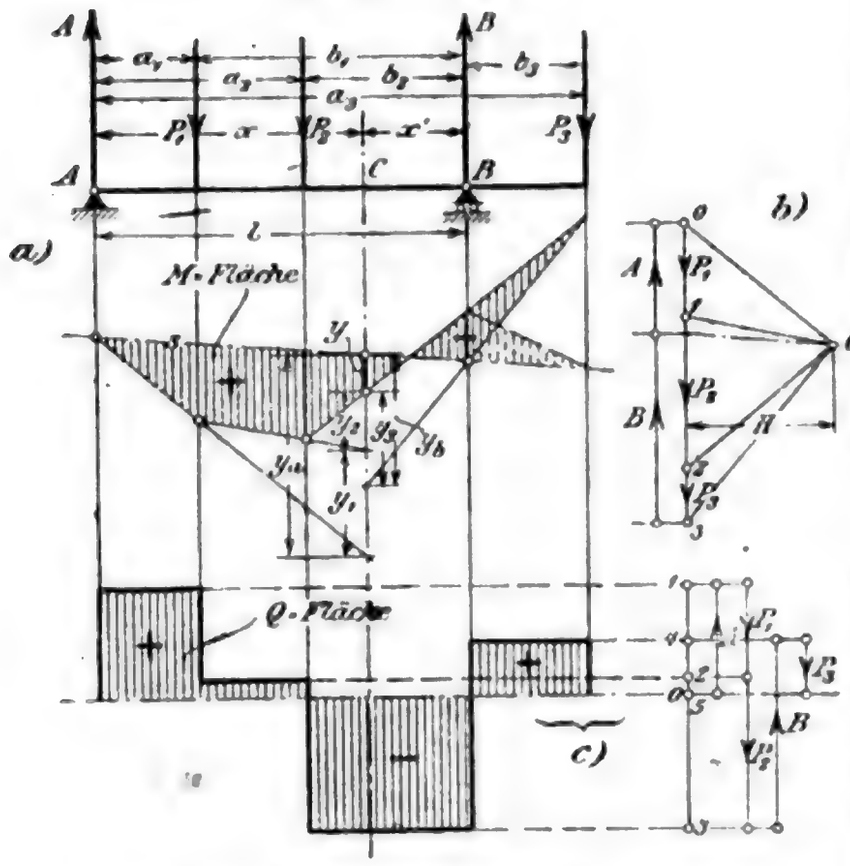
(wagerechter, statisch bestimmt gelagerter Träger auf 2 Stützen mit senkrechten Lasten).

1. Unmittelbare Belastung, α) Einzellasten. (Abb. 47) (Balken mit einem überkragenden Ende). Die **Stützwiderstände** folgen aus dem Momentensatz für die Lager A und B zu:

$$A = P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} - P_3 \frac{b_3}{l},$$

$$B = P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l}.$$

Abb. 47 a, b u. c.



Zeichnerisch bestimme A und B als Kräfte, die der Mittelkraft R von P_1, P_2, P_3 das Gleichgewicht halten, Krafteck und Seileck nach S. 154, Zerlegung von R nach S. 160, als Hülfsgerade s_0 und s_3 benutze sogleich die äufsersten Seiten des zur Zusammensetzung von P_1, P_2, P_3 gezeichneten Seilecks.

Für den Querschnitt C ist die **Querkraft:**

$$Q = A - P_1 - P_2 = -B + P_3,$$

d. i. die algebraische Summe der lotrechten Kräfte am linken oder rechten Trägerteil — links nach oben, rechts nach unten positiv gerechnet,

und das **Biegungsmoment:**

$$M = A\,x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) = B\,x' - P_3(x' + b_3),$$

d. i. die algebraische Momentensumme der Kräfte am linken oder rechten Trägerteil — links im Uhrzeigersinne, rechts gegen den Uhrzeigersinn positiv gerechnet.

In Abb. 47 ist nach 9, S. 158

$$M = H(y_a - y_1 - y_2) = H(y_b - y_3) = Hy,$$

die schraffierte Fläche zwischen Seileck und Schlufslinie heifst daher die **Momentenfläche.**

Die Gröfstwerte der Biegungsmomente liegen unter den Lasten, dazwischen ändert sich das Moment geradlinig. Nimmt man den Pol rechts vom Krafteck, so liegt der

positive Teil der Momentenfläche unterhalb, der negative oberhalb der Schlußlinie; der Uebersicht wegen pflegt man den letzteren wie in der Abb. gestrichelt abzuändern.

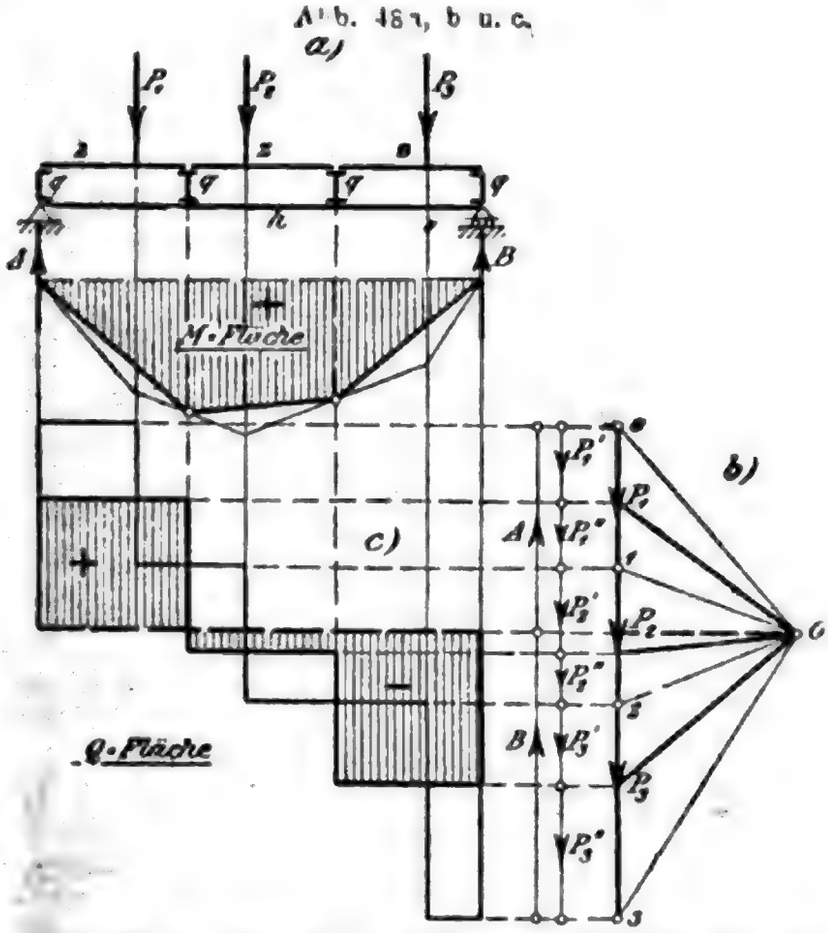
Konstruktion der Querkraftfläche (Abb. 47c).

β) Verteilte Belastung. Das Gesetz, nach dem sich die Belastung über den Balken verteilt, wird durch eine über der Balkenmittellinie aufgetragene **Belastungslinie** dargestellt, deren Ordinaten p die Belastung in kg für das m Balkenlänge an den einzelnen Punkten angeben.

Zerlege die Belastungsfläche durch Senkrechten in hinreichend schmale Streifen von gleicher Breite; ersetze die verteilte Belastung durch Einzellasten gleich den Streifeninhalten, wirkend in den Senkrechten durch die Streifenschwerpunkte. Das zu den Ersatzlasten gezeichnete Seileck hüllt die wirkliche Momentenkurve berührend ein; die Berührungspunkte mit den Seileckseiten liegen auf den senkrechten Begrenzungslinien der Belastungsstreifen (in den zugehörigen Querschnitten sind die Biegungsmomente für die verteilte und die Ersatzbelastung gleich).

Bei **gleichmäßig verteilter Belastung** (p kg/m, Gesamtlast $P = p\,l$ in kg) wird die Momentenkurve eine **Parabel**. Die Stützwiderstände sind $A = B = \frac{P}{2} = p\,\frac{l}{2}$; ist der Balken an den Enden unterstützt, so ist das Biegungsmoment im Abstande x von einem der Lager $M = \frac{p}{2}\,x\,(l - x)$, in der Mitte $M' = p\,\frac{l^2}{8} = P\,\frac{l}{8}$.

2. Mittelbare Belastung. Die Lasten greifen an Zwischenträgern s an, die auf Querträgern q ruhen; die Querträger übertragen an ihren Anschlußpunkten die Lasten auf die beiden Hauptträger h (Abb. 48). — An den Querträgeranschlüssen sind die Biegungsmomente für mittelbare und unmittelbare Belastung gleich; zwischen den Querträgern ändert sich das Moment (der Hauptträger) bei mittelbarer Belastung geradlinig (s. auch 1 α); daher die Konstruktion Abb. 48; die von der Momentenfläche für unmittelbare Belastung abgeschnittenen Teile sind die Seilecke für die Zwischenträger; Parallelen durch den Pol zu den Schlußlinien dieser Seilecke liefern die Teillasten P_1', P_1''; P_2', P_2''; P_3', P_3'', die von P_1, P_2, P_3 an die Hauptträger abgegeben werden.



Konstruktion der Querkraftfläche (Abb. 48c).

Digitized by Google

b. Spannungsermittlung im statisch bestimmten Fachwerk.

1. Abb. 49a u. b zeigen die Pfeile der Stabspannungen bei Zug- und bei Druckbeanspruchung.

2. Zwei häufig vorkommende Knotenpunktanordnungen sind in Abb. 50a u. b dargestellt. Die in derselben Geraden liegenden

Abb. 49a u. b.

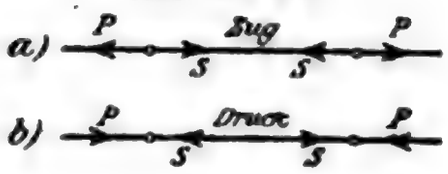
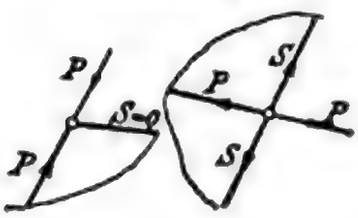


Abb. 50a u. b.



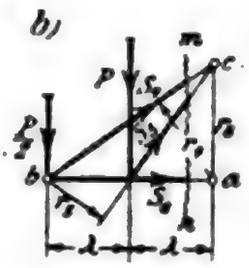
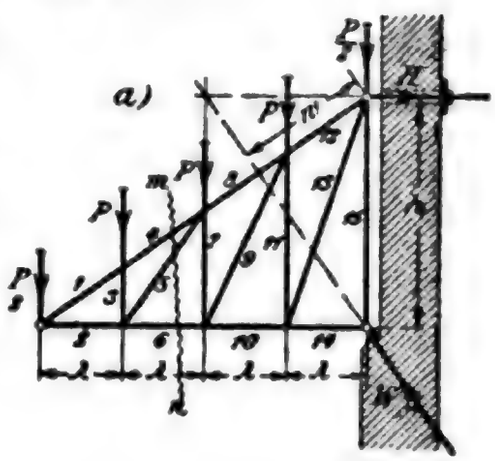


Abb. 51a u. b.



Stabkräfte sind gleich groſs und entgegengesetzt gerichtet; die Spannkraft in dem seitlich abzweigenden Stabe (Abb. 50a) ist Null.

In dem statisch bestimmten Paralleltträger (Abb. 58b) ist z. B. $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_8 = 0$; $\mathfrak{S}_7 = -A$, $\mathfrak{S}_{10} = -B$, $\mathfrak{S}_9 = -P_3$.

3. Momentenverfahren von Ritter (Abb. 51). **Pultdach.** — Führe den Schnitt mn so, daß 3 Stäbe (4, 5, 6) getroffen werden, die sich nicht in einem Punkte schneiden; die Stabkraft in jedem der durchschnittenen Stäbe (z. B. 4) folgt aus der Momentengleichung in bezug auf den Schnittpunkt der beiden andern (5, 6), vgl. Abb. 51b.

Also $$S_4 \cdot r_4 - P \cdot \lambda - \frac{P}{2} \cdot 2\lambda = 0, \qquad S_4 = +2P \cdot \frac{\lambda}{r_4},$$

$$-S_5 \cdot r_5 + P \cdot \lambda = 0, \; S_5 = +P \cdot \frac{\lambda}{r_5}; \qquad -S_6 \cdot r_6 - P \cdot \lambda - \frac{P}{2} \cdot 2\lambda = 0, \; S_6 = -2P \cdot \frac{\lambda}{r_6}.$$

S_4 und S_5 sind positiv, d. h. Zugkräfte (wie in Abb. 51 angenommen), S_6 negativ, d. h. Druckkraft (umgekehrt wie in Abb. 51 angenommen).

Beim Anschreiben der Momentengleichungen sind alle Kräfte zunächst als Zugkräfte vorauszusetzen. Die Stützwiderstände folgen aus den Momentengleichungen in bezug auf die beiden Lager zu:

$$H = 4P \cdot \frac{2\lambda}{h}, \qquad W = 4P \cdot \frac{2\lambda}{w}.$$

Die Hebelarme werden aus einer maſsstäblichen Figur entnommen oder bei einfachen Trägern (Parallel-, Dreieck-, Trapezträger) berechnet, z. B. $r_4 \cdot l_4 = \lambda \cdot l_6$, $r_5 \cdot l_5 = \lambda \cdot l_6$, $r_6 = l_6$.

Sind zwei der durchschnittenen Stäbe parallel (Drehpunkt unendlich fern), so ist statt der betreffenden Momentengleichung eine Komponentengleichung (Komponenten senkrecht zu den parallelen Stäben) anzusetzen (Paralleltträger).

4. Verfahren von Culmann (Abb. 52). Führe den Schnitt (wie unter 3) so, daß 3 sich nicht in einem Punkte schneidende Stäbe (2, 5, 6) getroffen werden; setze die äuſseren Kräfte am abgeschnit-

Digitized by Google

tenen Trägerteil zur Mittelkraft R zusammen und zerlege diese wieder nach c 2 S. 160 in Richtung der 3 durchschnittenen Stäbe.*)

Zur Ermittlung von R kann sogleich das bei der Bestimmung der Stützwiderstände benutzte Seileck dienen (s. Abb. 52) (äufserste Seileckseiten für die Kräfte A und P_1 sind S und s_1).

5. Knotenpunktverfahren. Kräftepläne von Cremona (Abb. 53). Lege einen Schnitt um jeden Knotenpunkt und zeichne das Krafteck für die dort zusammentreffenden Stabkräfte. Man beginnt bei einem Knotenpunkte mit nur 2 Stäben, z. B. I, zerlegt**) dort die äufsere Kraft A nach 1 und 6; geht weiter zu II, zerlegt**) dort die Mittelkraft von P_1 und S_1 (umgekehrt wirkend wie am Punkte I) nach 2 und 7; geht weiter zu VI, III, V, IV (Probe), so dafs man an jedem neuen Knotenpunkte wiederum nur zwei unbekannte Stabkräfte hat.

Abb. 53a u. b.

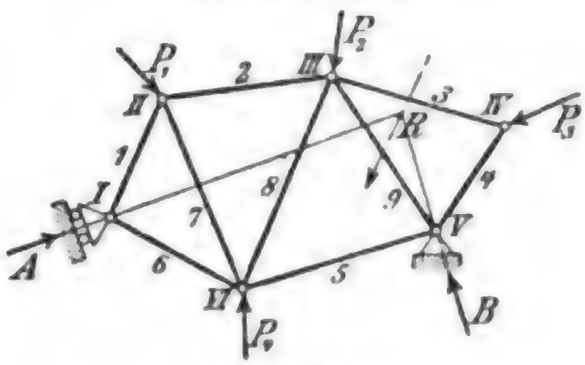
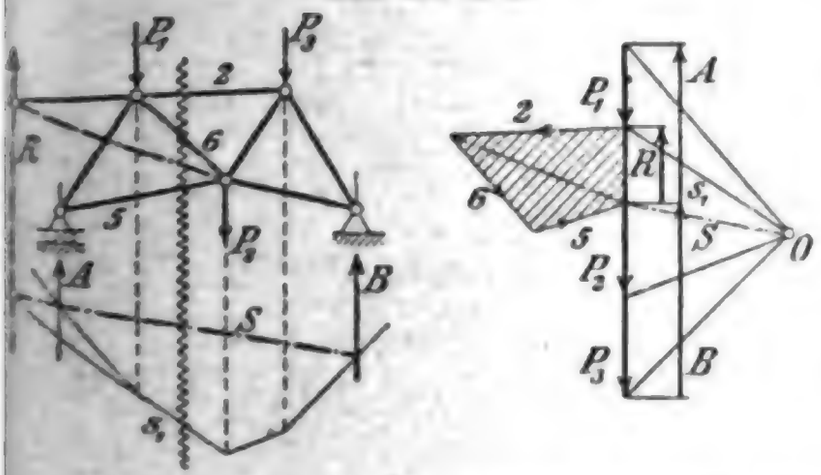
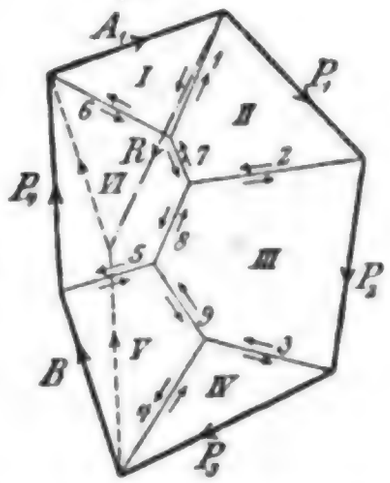


Abb. 52a u. b.





Beachtet man beim Entwurf der Kraftecke die nachfolgenden Regeln, so erhält man einen Kräfteplan, in dem jede Kraft (äußere und Stabkraft) nur einmal vorkommt:

1. Im Vieleck der äufseren Kräfte mufs dieselbe Reihenfolge herrschen, wie beim Umfahren des Fachwerks (A, P_1, P_2, P_3, B, P_4).

2. Im Kräfteplan mufs jede Gurtkraft durch den Schnittpunkt (Zusammenstofspunkt) der beiden äufseren Kräfte gehen, die an den Endpunkten des Gurtstabes angreifen (z. B. 1 durch Schnitt (A, P_1); 2 durch Schnitt (P_1, P_2) usw.).

3. Bilden drei Stäbe im Fachwerk ein Dreieck, so müssen im Kräfteplan die entsprechenden Spannungen durch einen Punkt gehen (z. B. 1, 6, 7; 2, 7, 8 usw.).

4. Die an den Knotenpunkten angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, in der man sie bei Um-

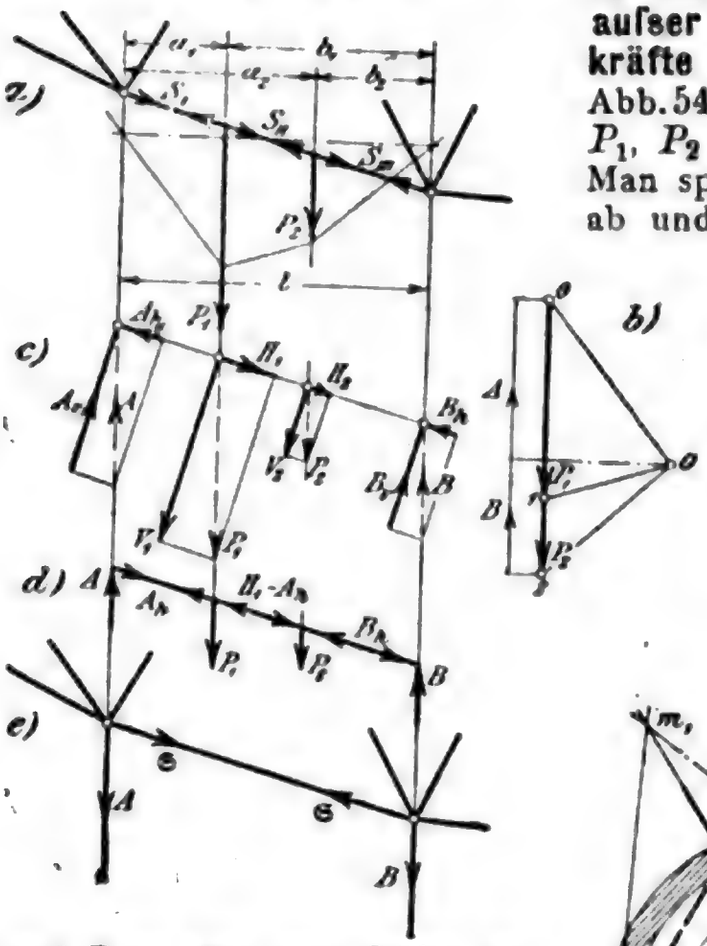
*) Richtiger: bestimme 3 in den durchschnittenen Stäben wirkende Kräfte, die 2 das Gleichgewicht halten.

**) Richtiger: bestimmt 2 in Richtung der Stäbe 1 und 6 wirkende Kräfte, die A im Gleichgewicht halten usw.

kreisung des Knotenpunktes trifft; die äußeren Kräfte sind als außerhalb des Fachwerks liegend zu betrachten (wie in Abb. 53a gezeichnet).

6. Greifen die äußeren Kräfte an den Stäben selbst an, so treten außer den Längskräften auch Querkräfte und Biegungsmomente auf. Abb. 54 für einen Fachwerkstab, Kräfte P_1, P_2 parallel (wichtigster Fall). — Man spaltet den Stab vom Fachwerk ab und bringt ihn durch die beiden Kräfte A und B an den Endpunkten ins Gleichgewicht ($A = P_1 \cdot b_1/l + P_2 \cdot b_2/l$, $B = P_1 \cdot a_1/l + P_2 \cdot a_2/l$) (Abb. 54d); das abgespaltene Fachwerk (Abb. 54e) wird mit den im umgekehrten Sinne genommenen Kräften A

Abb. 54a bis e.



und B an den zum Stabe gehörigen Knotenpunkten belastet und kann, nachdem alle Stäbe so behandelt sind, nach einem der vorstehenden Verfahren berechnet werden (Stabkräfte $\mathfrak{S}$). Legt man Abb. 54d und e wieder zusammen, so erhält man in den einzelnen Abschnitten des Stabes die **Längskräfte** zu

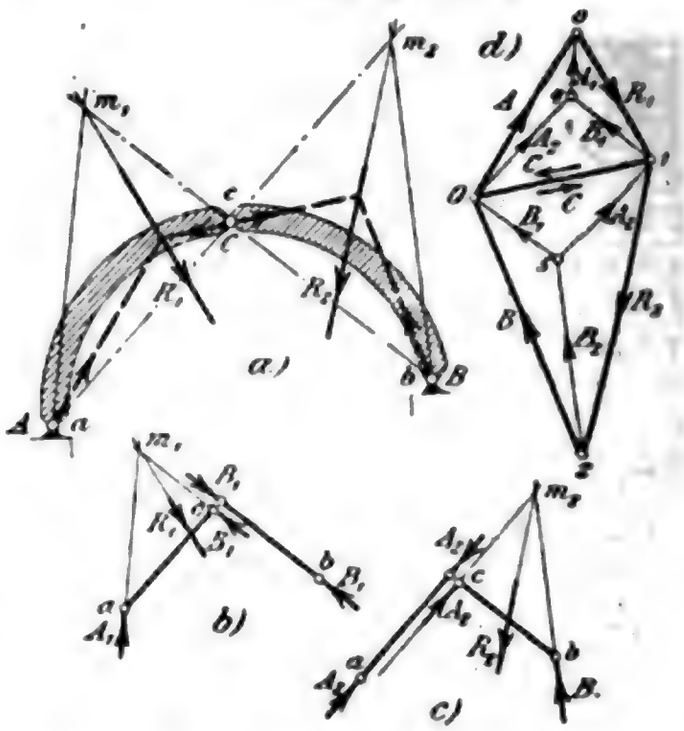
$$S_{\mathrm{I}} = \mathfrak{S} + A_h, \quad S_{\mathrm{II}} = \mathfrak{S} + A_h - H_1, \quad S_{\mathrm{III}} = \mathfrak{S} + A_h - H_1 - H_2 = \mathfrak{S} - B_h,$$

die **Querkräfte** zu

$$Q_{\mathrm{I}} = A_v, \quad Q_{\mathrm{II}} = A_v - V_1, \quad Q_{\mathrm{III}} = A_v - V_1 - V_2 = -B_v;$$

die **Biegungsmomente** sind zu den Kräften V_1, V_2 und den Stützwiderständen A_v, B_v wie beim einfachen Balken (S. 176) zu bestimmen.

Abb. 55a bis d.



7. Dreigelenkbogen, Bestimmung der Kämpferdrücke und des Scheitelgelenkdruckes (Abb. 55). R_1 bzw. R_2 seien die Mittelkräfte der Lasten $P_1 P_2 \ldots$ bzw. $Q_1 Q_2 \ldots$ des linken bzw. rechten Teilträgers. Der wirkliche Belastungszustand (Abb. 55a) entsteht durch Ueberlagerung der beiden in Abb. 55b und c gezeichneten Belastungs-

Digitized by Google

zustände (Abb. 55b Belastung nur linksseitig, $R_2 = 0$, B_1 fällt in die Richtung bc; Abb. 55c Belastung nur rechtsseitig, $R_1 = 0$, A_2 fällt in die Richtung ac).

Demnach die Konstruktion Abb. 55a und d: Ziehe bc bis m_1 auf R_1, und ac bis m_2 auf R_2; $A_1 = 40 \parallel a\,m_1$, $B_1 = 14 \parallel b\,m_1$, $A_2 = 51 \parallel a\,m_2$, $B_2 = 25 \parallel b\,m_2$; $4\,O \parallel 15$, $5\,O \parallel 14$.

$O\,0 = A =$ Kämpferwiderstand in a, $2\,O = B =$ Kämpferwiderstand in b, $1\,O = C =$ Gelenkwiderstand in c für den linken Teil, $O\,1 = C =$ Gelenkwiderstand in c für den rechten Teil.

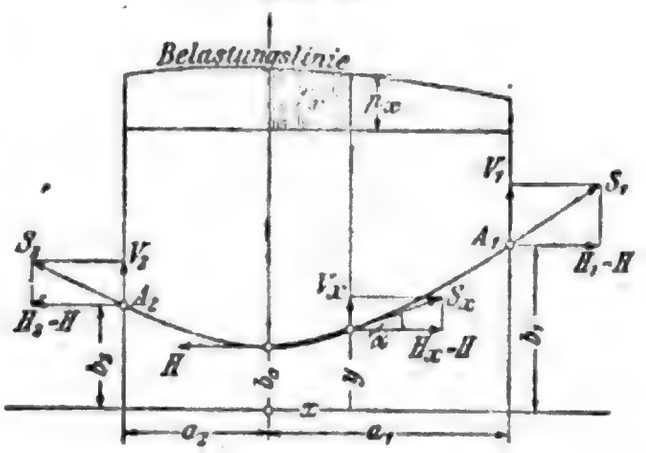
Die Drucklinie des Dreigelenkbogens ist die zu den Kräften A, P_1, P_2 ... Q_1, Q_2 ... gezeichnete Mittelkraftlinie (Seileck mit dem Punkte O als Pol; S. 153 bis 155, 2a und b).

5. Gleichgewicht am Seil.

1. Kehrt man in Abb. 12a S. 154 die Pfeile der Kräfte S_0 und S_4 um, so erhält man die Gleichgewichtsfigur eines Seiles, das in den Punkten I, II, III, IV mit den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 belastet und in je einem Punkte der Geraden s_0 und s_4 befestigt ist.

2. Greifen an einem Seil nur senkrechte Lasten an in beliebiger, durch die Belastungslinie (Abb. 56) dargestellter Verteilung, so gilt:

Abb. 56.



$$H_x = \text{konst} = H,$$

$$V_x = \int_0^x p_x \, dx = f_x,$$

$$x V_x - (y - b_0)\, H = \int_0^x x\, p_x \, dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_x}{H},$$

also:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dV_x}{dx} = \frac{p_x}{H}$$ (Differentialgleichung der Seilkurve).

Sonderfälle: 1. Belastung gleichmäßig über die Horizontalprojektion der Seilkurve verteilt, d. h. $dV_x = p \, dx$ ($p =$ konst); mit $b_0 = 0$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{H} x, \qquad y = \frac{p}{2H} x^2$$ **(Seilparabel).**

2. Belastung gleichmäßig über die Bogenlänge der Seilkurve verteilt, d. h. $dV_x = p \, ds$ ($p =$ konst); mit $b_0 = h = \frac{p}{H}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \operatorname{Sin} \frac{x}{h},$$

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h},$$

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{+\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Sin} \frac{x}{h}$$

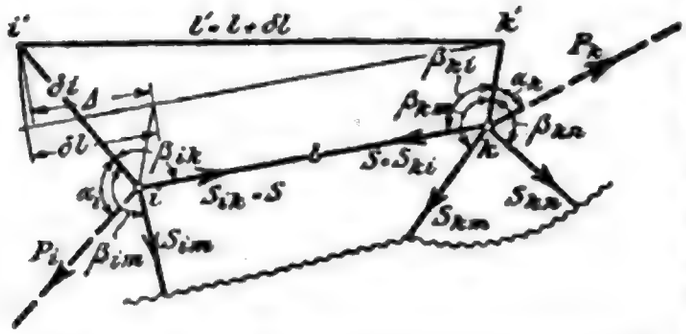
(gemeine **Kettenlinie** S. 109, Hyperbelfunktionen S. 64).

Digitized by Google

6. Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Ein beliebiges starres oder bewegliches System sei ersetzt durch eine Gruppe von Punkten, auf die äufsere und innere Kräfte wirken.

Abb. 57.



1. Das System ist im Gleichgewicht, wenn an jedem Punkte i (Abb. 57) der Gruppe Gleichgewicht herrscht; dann ist in Richtung jeder beliebigen dem Punkte i erteilten völlig willkürlichen Verschiebung $ii' = \delta i$ die Summe der Seitenkräfte aller in i angreifenden äufseren und inneren Kräfte (P bzw. S) gleich Null; multipliziert man jedes Glied der Komponentensumme mit δi und addiert über alle Punkte, so folgt:

$$\Sigma P_i \delta i \cos \alpha_i + \Sigma (S_{ik} \delta i \cos \beta_{ik} + S_{ki} \delta k \cos \beta_{ki}) = 0, \quad (1)$$

worin α_i den Winkel zwischen P_i und δi, β_{ik} den Winkel zwischen S_{ik} und δi, β_{ki} den Winkel zwischen S_{ki} und δk bezeichnet.

Sind die Verschiebungen unendlich klein, so dafs die Richtungsänderungen der Kräfte P und S nicht in Betracht kommen, dann bedeutet Gl. 1:

Die Summe der Arbeiten der im Gleichgewicht befindlichen äufseren und inneren Kräfte bei völlig willkürlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Angriffspunkte ist Null.

Nach Abb. 57 ist bei unendlich kleinen Verschiebungen:

$$\delta i \cos \beta_{ik} + \delta k \cos \beta_{ki} = -\Delta = -\delta l,$$

demnach mit $$S_{ik} = S_{ki} = S,$$

die Arbeit der inneren Kräfte: $-\Sigma S . \delta l$, d. h nur abhängig von der Anfangs- und Endlage der Punkte, nicht von den Wegen. Also:

$$\Sigma P_i \delta i \cos \alpha_i = \Sigma S . \delta l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Verschiebungen δi, δk ... heifsen, als mit den wirkenden Kräften in keinerlei Zusammenhang stehend, gedachte oder virtuelle Verschiebungen; $+\Sigma S . \delta l$ heifst die virtuelle Formänderungsarbeit.

2. Die Arbeitsgleichung kann bei Gleichgewichtsaufgaben benutzt werden, um die unbekannten Kräfte zu bestimmen; man wählt die virtuellen Verschiebungen so, dafs möglichst nur die gerade gesuchte Kraft aufser den bekannten Arbeit leistet.

Aus der Arbeitsgleichung fallen heraus:

a) die inneren Kräfte, wenn das (starre oder bewegliche) System ohne Gestaltänderung ($\delta l = 0$) in eine unendlich nahe Lage bewegt wird,

b) der Stützwiderstand eines festen Gelenkpunktes, wenn das System (ohne oder mit Gestaltänderung) um den Punkt gedreht wird,

c) der Stützwiderstand einer festen Führung (Fläche oder Linie), wenn die Verschiebung des geführten Systempunktes senkrecht

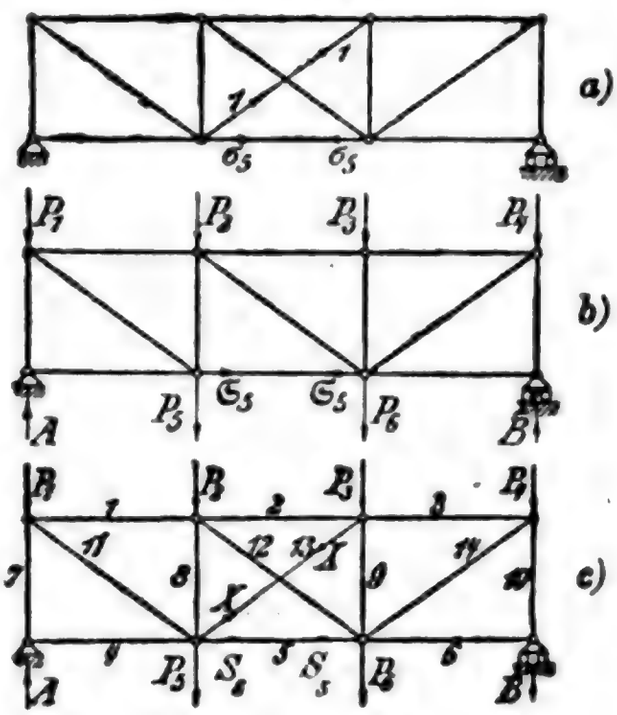
Digitized by Google

zum Führungswiderstande gewählt wird, d. h. bei glatter Führung in dieser liegend, bei rauher Führung unter dem Reibungswinkel ϱ zu ihr geneigt,

d) bei einem beweglichen, aus starren Teilen zusammengesetzten System: die inneren Kräfte der Teilkörper, die Gelenkdrücke (Verschiebungen gleich grofs, Kräfte gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet) und die Stützwiderstände, wenn die virtuellen Verschiebungen mit den Bedingungen des Systems verträglich sind. — **Erlaubte** Verschiebungen; Prinzip der virtuellen Verschiebungen im engeren Sinne (Beispiel 2).

Dann nimmt das Prinzip meist die einfache Form an: virtuelle Arbeit der Kraft = virtuelle Arbeit der Last; und gilt häufig auch für endliche Verschiebungen (Seilrollen, Zahnräder usw.).

Abb. 58 a, b u. c.



Beispiel 1. Berechnung des innerlich statisch unbestimmten Fachwerks (Abb. 58). Man entferne den überzähligen Stab 13 (Spannkraft X) und bestimme die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ in dem nunmehr statisch bestimmten Fachwerk Abb. 58 b (Hauptsystem). Weiter bestimme man die Stabkräfte σ, die im Hauptsystem hervorgerufen werden durch zwei an den Endpunkten des überzähligen Stabes in Richtung desselben angebrachte Gegenkräfte $X=1$ (Abb. 58 c). Die im Stabe r wirklich auftretende Spannkraft ist dann $S_r = \mathfrak{S}_r + \sigma_r X$ (S. 175 unter 7).

Auf das von den beiden Lasten 1 und den Spannkräften σ gebildete Gleichgewichtssystem (Abb. 58 c) wird die Arbeitsgleichung angewendet; als Verschiebungen der Knotenpunkte werden die tatsächlich am Fachwerk (Abb. 58 a) unter den Lasten P_1 bis P_6 auftretenden genommen (für das System Abb. 58 c virtuell). Die hierzu gehörigen Längenänderungen sind nach der Festigkeitslehre

$$\delta l_r = \frac{S_r l_r}{E_r f_r} = \frac{\mathfrak{S}_r l_r}{E_r f_r} + X \frac{\sigma_r l_r}{E_r f_r},$$

f_r = Querschnitt, E_r = Elastizitätsmodul des Stabes r; demnach ist die virtuelle Formänderungsarbeit:

$$\Sigma \sigma_r . \delta l_r = \Sigma \frac{\sigma_r \mathfrak{S}_r l_r}{E_r f_r} + X \Sigma \frac{\sigma_r^2 l_r}{E_r f_r},$$

die virtuelle Arbeit der beiden Kräfte 1 ist nach 1 oben mit $\delta l = \Delta$, $S = X$, $l = L$, $f = F$ und dem Elastizitätsmodul E: $-1 . \Delta = -X \frac{L}{EF}$, folglich nach Gl. (2):

$$X = \frac{-\Sigma \frac{\sigma_r \mathfrak{S}_r l_r}{E_r f_r}}{\frac{L}{EF} + \Sigma \frac{\sigma_r^2 l_r}{E_r f_r}},$$

wo die Summation nur über die notwendigen Stäbe zu erstrecken ist.

Wendet man die Arbeitsgleichung (2) auf das System Abb. 58 c an und nimmt als Verschiebungen die des Hauptsystems unter den Lasten P_1 bis P_6 (Abb. 58 b), so erhält man aus:

$$-1 . \Delta' = \Sigma \sigma_r . \delta l_r' = \Sigma \frac{\sigma_r \mathfrak{S}_r l_r}{E_r f_r}$$

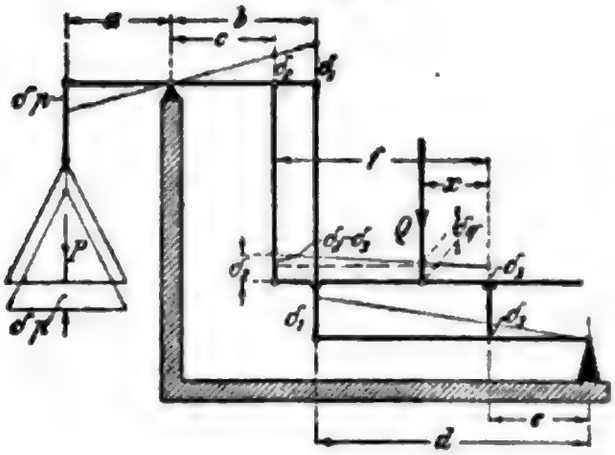
Digitized by Google

die gegenseitige Verschiebung Δ' der beiden mit 1 belasteten Knotenpunkte des Fachwerks Abb. 58 b (Berechnung der Formänderungen statisch bestimmter Systeme).

Beispiel 2. (Prinzip der virtuellen Verschiebungen im engeren Sinne.) **Brückenwage** (Abb. 59). Erteilt man der Wageschale die unendlich kleine Senkung δp, so erfährt die Last Q infolge des Zusammenhanges der Stabverbindung die unendlich kleine Hebung δq. Es gilt demnach:

$$P \cdot \delta p - Q \cdot \delta q = 0, \qquad \frac{P}{Q} = \frac{\delta q}{\delta p} \quad \text{mit} \quad \delta q = \delta_3 + \frac{x}{f}(\delta_2 - \delta_3)$$

Abb. 59.



und $\quad \delta_1 = \delta p \frac{b}{a}, \quad \delta_2 = \delta p \frac{c}{a},$

$$\delta_3 = \delta_1 \frac{e}{d} = \delta p \frac{b}{a} \frac{e}{d},$$

also $\delta_1/\delta p$, $\delta_2/\delta p$, $\delta_3/\delta p$ nur abhängig von den unveränderlichen Abmessungen der Wage. Soll die Wage brauchbar sein, so darf das Uebersetzungsverhältnis $P/Q = \delta q/\delta p$ nicht von der Lage der Last Q auf der Brücke f, d. h. von dem veränderlichen x abhängen; folglich

$$\delta_2 = \delta_3 \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} = \frac{e}{d}$$

(die Brücke muſs sich parallel heben und senken; entsprechendes gilt für alle Wageapparate). Damit wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{c}{a} = \frac{b}{a}\frac{e}{d} \left(\frac{c}{a} = \frac{1}{10} \text{ Dezimalwage}, \ \frac{c}{a} = \frac{1}{100} \text{ Zentesimalwage} \right).$$

III. Dynamik I.

1. Dynamik des Massenpunktes.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist vollständig bestimmt, wenn aus den Bedingungen der Bewegung heraus entweder:

α) die Lage des Punktes, d. i. seine Koordinaten, unmittelbar als Funktion der Zeit angeschrieben werden können:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t); \qquad \text{oder}$$

β) die Anfangslage x_0, y_0, z_0 gegeben und die Geschwindigkeit nach Richtung und Gröfse für den ganzen Verlauf der Bewegung bekannt ist; oder

γ) die Anfangslage x_0, y_0, z_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach Gröfse und Richtung gegeben und die Beschleunigung oder, was dasselbe ist, die auf den Punkt wirkende Kraft nach Richtung und Gröfse für den ganzen Verlauf der Bewegung bekannt ist.

a. Freie geradlinige Bewegung.

1. $$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{(S. 141 unter 4)},$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{(S. 142 unter 5)},$$

$$s - s_0 = \int_0^t v \cdot dt, \qquad v - v_0 = \int_0^t p \cdot dt,$$

Digitized by Google

d. h. die Fläche der Zeitgeschwindigkeitskurve liefert den Weg, die Fläche der Zeitbeschleunigungskurve den Geschwindigkeitszuwachs.

$$v \,.\, dv = p \,.\, ds; \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} p \,.\, ds.$$

2. **Grundaufgaben.**

α. **Gegeben:** $s = f(t)$; **Gesucht:** v, p: $\quad v = \frac{ds}{dt}, \qquad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$

β. **Gegeben:** $v = f(t)$; **Gesucht:** s, p: $\quad s = s_0 + \int_0^t v \,.\, dt, \qquad p = \frac{dv}{dt}.$

γ. **Gegeben:** $v = f(s)$; **Gesucht:** p, t: $\quad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}, \qquad p = v\,\frac{dv}{ds}.$

δ. **Gegeben:** $p = f(t)$; **Gesucht:** s, v: $\quad v = v_0 + \int_0^t p \,.\, dt, \qquad s = s_0 + \int_0^t v \,.\, dt.$

ε. **Gegeben:** $p = f(s)$; **Gesucht:** v, t: $\quad v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} p \,.\, ds}, \quad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}.$

ζ. **Gegeben:** $p = f(v)$; **Gesucht:** s, t: $\quad s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{p}\, dv, \qquad t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{p}.$

3. Alle am Punkte angreifenden Kräfte müssen stets eine in die Richtung der Geraden fallende Mittelkraft P ergeben.

Es ist mit $m = \frac{G}{g}$

$$P = mp = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2 s}{dt^2},$$

$$A = \int_{s_0}^{s} P \,.\, ds = m\frac{v^2}{2} - m\,\frac{v_0^2}{2} \quad \text{(S. 151 unter 5, 2)},$$

$$N = Pv \text{ (S. 150 unter 4, 2)}.$$

Wirkt an dem Massenpunkte der Widerstand W entgegen der Bewegungsrichtung, so erhält man die aufzuwendende Triebkraft T, deren Arbeit und Leistung, wenn man in den obigen Formeln P durch $(T - W)$ ersetzt.

b. Freie krummlinige Bewegung.

1. $\quad \vec{v} = \frac{\vec{ds}}{dt}; \qquad v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt};$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Digitized by Google

$$p = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}; \qquad p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2};$$

$$p_t = p\cos\varphi = \frac{dv}{dt}; \qquad p_n = p\sin\varphi = v\frac{dr}{dt} = \frac{v^2}{\varrho};$$

$$|p| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{p_t^2 + p_n^2}.$$

(S. 144 u. 145 unter c, 1 bis 3.)

$$x - x_0 = \int_0^t v_x \,.\, dt \text{ usw.}; \qquad v_x - v_{x0} = \int_0^t p_x \,.\, dt \text{ usw.},$$

$$v \,.\, dv = p\cos\varphi \,.\, ds, \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} p\cos\varphi \,.\, ds.$$

2. Alle am Punkte angreifenden Kräfte müssen stets eine Mittelkraft P ergeben, die in der Ebene der Bahnlinie — bei doppelt gekrümmter Bahnkurve in der jeweiligen Schmiegungsebene — liegt.

Es ist mit $m = \frac{G}{g}$

$$P = mp = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}; \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ usw.};$$

$$P_t = P\cos\varphi = m\frac{dv}{dt}, \qquad P_n = P\sin\varphi = m\frac{v^2}{\varrho};$$

$$A = \int_{s_0}^{s} P\cos\varphi \,.\, ds = m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} \text{ (S. 151 unter 5, 2)},$$

$$N = Pv\cos\eta \text{ (S. 150 unter 4, 2)}.$$

c. Dreh(Kreis-)bewegung.

1. $$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$s = r\alpha, \qquad v = r\omega,$$

$$p_t = r\varepsilon = r\frac{d\omega}{dt}, \qquad p_n = r\omega^2, \qquad |p| = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

(S. 146 unter c, 4)

$$\alpha - \alpha_0 = \int_0^t \omega \,.\, dt, \qquad \omega - \omega_0 = \int_0^t \varepsilon \,.\, dt,$$

$$\omega \,.\, d\omega = \varepsilon \,.\, d\alpha, \qquad \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varepsilon \,.\, d\alpha.$$

2. $$P_t = mr\varepsilon = mr\frac{d\omega}{dt}, \qquad P_n = mr\omega^2$$

$$|P| = mr\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

Digitized by Google

das **Drehmoment** (S. 156 unter 6) von P in bezug auf den Kreismittelpunkt ist (Moment von P_n gleich Null):

$$M = P_t r = (m r^2)\,\varepsilon = (m r^2)\,\frac{d\omega}{dt};$$

die **lebendige Kraft** des Punktes ist:

$$L = m\,\frac{v^2}{2} = (m r^2)\,\frac{\omega^2}{2};$$

die **Arbeit** von P auf dem Winkelwege α_0 bis α ist (P_n steht winkelrecht zur Bewegungsrichtung, leistet also keine Arbeit):

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} P_t r\,d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M\,.\,d\alpha = \int_0^t M\,.\,\omega\,dt = (m r^2)\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2};$$

die augenblickliche **Leistung** von P ist:

$$N = P_t r\,\omega = M\omega = M\,\frac{2\pi n}{60} \text{ in mkg/sk},$$

wenn P_t in kg, r in m gemessen wird und n die Umdrehungszahl in der Minute bezeichnet.

In PS ist:

$$N = M\,\frac{2\pi n}{60\,.\,75} = P_t r\,\frac{2\pi n}{4500}, \text{ also:}$$

$$M = P_t r = \frac{60\,.\,75}{2\pi}\,\frac{N}{n} = 716{,}2\,\frac{N}{n}.$$

$\frac{N}{n}$ heifst **Leistungs-** oder **Effektquotient.**

Das in der Anmerkung unter a 3 S. 185 Gesagte ist sinngemäfs zu übertragen.
Beachte die Aehnlichkeit zwischen drehender und geradliniger Bewegung; es entsprechen sich: s und α, v und ω, p und ε, P und M, m und mr^2.

d. Unfreie Bewegung.

Die unfreie Bewegung wird dadurch auf eine freie zurückgeführt, dafs man die den Bewegungsbedingungen entsprechenden **Zwangskräfte (Bahnwiderstände,** Mittelkraft $= Q$) zu den gegebenen äufseren Kräften (Mittelkraft $= P$) hinzufügt.

Die dynamische Grundgleichung nimmt also die Form an:

$$P \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} Q = m\,\frac{\vec{d}v}{dt}.$$

1. Bewegung auf vorgeschriebener Bahnlinie.

α) Bahnlinie vollkommen glatt. Die Zwangskraft reduziert sich auf einen winkelrecht zur Führungslinie stehenden Bahnwiderstand N (Abb. 60).

Zerlegt man die gegebene äufsere Kraft P nach Richtung der Bahntangente und winkelrecht dazu in die beiden Seitenkräfte

$$P_t = P\cos\alpha \qquad \text{und} \qquad P_n = P\sin\alpha,$$

Digitized by Google

so gilt, da die Zwangskraft in der Tangentenrichtung keine Seitenkraft hat:

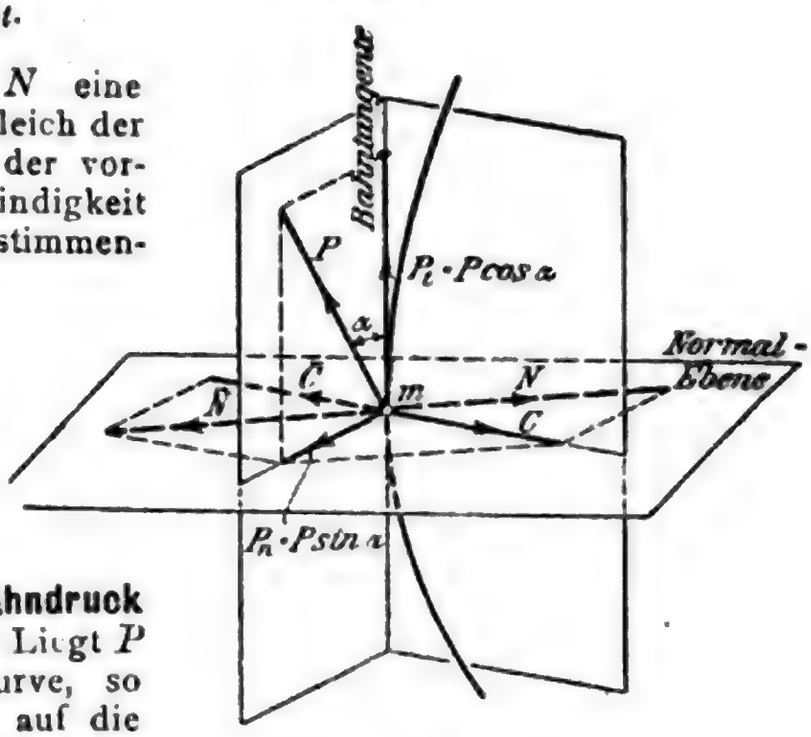
$$P_t = m\frac{dv}{dt} = mp_t.$$

P_n muſs dagegen mit N eine Mittelkraft ergeben, die gleich der Zentripetalkraft der mit der vorliegenden nach Geschwindigkeit und Bahnform übereinstimmenden freien Bewegung ist, d. h.

$$P_n + N = C = m\frac{v^2}{\varrho}$$

(geometrische Addition).

Abb. 60.



Die Gegenkraft (Reaktion) N zum Bahnwiderstand N heifst **Bahndruck** (Druck auf die Bahn). Liegt P in der Tangente der Kurve, so wird $P_n = 0$, der Druck auf die Bahn also gleichbedeutend mit der Gegenkraft $\overline{C}$ zur Zentripetalkraft C (**Zentrifugalkraft** als physikalisch bestehende Kraft).

β) **Bahnlinie rauh.** Dann tritt aufser dem Normalwiderstand N ein Tangentialwiderstand F, die **Reibung,** auf; sie ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und kann proportional dem Normalwiderstande (bzw. Normalbahndruck) angenommen werden

$$F = \mu N,$$

μ heifst Reibungszahl oder Reibungskoeffizient der gleitenden Bewegung (S. 242 u. f.).

An der Bahn greift die gleichgrofse Gegenkraft $\overline{F}$ an, welche die Bahn in Richtung der Bewegung zu verschieben sucht.

Es gilt jetzt:

$$P_t - F = P\cos\alpha - \mu N = m\frac{dv}{dt} = mp_t,$$

während die Gleichung für P_n unverändert bleibt.

2. Satz der lebendigen Kraft für die unfreie Bewegung, Reibungsarbeit.

Besteht die Zwangskraft lediglich in einem Normalwiderstande der Bahn, so ist die Arbeit der Zwangskraft gleich Null; der Satz von der lebendigen Kraft unterscheidet sich in keiner Weise von dem bei der freien Bewegung.

Die **Reibung** ist dagegen stets der Bewegung entgegengerichtet (mit der Umkehr der Bewegung ändert auch sie ihre Richtung um 180°); die **Reibungsarbeit** hat daher immer den negativen Wert

$$\int_{s_1}^{s} F\,.\,ds = -\int_{s_0}^{s} \mu N\,ds,$$

Digitized by Google

d. h. ein Teil der Arbeit der äufseren Kräfte wird stets zur Ueberwindung der Reibungsarbeit verbraucht.

Beispiel 1. Kegelpendel (Abb. 61). Ein Punkt mit der Masse m sei durch eine masselose Stange mit der Spindel a gelenkig verbunden. Stellt sich m bei Drehung mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω auf den Radius r ein, so müssen alle am Punkte angreifenden Kräfte, d. s. das Gewicht $G = mg$ und die von der Stange ausgeübte Zugkraft N, als Mittelkraft die Zentripetalkraft $C = mr\omega^2$ liefern. Somit folgt

für die Zugkraft: $$N = G\sqrt{1 + \frac{r^2\omega^4}{g^2}},$$

„ den Ausschlagwinkel α: $$\operatorname{tg}\alpha = C/G = r\omega^2/g,$$

„ die Pendelhöhe: $$h = r/\operatorname{tg}\alpha = g/\omega^2,$$

„ „ Umlaufzeit: $$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{h/g}.$$

Abb. 61.

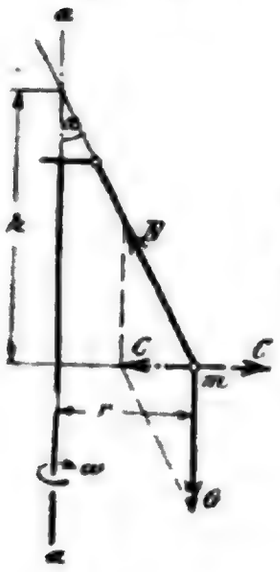
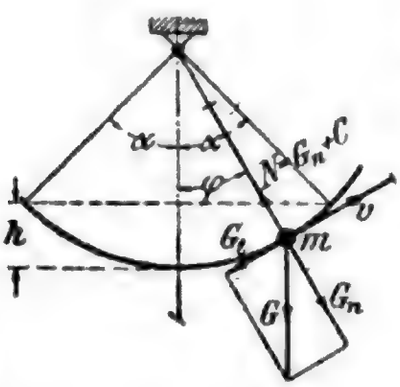


Abb. 62.



Dieselbe Gleichgewichtslage und dieselben Werte für N, α, h erhält man für das **ruhende** (nicht kreisende) Pendel, wenn man am Punkte m eine Kraft C wirkend denkt, die gleich der bei der Drehung wirklich auftretenden Zentripetalkraft C, aber entgegengesetzt gerichtet ist (**Zentrifugalkraft** als Ergänzungskraft, einfachster Fall des d'Alembertschen Prinzips).

Beispiel 2. Bewegung eines Massenpunktes in einem senkrechten Kreis (mathematisches Pendel).

Die Bewegungsgleichung lautet (Abb. 62)

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi.$$

Der Satz von der lebendigen Kraft liefert mit α = gröfster Ausschlagwinkel

$$m\frac{l^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha); \quad t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi}^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$$ (elliptisches Integral).

Durch Reihenentwicklung und Integration folgt die **Dauer einer einfachen Schwingung**, d. h. die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch die Lotrechte

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Bei $\alpha \leqq 8^0$ ist hinreichend genau (bis $\sim 1\,{}^0/_{00}$):

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Schwingungsweite.

Die Länge des **Sekundenpendels** in m ist

$$l = g : \pi^2,$$

d. h. für die mittlere Breite Deutschlands, $\varphi = 50^0$ und Meereshöhe ($g = 9{,}81$ m/sk^2)

$$l = 0{,}994 \text{ m}.$$

Digitized by Google

2. Dynamik des starren Körpers.

Die Bewegung des Körpers wird dadurch auf die Gesetze für die freie Bewegung eines Massenpunktes zurückgeführt, dafs man an jedem einzelnen Punkte des Körpers zu den **äufseren** gegebenen Kräften noch die **innere** Kraft (Spannkraft) hinzufügt, die die übrigen Punkte des Körpers auf ihn ausüben.

Die **inneren Kräfte** bilden nach dem Satz von Wirkung und Gegenwirkung ein **Gleichgewichtssystem**; daraus ergeben sich wichtige Vereinfachungen.

a. Schiebungsbewegnng.

(S. Vorbemerkung S. 141 unter 3.)

Alle Massenteilchen dm legen im Zeitelement dt den gleichen Weg ds zurück und haben gleiche Geschwindigkeit v und gleiche Beschleunigung p (gleich nach Gröfse und Richtung).

Ist P die äufsere, S die innere Kraft am Teilchen dm und A_P bzw. A_S deren Arbeit auf dem Wege s_0 bis s, so gilt:

$$P \leftrightarrows S = dm \,.\, p; \qquad A_P + A_S = dm \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2}.$$

Bei Summation über den ganzen Körper folgt:

$$\mathbf{P} = m\,p; \qquad \mathbf{A} = m\,\frac{v^2}{2} - m\,\frac{v_0^2}{2} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0,$$

wo:

$m = \dfrac{G}{g}$ die Gesamtmasse des Körpers,

$\mathbf{P} = \vec{\Sigma} P$ die Mittelkraft der äufseren Kräfte,

$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{s} \mathbf{P} \cos(\mathbf{P}, ds) \,.\, ds = \Sigma \int_{s_0}^{s} P \cos(P, ds) \,.\, ds$ die Arbeit der äufseren Kräfte,

$\mathbf{L} = \int dm \cdot \dfrac{v^2}{2} = m\,\dfrac{v^2}{2}$ die lebendige Kraft des Körpers ist.

Der starre Körper kann also in diesem Falle als ein Punkt der Masse m aufgefafst werden, an dem die Mittelkraft $\mathbf{P}$ der äufseren Kräfte angreift.

b. Drehung um eine feste Achse.

(Vgl. S. 186.)

Alle Massenteilchen dm legen im Zeitelement dt den gleichen Winkelweg $d\alpha$ zurück und haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω und dieselbe Winkelbeschleunigung ε.

Ist M_P das Moment der äufseren, M_S das der inneren am Teilchen dm wirkenden Kraft in bezug auf die Drehachse und A_P bzw. A_S deren Arbeit auf dem Winkelwege α_0 bis α, so gilt:

$$M_P + M_S = (dM \,.\, r^2)\,\varepsilon; \qquad A_P + A_S = (dm \,.\, r^2)\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}.$$

Digitized by Google

Bei Summation über den ganzen Körper folgt:

$$\mathbf{M} = J\varepsilon; \quad \mathbf{A} = J\frac{\omega^2}{2} - J\frac{\omega_0^2}{2} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0,$$

wo:

$J = \int r^2 . dm$ das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehachse (s. unten),

$\mathbf{M} = \Sigma M_P$ das resultierende Drehmoment der äufseren Kräfte,

$\mathbf{A} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathbf{M} . d\alpha = \Sigma \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_P \, d\alpha$ die Arbeit der äufseren Kräfte,

$\mathbf{L} = \left(\int r^2 \, dm\right)\frac{\omega^2}{2} = J\frac{\omega^2}{2}$ die lebendige Kraft des Körpers ist.

c. Trägheits- und Zentrifugalmomente.

1. Allgemeines.

1. Hat das Raumelement dv eines Körpers die Masse dm und den Abstand r von der Achse A, so sind das **Massenträgheitsmoment** und das **geometrische Trägheitsmoment** des Körpers in bezug auf A bestimmt durch:

$$J_{\text{Masse}} = \int r^2 . dm, \qquad J_{\text{geom.}} = \int r^2 . dv.$$

Das Trägheitsmoment ist stets eine positive Gröfse.

Mifst man die Längen in m, die Massen in kg sk²/m, so erhält man das Massenträgheitsmoment in mkg sk², das geometrische Trägheitsmoment in m⁵ (im C. G. S.-System in g* . cm² bzw. cm⁵).

In bezug auf das Trägheitsmoment kann ein Körper ersetzt werden durch seine Gesamtmasse m am Trägheitshalbmesser k oder durch die reduzierte Masse m' am beliebigen Halbmesser l, wobei:

$$J_{\text{Masse}} = mk^2 = m'l^2 \text{ ist.}$$

In der technischen Praxis wird an Stelle des Trägheitsmoments vielfach das **Schwungmoment** GD^2 benutzt, wo $G = mg$ das Gewicht des Körpers und $D = 2k$ sein **Trägheitsdurchmesser** ist; also: $GD^2 = 4g J_{\text{Masse}}$.

Für das Schwungmoment ist die Einheit kgm² üblich, für gröfsere Werte tm².

Für **homogene Körper** (spezifisches Gewicht $\gamma = \frac{dG}{dv} = \text{konst.}$) gilt:

$$J_{\text{Masse}} = \frac{\gamma}{g} J_{\text{geom.}}; \qquad GD^2 = 4\gamma J_{\text{geom.}}$$

Für eine **endliche** Zahl von Massenpunkten ist zu schreiben:

$$J = \Sigma m_i r_i^2.$$

Besteht ein Körper (Fläche, Linie) aus mehreren (n) Teilen, so ist sein Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile, bezogen auf dieselbe Achse

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n.$$

Das Trägheitsmoment ändert sich nicht, wenn beliebige Teile des Körpers um die Achse gedreht oder parallel zu ihr verschoben werden.

Digitized by Google

2. Wird die Achse des Trägheitsmomentes zur Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, so gilt $r^2 = x^2 + y^2$, also

$$J_z = \int r^2 \, dm = \int x^2 \, dm + \int y^2 \, dm = J_{yz} + J_{xz}, \text{ d. h.:}$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf eine Achse ist gleich der Summe der Trägheitsmomente in bezug auf zwei sich in der Achse rechtwinklig schneidende Ebenen.

Ist J das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse m, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, J' das Trägheitsmoment, bezogen auf eine im Abstande e parallele Achse, so ist

$$J' = J + me^2, \qquad J = J' - me^2.$$

Bei parallelen Achsen hat also die Schwerpunktachse das kleinste Trägheitsmoment.

Sind J_1 und J_2 die Trägheitsmomente zweier Körper, bezogen auf zwei parallele Schwerachsen, so ist das Trägheitsmoment des aus beiden Körpern zusammengesetzten Körpers für seine Schwerachse

$$J = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} e^2,$$

worin e den Abstand der parallelen Schwerachsen der beiden Körpermassen m_1 und m_2 bedeutet.

3. $J_{xy} = \int xy \, . \, dm$ heifst das **Zentrifugalmoment** des Körpers in bezug auf das Ebenenpaar xz und yz (auch Deviationsmoment).

Das Zentrifugalmoment kann positiv, Null oder negativ sein.

Die Mafseinheiten für das Zentrifugalmoment sind dieselben wie für das Trägheitsmoment.

Für einen Körper, dessen Schwerpunkt mit dem Nullpunkte des rechtwinkligen Koordinatensystems xyz zusammenfällt, seien die Zentrifugalmomente J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}; in bezug auf ein parallel gelegenes Koordinatensystem $x'y'z'$, in welchem der Körperschwerpunkt die Koordinaten a, b, c hat, sind die entsprechenden Zentrifugalmomente:

$$J_{yz'} = J_{yz} + bcm, \quad J_{zx'} = J_{zx} + cam, \quad J_{xy'} = J_{xy} + abm.$$

4. Das Massenteilchen dm habe die Koordinaten x, y, z; eine beliebige, durch den Koordinatenanfang gehende Achse bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ. Dann ist mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$ das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse

$$J = \cos^2\alpha \int (y^2 + z^2)\, dm + \cos^2\beta \int (z^2 + x^2)\, dm + \cos^2\gamma \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma \int yz\, dm - 2\cos\gamma\cos\alpha \int zx\, dm - 2\cos\alpha\cos\beta \int xy\, dm.$$

Setzt man

$$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = A, \; J_y = \int (z^2 + x^2)\, dm = B, \; J_z = \int (x^2 + y^2)\, dm = C,$$

$$J_{yz} = \int yz\, dm = D, \quad J_{zx} = \int zx\, dm = E, \quad J_{xy} = \int xy\, dm = F,$$

so sind A, B, C die Trägheitsmomente, D, E, F die Zentrifugalmomente in bezug auf die Koordinaten-Achsen bzw. -Ebenen.

Digitized by Google

Das Trägheitsmoment wird

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Trägt man auf der Achse vom Koordinatenanfang aus die Strecke $\varrho = 1:\sqrt{J}$ ab, so erhält man für die Koordinaten ξ, η, ζ des Endpunktes von ϱ die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1,$$

d. i. ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkte im Koordinatenanfang O (Poinsotsches **Trägheitsellipsoid** für den Punkt O).

Die drei rechtwinklig aufeinander stehenden Achsen dieses Ellipsoides heifsen die **Hauptträgheitsachsen**, die zugehörigen Trägheitsmomente die **Hauptträgheitsmomente** für den Punkt O.

Nimmt man die Achsen des Trägheitsellipsoides als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung desselben

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

worin A, B, C die Hauptträgheitsmomente sind.

Das Trägheitsmoment J für eine Achse, welche die Winkel α, β, γ mit den Hauptträgheitsachsen einschliefst, ist demnach:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

Die Zentrifugalmomente D, E, F, bezogen auf je zwei der Hauptträgheitsebenen, sind Null.

Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so ist jede Winkelrechte zu dieser eine Hauptträgheitsachse für ihren Fufspunkt. Hat ein Körper eine Symmetrieachse, so ist diese eine der drei Hauptträgheitsachsen für jeden ihrer Punkte.

Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt heifst **Zentralellipsoid**.

2. Geometrische Trägheits- und Zentrifugalmomente ebener Flächenstücke.

1. Das Flächenstück F liege in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Nullpunkt O); die Trägheitsmomente in bezug auf die drei Koordinatenachsen und das Zentrifugalmoment in bezug auf die x- und y-Achse sind bestimmt durch:

$$J_x = \int y^2 \cdot df, \qquad J_y = \int x^2 \cdot df, \qquad J_{xy} = \int xy \cdot df.$$

$$J_z = J_0 = \int r^2 \cdot df = \int (x^2 + y^2) \cdot df = J_x + J_y \quad \text{(S. 192 unter 2)}$$

Mifst man die Längen in m, so erhält man die Flächen-Trägheits- bzw. -Zentrifugalmomente in m^4.

Das Trägheitsmoment von F heifst **äquatorial** (achsial), wenn die Achse in der Ebene von F liegt; es heifst **polar**, wenn die Achse winkelrecht zur Ebene von F steht (Pol = Fufspunkt der Achse).

Das äquatoriale Trägheitsmoment ändert sich nicht, wenn beliebige Teile von F parallel zur Achse verschoben werden; das polare ändert sich nicht, wenn beliebige Teile von F um den Pol gedreht werden.

2. Für zwei in der Ebene von F parallel gelegene Koordinatenkreuze xy — Nullpunkt O = **Schwerpunkt** von F — und $x'y'$ (Nullpunkt O') gilt (S. 192 unter 2)

Digitized by Google

$$J_{x'} = J_x + a^2 F, \qquad J_{y'} = J_y + b^2 F,$$
$$J_{0'} = J_0 + c^2 F, \qquad J_{xy'} = J_{xy} + a b F,$$

wo a, b die Koordinaten von O im System $x'y'$ sind und

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{Strecke } O'O.$$

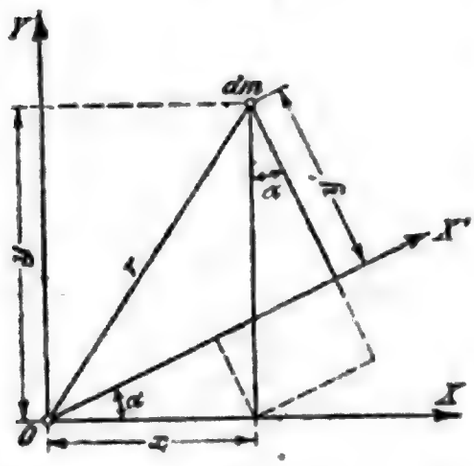
3. Wird das Koordinatenkreuz xy (Nullpunkt O beliebig) im positiven Sinne um den Winkel α in die Lage $x'y'$ gedreht, so ist (Abb. 63):

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha, \text{ folglich}$$
$$J_{x'} = \int y'^2 \cdot df = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha,$$
$$J_{xy'} = \int x'y' \cdot df = J_{xy}\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(J_y - J_x)\sin 2\alpha.$$

Trägt man auf der Achse OX' die Strecke $\varrho = 1 : \sqrt{J_{x'}}$ vom Nullpunkte aus ab, so erhält man für die Koordinaten ξ, η des Endpunktes von ϱ die Gleichung

$$J_x \xi^2 + J_y \eta^2 - 2 J_{xy} \xi \eta = 1,$$

Abb. 63.



d. i. die Gleichung einer Ellipse mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt (Trägheitsellipse für den Punkt O).

Für die Achsen der Ellipse, d. h. für die **Hauptträgheitsachsen** des Punktes O wird aus Symmetriegründen das Zentrifugalmoment $J_{xy'} = 0$; die Winkel α_0 und $90^0 + \alpha_0$, die diese Achsen mit der x-Achse einschliefsen, folgen aus:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Die Trägheitsmomente für diese Achsen, die **Hauptträgheitsmomente**, sind

$$\left.\begin{matrix} J_{max} = A \\ J_{min} = B \end{matrix}\right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Die Achse für J_{max} heifst **erste**, die für J_{min} **zweite Hauptachse.**

Wählt man die Trägheitshauptachsen zu Koordinatenachsen, so wird das Trägheitsmoment für eine unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigte Gerade

$$J = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha$$

und die Gleichung der Trägheitsellipse:

$$A\xi^2 + B\eta^2 = 1.$$

Die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt von F heifst **Zentralellipse.**

4. Der **Trägheitshalbmesser** k für die unter dem Winkel α gegen Ox geneigte Achse x' ist bestimmt durch: $J_{x'} = Fk^2$.

Zieht man im Abstande k zur Achse x' eine Parallele und macht dasselbe für alle durch den Punkt O gehenden Achsen, so erhält man die Tangenten einer **zweiten** (der Culmannschen) **Trägheitsellipse** (Anwendung in der graphischen Statik).

Erste und zweite Trägheitsellipse sind ähnlich und ähnlich gelegen, da das Verhältnis der kleinen und grofsen Achsen bei beiden $= \sqrt{A} : \sqrt{B}$ ist.

Digitized by Google

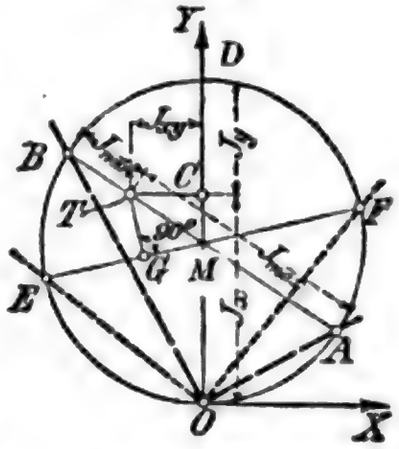
5. Trägt man auf der durch den Schwerpunkt S gehenden ersten Hauptachse von S aus beiderseits die Länge c, bestimmt durch

$$A - B = Fc^2,$$

ab, so erhält man die **Festpunkte** F_1 und F_2 der Fläche F. Für diese haben die Trägheitsmomente, bezogen auf alle durch sie gehenden Achsen, denselben Wert A, die Trägheitsellipse ist sonach ein Kreis.

6. **Trägheitskreis von Mohr-Land.** Sind für zwei rechtwinklige Achsen OX und OY (Abb. 64) die Trägheitsmomente J_x und J_y und das Zentrifugalmoment J_{xy} gegeben, so mache man $OC = J_x$, $CD = J_y$ und $CT \perp OY$ und $= J_{xy}$. Der über $OD = J_x + J_y = J_p$ (dem polaren Trägheitsmoment, bezogen auf O) als Durchmesser beschriebene Kreis mit dem Mittelpunkte M heifst der **Trägheitskreis** für den Punkt O als Pol; der Punkt T heifst **Trägheitshauptpunkt.** Der durch T gehende Durchmesser liefert die beiden Trägheitshauptachsen OA mit $J_{max} = TA$ und OB mit $J_{min} = TB$.

Abb. 64.



Für zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen, z. B. OE und OF, liefert das Lot TG von T auf den Durchmesser EF das Zentrifugalmoment und die Strecken EG bzw. FG die Trägheitsmomente, bezogen auf OE bzw. OF.

7. Bestimmung der Trägheitsmomente ebener Flächenstücke.

Für die einfachen Querschnitte des Brücken- und Eisenbaues entnimmt man die Trägheitsmomente den vorhandenen Tabellenwerken: Geusen und Miliczeck, Böhm und John, Scharowski, Zimmermann, Deutsches Normalprofilbuch; s. a. Abschnitt: Stoffkunde dieses Bandes.

Für die unregelmäfsigen Querschnitte des Maschinenbaues führt am schnellsten ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren zum Ziel, ähnlich dem für die Bestimmung des Schwerpunktes, S. 164.

Man zerlegt den mafsstäblich gezeichneten Querschnitt durch Parallelen zur Achse, für die das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, in so schmale Streifen, dafs diese als Rechtecke angesehen werden können; entnimmt aus der Zeichnung Flächeninhalt f und Schwerpunktabstand y der Streifen und bildet die Summe $\Sigma y^2 f \approx J$. Die Rechnung wird am besten tabellarisch durchgeführt.

Voraussetzung ist, dafs die Streifen schmal genug genommen werden, um gegen $y^2 f$ das Trägheitsmoment des Streifens in bezug auf seine parallele Schwerpunktachse $\left(\frac{b h^3}{12} = \frac{f h^2}{12}\right)$ vernachlässigen zu können.

Will man gröfsere regelmäfsige Stücke des Querschnittes, deren Schwerpunktlage y, Flächeninhalt f und Trägheitsmoment i_s für die parallele Schwerachse sofort angeschrieben werden können, nicht erst noch in Streifen zerlegen, so hat man statt $y^2 f$ zu setzen: $y^2 f + i_s$.

Soll das Trägheitsmoment eines unregelmäfsigen Querschnittes, dessen Schwerpunkt vorläufig noch nicht bekannt ist, in bezug auf

Digitized by Google

eine der Richtung nach gegebene Schwerachse bestimmt werden, so berechnet man zunächst nach dem Vorstehenden das Trägheitsmoment für eine beliebige parallele Achse und reduziert auf die Schwerachse durch Subtraktion des Wertes $F\eta^2$; Querschnittinhalt F sowohl wie Schwerpunktabstand η ergeben sich bei der tabellarischen Berechnung gleich mit.

8. Trägheitsmomente technisch wichtiger Linien, Flächen und Körper.

(Ausführlichere Angaben über Trägheitsmomente üblicher Querschnittformen s. im Abschn. IV., Festigkeitslehre unter Biegungsfestigkeit, sowie im Abschn. V., Stoffkunde, bei den deutschen Normalprofilen.)

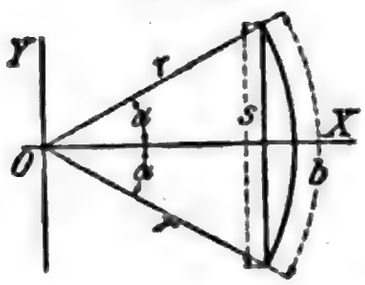
Es sind **homogene Gebilde** vorausgesetzt; $\frac{G}{g} = m$ ist die Masse des Gebildes; es ist angenommen, dafs die Massenträgheitsmomente in **mkg sk²**, die geometrischen Trägheitsmomente in **m⁵** (bei Flächen **m⁴**, bei Linien **m³**) berechnet werden sollen, dann sind die Fallbeschleunigung g mit 9,81 m/sk², das Gewicht G in kg und die Einheitsgewichte γ, γ_f, γ_l (s. unten) in kg/m³, kg/m² bzw. kg/m einzusetzen.

Der Zeiger bei J bezeichnet die Achse des Trägheitsmomentes; $\dot{J}_0$ bedeutet das polare Trägheitsmoment für den Pol 0.

α) Ebene Linien.

γ_l in kg/m = Gewicht der Längeneinheit; das geometrische Trägheitsmoment folgt aus dem Massenträgheitsmoment durch Streichen des Faktors γ_l/g.

Abb. 65.



1. **Gerade Strecke** von der Länge l; ein Endpunkt auf der Achse liegend, der andere im Abstande r von der Achse.

$$J = \frac{\gamma_l}{g} l \frac{r^2}{3} = \frac{G}{g} \frac{r^2}{3}.$$

2. **Kreisbogen** mit dem Halbmesser r und dem Zentriwinkel 2α (Abb. 65)

$$J_x = \frac{\gamma_l}{g} \frac{r^3}{2} (\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{G}{g} \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha}\right),$$

$$J_y = \frac{\gamma_l}{g} \frac{r^3}{2} (\text{arc } 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{G}{g} \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc } 2\alpha}\right),$$

$$\dot{J}_0 = \frac{\gamma_l}{g} r^3 \text{ arc } 2\alpha = \frac{G}{g} r^2 \text{ mit arc } 2\alpha = \frac{(2\alpha)^0}{180^0} \pi.$$

Ganzer Kreis: $2\alpha = 360^0$, arc $2\alpha = 2\pi$.

$$\dot{J}_0 = \frac{\gamma_l}{g} r^3 2\pi = \frac{G}{g} r^2, \qquad J_x = J_y = J_d = \frac{\gamma_l}{g} r^3 \pi = \frac{G}{g} \frac{r^2}{2}.$$

3. **Ellipsenumfang**; a grofse, b kleine Halbachse. Mit $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ (numerische Exzentrizität, s. Analytische Geometrie S. 96) ist:

Digitized by Google

$$\frac{G}{g} = \frac{\gamma_l}{g} 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \cdot 3 k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \cdot 5 k^6 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot 7 k^8 - \ldots\right]$$

und das Trägheitsmoment, bezogen auf die grofse Achse:

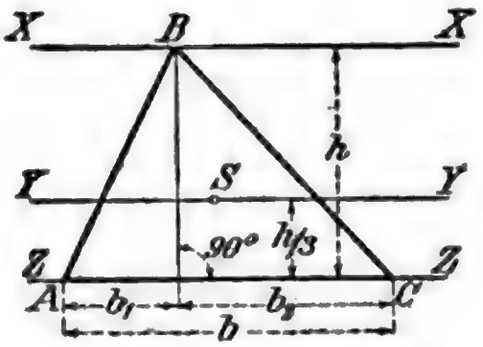
$$J_a = \frac{\gamma_l}{g} 2\pi a b^2 \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{5}{8} k^6 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} k^8 - \ldots\right]$$

β) Ebene Flächenstücke.

γ_f in kg/m² = Gewicht der Flächeneinheit; das geometrische Trägheitsmoment folgt aus dem Massenträgheitsmoment durch Streichen des Faktors γ_f/g.

1. **Dreieck**; Schwerpunkt S (Abb. 66).

Abb. 66.



$$J_x = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b h^3}{4} = \frac{G}{g} \frac{h^2}{2},$$

$$J_y = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b h^3}{36} = \frac{G}{g} \frac{h^2}{18},$$

$$J_z = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b h^3}{12} = \frac{G}{g} \frac{h^2}{6},$$

$$J_h = \frac{\gamma_f}{g} \frac{h(b_1^3 + b_2^3)}{12} = \frac{G}{g} \frac{b_1^3 + b_2^3}{6b},$$

$$J_B = \frac{\gamma_f}{g} \left(\frac{b h^3}{4} + \frac{h(b_1^3 + b_2^3)}{12}\right),$$

$$J_S = \frac{\gamma_f}{g} \left(\frac{b h^3}{36} + \frac{h(b_1^3 + b_2^3)}{12} - \frac{b h (b_2 - b_1)^2}{18}\right) = \frac{G}{g} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}.$$

Für jede beliebige Schwerachse gilt: $J = \frac{G}{g} \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{12}$, wo e_1, e_2, e_3 die Abstände der Eckpunkte von der Achse sind.

Gleichschenkliges Dreieck: $b_1 = b_2 = \frac{b}{2}$.

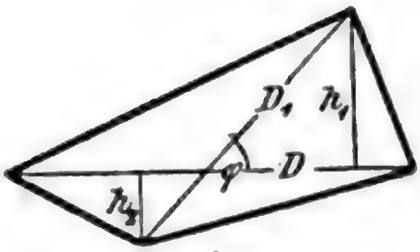
$$J_h = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b^3 h}{48}, \qquad J_B = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b h (12 h^2 + b^2)}{48},$$

$$J_S = \frac{\gamma_f}{g} \frac{b h (4 h^2 + 3 b^2)}{144}.$$

Digitized by Google

2. Viereck. Unregelmäfsiges Viereck (Abb. 67):

Abb. 67.



$$J_D = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{D\,(h_1^3 + h_2^3)}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{1}{6}\,\frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}.$$

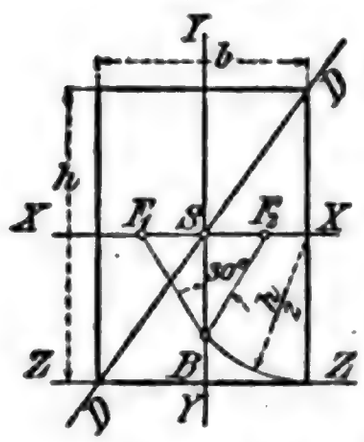
Parallelogramm:

$$J_D = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{D\,D_1^3 \sin^3\varphi}{48} = \frac{G}{g}\,\frac{D_1^2 \sin^2\varphi}{24}.$$

Rhombus: $J_D = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{D\,D_1^3}{48} = \frac{G}{g}\,\frac{D_1^2}{24}$.

Rechteck (Abb. 68): $J_D = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{D^4 \sin^3\varphi}{48} = \frac{G}{g}\,\frac{D^2 \sin^2\varphi}{24}$,

Abb. 68.



$$J_x = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{b\,h^3}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{h^2}{12},$$

$$J_y = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{b^3\,h}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{b^2}{12},$$

$$J_z = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{b\,h^3}{3} = \frac{G}{g}\,\frac{h^2}{3},$$

$$J_S = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{b\,h\,(b^2 + h^2)}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{b^2 + h^2}{12}.$$

F_1 und F_2 sind die Festpunkte des Querschnitts (S. 195 unter 5); es ist

$XB = h/2$ und $\sphericalangle F_1 BS = \sphericalangle F_2 BS = 30°$, also

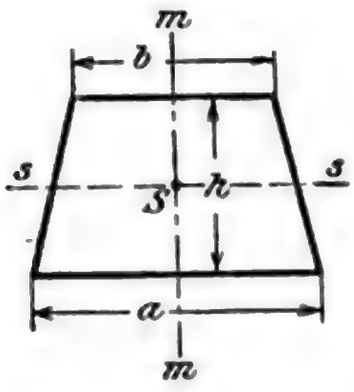
$$F_1 S = F_2 S = c = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{b\,h}}.$$

Quadrat mit der Seite a:

$$J_x = J_y = J_D = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{a^4}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{a^2}{12}, \qquad J_a = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{a^4}{3} = \frac{G}{g}\,\frac{a^2}{3},$$

$$J_S = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{a^4}{6} = \frac{G}{g}\,\frac{a^2}{6}.$$

Abb. 69.



Gleichschenkliges Trapez (Abb. 69):

$$J_a = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{h^3\,(a + 3b)}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{h^2}{6}\,\frac{a + 3b}{a + b},$$

$$J_b = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{h^3\,(3a + b)}{12} = \frac{G}{g}\,\frac{h^2}{6}\,\frac{3a + b}{a + b},$$

$$J_m = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{h}{48}\,\frac{a^4 - b^4}{a - b} = \frac{G}{g}\,\frac{a^2 + b^2}{24},$$

$$J_s = \frac{\gamma_f}{g}\,\frac{h^3}{36}\,\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b} = \frac{G}{g}\,\frac{h^2}{18}\,\frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a + b)^2}.$$

Digitized by Google

3. **Regelmäfsiges Vieleck**; Seite a, Seitenzahl n, Halbmesser des Inkreises r, Halbmesser des Umkreises R:

$$J_x = J_y = J_D = \frac{\gamma_f}{g}\frac{nar\,(12\,r^2 + a^2)}{48} = \frac{G}{g}\frac{12\,r^2 + a^2}{24} = \frac{G}{g}\frac{6\,R^2 - a^2}{12},$$

$$J_o = 2\,J_x.$$

4. **Kreis**: Für jeden Durchmesser gilt:

$$J_d = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{4} = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,d^4}{64} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{4},$$

$$J_0 = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{2} = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,d^4}{32} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}.$$

Halbkreis: In bezug auf den begrenzenden Durchmesser (x-Achse) und die Symmetrielinie (y-Achse) gilt:

$$J_x = J_y = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{8} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{4},$$

für den Mittelpunkt $J_0 = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{4} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}$,

für den Schwerpunkt $J_S = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{4}\left(1 - \frac{32}{9\,\pi^2}\right) = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{32}{9\,\pi^2}\right)$.

5. **Kreisring**; äufserer Halbmesser R, innerer Halbmesser r:

$$J_d = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,(R^4 - r^4)}{4} = \frac{G}{g}\frac{R^2 + r^2}{4}, \quad J_0 = 2\,J_d.$$

6. **Kreisausschnitt** (Bezeichnungen Abb. 65, S. 196):

$$J_x = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4}{8}(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{G}{g}\frac{r^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha}\right),$$

$$J_y = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4}{8}(\operatorname{arc} 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{G}{g}\frac{r^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha}\right),$$

$$J_0 = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4 \operatorname{arc} 2\alpha}{4} = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi\,r^4}{2n} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}$$

(Kreisausschnitt $= n^{\text{ter}}$ Teil der Kreisfläche).

Für den Schwerpunkt S als Pol

$$J_S = \frac{\gamma_f}{g}\frac{b\,r^3}{4}\left(1 - \frac{8}{9}\frac{s^2}{b^2}\right) = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{8}{9}\frac{s^2}{b^2}\right).$$

7. **Kreisabschnitt** (Bezeichnungen Abb. 65, S. 196):

$$J_x = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4}{8}\left(\operatorname{arc} 2\alpha - \frac{4}{3}\sin 2\alpha + \frac{1}{6}\sin 4\alpha\right)$$

$$= \frac{G}{g}\frac{r^4}{4}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha}\right),$$

Digitized by Google

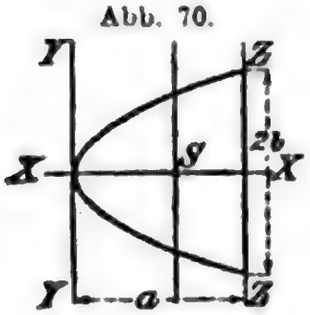
$$J_y = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4}{8}\left(\operatorname{arc} 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 4\alpha\right)$$
$$= \frac{G}{g}\frac{r^4}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha}\right),$$
$$J_0 = \frac{\gamma_f}{g}\frac{r^4}{4}\left(\operatorname{arc} 2\alpha - \frac{2}{3}\sin 2\alpha - \frac{1}{6}\sin 4\alpha\right)$$
$$= \frac{G}{g}\frac{r^4}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha}\right).$$

8. **Ellipse.** In bezug auf die große Achse $2a$ bzw. die kleine Achse $2b$ und den Mittelpunkt 0 als Pol gilt:

$$J_a = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi a b^3}{4} = \frac{G}{g}\frac{b^2}{4}; \quad J_b = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{G}{g}\frac{a^2}{4},$$
$$J_0 = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2) = \frac{G}{g}\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

9. **Parabel** (Abb. 70):

Abb. 70.



$$J_x = \frac{\gamma_f}{g}\frac{4ab^3}{15} = \frac{G}{g}\frac{b^2}{5},$$
$$J_y = \frac{\gamma_f}{g}\frac{4a^3 b}{7} = \frac{G}{g}\frac{3a^2}{7},$$
$$J_z = \frac{\gamma_f}{g}\frac{32a^3 b}{105} = \frac{G}{g}\frac{8a^2}{35},$$
$$J_S = \frac{\gamma_f}{g}\frac{16a^3 b}{175} = \frac{G}{g}\frac{12a^2}{175}.$$

γ) Körper und krumme Flächen.

γ in kg/m³ = Gewicht der Raumeinheit; das geometrische Trägheitsmoment folgt aus dem Massenträgheitsmoment durch Streichen des Faktors $\frac{\gamma}{g}$ — Für krumme Flächen vgl. die Vorbemerkung unter β).

1. **Gerades Prisma und gerader Zylinder.** Höhe h, Normalschnitt F, z-Achse = Längsschwerachse, q-Achse = beliebige Querschwerachse senkrecht zur z-Achse; die Trägheitsmomente des mittleren Normalschnitts in bezug auf q und z seien i_q und i_z. Es gilt:

$$J_q = \frac{\gamma}{g}\left(F\frac{h^3}{12} + h i_q\right), \quad J_z = \frac{\gamma}{g} h i_z.$$

2. **Rechtkant** (rechtwinkliges Parallelepiped). x-, y- und z-Achse durch den Mittelpunkt parallel zu den Kanten a, b, c:

$$J_x = \frac{\gamma}{g}\frac{abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{G}{g}\frac{b^2 + c^2}{12}.$$

Digitized by Google

Würfel, Kante a:

$$J_x = J_y = J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{a^5}{6} = \frac{G}{g}\frac{a^2}{6}.$$

3. Gerader Kreiszylinder. Halbmesser r, Höhe h; Achsen s. unter 1:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi r^4 h}{2} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi r^2 h}{12}(3r^2 + h^2) = \frac{G}{g}\frac{3r^2 + h^2}{12}.$$

Für eine Achse, die mit der Zylindermittellinie den Winkel φ bildet, ist das Trägheitsmoment

$$J_\varphi = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi r^2 h}{12}[3r^2(1 + \cos^2\varphi) + h^2 \sin^2\varphi]$$

$$= \frac{G}{g}\frac{1}{12}[3r^2(1 + \cos^2\varphi) + h^2 \sin^2\varphi].$$

Zylindermantel (ohne Endflächen):

$$J_z = \frac{\gamma_f}{g} 2\pi r^3 h = \frac{G}{g} r^2,$$

$$J_q = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi r h}{6}(6r^2 + h^2) = \frac{G}{g}\frac{6r^2 + h^2}{12}.$$

4. Hohlzylinder. R und r äufserer und innerer Halbmesser, h Höhe; Achsen s. unter 1:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi h}{2}(R^4 - r^4) = \frac{G}{g}\frac{R^2 + r^2}{2},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi(R^2 - r^2)h}{4}\left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3}\right) = \frac{G}{g}\frac{R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3}}{4}.$$

5. Gerade Pyramide und gerader Kegel. Das Lot h (zugleich z-Achse) von der Spitze auf die Grundfläche F trifft diese in ihrem Schwerpunkte, q-Achse senkrecht zur z-Achse durch den Körperschwerpunkt; die Trägheitsmomente der Grundfläche in bezug auf die z-Achse und die Projektion der q-Achse seien i_z und i_q. Es gilt:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{h}{5} i_z, \qquad J_q = \frac{\gamma}{g}\left(F\frac{h^2}{80} + \frac{h}{5} i_q\right).$$

6. Rechtwinklige Pyramide. Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und b, Höhe h; Achsen s. unter 5., q-Achse parallel Seite a:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{a b h}{60}(a^2 + b^2) = \frac{G}{g}\frac{a^2 + b^2}{20},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g}\frac{a b h}{60}\left(b^2 + \frac{3h^2}{4}\right) = \frac{G}{g}\frac{b^2 + \frac{3h^2}{4}}{20}.$$

Digitized by Google

7. Gerader Kreiskegel. Halbmesser der Grundfläche r, Höhe h, Seitenlänge s; Achsen s. unter 5:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{G}{g}\frac{3r^2}{10},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi r^2 h}{20}\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right) = \frac{G}{g}\frac{3}{20}\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

Kegelmantel (ohne Grundfläche):

$$J_z = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi r^3 s}{2} = \frac{G}{g}\frac{r^2}{2}.$$

8. Abgestumpfter Kreiskegel. Halbmesser der Endflächen R und r, Höhe h, Seitenlänge s; Achsen s. unter 5:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi h}{10}\frac{R^5 - r^5}{R - r} = \frac{G}{g}\frac{3}{10}\frac{R^3 - r^3}{R - r}.$$

Kegelmantel (ohne Endflächen):

$$J_z = \frac{\gamma_f}{g}\frac{\pi s}{2}\frac{R^4 - r^4}{R - r} = \frac{G}{g}\frac{R^2 + r^2}{2}.$$

9. Kugel. Halbmesser r. Für jeden Durchmesser als Achse ist:

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{8\pi r^5}{15} = \frac{G}{g}\frac{2r^2}{5}.$$

Halbkugel. z-Achse im Mittelpunkte senkrecht auf der begrenzenden Durchmesserebene:

$$J_x = J_y = J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{4\pi r^5}{15} = \frac{G}{g}\frac{2r^2}{5}.$$

Hohlkugel. R äufserer, r innerer Halbmesser. Für jeden Durchmesser ist:

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{8\pi}{15}(R^5 - r^5) = \frac{G}{g}\frac{2}{5}\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Kugeloberfläche. Für jeden Durchmesser ist:

$$J = \frac{\gamma_f}{g}\frac{8\pi r^4}{3} = \frac{G}{g}\frac{2r^2}{3}.$$

10. Kugelabschnitt. Höhe h, Kugelhalbmesser r. Für die Symmetrieachse ist:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi h^3}{30}(20r^2 - 15rh + 3h^2) = \frac{G}{g}\frac{1}{10}\frac{20r^3 - 15rh + 3h^3}{3r - h}.$$

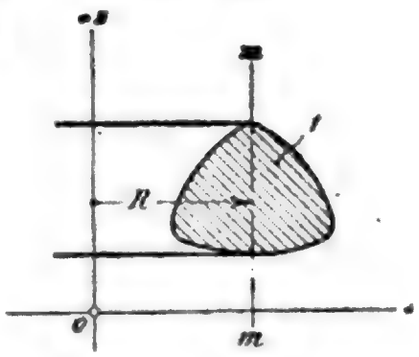
11. Kugelausschnitt. Höhe der Kalotte h, Kugelhalbmesser r. Für die Symmetrieachse ist:

$$J_z = \frac{\gamma}{g}\frac{2\pi r^2 h^2}{15}(3r - h) = \frac{G}{g}\frac{h}{5}(3r - h).$$

Digitized by Google

12. Ringkörper (Abb. 71). Erzeugungsfläche symmetrisch in bezug auf eine zur Drehachse parallele Gerade mm. s-Achse = Drehachse; q-Achse winkelrecht zur s-Achse; R = Abstand Drehachse/Gerade mm; die Trägheitsmomente von f in bezug auf die m- und q-Achse seien i_m und i_q. Es gilt:

Abb. 71.



$$J_s = \frac{\gamma}{g} 2\pi R (R^2 f + 3 i_m),$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g} \pi R (R^2 f + 3 i_m + 2 i_q),$$

$$\frac{G}{g} = \frac{\gamma}{g} 2\pi R f \text{ (nach Guldin).}$$

Kreisringkörper, Halbmesser des Erzeugungskreises a; q-Achse = beliebiger Durchmesser in der Aequatorebene:

$$J_s = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi^2 R a^2}{2} (4R^2 + 3a^2) = \frac{G}{g} \frac{4R^2 + 3a^2}{4},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi^2 R a^2}{4} (4R^2 + 5a^2) = \frac{G}{g} \frac{4R^2 + 5a^2}{8}.$$

Ellipsenringkörper, Halbachse a in der Aequatorebene, Halbachse b parallel zur Drehachse; q-Achse = beliebiger Durchmesser in der Aequatorebene:

$$J_s = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi^2 R a b}{2} (4R^2 + 3a^2) = \frac{G}{g} \frac{4R^2 + 3a^2}{4},$$

$$J_q = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi^2 R a b}{4} (4R^2 + 3a^2 + 2b^2) = \frac{G}{g} \frac{4R^2 + 3a^2 + 2b^2}{8}.$$

IV. Kinematik.

1. Elementarbewegungen.

1. Eine unendlich kleine Schiebung (S. 141) (Weg = ds, Zeit = dt) heifst **Elementarschiebung.** Es ist

$$\frac{ds}{dt} = v_s = \text{Schiebungs- oder Gleitgeschwindigkeit.}$$

Die Elementarschiebung ist vollständig bestimmt durch den **Schiebungsvektor**, d. i. eine an einem beliebigen Punkte des starren Körpers angetragene Strecke, die nach Gröfse, Richtung und Pfeilsinn die Geschwindigkeit v_s darstellt.

2. Eine unendlich kleine Drehung (S. 141) (Drehwinkel = $d\alpha$, Zeit = dt) heifst **Elementardrehung.** Der Weg ds eines Punktes im Abstande r von der Drehachse ist

$$ds = r \cdot d\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Elementardrehung.}$$

Die Elementardrehung ist vollständig bestimmt durch den **Drehvektor**, d. i. eine Strecke, deren Länge gleich ω ist und die auf der Drehachse von einer beliebigen senkrecht zu dieser stehenden Ebene aus abgetragen ist, in den Halbraum hineinweisend, von dem aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers erscheint.

Digitized by Google

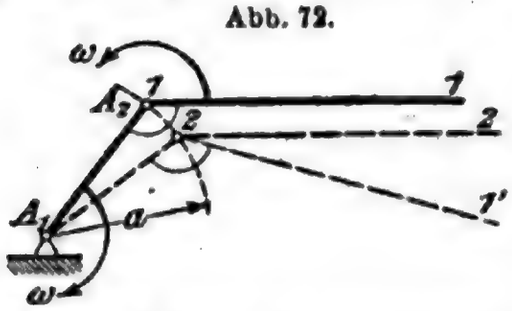
3. Der starre Körper erfährt eine **Schraubung** um die Achse a, wenn er gleichzeitig eine Drehung um a und eine Schiebung längs a vollführt. Sie heifst **Elementarschraubung**, wenn Drehung und Schiebung unendlich klein sind.

Eine Elementarschraubung ist vollständig bestimmt durch den Schiebungsvektor v_s und den Drehungsvektor ω, die beide in die Schraubenachse fallen (Bewegungsschraube).

2. Zusammensetzung der Elementarbewegungen.

1. Eine **Schiebung** ist gleichwertig einem **Drehungspaar**, d. i. zwei gegensinnigen Drehungen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω um zwei parallele Achsen A_1 und A_2. Die Ebene A_1, A_2 steht senkrecht zur Schiebungsrichtung; zwischen Gleitgeschwindigkeit v_s, Drehgeschwindigkeit ω und Achsenabstand a besteht die Beziehung $v_s = a\,\omega$.

Abb. 72.



Beweis Abb. 72 (Kuppelstange einer Lokomotive); die Stange 1, 1 würde durch die Drehung um A_1 in die Lage 2, 1' kommen, gelangt aber infolge der gleichzeitigen Drehung um A_2 in die Lage 2, 2; es ist

$$\overline{1,2} = ds = a\,\omega\,.\,dt.$$

Zwischen dem Schiebungsvektor v_s und den beiden Drehvektoren ω besteht dieselbe Beziehung wie zwischen dem Momentvektor und den beiden Kräften eines Kräftepaares (S. 156).

2. Stellt man Drehungen und Schiebungen durch ihre Vektoren dar, so gilt: **Drehungen und Schiebungen (Drehungspaare) sind wie Kräfte und Kräftepaare zusammenzusetzen.**

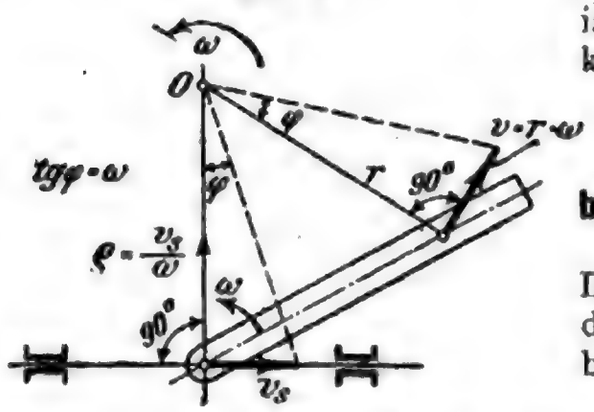
Das Ergebnis ist demnach im allgemeinen eine Bewegungsschraube (s. unter 1, 3), deren Achse der Zentralachse des Kräftesystems entspricht (S. 159).

Bei der Zusammensetzung benutzt man oft mit Vorteil einen Hülfswinkel φ, der durch $\operatorname{tg}\varphi = \omega$ bestimmt ist; vgl. Abb. 73 bis 76.

3. Zusammensetzung **zweier Schiebungen** $v_s^{(1)}$ und $v_s^{(2)}$. Es folgt wieder eine Schiebung, deren Geschwindigkeit (Vektor) V_s die geometrische Summe von $v_s^{(1)}$ und $v_s^{(2)}$ ist (Parallelogramm- oder Dreieckskonstruktion).

$$V_s = v_s^{(1)} + v_s^{(2)}.$$

Abb. 73.



4. Zusammensetzung einer **Schiebung** v_s **und** einer **Drehung** ω.

a) Schiebung parallel der Drehachse A; es folgt eine mit der Drehung gleichsinnige Schraubung um A (s. unter 1, 3).

b) Schiebung winkelrecht zur Drehachse A; es folgt eine gleichsinnige Drehung ω um eine Achse $O \parallel A$; Ebene $A, O \perp v_s$; Abstand $AO = \varrho = \frac{v_s}{\omega}$ (Abb. 73, Kreuzkopfende einer Schubstange).

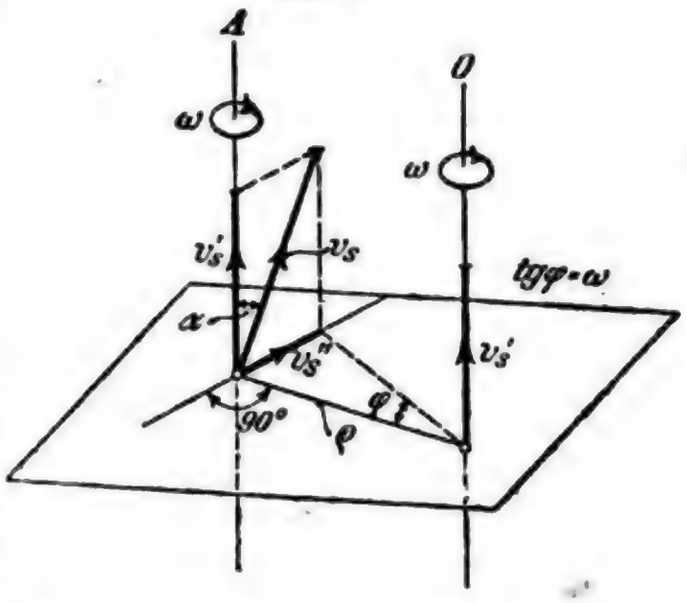
Digitized by Google

c) Schiebung unter dem Winkel α zur Drehachse A geneigt; es folgt eine mit der Drehung gleichsinnige Schraubung um eine Achse $O \parallel A$; Ebene $A, O \perp v_s'' = v_s \sin\alpha$; Abstand

$$AO = \varrho = \frac{v_s''}{\omega} = \frac{v_s}{\omega} \sin\alpha.$$

Drehgeschwindigkeit ω, Gleitgeschwindigkeit $v_s' = v_s \cos\alpha$ (Abb. 74).

Abb. 74.



5. Zusammensetzung **zweier Drehungen** ω_1 und ω_2.

a) Bei **parallelen Drehachsen** A_1 und A_2 (Achsenabstand $A_1 A_2 = a$) folgt eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse $O \parallel A_1 \parallel A_2$ in der Ebene A_1, A_2; es gilt stets

Abstand $A_1 O = a_1 = a \frac{\omega_2}{\omega}$, Abstand $A_2 O = a_2 = a \frac{\omega_1}{\omega}$.

Die resultierende Drehung hat,

wenn ω_1 und ω_2 gleichsinnig sind, denselben Drehsinn und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_1 + \omega_2$; ihre Achse O liegt zwischen A_1 und A_2 (Abb. 75);

wenn ω_1 und ω_2 gegensinnig sind, den Drehsinn der gröfseren von beiden und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_1 - \omega_2$ bzw. $\omega_2 - \omega_1$; ihre Achse O liegt aufserhalb des Parallelstreifens A_1, A_2 auf Seite der gröfseren Drehung (Abb. 76).

Abb. 75.

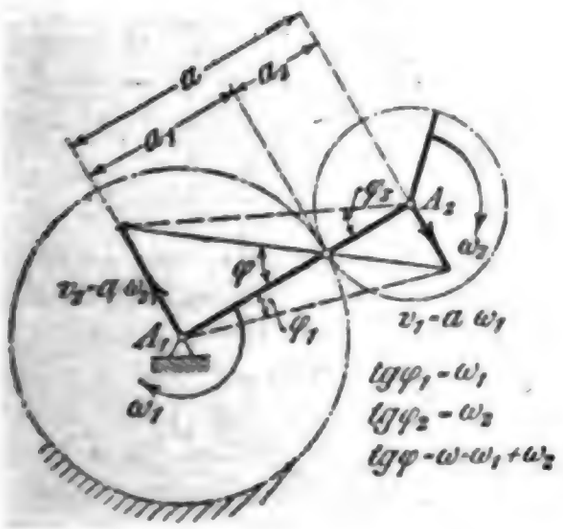
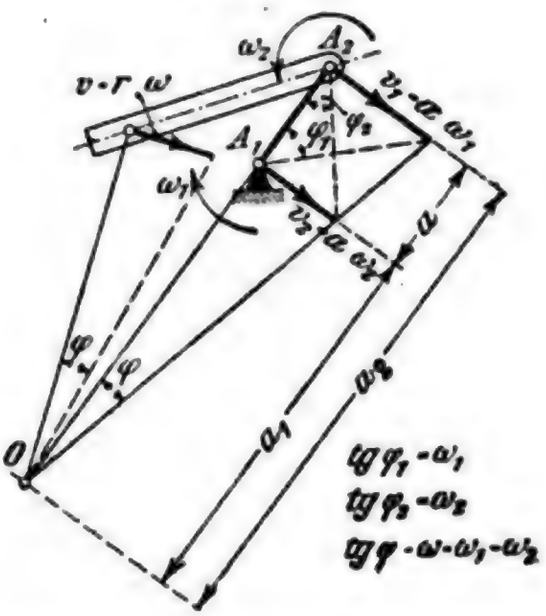


Abb. 76.



Sind ω_1 und ω_2 **gegensinnig und dem Zahlenwerte nach gleich (Drehungspaar)**, so ergibt sich eine Schiebung, s. unter 1 (Abb. 72).

In den Abb. 75 (Planetenrädergetriebe; das grofse Rad steht fest, der Arm und das kleine Rad drehen sich) und Abb. 76 (Kurbelende einer Schubstange) ist die Konstruktion der resultierenden Drehung unter Benutzung der Hülfswinkel φ (s. unter 2) durchgeführt. Man hat den Punkt A_1 für die erste Drehung als festen Punkt, für die zweite als Punkt des die zusammengesetzte Bewegung ausführenden Körpers (kleines Rad des Planetenradergetriebes, Schubstange) aufzufassen.

b) Bei **sich schneidenden Drehachsen** A_1 und A_2 [Schnittpunkt A; Winkel $(\omega_1, \omega_2) = \alpha$] folgt eine Drehung um eine Achse AO in der Ebene A_1, A_2; der Drehvektor ω (S. 203), der Achsenlage, Winkelgeschwindigkeit und Sinn der resultierenden Drehung eindeutig bestimmt, ist die geometrische Summe der Drehvektoren ω_1 und ω_2 **(Parallelogramm** oder Dreieck **der Winkelgeschwindigkeiten),** Abb. 77.

Es gilt

$$\omega = \omega_1 \dotplus \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos\alpha}; \quad \sin\alpha_1 = \frac{\omega_2}{\omega}\sin\alpha; \quad \sin\alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega}\sin\alpha.$$

Die vom Punkte O bei den beiden Drehungen beschriebenen Bogen sind gleich grofs ($ds = a_1\omega_1 \cdot dt = a_2\omega_2 \cdot dt = \omega_1\omega_2 \sin\alpha \cdot dt$) und entgegengesetzt gerichtet.

Abb. 77

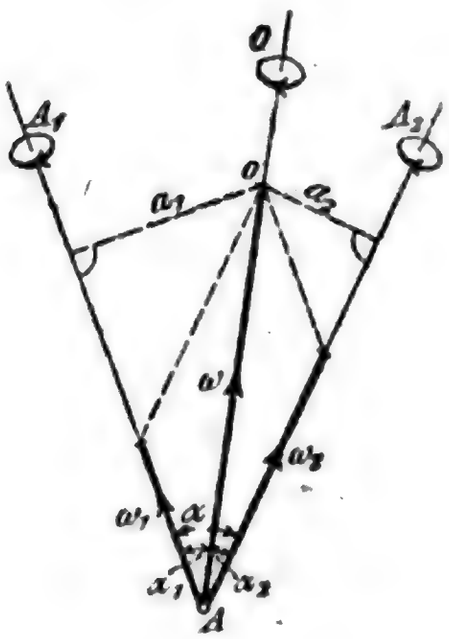
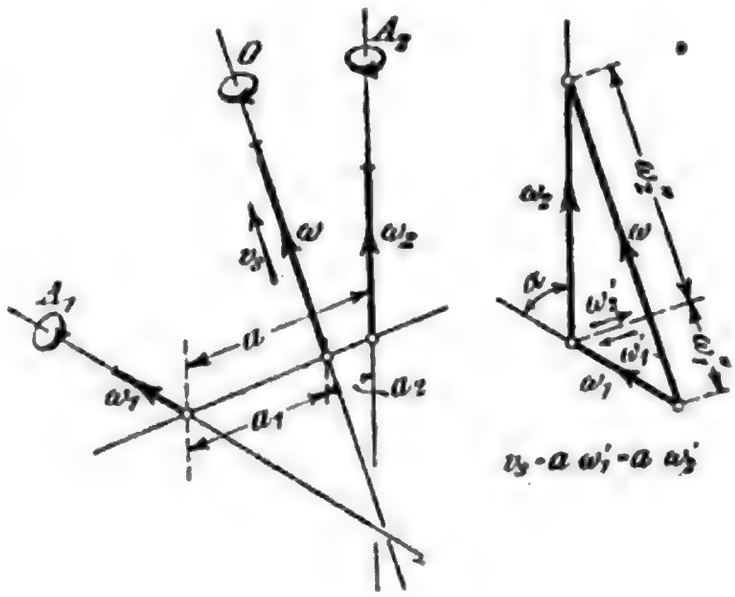


Abb. 79 a u. b.



c) Bei **sich kreuzenden Achsen** A_1 und A_2 [Winkel $(\omega_1, \omega_2) = \varkappa$, kürzester Achsenabstand $= a$, Abb. 79; 79a ist als perspektivisches Bild, 79b als Hülfsfigur, entsprechend Kräfteck, in einer Ebene $\perp a$ aufzufassen], folgt eine Schraubung um eine Achse O, die a rechtwinklig schneidet; die Richtung von O, die Gröfse und der Drehsinn der resultierenden Winkelgeschwindigkeit ω folgt aus den Drehvektoren ω_1 und ω_2 mit Hülfe des Dreiecks der Winkelgeschwindigkeiten (s. unter 5b), wonach

$$\omega = \omega_1 \dotplus \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos\varkappa}.$$

Die Lage von O und die Gröfse der Gleitgeschwindigkeit v_s werden gefunden durch Zerlegung von ω_1 und ω_2 senkrecht und parallel zu ω;

Digitized by Google

die zu ω senkrechten Komponenten ω_1' und ω_2' bilden ein Drehungspaar, folglich ist nach 1. die Gleitgeschwindigkeit

$$v_g = a\,\omega_1' = a\,\omega_2' = a\,\frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega}\sin\alpha$$

mit dem eingezeichneten Pfeilsinn; die anderen beiden Komponenten ω_1'' und ω_2'' sind zwei gleichsinnige Drehungen um parallele Achsen, folglich ist nach 5a (Konstruktion, Abb. 75)

$$\text{Abstand } A_1O = a_1 = a\,\frac{\omega_2''}{\omega} = a\,\frac{\omega_2\,(\omega_2 + \omega_1\cos\alpha)}{\omega^2},$$

$$\text{Abstand } A_2O = a_2 = a\,\frac{\omega_1''}{\omega} = a\,\frac{\omega_1\,(\omega_1 + \omega_2\cos\alpha)}{\omega^2}.$$

3. Endliche Bewegungen.

1. Die **allgemeine Bewegung** eines Körpers im Raume ist bestimmt durch die Bewegung **dreier Punkte** des Körpers, die nicht in einer Geraden liegen dürfen (Bewegungsdreieck).

2. Fällt ein Punkt des Körpers dauernd mit einem festen Punkte O des Raumes zusammen, so vollführt der Körper eine **sphärische Bewegung** (Kreiselbewegung).

3. Sind die Bahnen sämtlicher Punkte des Körpers parallel einer festen Ebene **E** des Raumes, so vollführt der Körper eine **ebene Bewegung.**

Punkte derselben Normalen zur Ebene **E** beschreiben kongruente und parallel gelegene Bahnen; die Bewegung des Körpers kann ersetzt werden durch die Bewegung einer Ebene S auf einer festen Ebene Σ (S und Σ parallel **E**).

Die ebene Bewegung ist bestimmt durch die Bewegung **zweier** Punkte der Bewegungsebene S. Näheres unter 4, S. 208.

4. Der Uebergang aus einer Lage in eine andere Lage kann stets bewirkt werden:

bei der **ebenen Bewegung** durch eine Drehung um eine bestimmte Achse winkelrecht zur Bewegungsebene S (Sonderfall: Schiebung, Achse unendlich fern);

bei der **sphärischen Bewegung** durch eine Drehung um eine bestimmte Achse, durch den festen Punkt O;

bei der **allgemeinen Bewegung** durch eine **Schraubung** um eine bestimmte Achse.

5. Bezeichnet man die Dreh- bzw. Schraubenachsen für den Uebergang aus einer Lage in die unendlich benachbarte sowohl im festen Raume wie auch im bewegten Körper, so folgt:

Jede **zusammenhängende ebene Bewegung** kann erzeugt werden durch **Abrollen** einer dem bewegten Körper angehörigen **Zylinderfläche** auf einer im Raume festen Zylinderfläche.

Jede **zusammenhängende sphärische Bewegung** kann erzeugt werden durch das **Abrollen** einer dem bewegten Körper angehörigen **Kegelfläche** auf einer im Raume festen Kegelfläche.

Jede **zusammenhängende allgemeine Bewegung** kann erzeugt werden durch das **Abschrauben** (Schroten) einer dem bewegten Körper

Digitized by Google

angehörigen (im allgemeinen windschiefen) **Regelfläche** auf einer im Raume festen Regel- (d. i. geradlinigen) Fläche.

Zylinder-, Kegel- und Regelflächen heißen die Achsenflächen (Axoide) der betreffenden Bewegungen.

Die **zusammenhängende allgemeine Bewegung** kann auch erzeugt werden durch die Bewegung zweier Kegelflächen K_1 und K_2, deren gemeinschaftliche Spitze ständig mit dem beliebigen Punkte A des bewegten Körpers zusammenfällt; K_1 führt eine Schiebung längs der Bahnkurve von A aus, während gleichzeitig K_2 auf K_1 abrollt.

4. Ebene Bewegung.

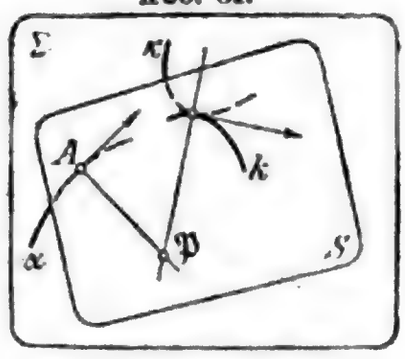
1. Punktbahnen, Hüllbahnen, Pol.

1. Es genügt nach 3.3 S. 207 die Bewegung einer der Parallelebenen zu untersuchen, deren Punkte bei der Bewegung in ihr verbleiben. Man denkt sich diese Ebene S, das bewegte System, mit ihren **Systempunkten** $A, B, C \ldots$ und **Systemkurven** $k, l, m \ldots$ auf einer festen Ebene Σ gleitend.

Paust man die Systempunkte $A, B, C \ldots$ in ihren verschiedenen Lagen, die sie im Laufe der Zeit einnehmen, auf die feste Ebene durch, so erhält man auf dieser die **Punktbahnen** $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; paust man ebenso die Systemkurven $k, l, m \ldots$ in ihren verschiedenen Lagen auf die feste Ebene durch, so werden diese Pausen umhüllt von den **Hüllbahnen** $\varkappa, \lambda, \mu \ldots$ (Abb. 81).

2. Der Uebergang aus einer Lage von S in die unendlich benachbarte besteht in einer Elementardrehung um den **augenblicklichen Drehpunkt** oder **Pol** $\mathfrak{P}$ (S. 207 unter 3.4).

Abb. 81.



Durch den Pol gehen:

a) die Normalen aller von den Systempunkten augenblicklich beschriebenen Punktbahnelemente,

b) die Normalen auf den Bogenelementen, in denen sich augenblicklich die Systemkurven und ihre Hüllbahnen berühren (Abb. 81).

Alle Punkte der bewegten Ebene, die nach und nach zu Polen werden, bilden eine Systemkurve, die **Polkurve** (bewegliche Polbahn); die Punkte der festen Ebene, die im Laufe der Zeit zu Polen werden, bilden die **Polbahn** (feste Polbahn, **Leitkurve**). Sie ist die Hüllbahn der Polkurve.

Bei der Bewegung rollt die Polkurve auf der Polbahn, ohne zu gleiten.

Die Bewegung der Systemkurven längs der Hüllbahnen ist im allgemeinen ein Rollen und Gleiten; reines Rollen findet statt, wenn der augenblickliche Berührungspunkt Pol ist.

3. Hält man die Ebene S fest und läßt Σ sich auf S bewegen derart, daß die **gegenseitige** (relative) **Bewegung** von S und Σ dieselbe bleibt wie vordem, so erhält man die **umgekehrte Bewegung.** Die Systempunkte $A, B, \Gamma \ldots$ in Σ beschreiben jetzt Bahnkurven auf S, die im allgemeinen anderer Art sind wie die Bahnkurven der ursprünglichen

Digitized by Google

Bewegung. Die Systemkurven $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleiten jetzt durch die festen Punkte $A, B, C \ldots$ hindurch, diese Punkte sind also die Hüllbahnen jener Systemkurven. Die Systemkurven $\varkappa, \lambda, \mu \ldots$ erhalten als Hüllbahnen die Kurven $k, l, m \ldots$ Die Polbahn wird zur Polkurve und umgekehrt.

4. An diesen geometrischen Beziehungen ändert sich nichts, wenn weder Σ noch S festliegt, vorausgesetzt nur, beide bewegen sich so gegeneinander, dafs Polkurve und Polbahn regelrecht aufeinander abrollen.

Polkurve und Polbahn führen dann den gemeinsamen Namen **Rollkurven**, Systemkurve und Hüllbahn den Namen **Gleitkurven**. Für jede Bewegung gibt es nur ein Rollkurvenpaar.

Beispiel. Cardanisches Problem (Abb. 82): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, dafs zwei Punkte A und B der bewegten Ebene stets auf zwei sich im Punkte M schneidenden Geraden α und β der festen Ebene gleiten.

Pol $\mathfrak{P}$: Schnittpunkt der in A und B auf α und β errichteten Lote.

Abb. 82.

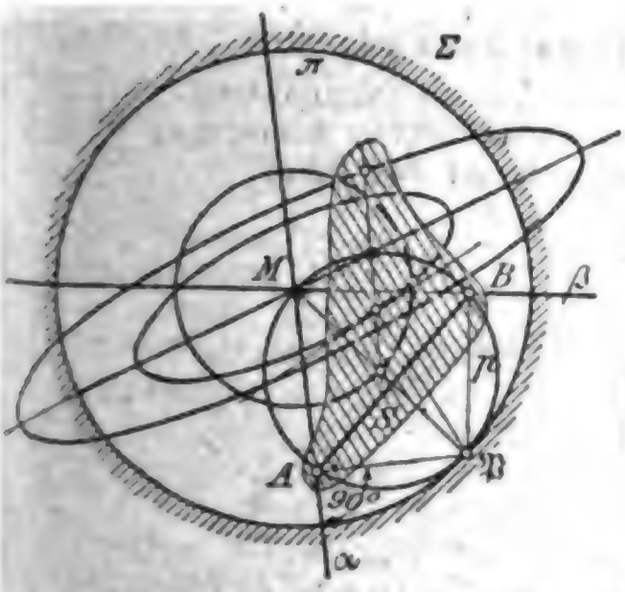
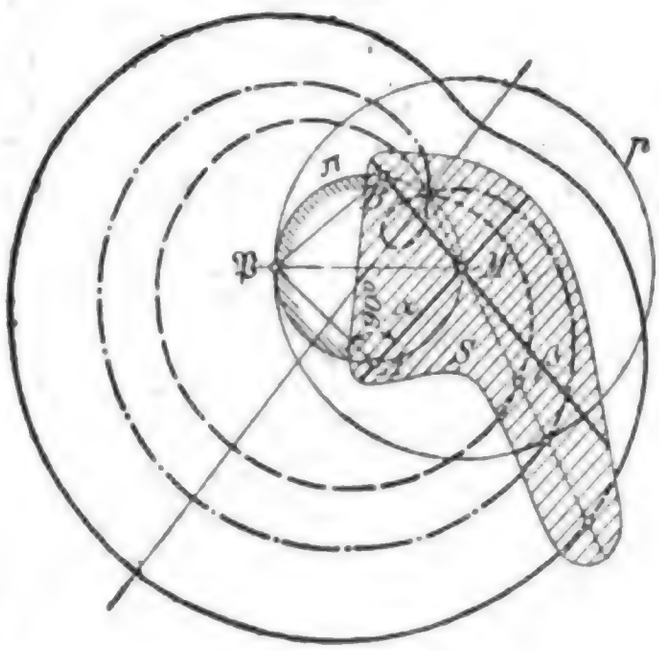


Abb. 83.



Polkurve: Kreis p durch A, B und M.
Polbahn: Kreis π mit dem Durchmesser von p als Radius und dem Mittelpunkte M.

Punktbahnen: Für alle auf der Polkurve p liegenden Punkte der durch den betreffenden Punkt gehende Durchmesser der Polbahn π; für alle übrigen Punkte Ellipsen, insbesondere für den Mittelpunkt von p ein Kreis um M.

Umkehrung (Abb. 83): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, dafs zwei einen starren Winkel bildende Geraden α und β ständig durch zwei Punkte A und B der festen Ebene gleiten.

Pol $\mathfrak{P}$: Schnittpunkt der in A und B auf α und β errichteten Lote. **Polkurve** Kreis π. **Polbahn**: Kreis p. **Punktbahnen**: Paskalsche Kurven; insbesondere beschreiben die Punkte auf der Polkurve Kardioiden mit Rückkehrpunkt (Spitze); Punkte aufserhalb der Polkurve beschreiben Punktbahnen mit isoliertem Punkt; Punkte innerhalb der Polkurve solche mit Schleife.

2. Geschwindigkeitszustand.

1. Für die augenblickliche Geschwindigkeit der Punkte $A, B, C \ldots$ einer starren Ebene gilt (Abb. 84a u. b)

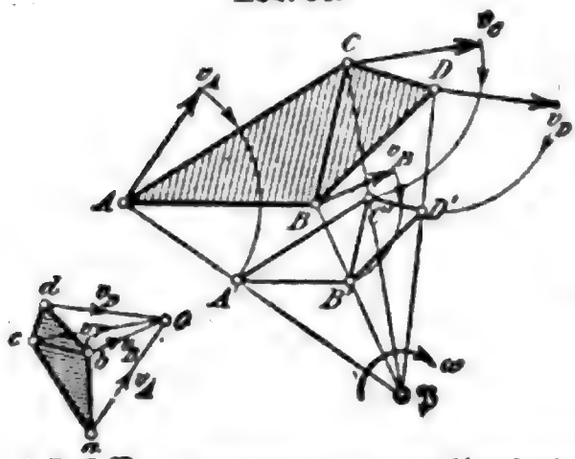
$$v_A = r_A \omega, \qquad v_B = r_B \omega, \qquad v_C = r_C \omega \ldots,$$

wo ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit um den Pol $\mathfrak{P}$ und $r_A, r_B, r_C \ldots$ die Längen der Polstrahlen $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$, $\mathfrak{P}C \ldots$ bedeuten.

Digitized by Google

Dreht man v_A, v_B, v_C... um die Punkte A, B, C... gleichsinnig um 90^0, bis sie in die Polstrahlen fallen, so bilden die Endpunkte A', B', C'... dieser Strecken (der **lotrechten Geschwindigkeiten**) eine der Figur A, B, C... ähnliche und ähnlich gelegene Figur mit dem Aehnlichkeitspunkte $\mathfrak{P}$. Es ist daher $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$...

Abb. 84.

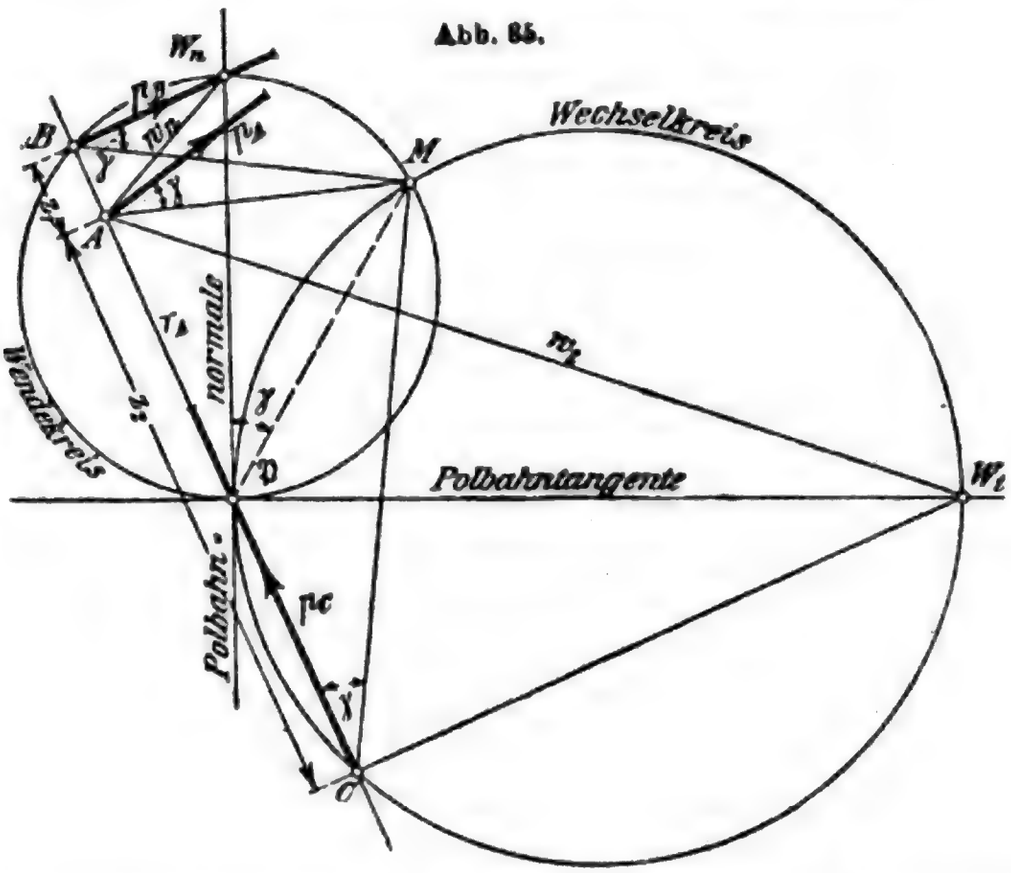


2. Uebersichtlicher ist ein besonderer **Geschwindigkeitsplan** (Abb. 84b): An einem Punkte 0 trägt man auf: $a0 \# v_A$, $b0 \# v_B$ usw.; $abcd$... ist ähnlich $ABCD$...; alle Strecken von $abcd$... sind gleichsinnig um 90^0 gegen die von $ABCD$... gedreht. Aehnlichkeitsverhältnis $ABCD.../abcd... = 1/\omega$.

3. Beschleunigungszustand.

1. Denkt man sich einen Punkt die Polbahn so durchlaufend, dafs er stets mit dem augenblicklichen Pol zusammenfällt, so nennt man seine Geschwindigkeit u die **Wechselgeschwindigkeit des Poles.**

Abb. 85.



2. **Beschleunigungsplan.** Die Beschleunigung des Systempunktes A (Abb. 85) ist (ε = augenblickliche Winkelbeschleunigung):

$$p_A = r_A \omega^2 + r_A \varepsilon + u \omega = q_A + u \omega,$$

wo

$$q_A = r_A \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = r_A \lambda.$$

Digitized by Google

Die Teilbeschleunigung q_A bildet mit r_A den Winkel γ, für den $\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon/\omega^2$ ist; die Teilbeschleunigung $u\omega$ fällt in die Polbahnnormale. Trägt man an einem Punkte $\mathfrak{p}$ (Abb. 86) auf: $\mathfrak{ap} \parallel r_A$ und $= q_A = r_A\lambda$, $\mathfrak{bp} \parallel r_B$ und $= q_B = r_B\lambda$ usw. und macht noch $\mathfrak{pm} = u\omega$, mit der Richtung der Polbahnnormale den Winkel γ einschliefsend, so ist: $\mathfrak{am} = p_A$, $\mathfrak{bm} = p_B$ usw.; und $\mathfrak{ab}\ldots\mathfrak{p}$ ähnlich und parallel gelegen zu $AB\ldots\mathfrak{P}$, Aehnlichkeitsverhältnis $\lambda/1$. Die wahren Richtungen von $p_A, p_B\ldots$ erhält man, wenn die Strecken $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bm}\ldots$ im gleichen Sinne um den Winkel γ gedreht werden.

Dem Punkte $\mathfrak{m}$ entspricht im bewegten System das **Beschleunigungszentrum** M, für das die Gesamtbeschleunigung Null ist.

Demnach gilt auch $p_A = a\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = a\lambda \quad (a = AM)$.

3. Alle Systempunkte, die augenblicklich **keine Normal (Zentripetal-) beschleunigung** haben, die also augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahn beschreiben (Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$), liegen auf dem **Wendekreise**, der die Polbahntangente im augenblicklichen Pol berührt (Abb. 85) und den Durchmesser $d_1 = u/\omega$ hat.

Der Schnittpunkt W_n der Polbahnnormalen mit dem Wendekreise heifst **Wendepol.**

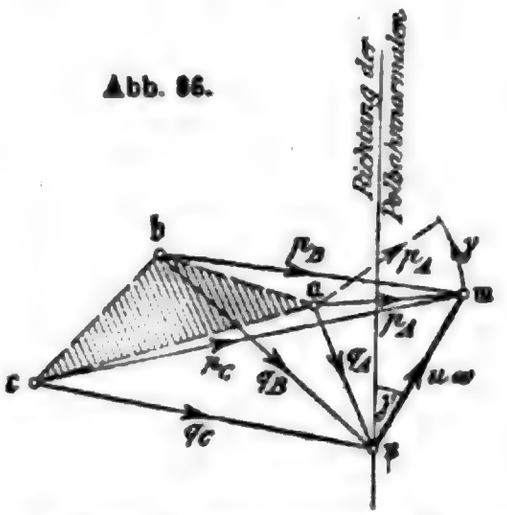


Abb. 86.

4. Alle Systempunkte, die augenblicklich **keine Tangentialbeschleunigung** haben, liegen auf dem **Wechselkreise**, der die Polbahnnormale im augenblicklichen Pol berührt (Abb. 85) und den Durchmesser $d_2 = u\omega/\varepsilon$ hat.

Der Schnittpunkt W_t der Polbahn mit dem Wechselkreise heifst **Wechselpol.**

4. Krümmungsverhältnisse.

1. **A** (Abb. 87) sei der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve α an der Stelle, die der Systempunkt A augenblicklich einnimmt. Dann ist **A** auch augenblicklicher Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahnen aller Systemkurven, die ihren augenblicklichen Krümmungsmittelpunkt in A haben. A und **A** heifsen ein Paar **zugeordneter Krümmungsmittelpunkte.**

2. Mit den Bezeichnungen der Abb. 87 folgt:

$$\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\varrho_A}\right)\sin\varphi_A = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d_1} = \text{konst}$$

(Euler-Savarysche Formel);

insbesondere ist auch: $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{\omega}{u} = \dfrac{1}{d_1}$,

wo r und ϱ die Krümmungshalbmesser von Polkurve und Polbahn und d_1 der Durchmesser des Wendekreises ist (oben unter 3.).

Digitized by Google

3. Aus der Euler-Savaryschen Formel folgen unmittelbar die beiden Bobillierschen Konstruktionen (Abb. 88).

α) Gegeben: 2 Paare zugeordneter Krümmungsmittelpunkte AA und BB. Gesucht: die Polbahntangente t.

Abb. 87.

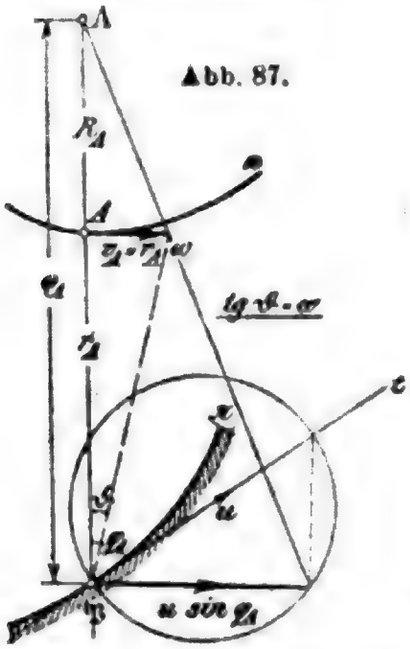
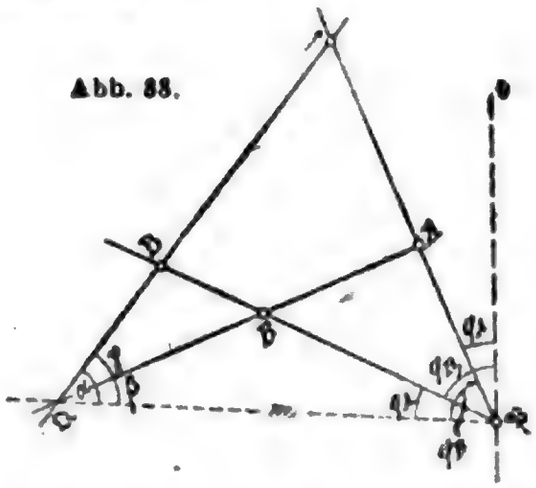


Abb. 88.



Auflösung: AA und BB schneiden sich im Pol $\mathfrak{P}$; ziehe AB und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bis zum Schnittpunkte in Ω; mache $\sphericalangle(A\mathfrak{P}, t)$ entgegengesetzt gleich $\sphericalangle B\mathfrak{P}\Omega$, so daß auch $(\sphericalangle B\mathfrak{P}, t) = \sphericalangle A\mathfrak{P}\Omega$ wird.

β) Gegeben: Die Polbahntangente t und ein Paar zugeordneter Krümmungsmittelpunkte A, $\mathfrak{A}$. Gesucht: zum Punkte B der zugehörige Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{B}$.

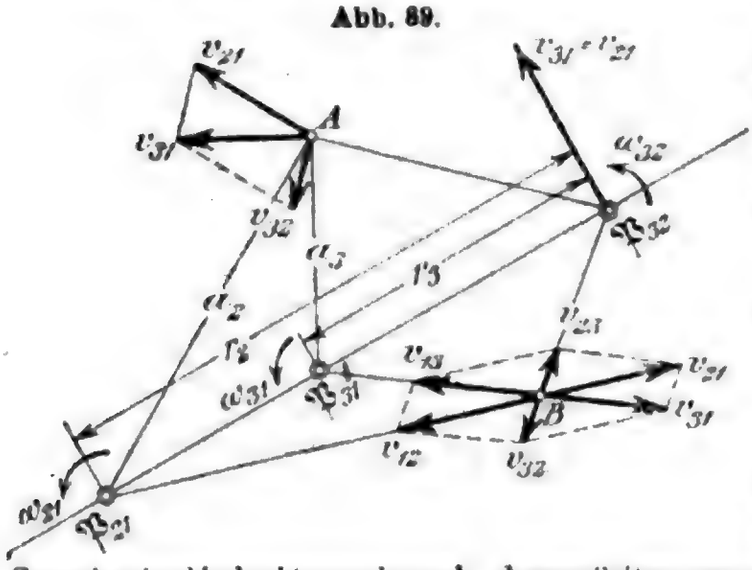
Auflösung: Mache $\sphericalangle B\mathfrak{P}\Omega$ entgegengesetzt gleich $\sphericalangle(A\mathfrak{P}, t)$; ziehe AB bis Ω. $\Omega\mathfrak{A}$ schneidet $\mathfrak{P}B$ in $\mathfrak{B}$.

5. Komplane Bewegung dreier Ebenen.

Satz der drei Pole:

Für jede unendlich kleine Bewegung der drei Ebenen S_1, S_2, S_3 liegen die drei augenblicklichen Pole $\mathfrak{P}_{21}$, $\mathfrak{P}_{31}$, $\mathfrak{P}_{32}$ auf einer Geraden (Abb. 89).

Abb. 89.



Für die Relativgeschwindigkeiten der drei in A zusammenfallenden Punkte von S_1, S_2, S_3 gilt, wenn ω_{21} und ω_{31} die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten für die Drehung von S_2 gegen S_1 bzw. von S_3 gegen S_1 bedeuten:

$$v_{21} = a_2\,\omega_{21}, \quad v_{31} = a_3\,\omega_{31},$$
$$v_{32} \nrightarrow v_{21} = v_{31};$$

insbesondere ist für P_{32}

$$v_{21} = v_{31} = r_3\,\omega_{31} = r_2\,\omega_{21},$$
$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}.$$

Trägt man an einem Punkte B alle sechs lotrechten Relativgeschwindigkeiten auf (S. 209 unter 2, 1), so bilden deren Endpunkte das Geschwindigkeitssechseck, dessen Seiten paarweise parallel den Polstrahlen sind.

6. Grundlehren der Stirnräderverzahnung.

1. Wichtigster Fall: Eine gleichförmige Drehung der Ebene S_1 (treibendes Rad) um den festen Punkt M_1 hat eine gleichförmige

Digitized by Google

Drehung der Ebene S_2 (getriebenes Rad) um den festen Punkt M_2 zur Folge; die Drehung wird durch die beiden sich berührenden Zahnprofile k_1 (an S_1) und k_2 (an S_2) übertragen (Abb. 90).

$$\text{Uebersetzungsverhältnis} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \text{konst.}$$

ω_1, ω_2 = Winkelgeschwindigkeiten, n_1, n_2 = Umdrehungszahlen.

2. Der augenblickliche Pol für die gegenseitige Bewegung von S_1 und S_2 fällt ständig mit dem festen Punkte $\mathfrak{P}$ auf der Zentrale $M_1 M_2 = a$ zusammen, für den gilt:

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2, \quad r_1 = a \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad r_2 = a \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \text{ (S. 205 unter 5a).}$$

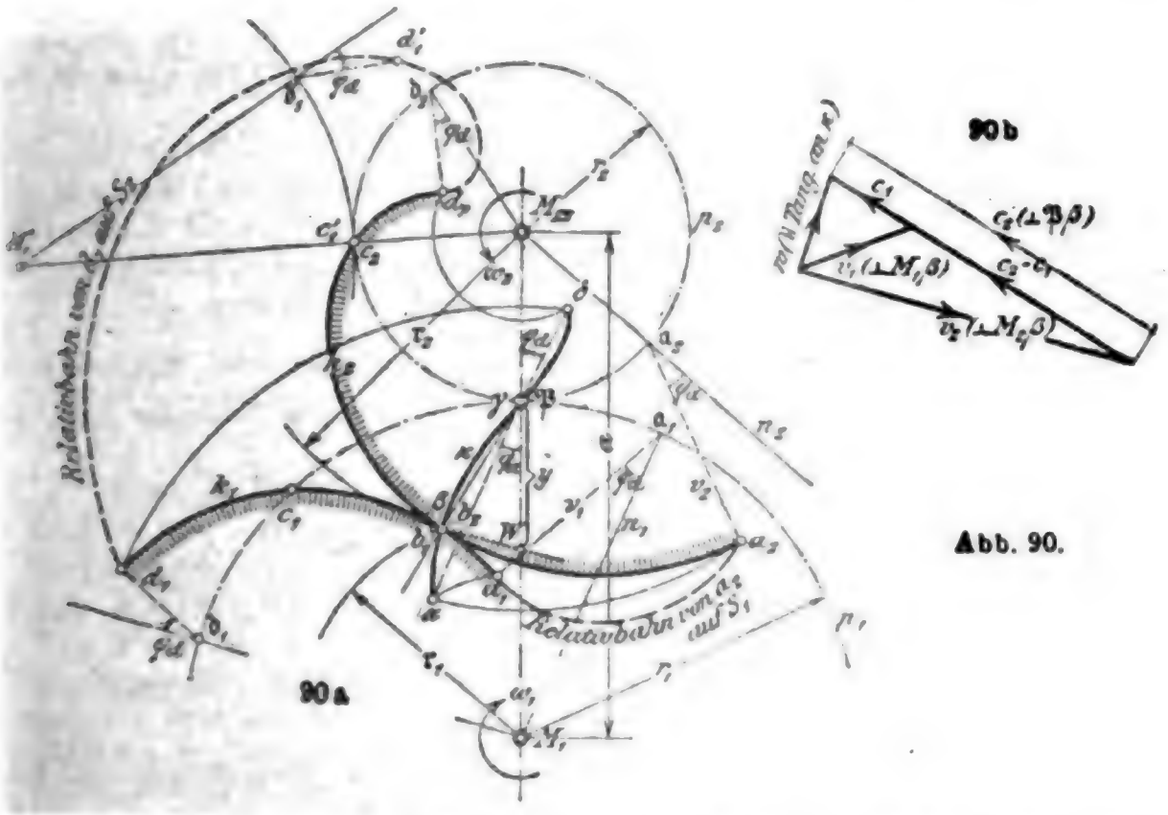


Abb. 90.

Die Rollkurven der Bewegung sind demnach die beiden Teilkreise p_1 und p_2 mit den Halbmessern r_1 und r_2 (im Zeitelement dt gleiten gleich grofse Bogenelemente $r_1 \omega_1 \cdot dt$ und $r_2 \omega_2 \cdot dt$ durch $\mathfrak{P}$ hindurch).

Relativbahnen. Alle Punkte von S_2 beschreiben auf S_1 Epizykloiden, entsprechend dem Abrollen der Polkurve p_2 auf der festen Polbahn p_1; umgekehrt beschreiben auch alle Punkte von S_1 auf S_2 Epizykloiden, entsprechend dem Abrollen der Polkurve p_1 auf der festen Polbahn p_2 (Abb. 92).

3. Zahnprofile; Eingriffslinie. k_1 und k_2 bilden ein zusammengehöriges Hüllbahnenpaar.

In jeder Lage geht demnach die gemeinschaftliche Normale im augenblicklichen Berührungspunkte von k_1 und k_2 durch den Pol $\mathfrak{P}$.

Digitized by Google

Alle Punkte der festen Zeichenebene Σ, mit denen der gemeinschaftliche Berührungspunkt von k_1 und k_2 im Laufe der Bewegung zusammenfällt, bilden die Eingrifflinie x.

An den Stellen α, β, γ, δ von x (Abb. 90) werden die Punktpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ gemeinschaftlicher Berührungspunkt von k_1 und k_2.

Gegeben: Profil k_1. Gesucht: Gegenprofil k_2 und Eingrifflinie x. Konstruktion für den beliebigen Punkt a_1 von k_1: die Profilnormale n_1 in a_1 schneidet die Polbahn p_1 in $\mathfrak{a}_1$; die Polbahnnormale n_1 in $\mathfrak{a}_1$ bildet mit n_1 den Winkel φa.

Mache auf der Polbahn p_2 Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{a}_2 =$ Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{a}_1$, trage in $\mathfrak{a}_2$ an die Polbahnnormale n_2 den Winkel φa in richtigem Sinne an und mache auf dem freien Schenkel $\mathfrak{a}_2 a_2 = \mathfrak{a}_1 a_1$.

Trage in $\mathfrak{P}$ an die gemeinschaftliche Polbahnnormale den Winkel φa in richtigem Sinne an und mache auf dem freien Schenkel $\mathfrak{P}\alpha = \mathfrak{a}_1 a_1$.

α ist auch Schnittpunkt der mit den Halbmessern $M_1 a_1$ und $M_2 a_2$ um M_1 bzw. M_2 geschlagenen Kreise.

Die Länge $\alpha\delta$ der Eingrifflinie heifst Eingriffstrecke, der zugehörige Teilkreisbogen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{d}_2$ Eingriffbogen; der auf den Teilkreisen gemessene Bogenabstand t zweier benachbarter Zahnprofile desselben Rades k_1, k_1', k_1'' ... bzw. k_2, k_2', k_2'' heifst Teilung, das Verhältnis Eingriffbogen/Teilung heifst Eingriffdauer.

Es gilt $t = \frac{2 r_1 \pi}{z_1} = \frac{2 r_2 \pi}{z_2}$, wo z_1 und z_2 die Zähnezahlen sind. Ehe das Profilpaar $k_1 k_2$ in δ aufser Eingriff kommt, mufs bei α ein neues Profilpaar $k_1' k_2'$ zum Eingriff gekommen sein, d. h. Eingriffdauer > 1.

4. Spezifisches Gleiten, Abnutzung. Sind $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die Drehhalbmesser des augenblicklichen Berührungspunktes von k_1 und k_2, und schreitet die Berührung im Zeitelement dt auf dem Profil k_1 um ds_1, auf dem Profil k_2 um ds_2 und auf der Eingrifflinie um $d\sigma$ fort, so gilt:

$$d\sigma = ds_1 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathfrak{r}_1 \omega_1 \cdot dt = ds_2 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \mathfrak{r}_2 \omega_2 \cdot dt \text{ oder}$$

$$w = c_1 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} v_1 = c_2 \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} v_2.$$

Die Absolutgeschwindigkeit w fällt in die Tangente der Eingrifflinie, die Drehgeschwindigkeiten v_1 und v_2 stehen senkrecht zu den Radien $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$, die Relativgeschwindigkeiten c_1 und c_2 fallen in die gemeinschaftliche Tangente von k_1 und k_2 (Abb. 90).

Die Verhältniszahlen:

$$\gamma_1 = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_1} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2} = \frac{c_2 - c_1}{c_2}$$

heifsen das spezifische Gleiten für das treibende bzw. das getriebene Rad.

Es gilt $c_1 : c_2 = \frac{r_1 - y}{r_1} : \frac{r_2 + y}{r_2}$, wo $y = \mathfrak{P}W$ die von der Normalen der Eingrifflinie auf der Zentrale abgeschnittene Strecke ist, positiv nach M_1 zu gerechnet.

Für die Abnutzung der beiden Räder an der augenblicklichen Berührungsstelle, kann, wenn man von der Veränderlichkeit des Reibungswiderstandes während dee Eingriffdauer absieht, gesetzt werden $A_1 : A_2 = a_1 n_1 \gamma_1 : a_2 n_2 \gamma_2$, wo a_1 und a_2 vom Baustoff und der Oberflächenbeschaffenheit der Zähne abhängige Zahlen sind.

Digitized by Google

5. Zykloidenverzahnung. Rollen die beiden Polbahnen p_1 und p_2 und eine Hülfskurve π (Wälzkurve) ohne zu gleiten so aufeinander ab, dafs der Punkt $\mathfrak{P}$ stets gemeinschaftlicher Berührungspunkt aller 3 Kurven ist, so beschreibt ein mit π starr verbundener Punkt K auf der Ebene S_1 die Relativbahn k_1, auf der Ebene S_2 die Relativbahn k_2 und auf der festen Ebene Σ die Absolutbahn x. — k_1 und k_2 sind zusammengehörige Zahnprofile, x die zugehörige Eingrifflinie. Vgl. im übrigen über Zahnräder 6. Abschnitt, Maschinenteile der drehenden Bewegung.

Bei der Zykloidenverzahnung werden als Wälzkurven zwei Kreise π' und π'' für den Eingriff vor bzw. hinter der Mittenlinie $M_1 M_2$ und der Erzeugungspunkt K auf der Peripherie von π' bzw. π'' gewählt.

Beim Abrollen drehen sich die Kreise π' und π'' um die festen Punkte M' und M''; die Profile k_1 und k_2 setzen sich aus den Hypozykloidenbogen k_1' und k_2'' (Zahnfüfse) und den Epizykloidenbogen k_1'' und k_2' (Zahnköpfe) zusammen; die Eingriffstrecke besteht aus den beiden Bogen x' und x'' der Wälzkreise.

6. Evolventenverzahnung. Rollt eine durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehende Gerade π auf den mit den Teilkreisen p_1 und p_2 starr verbundenen Grundkreisen p_1' und p_2' ohne zu gleiten ab, so beschreibt ein beliebiger Punkt K von π auf der Ebene S_1 die Relativbahn k_1, auf der Ebene S_2 die Relativbahn k_2 und auf der festen Ebene Σ die mit π sich deckende Gerade x. — k_1 und k_2 sind zusammengehörige Zahnprofile, x die zugehörige Eingrifflinie. Vgl. im übrigen über Zahnräder 6. Abschnitt, Maschinenteile der drehenden Bewegung.

k_1 und k_2 sind Bogen von Kreisevolventen (Mathematik S. 107), die einerseits durch die Kopfkreise, anderseits durch die Grundkreise begrenzt werden; die Ausbildung der Zahnfüfse innerhalb der Grundkreise ist beliebig, wenn nur der Raum für die Relativbahn der Kopfkanten freigelassen wird (S. 213 unter 2).

Die Gestalt der Evolventen ist nur abhängig von der Gröfse der Grundkreise, nicht von dem Abstande ihrer Mittelpunkte, d. h. solange die Eingriffdauer > 1:

Der Eingriff zweier Evolventenräder bleibt richtig, wenn der Achsenabstand geändert wird.

7. Triebstockverzahnung. Sind k_1 und k_2 zwei zusammengehörige Zahnprofile, so sind es auch ihre mit demselben Abstande c gezeichneten Aequidistanten k_1' und k_2'.

Bei der Triebstockverzahnung schrumpft k_2 auf einen Punkt zusammen, k_2' wird ein Kreis mit dem Halbmesser c; k_1 ist die Relativbahn von k_2 auf der Ebene S_1, k_1' deren Aequidistante mit dem Abstande c. Vgl. im übrigen über Zahnräder 6. Abschnitt, Maschinenteile der drehenden Bewegung.

Die Eingriffkurve x ist eine Kreiskonchoide mit dem Punkte $\mathfrak{P}$ als Pol und dem von k_2 beschriebenen Kreise als Leitkurve (Mathematik S. 112).

Digitized by Google

V. Dynamik 2.

A. Kraftfelder, Potential.

Vorbemerkung.

1. In der Potentialtheorie bezeichnet man häufig die Vektorgrößen wie in der Vektoranalysis durch deutsche Buchstaben; insbesondere die Einheitsvektoren auf der x-, y- und z-Achse mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Ein Vektor mit dem Komponenten a_x, a_y, a_z wird dann geschrieben

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}$$

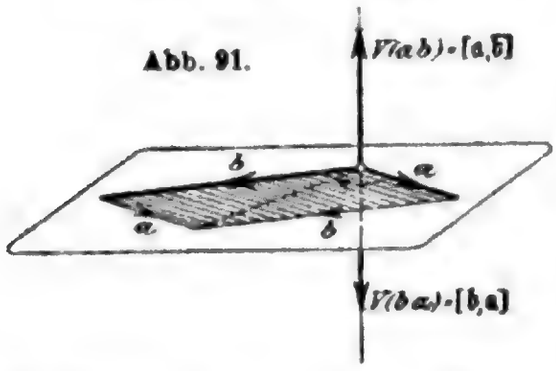
(gleichbedeutend mit der Schreibweise $a = a_x \twoheadrightarrow a_y \twoheadrightarrow a_z$ nach S. 140).

2. **Skalares Produkt** der beiden Vektoren a und b, abgekürzt $\mathbf{S}(ab)$, oder in Vektorschreibweise $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ heißt die Größe

$$ab \cos(a, b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Beispiele: Die Arbeit $= \mathbf{S}(P \cdot ds)$, die Leistung $= \mathbf{S}(Pv)$.

Abb. 91.



3. **Vektorprodukt** der beiden Vektoren a und b, abgekürzt $\mathbf{V}(ab)$, oder in Vektorschreibweise $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ heißt der Vektor von der Größe

$$ab \sin(a, b),$$

der auf der Ebene a, b senkrecht steht und in den Halbraum hineinweist, von dem aus gesehen eine Drehung im Uhrzeigersinne den ersten Vektor a auf kürzestem Wege in die Richtung des zweiten Vektors b bringt (Abb. 91).

Die Größe des Vektorproduktes ist gleich dem Flächeninhalt des von a und b gebildeten Parallelogramms.

Die Komponenten des Vektorproduktes sind:

$$V_x(ab) = a_y b_z - a_z b_y$$
$$V_y(ab) = a_z b_x - a_x b_z \quad \text{so daß:} \quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$V_z(ab) = a_x b_y - a_y b_x$$

(Determinante s. S. 49).

Bei Umstellung von a und b ändert das Vektorprodukt die Richtung um 180^0 (das Vorzeichen)

$$\mathbf{V}(ba) = \twoheadrightarrow \mathbf{V}(ab) \quad \text{oder} \quad [\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\mathfrak{b}].$$

Beispiel: Moment der Kraft P in bezug auf den Punkt O (Abb. 14, S. 157) $\dot{M} = \mathbf{V}(\rho P)$. (Beim Rechtskoordinatensystem ist die Drehung gegen den Uhrzeiger zu nehmen, S. 141.)

a. Feldstärke, Kraftfluß, Divergenz.

1. Ein Raumgebiet ist ein unveränderliches mechanisches **Kraftfeld**, wenn an jeder Stelle des Gebietes die Kräfte P_1, P_2 ..., die verschiedene nach dorthin gebrachte Massenpunkte **(Aufpunkte)** m_1, m_2 ... erfahren, gleichgerichtet und den Massen m_1, m_2 ... proportional sind.

Die auf die Masseneinheit bezogene Feldkraft $p = \frac{P_1}{m_1} = \frac{P_2}{m_2} = \ldots$ heißt die **Stärke** oder **Intensität des Feldes** an der betrachteten Stelle.

Digitized by Google

Sie ist ein mit dem Ort im allgemeinen stetig veränderlicher Vektor. Hängt die Feldstärke auch von der Zeit ab, so ist das Kraftfeld veränderlich. — Die Dimension der Feldstärke stimmt mit der der Beschleunigung überein.

2. Eine durch das Kraftfeld derart gezogene Linie, daſs ihre Richtung (Tangente) in jedem Punkte mit der Richtung der dort herrschenden Kraft übereinstimmt, heiſst **Kraft-** oder **Feldlinie.**

Eine Fläche, die in jedem Punkte senkrecht steht zur dort herrschenden Kraft, heiſst **Niveaufläche.**

3. Unter dem **Kraftfluſs** durch das Flächenelement df in Richtung der mit einem Pfeil versehenen Flächennormale n versteht man die skalare Gröſse:

$$dw = p\cos(n,p)\cdot df = p_x\cdot df_x + p_y\cdot df_y + p_z\cdot df_z = (\mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{f});$$

(df_x, df_y, df_z = Projektion von df auf die yz-, zx-, xy-Ebene).

Das Flächenelement df ist hiernach als eine Vektorgröſse aufzufassen, die in einem bestimmten Maſsstabe nach Richtung des Pfeilsinnes auf der Flächennormale aufzutragen ist; dadurch wird zugleich dem Flächenelement ein bestimmter Umlaufsinn zugeordnet — gegen die Pfeilspitze der Normale gesehen im Uhrzeigersinne drehend (S. 141, unter 8). — Bei geschlossenen Flächen nimmt man den Pfeil der Normale nach aufsen weisend.

4. Der Kraftfluſs durch die im Abstande x vom Nullpunkte gelegene Seitenfläche $dy\cdot dz$ des Raumelementes $dv = dx\cdot dy\cdot dz$ beträgt $dw = -p_x\cdot dy\cdot dz$; durch die parallele, im Abstande $x+dx$ gelegene Seitenfläche $dy\cdot dz$ ist der Kraftfluſs $dw' = \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x}\cdot dx\right)\cdot dy\cdot dz$; die algebraische Summe der Kraftflüsse durch die geschlossene Oberfläche des Raumelementes, bezogen auf die Volumeinheit, ist also:

$$\frac{\Sigma dw}{dv} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \operatorname{div}\mathfrak{p}.^*)$$

Je nachdem $\operatorname{div}\mathfrak{p}$ positiv oder negativ ist, heiſst die Stelle xyz eine **Quelle** oder eine **Senke** des Kraftfeldes. — Die Divergenz ist wie der Kraftfluſs eine skalare Gröſse.

Für ein endliches Raumstück v mit geschlossener Oberfläche f gilt demnach:

$$\int_f p\cos(n,p)\cdot df = \int_v \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right)\cdot dv \quad \text{oder}$$

$$\int_f (\mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{f}) = \int_v \operatorname{div}\mathfrak{p}\cdot dv \quad (\textbf{Gauſs}\text{scher Satz}).$$

b. Potential, Gradient, Rotor.

1. Sind die Seitenkräfte X, Y, Z der am Massenpunkte m wirkenden Feldkraft $P = m\mathfrak{p}$ die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $U = F(x,y,z)$ nach den drei Koordinatenrichtungen, gilt also:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

so heiſst die Funktion U die zum Kraftfelde gehörige **Kräftefunktion** oder **Potentialfunktion.**

*) Lies: Divergenz $\mathfrak{p}$.

Digitized by Google

Bei einer beliebigen Bewegung des Aufpunktes m ist die von der Feldkraft geleistete Arbeit, also auch die Zunahme der lebendigen Kraft:

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = A = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

$$= \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz \right) = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0$$

d. h. unabhängig von der Form des Weges.

2. Insbesondere ist für einen geschlossenen Weg $A = 0$, d. h. die lebendige Kraft bzw. Geschwindigkeit nimmt beim Wiedereintreffen im Ausgangspunkte wieder ihren Anfangswert an (Prinzip der **Erhaltung** der lebendigen Kraft).

3. Bei einer Verschiebung des Massenpunktes innerhalb einer Niveaufläche wird keine Arbeit geleistet (Wegrichtung stets senkrecht zur Kraftrichtung), d. h. die Niveauflächen sind gleichzeitig **Aequipotentialflächen.** — $U = F(x, y, z) = U_0 =$ konst ist die Gleichung der durch U_0 bestimmten Niveaufläche.

4. Wirken auf einen Punkt mehrere Kraftfelder 1, 2 ... ein, deren jedes eine Kräftefunktion U_1, U_2 ... hat, so ist die Kräftefunktion für das resultierende Feld $U = U_1 + U_2 + \ldots$

5. $\Pi = -U$ und $\Pi_0 = -U_0$ heifsen die **potentielle Energie** (Energie der Lage) des Massenpunktes in der Lage x, y, z bzw. x_0, y_0, z_0; damit folgt:

$$m\frac{v^2}{2} + \Pi = m\frac{v_0^2}{2} + \Pi_0 = \text{konst.}$$

Die Summe der kinetischen und potentiellen Energie eines Massenpunktes heifst (mechanische) **Gesamtenergie** oder **Arbeitsvermögen** des Punktes.

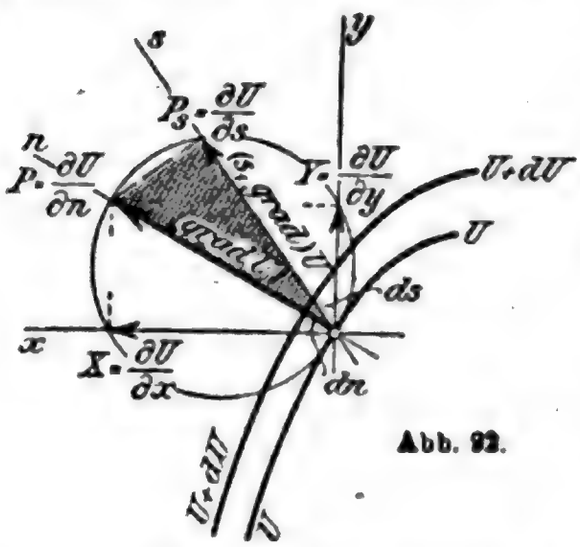


Abb. 92.

Es gilt demnach:

Gehört zu einem Kraftfelde eine Potentialfunktion, so ist die Gesamtenergie eines im Felde sich bewegenden Massenpunktes an jeder Stelle dieselbe.

6. Für die in der beliebigen Richtung s genommene Seitenkraft P_s der Feldkraft P gilt ebenso wie für die x-, y- und z-Richtung $P_s = \frac{\partial U}{\partial s}$, d. i. gleich der Steigung der Potentialfunktion in Richtung s (Steigung = Zunahme bezogen auf die Längeneinheit) (Abb. 92).

Für den Differentialquotienten von $U = F(x, y, z)$ nach der Richtung s gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(s, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(s, z).$$

Digitized by Google

Die Feldkraft selbst ist $P = \frac{\partial U}{\partial n}$ senkrecht zur Fläche $U =$ konst, also der **Gradient** von U an der Stelle $x\,y\,z$, d. i. der Vektor, der nach Gröfse und Richtung die gröfste Steigung der skalaren Ortsfunktion $U = F(x, y, z)$ darstellt. In Vektorschreibweise:

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathfrak{k} = \operatorname{grad} U.$$

In Vektorschreibweise ist für die beliebige Richtung s (Einheitsvektor s_1, Wegelement ds):

Feldkraftkomponente $\quad \mathfrak{P}_s = (s_1 \operatorname{grad})\, U$

Zuwachs d. Potentialfunkt. $\quad d_s U = (ds \operatorname{grad})\, U.$

7. Die Bedingungen für das Bestehen der Potentialfunktion sind $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\text{ usw.}\right)$:

$$r_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad r_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

$$r_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

r_x, r_y, r_z sind die Komponenten des **Wirbelvektors** oder **Rotors** der Feldkraft an der Stelle $x\,y\,z$; in Vektorschreibweise:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{P}^{*}) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathfrak{k}.$$

Für die Gröfse der Wirbelkomponente in der x-Richtung gilt: $r_x = dA_x/df_x$, wo dA_x die Arbeit ist, die die Feldkraft leistet beim Umfahren eines senkrecht zur x-Achse gelegenen unendlich kleinen Rechtecks $df_x = dy\;dz$ mit dem Mittelpunkte x, y, z; der Pfeil von r_x ist so aufzutragen, dafs die eine positive Arbeitsleistung liefernde Umlaufrichtung des Flächenelementes df_x gegen die Pfeilspitze gesehen im Uhrzeigersinne erscheint. Verfährt man in gleicher Weise für alle durch den Punkt x, y, z gehenden Achsen, wobei auf die Form des senkrecht zur Achsenrichtung gelegenen Flächenelementes nichts ankommt, so ist der gröfste der erhaltenen Werte der Rotor selbst.

Für ein endliches Flächenstück f mit geschlossener Randkurve l ist:

$$\int^{f}(\operatorname{rot}\mathfrak{P}\cdot d\mathfrak{f}) = \int^{l}(\mathfrak{P}\cdot d\mathfrak{l})$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise:

$$\int^{f}(r_x\cdot df_x + r_y\cdot df_y + r_z\cdot df_z) = \int^{l}(X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz)$$

(**Stokes**scher Satz)

c. Besondere Kraftfelder. Massenanziehung.

1. Ein Kraftfeld heifst **homogen**, wenn die Feldstärke an allen Punkten gleich grofs und gleich gerichtet ist.

Auf einem beliebigen Wege zwischen den parallelen Niveauebenen F_1, F_2 (Abstand a) leistet die Feldkraft $P = mp$ die Arbeit:

$$A = P\,a = mp\,a.$$

*) Auch curl $\mathfrak{P}$ oder Quirl $\mathfrak{P}$.

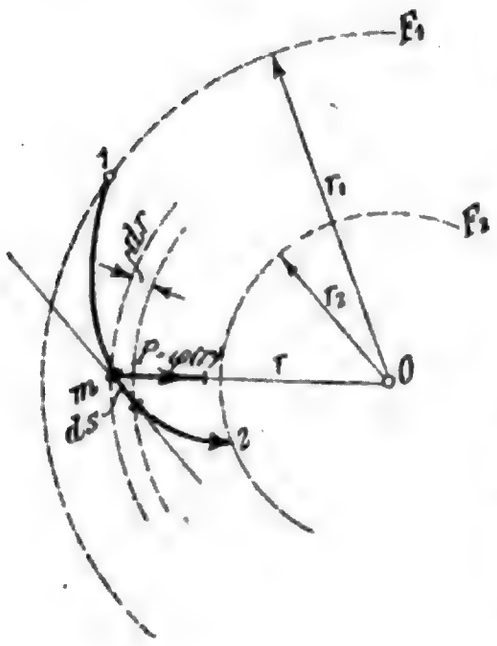
Digitized by Google

Dieselbe Arbeit mufs von einer Kraft geleistet werden, die den Massenpunkt m entgegen der Kraft des Feldes von F_2 nach F_1 bringt.

Z. B. das Schwerkraftfeld der Erde; Feldstärke $g = 9{,}81$ m/sk².

2. Ein Kraftfeld heifst **Zentralkraftfeld mit dem Zentrum O,** wenn die Richtung der auf den Massenpunkt m ausgeübten Kraft in jedem Punkte des Feldes durch O hindurchgeht und ihre Gröfse lediglich eine Funktion der jeweiligen Entfernung $Om = r$ ist.

Abb. 93.



Auf dem beliebigen Wege 1, 2 (Abb. 93) zwischen den Kugelflächen F_1, F_2 (Halbmesser r_1, r_2) leistet die Feldkraft $P = \varphi(r)$ die Arbeit:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\, dr = \Phi(r_2) - \Phi(r_1).$$

3. Ein solches Kraftfeld wird bestimmt durch das **Newtonsche Gravitationsgesetz, Gesetz der allgemeinen Schwere.**

Je zwei Massenteilchen verhalten sich so, als ob sie sich mit einer Kraft P anzögen, proportional den Massen m_1, m_2 und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes r.

$$P = k\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}.$$

Die Schwerkraft ist ein Sonderfall der allgemeinen Massenanziehung.

Die Gravitationskonstante k, d. i. die Kraft, mit der sich zwei im Abstande 1 cm voneinander befindliche Gramm-Stücke (S. 149) anziehen, ist rd. der 15 millionte Teil eines Milligramms.

4. Für das **Gravitationskraftfeld** um ein Anziehungszentrum O von der Masse M, Masse des Aufpunktes m, gilt (oben unter 2.):

$$A = U - U_0 = k\,m\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), \qquad V = U - U_\infty = k\,m\,M\,\frac{1}{r}.$$

V heifst das **Newtonsche Potential** der Masse m im Punkte r und ist gleich der Arbeit, die von der Anziehungskraft geleistet wird, wenn m aus unendlicher Ferne auf beliebigem Wege nach r gelangt, oder **die Arbeit, die aufgewendet werden mufs, um m von r aus gegen die Anziehungskraft des Feldes in die unendliche Ferne zu bringen.**

Uebt an Stelle des Punktes O ein ausgedehnter Körper die anziehenden Kräfte auf den Massenpunkt m aus, so wird das Potential $V = km\int \frac{dM}{r}$.

Für eine Kugel vom Halbmesser R und dem spez. Gewicht γ $\left(M = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\gamma}{g}\right)$ ist in einem äufseren Punkte ($r > R$) das Potential der Masse m.

$$V_a = k\,m \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{r} = k\,m\,M\,\frac{1}{r},$$

in einem inneren Punkte ($r < R$)

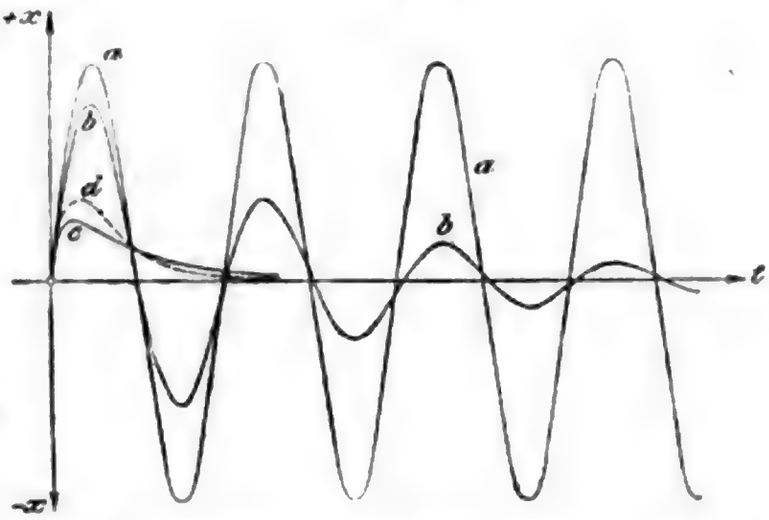
$$V_i = k\,m\,2\pi\,\frac{\gamma}{g}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Digitized by Google

B. Geradlinige Schwingungen.

1. Freie ungedämpfte (harmonische) Schwingung (S. 146, Abb. 8). Dem in Ruhe befindlichen Punkte von der Masse m werde zur Zeit $t=0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilt; eine Kraft proportional dem Ausschlage x sei bestrebt, den Punkt in die Anfangslage ($x=0$) zurückzuführen.

Abb. 94.



Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$x = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t,$$

das sich unter den vorliegenden Anfangsbedingungen vereinfacht in

$$x = \frac{v_0}{\alpha}\sin\alpha t, \qquad v = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha t,$$

größter Ausschlag (**Amplitude**) $\quad a = \frac{v_0}{\alpha}$,

Dauer einer vollen Schwingung $\quad T = \frac{2\pi}{\alpha}$,

Schwingungszahl (Periodenzahl, **Frequenz**) $\quad n = \frac{\alpha}{2\pi}$,

$$x = a\sin\alpha t = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = a\sin(2\pi n t).$$ Abb. 94, Kurve a.

2. Freie gedämpfte Schwingung. Außer der rückführenden Kraft $-kx$ wirke noch ein der jeweiligen Geschwindigkeit proportionaler Widerstand; die Bewegungsgleichung wird dann:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}; \qquad c = \text{Dämpfungsfaktor.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0; \qquad \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{c}{2m}.$$

Das allgemeine Integral ist:

$$x = Ae^{u_1 t} + Be^{u_2 t},$$

wo u_1 und u_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$u^2 + 2\beta u + \alpha^2 = 0,$$

also:

$$\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right\} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Digitized by Google

a) Dämpfung schwach; $\beta < \alpha$, d. h. $c^2 < 4km$.

Mit $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ folgt:

$$x = \frac{v_0}{\gamma} e^{-\beta t} \sin \gamma t = a e^{-\beta t} \sin \gamma t,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = a e^{-\beta t} (\gamma \cos \gamma t - \beta \sin \gamma t).$$

Schwingung mit allmählich abnehmender Schwingungsweite (Amplitude) (Abb. 94, S. 221, Kurve *b*).

Die erste Amplitude ist: $a_1 = a \frac{\gamma}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\gamma} \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\beta}}$, die zugehörige Zeit folgt aus: $\operatorname{tg} \alpha t_1 = \frac{\gamma}{\beta}$.

Die gleichbleibende Schwingungsdauer (Zeit zwischen zwei gleichsinnigen Durchgängen durch die Nullage oder zwischen zwei gleichsinnigen Amplituden) beträgt $T = \frac{2\pi}{\gamma}$ und ist um so gröfser, je stärker die Dämpfung ist.

Die Amplituden nehmen nach einer geometrischen Reihe ab; für zwei aufeinanderfolgende Schwingungsweiten — zwischen denen eine halbe Schwingungsdauer liegt — gilt $\frac{a_i}{a_{i+1}} = e^{\pi \frac{\beta}{\gamma}}$;

$$\lambda = \lg a_i - \lg a_{i+1} = \pi \frac{\beta}{\gamma} = \textbf{logarithmisches Dekrement.}$$

b) Dämpfung stark; $\beta > \alpha$, d. h. $c^2 > 4km$.

Mit $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ folgt:

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\beta t} \left(e^{+\gamma t} - e^{-\gamma t} \right),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\beta t} \left[(\beta + \gamma) e^{-\gamma t} - (\beta - \gamma) e^{+\gamma t} \right].$$

Aperiodische Bewegung (Abb. 94, S. 221, Kurve *c*).

Der gröfste Ausschlag ist: $a_1 = \frac{v_0}{\alpha} \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \right)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$,

die zugehörige Zeit folgt aus: $2\gamma t_1 = \lg \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma}$.

c) Grenzfall; $\beta = \alpha$, d. h. $c^2 = 4km$.

$$x = v_0 t e^{-\beta t}, \quad v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\beta t} (1 - \beta t).$$

Bewegung ebenfalls aperiodisch (Abb. 94, S. 221, Kurve *d*).

Gröfster Ausschlag: $a_1 = \frac{v_0}{\beta e}$; zur Zeit: $t_1 = \frac{1}{\beta}$.

Digitized by Google

3. Erzwungene Schwingung. α) Auf den Massenpunkt wirke aufser der rückführenden Kraft kx und dem Dämpfungswiderstande $c\frac{dx}{dt}$ noch eine mit der Zeit periodisch veränderliche Kraft $Q\sin\omega t$, die erregende Schwingung.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\alpha^2x=q\sin\omega t;\qquad \alpha=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \beta=\frac{c}{2m},\quad q=\frac{Q}{m}.$$

Es folgt $x=x_1+x_2$.

x_1 ist die zu α und β gehörige gedämpfte freie Schwingung (a, 2); diese Eigenschwingung des Massenpunktes klingt infolge der Dämpfung allmählich ab, und es bleibt die erzwungene Schwingung:

$$x_2=A\sin(\omega t-\varphi)$$

mit der gleichen Schwingungsdauer wie die Erregerschwingung. Es gilt

$$\text{für die Amplitude: } A=\frac{q}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},$$

$$\text{für die Phasenverschiebung: } \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega}{\alpha^2-\omega^2}.$$

$\omega=\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}$ liefert $A_{max}=\frac{q}{2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2}$;

bei fehlender Dämpfung, d. h. $\beta=0$, wird $A_{max}=\infty$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$ für $\omega=\alpha$, d. h. wenn die Schwingungsdauer der Erregerschwingung mit der der Eigenschwingung übereinstimmt (a, 1). — **Resonanz.**

Ist keine Dämpfung vorhanden, so bleibt die Eigenschwingung neben der erzwungenen Schwingung dauernd bestehen (Interferenzerscheinungen, Schwebungen).

β. Ist die Erregerschwingung $y=f(t)$ zeichnerisch durch einen periodischen Kurvenzug gegeben (Dauer einer Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$), so ist sie behufs weiterer Verwertung in eine Fouriersche Reihe zu verwandeln (s. S. 124 u. f.).

C. Relativbewegung bei Drehung des Bezugs-Systems.

1. Das Fahrzeug erfährt eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung ε um die feste Achse O. Es gilt, wenn r den augenblicklichen Abstand des bewegten Punktes m von O bedeutet:

$v=\mathfrak{v}+\!\!\rightarrow u,\qquad p=\mathfrak{p}+\!\!\rightarrow f+\!\!\rightarrow s,$
$\mathfrak{v}=v-\!\!\rightarrow u,\qquad \mathfrak{p}=p-\!\!\rightarrow f+\!\!\rightarrow c,$
v bzw. $\mathfrak{v}$ = Absolut- bzw. Relativ-Geschwindigkeit,
p „ $\mathfrak{p}$ = „ „ „ -Beschleunigung,
$u=r\omega$ = Geschwindigkeit
$f=r\varepsilon+\!\!\rightarrow r\omega^2$ = Beschleunigung
} des Fahrzeugpunktes, der augenblicklich mit dem Punkte m zusammenfällt.

Digitized by Google

Die Zusatzbeschleunigung der Absolutbewegung s ist entgegengesetzt gleich der **Coriolisbeschleunigung** c und liegt in der durch m gehenden zur Drehachse normalen Ebene E; Richtung und Pfeilsinn von s werden erhalten, wenn man die Projektion v' von v auf E im Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω um 90^0 dreht; s setzt sich aus zwei gleich grofsen und gleichgerichteten Teilen $v'\omega$ zusammen; der erste Teil rührt von der Drehung (Richtungsänderung) der Geschwindigkeitskomponente v', der zweite von der Veränderung des Drehhalbmessers r her. Bezeichnet α den Winkel zwischen Relativgeschwindigkeit v und Drehachse, so gilt: $|s| = |c| = 2\,v\,\omega \sin\alpha$ oder nach Gröfse und Richtung: $c = 2\,V(v\omega)$ (in dieser Reihenfolge!, ω = Drehvektor, S. 203, Vektorprodukt S. 216).

In Abb. 95 ist eine geradlinig gleichförmige Relativbewegung ($\mathfrak{p} = 0$) in der Zeichenebene und eine gleichförmige Fahrzeugdrehung ($s = 0$) um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse angenommen ($\alpha = 90^0$, $v' = v$); die Absolutbeschleunigung reduziert sich auf die Zentripetalbeschleunigung $r\omega^2$ und die entgegengesetzte Coriolisbeschleunigung $2v\omega$.

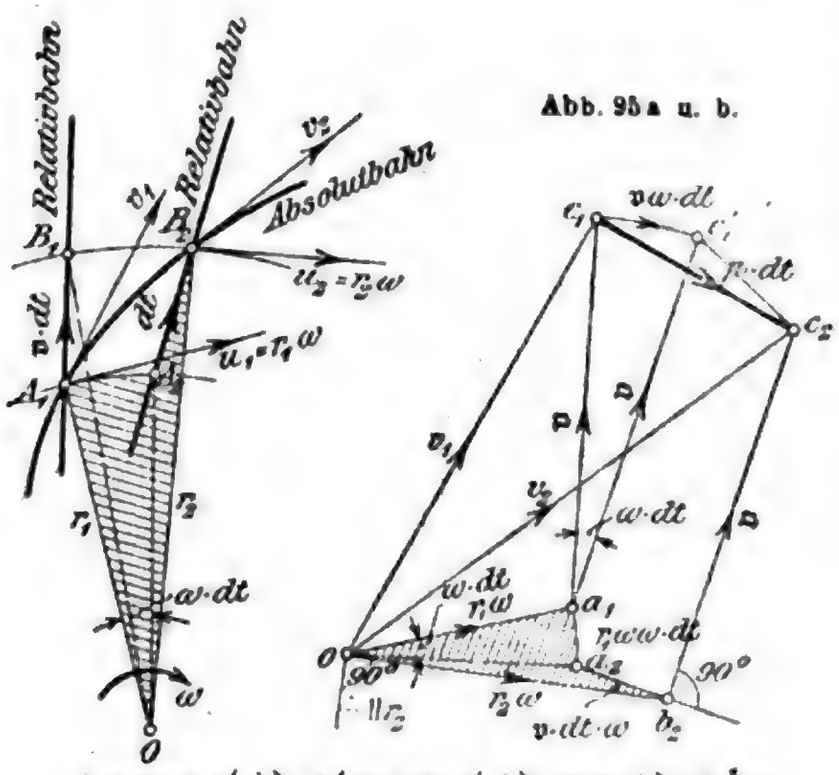


Abb. 95a u. b.

$$c_1 c_2 = c_1 c_1' + c_1' c_2 = c_1 c_1' + a_1 a_2 + a_2 b_2;$$
$$\mathfrak{p} = 2\,v\,\omega + r_1\,\omega^2.$$

2. Für die Kräfte gilt, wenn m die Masse des bewegten Punktes ist

$$P = \mathfrak{P} + F + Z = m\frac{dv}{dt},$$

$$\mathfrak{P} = P - F + C = m\frac{dv}{dt}.$$

$\mathfrak{P} = m\mathfrak{p}$ ist die Kraft einer der Relativbewegung gleichen freien Bewegung im ruhenden Raume (Relativkraft); $F = mf$ ist die der örtlichen Fahrzeugbewegung entsprechende Kraft für eine Masse m (Führungskraft); $Z = ms$ ist die Zusatzkraft der Absolutbewegung, $C = mc$ die Corioliskraft.

P bedeutet die gesamte am Punkte tatsächlich wirkende Kraft. Bei der unfreien Bewegung längs einer am Fahrzeug befestigten Führungslinie (z. B. Laufradkanal einer Turbine oder Zentrifugalpumpe) ist statt P zu schreiben $P + Q$, wo Q die von der Führungslinie auf den Punkt m übertragene Zwangskraft ist.

$-F = F$ und C heifsen auch erste und zweite Zusatzkraft der Relativbewegung.

Digitized by Google

D. Dynamik des Punkthaufens.

a. Allgemeine Sätze.

1. D'Alembertsches Prinzip.

α) Die Mittelkraft der am i^{ten} Punkte der Gruppe mit der Masse m_i wirkenden äufseren Kräfte sei P_i, die innere, von den übrigen Punkten der Gruppe herrührende Kraft heifse S_i. Dann ist die Mittelkraft von P_i und S_i die **Beschleunigungs-** oder **Effektivkraft** E_i, die sich auch aus der am Punkte m_i zu beobachtenden Beschleunigung e_i ergibt zu: $E_i = m_i e_i$.

An der Massenpunktgruppe als Ganzem heben sich die inneren Kräfte S_i heraus; es folgt:

Die resultierende Einzelkraft **E** und das resultierende Moment $\dot{M}$ (**E**) der Beschleunigungskräfte stimmen für jeden Bezugspunkt überein mit der resultierenden Einzelkraft **P** und dem resultierenden Moment $\dot{\mathbf{M}}$ der äufseren angreifenden Kräfte.

Denkt man sich am Punkte m_i den **Trägheitswiderstand** T_i gleich E_i, aber entgegengesetzt gerichtet (S. 149), hinzu, so stehen P_i, S_i und T_i im Gleichgewicht.

Für die Massenpunktgruppe als Ganzes gilt also:

Die äufseren Kräfte P und die Trägheitswiderstände T aller Punkte der Gruppe sind im Gleichgewicht.

β) Bei einer erzwungenen (unfreien) Bewegung sind die Zwangskräfte (Bahnwiderstände) den äufseren Kräften hinzuzurechnen (vgl. unfreie Bewegung, S. 187).

γ) Zerlegt man den Punkthaufen durch einen Schnitt in zwei Teile, so sind die inneren Kräfte an den Schnittstellen den äufseren Kräften für die beiden Teile zuzufügen (S. 171), d. h. für jeden Teil gilt:

Die äufseren Kräfte, die inneren Kräfte an der Schnittstelle und die Trägheitswiderstände sind im Gleichgewicht.

Anwendung: Festigkeitsberechnungen bewegter Maschinenteile.

2. Impuls- und Flächensätze.

α) Für den einzelnen Massenpunkt.

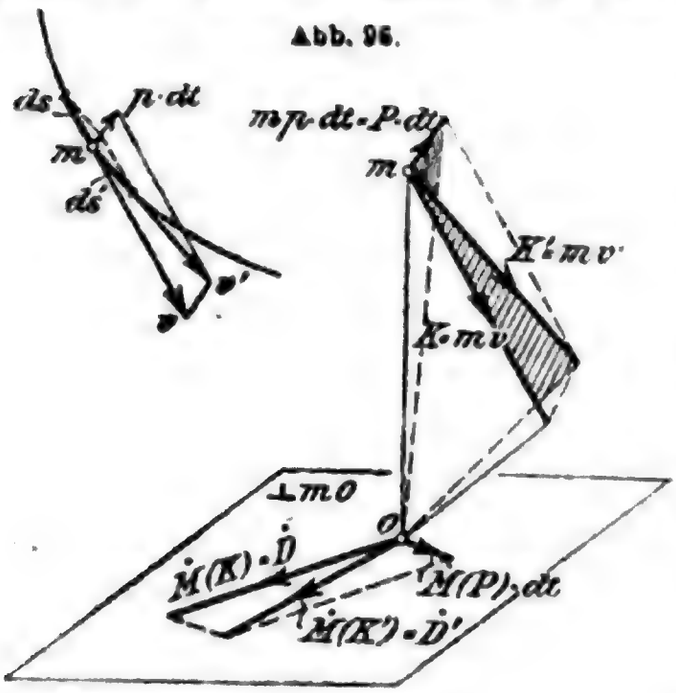
1. Der mit der Geschwindigkeit gleichgerichtete Vektor $K = m v$ heifst der augenblickliche Impuls (oder Bewegungsgröfse); der Vektor des Impulsmomentes $\dot{D} = \dot{M}(K) = \dot{M}(m v)$ heifst auch der augenblickliche Drall des Massenpunktes (Bezugspunkt O, Abb. 96, S. 226).

Der Impuls kann aufgefafst werden als diejenige **Stofskraft** (S. 240), die den Massenpunkt in seiner augenblicklichen Lage aus der Ruhe momentan auf die Geschwindigkeit v bringen würde.

Digitized by Google

Vergrößert man das (in Abb. 96 gesondert gezeichnete) Parallelogramm der Geschwindigkeiten für zwei benachbarte Bahnelemente im Verhältnis $m:1$, so erhält man das Parallelogramm der Impulse; und wendet man hierauf den allgemeinen Momentensatz an (S. 157; Bezugspunkt O), indem man den doppelten Flächeninhalt der Dreiecke (O, K) (O, K') $(O, P.dt)$ als Momentvektoren senkrecht zu den Dreiecksebenen in richtigem Sinne aufträgt, so erhält man das Parallelogramm der Impulsmomente. Es gilt also

Abb. 96.

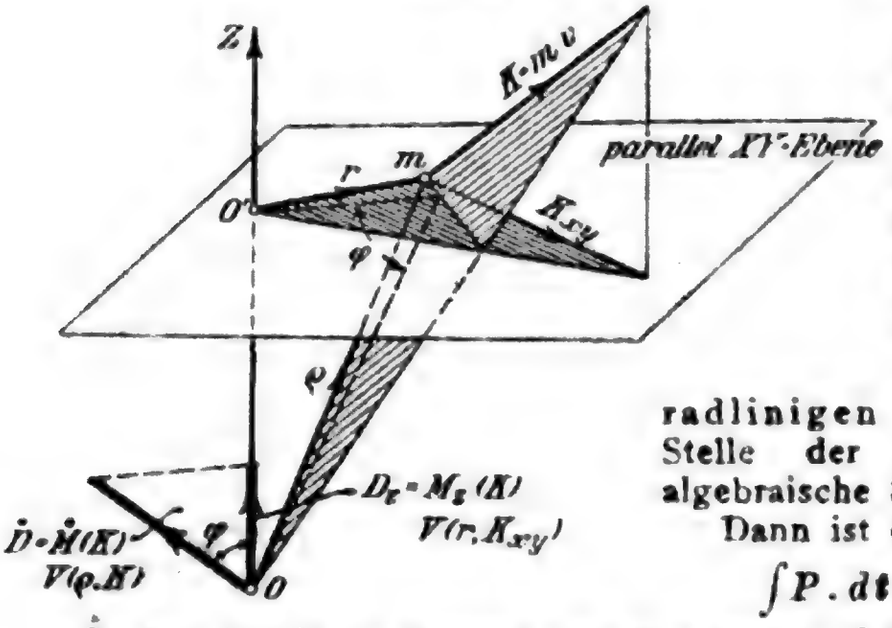


$$P.dt = K' \to K = d\bar{K},$$

$$\dot{M}(P).dt = \dot{D}' \to \dot{D} = d\bar{\dot{D}},$$

$$P = \frac{d\bar{K}}{dt}, \quad M(P) = \frac{d\bar{\dot{D}}}{dt}.$$

Abb. 97



Die Kraft ist gleich der zeitlichen Aenderung des Impulses; das Moment der Kraft gleich der zeitlichen Aenderung des Dralls.

2. Bei der geradlinigen Bewegung tritt an Stelle der geometrischen die algebraische Subtraktion.

Dann ist der **Kraftantrieb**

$$\int P.dt = mv - mv_0.$$

3. Der Drall in bezug auf die Achse OZ (Abb. 97) ist nach S. 156 unter 7 gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks (O', K_{xy}), d. h.

$$D_z = \dot{D}\cos\varphi,$$

φ = Neigungswinkel der beiden Dreiecksebenen = Winkel zwischen Z-Achse und Drall $\dot{D}$ für Punkt O.

$$M_z(P).dt = d\,D_z, \quad \int_0^t M_z(P).dt = D_z - D_{z0}, \quad M_z(P) = d\,D_z/dt.$$

4. Projiziert man das Bogenelement $ds = v.dt$ der Bahnkurve des Massenpunktes von dem Bezugspunkt, O aus (Abb. 98), so erhält

Digitized by Google

man ein unendlich schmales Dreieck df; die Größe $\dot{v}_f = \frac{df}{dt}$ heißt die augenblickliche Flächen- (Sektoren-) Geschwindigkeit, sie wird als Vektor in O senkrecht zur Ebene von df aufgetragen, in den Halbraum hineinweisend, von dem aus gesehen v im Sinne des Uhrzeigers drehend erscheint.

In dieselbe Richtung fällt auch der augenblickliche Drall $\dot{D}$, und es ist:

$$\dot{D} = 2m\,\frac{df}{dt} = 2m\,\dot{v}_f, \qquad D_z = 2m\,\frac{df_{xy}}{dt} = 2m\,v_{fz},$$

$$\dot{M}(P) = \frac{d\,\dot{D}}{dt} = 2m\,\frac{d\,\dot{v}_f}{dt}, \qquad M_z(P) = \frac{d\,D_z}{dt} = 2m\,\frac{d\,v_{fz}}{dt},$$

d. h.: Impulsmoment $= 2m \times$ Flächengeschwindigkeit,
Drehmoment $= 2m \times$ Flächenbeschleunigung.

Abb. 98.

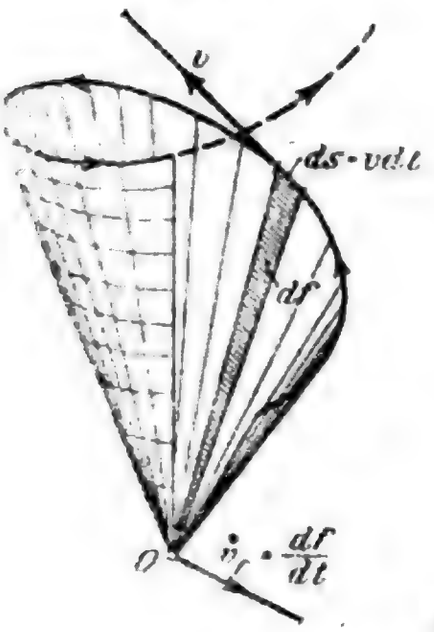


Abb. 99.

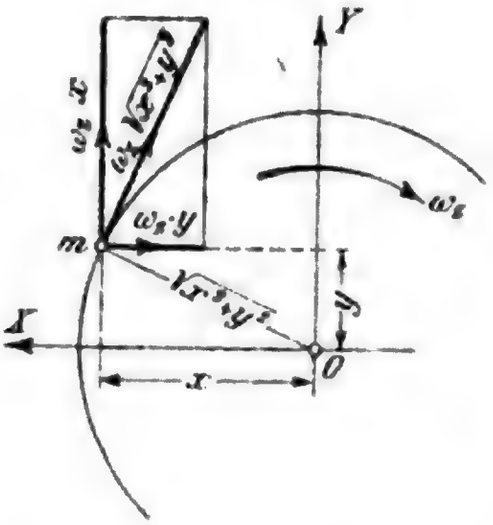
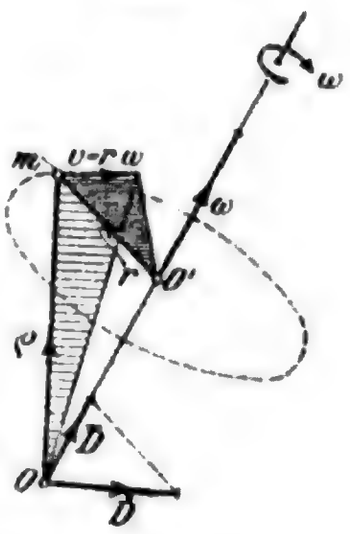


Abb. 100.



6. Bei der Kreis-(Dreh-)Bewegung des Massenpunktes gilt (Abb. 99 u. 100)

für die Drehgeschwindigkeit:

$$v = r\,\omega = \omega\varrho\sin(\omega, \varrho) = \mathfrak{V}(\omega\varrho),^{*})$$

$v_x = \omega_y z - \omega_z y$, usw. für y- und z-Achse;

für den Impuls:

$$K = mv = mr\omega = \mathfrak{V}(\omega\,.\,m\varrho),^{*})$$

$K_x = m\omega_y z - m\omega_z y$, usw. für y- und z-Achse;

für den Drall in bezug auf den Punkt O der Drehachse (Nullpunkt):

$$\dot{D} = \varrho K = \varrho m r\omega = \mathfrak{V}(\varrho K),^{*})$$

$D_x = +\,m(y^2 + z^2)\,.\,\omega_x - myx\,.\,\omega_y - mzx\,.\,\omega_z$, usw.

für den Drall in bezug auf die Drehachse selbst

$$\bar{D} = rK = (mr^2)\,\omega.$$

*) Vektorprodukt, S. 216.

Digitized by Google

β) Für die Massenpunktgruppe.

Setzt man die Impulse $K_i = m_i v_i$ der einzelnen Punkte der Gruppe wie Kräfte an einem beliebigen Bezugspunkte O zusammen, so erhält man im allgemeinen eine **Impulsschraube**, bestehend aus dem **Impuls K** und dem **Impulsmoment** oder **Drall Ḋ** des Punkthaufens, wo

$$\mathbf{K} = \overrightarrow{\Sigma} K_i, \qquad \dot{\mathbf{D}} = \overrightarrow{\Sigma} \dot{D}_i.$$

Die für jeden einzelnen Punkt geltenden Gleichungen

$$P_i \dashrightarrow S_i = E_i = \frac{d\vec{K}_i}{dt}, \quad \dot{M}(P_i) \dashrightarrow \dot{M}(S_i) = \dot{M}(E_i) = \frac{d\vec{D}_i}{dt}$$

liefern bei Summierung über den ganzen Punkthaufen,

$$\mathbf{P} = \frac{d\vec{\mathbf{K}}}{dt}, \quad \mathbf{P}_x = \frac{d\mathbf{K}_x}{dt} \text{ usw.}, \qquad \dot{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\dot{\mathbf{D}}}}{dt}, \quad \mathbf{M}_x = \frac{d\mathbf{D}_x}{dt} \text{ usw.}$$

Bei einer erzwungenen Bewegung ist wieder zu setzen $\mathbf{P} \dashrightarrow \mathbf{Q}$ statt $\mathbf{P}$ (S. 187 unter d).

Bei der kräftefreien Bewegung ($\mathbf{P} = 0$, $\dot{\mathbf{M}} = 0$) bleiben Impuls und Drall der Gröfse und Richtung nach gleich (verallgemeinertes Trägheitsgesetz).

8. Schwerpunktsätze.

1. Aus den Gleichungen für die Schwerpunktlage der Punktgruppe mit der Gesamtmasse m (S. 163)

$$m x_s = \Sigma m_i x_i \text{ usw.} \quad \text{oder} \quad m \varrho_s = \overrightarrow{\Sigma} m_i \varrho_i$$

folgt durch ein- bzw. zweimalige Differentiation nach der Zeit für die Schwerpunktgeschwindigkeit und Schwerpunktbeschleunigung:

$$m v_{xs} = \Sigma m_i v_{xi} \text{ usw.}, \quad m e_{xs} = \Sigma m_i e_{xi} \text{ usw.}$$

oder nach 1. α), S. 225 und nach β) s. oben

$$m v_s = \overrightarrow{\Sigma} m_i v_i = \mathbf{K}, \qquad m e_s = \overrightarrow{\Sigma} m_i e_i = \mathbf{E}$$

und nach d'Alembert

$$m e_s \rightleftarrows \mathbf{P},$$

d. h. Impuls des Punkthaufens = Gesamtmasse × Schwerpunktgeschwindigkeit, Beschleunigungskraft des Punkthaufens = Gesamtmasse × Schwerpunktbeschleunigung.

Der Schwerpunkt der Punktgruppe bewegt sich wie ein einzelner mit der Gesamtmasse der Gruppe versehener Punkt, an den alle äufseren angreifenden Kräfte parallel verschoben sind.

Ist $\dot{\mathbf{P}} = 0$ (Kräftepaar oder Gleichgewicht), so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig oder bleibt in Ruhe.

2. Die Bewegung der starren Punktgruppe kann (nach S. 208 oben) aufgefafst werden als eine Schiebungsbewegung — gleichartig mit der Bewegung des Schwerpunktes — vereinigt mit Drehungen um fortwährend wechselnde Schwerpunktachsen.

Digitized by Google

In jedem Augenblick gilt für die Relativgeschwindigkeit und die Relativbeschleunigung des i^{ten} Massenpunktes bezogen auf den Schwerpunkt (S. 147 unter d, 3)

$$v_i' = v_i \longrightarrow v_s \quad \text{und} \quad e_i' = e_i \longrightarrow e_s.$$

Da die Resultierenden der Zusatzimpulse $m_i v_s$ und der Zusatzkräfte $m_i e_s$ durch den Schwerpunkt gehen, so folgt durch Anwendung des allgemeinen Momentensatzes (S. 157) für den Schwerpunkt als Bezugspunkt:

$$\dot{\mathbf{D}}' = \overline{\Sigma}\, \dot{M}\,(m_i v_i') = \overline{\Sigma}\, \dot{M}\,(m_i v_i) = \dot{\mathbf{D}},$$

$$\dot{M}\,(\mathbf{E}') = \overline{\Sigma}\, \dot{M}\,(m_i e_i') = \overline{\Sigma}\, \dot{M}\,(m_i e_i) = \dot{M}\,(\mathbf{E}),$$

mithin nach d'Alembert (S. 225): $\dot{M}\,(\mathbf{E}') = \dot{\mathbf{M}}$,

d. h. Moment der relativen Impulse = Moment der wirklichen Impulse, Moment der relativen Beschleunigungskräfte = Moment der wirklichen Beschleunigungskräfte.

Die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt so, als ob dieser fest wäre.

4. Satz von der lebendigen Kraft und Arbeit.

Es gilt:

$$d\mathbf{L} = d\mathbf{A_P} + d\mathbf{A_S}, \qquad \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \mathbf{A_P} + \mathbf{A_S}, \text{ wo}$$

$\mathbf{L} = \Sigma m_i \frac{v_i^2}{2}$ = lebendige Kraft des Punkthaufens,

$\mathbf{A_P} = \Sigma A_{P_i}$ = Arbeit aller äufseren Kräfte,

$\mathbf{A_S} = \Sigma A_{S_i}$ = Arbeit aller inneren Kräfte.

Die Arbeit der inneren Kräfte, das Entgegengesetzte der Formänderungsarbeit, für das Zeitelement dt ist (S. 182 unter 1)

$$d\mathbf{A_S} = -\Sigma S_r\, dl_r,$$

wo S_r die innere Kraft für ein beliebiges Punktpaar und dl_r die Abstandsänderung dieses Punktpaares bedeutet.

Bei der starren Punktgruppe ist die Arbeit der inneren Kräfte Null ($dl_r = 0$). Also:

$$d\mathbf{L} = d\mathbf{A_P}, \qquad \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \mathbf{A_P}.$$

Die Sätze über das Potential, potentielle Energie usw. (S. 217 unter b) sind sinngemäfs zu übertragen.

5. Lagrangesche Gleichungen.

Die Lage des gegebenen Systems (etwa eine Reihe gelenkig verbundener starrer Körper) sei durch unabhängige Bestimmungsstücke q_1, q_2 usw. (verallgemeinerte Koordinaten, die nicht durch irgendwelche Bedingungsgleichungen miteinander verbunden sind; z. B. beim Kreisel, S. 235, die drei Eulerschen Winkel, beim Kurbeltrieb der Kurbeldrehwinkel usf.) festgelegt.

Es gilt dann für jede Koordinate q_i eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i.$$

Digitized by Google

Darin ist L die lebendige Kraft des Systems, $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$, F_i die auf die Koordinate q_i reduzierte äufsere Kraft, d. h. die bei der Aenderung δq_i geleistete Arbeit aller äufseren Kräfte dividiert durch δq_i.

b. Dynamik des starren Körpers.

1. Allgemeines.

Die Bewegung der starren Punktgruppe kann in jedem Augenblick und für einen beliebigen Bezugspunkt (Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems) aufgefafst werden als eine Schiebung mit der Geschwindigkeit u des Bezugspunktes und eine Drehung ω um eine Achse durch den Bezugspunkt (S. 208 oben).

Es gilt für die Geschwindigkeit des i^{ten} Punktes der Gruppe (S. 227) $v_i = u \dotplus r_i \omega = u \dotplus \mathfrak{V}(\omega \varrho_i)$*) und $v_{xi} = u_x + \omega_y z_i - \omega_z y_i$ usw.

Damit erhält man

1. **Arbeit der äufseren Kräfte** $[\Sigma P_i \cos(P_i, v_i)\, v_i \cdot dt]$.

$$dA = \mathfrak{P} \cos(\mathfrak{P}, u)\, u \cdot dt + \mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, \omega)\, \omega \cdot dt$$
$$= (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z + M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z) \cdot dt,$$

wo $P_x = \Sigma P_{xi}$ usw.; $M_x = \Sigma (y_i P_{zi} - z_i P_{yi})$ usw. (S. 161).

2. **Lebendige Kraft** $\left(\Sigma m_i \frac{v_i^2}{2}\right)$.

$$L = \tfrac{1}{2} m (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$$
$$+ \tfrac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2 J_{yz} \omega_y \omega_z - 2 J_{zx} \omega_z \omega_x - 2 J_{xy} \omega_x \omega_y)$$
$$+ m [u_x (\omega_y z_s - \omega_z y_s) + u_y (\omega_z x_s - \omega_x z_s) + u_z (\omega_x y_s - \omega_y x_s)]$$
$$= m \frac{u^2}{2} + J \cdot \frac{\omega^2}{2} + m [\ldots].$$

(x_s, y_s, z_s = Schwerpunktkoordinaten; J_x, J_y, J_z, J = Trägheitsmomente für die Koordinatenachsen bzw. für die Drehachse; J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} = Zentrifugalmomente; S. 192.)

Bei Schiebung ist $L = m \frac{u^2}{2}$, bei Drehung $L = J \frac{\omega^2}{2}$.

(Drehbewegung 2b, S. 190.)

Für den Schwerpunkt als Bezugspunkt ($u = v_s$) gilt

$$L = m \frac{v_s^2}{2} + J \frac{\omega^2}{2}.$$

Fallen bei Drehung die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen für den Bezugspunkt zusammen, so ist

$$L = \tfrac{1}{2}(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2).$$

3. **Impuls** $(\Sigma m_i v_i)$.

$$\mathfrak{K} = m u \dotplus m r_s \omega = m u \dotplus m \mathfrak{V}(\omega \varrho_s)$$ *)

*) Vektorprodukt, S. 216.

Digitized by Google

(r_s und ϱ_s = Abstände des Schwerpunktes von der Drehachse und vom Nullpunkte);

$$K_x = m u_x + m (\omega_y z_s - \omega_z y_s) \text{ usw.}$$

4. **Drall** $[\overline{\Sigma} \dot{M} (m_i v_i)]$.

$$\dot{D} = \mathfrak{V} (m \varrho_s \cdot u) + \!\!\rightarrow J \omega + \!\!\rightarrow \mathfrak{V} [\omega \cdot \overline{\Sigma} \mathfrak{V} (h_i \cdot m_i r_i)].^*)$$

(h_i = Abstand des Punktes i von einer Ebene durch den Nullpunkt senkrecht zur Drehachse, $\overline{\Sigma} V (h_i \cdot m_i r_i)$ = vektorielles Zentrifugalmoment = Momentvektor der Zentrifugalkraft für $\omega = 1$, S. 232 u. Abb. 101.)

$D_x = m (y_s u_z - z_s u_y) + J_x \omega_x - J_{yx} \omega_y - J_{zx} \omega_z$ usw. (S. 227).

Drehung (um feste Achse oder festen Punkt): Die Glieder mit u fallen fort; der Drall für die Drehachse wird (S. 227)

$$D = J \omega;$$

fallen die Hauptträgheitsachsen für den Bezugspunkt mit den Koordinatenachsen zusammen, so werden die Drallkomponenten

$$D_x = J_x \omega_x, \qquad D_y = J_y \omega_y, \qquad D_z = J_z \omega_z.$$

Drall und Drehvektor fallen nur zusammen, wenn einer dieser beiden Vektoren in eine Hauptträgheitsachse fällt.

5. Festes und bewegliches Achsenkreuz.

Trägheits- und Zentrifugalmomente sind nur dann als unveränderliche, lediglich von Form und Massenverteilung des Punkthaufens (starren Körpers) abhängige Koeffizienten, für die die einfache geometrische Veranschaulichung durch das Trägheitsellipsoid gilt, anzusehen, wenn man sich auf ein im Körper festes, alle Bewegungen desselben mitmachendes Achsenkreuz bezieht (Nullpunkt = Bezugspunkt, Achsen fast immer mit den Hauptträgheitsachsen für den Bezugspunkt zusammenfallend).

2. Drehung des starren Körpers um eine feste Achse.

1. **Beschleunigungsarbeit.** Die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper aus dem Ruhezustande auf seine regelrechte Winkelgeschwindigkeit ω (Umdrehungszahl n) zu beschleunigen (den Trägheitswiderstand zu überwinden), ist nach dem Prinzip der lebendigen Kraft

$$A' = L = J \frac{\omega^2}{2} = \frac{\pi^2}{1800} J n^2 = \frac{\pi^2}{1800 \cdot 4g} (G D^2) n^2 \text{ oder}$$

$$A' = 0{,}00548 J n^2 = 0{,}00014 (G D^2) n^2 \quad \text{(S. 191 unter 1, 1).}$$

2. **Reduktion der Massen.** Unter der auf den Halbmesser l und die Winkelgeschwindigkeit ω_0 (Umdrehungszahl n_0) **reduzierten Masse** eines starren Körpers versteht man die Masse eines am Halbmesser l kreisenden Punktes, der bis zum Erreichen der Winkelgeschwindigkeit ω_0 (Umlaufzahl n_0) dieselbe Beschleunigungsarbeit verbraucht wie der Körper bis zum Erreichen seiner regelrechten Winkelgeschwindigkeit ω (Umlaufzahl n); d. h.

$$(m_{red} l^2) \frac{\omega_0^2}{2} = J \frac{\omega^2}{2} \text{ oder}$$

$$m_{red} = \frac{J}{l^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{J}{l^2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = \frac{G D^2}{4 g l^2} \left(\frac{n}{n_0}\right)^2. \quad \text{(S. 191 unter 1, 1.)}$$

*) Vektorprodukt, S. 216.

Digitized by Google

3. Zentrifugalkräfte am umlaufenden starren Körper.

a) Bei der Zusammensetzung der Zentrifugalkräfte aller Massenteilchen an dem beliebigen Bezugspunkte O = Nullpunkt des im Körper festen, mit ihm kreisenden (S. 231) Achsenkreuzes $\xi\eta\zeta$ (ζ-Achse = Drehachse) erhält man im allgemeinen eine resultierende Einzelkraft $\mathbf{C}$ und ein resultierendes Moment $\dot{M}(\mathbf{C})$; es gilt (Abb. 101):

$$C_\xi = +\omega^2 \int \xi \, dm = +m\xi_s\omega^2; \quad C_\eta = +\omega^2 \int \eta \, dm = +m\eta_s\omega^2; \quad C_\zeta = 0$$

(ξ_s, η_s, ζ_s = Schwerpunktkoordinaten) und:

$$M_\xi(\mathbf{C}) = -\omega^2 \int \eta\zeta \, dm = -\omega^2 J_{\eta\zeta};$$

$$M_\eta(\mathbf{C}) = +\omega^2 \int \xi\zeta \, dm = +\omega^2 J_{\xi\zeta}; \qquad M_\zeta(\mathbf{C}) = 0.$$

Abb. 101.

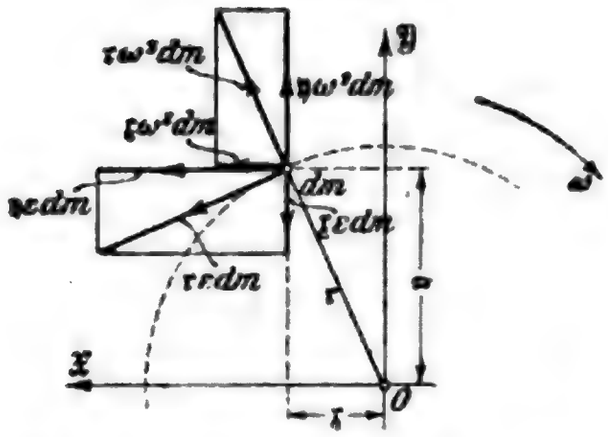
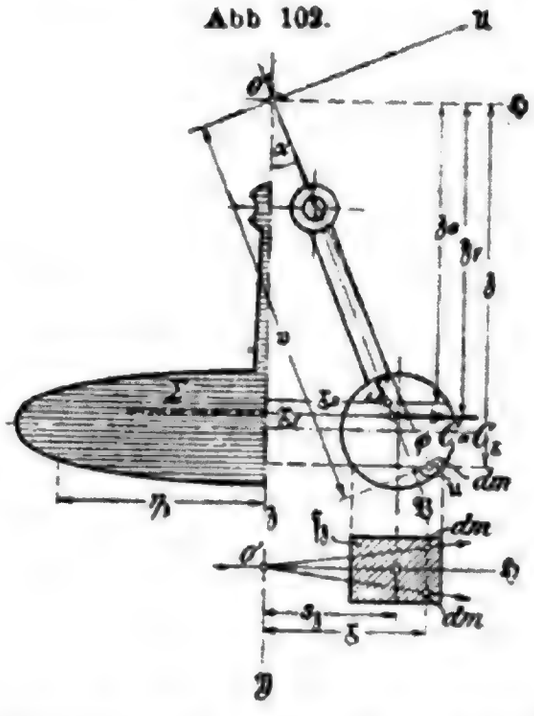


Abb. 102.



Es folgt noch mit r_s = Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse:

$$\mathbf{C} = m\, r_s\, \omega^2;$$

$$\dot{M}(\mathbf{C}) = \omega^2 \sqrt{J_{\xi\zeta}^2 + J_{\eta\zeta}^2}.$$

$\mathbf{C}$ ist parallel dem vom Schwerpunkte auf die Drehachse gefällten Lot und berechnet sich so, als ob die Gesamtmasse m im Schwerpunkte vereinigt wäre.

b) Die Zentrifugalkräfte können auch zurückgeführt werden auf die beiden sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte $\mathbf{C}_\xi$ und $\mathbf{C}_\eta$ mit den Abständen

$$\eta_1 = \frac{J_{\xi\eta}}{m\xi_s}, \qquad \zeta_1 = \frac{J_{\xi\zeta}}{m\xi_s} \text{ bzw. } \xi_2 = \frac{J_{\eta\xi}}{m\eta_s}, \qquad \zeta_2 = \frac{J_{\eta\zeta}}{m\eta_s}$$

von der $\xi\zeta$- und $\xi\eta$-Ebene bzw. von der $\eta\zeta$- und $\xi\eta$-Ebene.

Eine resultierende Einzelkraft C folgt nur, wenn $\zeta_1 = \zeta_2$; sie geht im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt.

Sonderfälle: 1. Die $\xi\zeta$-Ebene sei eine Symmetrieebene des homogenen Körpers. Die η-Seitenkräfte der Zentrifugalkräfte heben sich auf; es bleibt $\mathbf{C}_\xi$ im Abstande $h_1 = J_{\xi\zeta}/m\,r_s$ von der ξ-Achse.

Ein Schnitt im Abstande ζ senkrecht zur Drehachse habe den Flächeninhalt f_ζ und den Schwerpunktabstand s_ζ. Trägt man in der aus Abb. 102 ersichtlichen Weise die

Produkte $f_\zeta \, s_\zeta = r_\zeta$ als Ordinaten zu den Abszissen ζ auf, so erhält man das Diagramm der Zentrifugalkräfte. Durch den Schwerpunkt Σ der von der Kurve eingeschlossenen Fläche geht die Zentrifugalkraft des Körpers.

2. Ist ferner die $v\eta$-Ebene senkrecht zur Zeichenebene eine zweite Symmetrieebene des Körpers, so folgt mit den Bezeichnungen der Abb. 102

$$r_s = v_s \sin\alpha, \qquad h_1 = v_1 \cos\alpha, \qquad \int u v \, . \, dm = 0,$$

$$v_1 = \int (v^2 - u^2) \, . \, dm / m v_s = \int (\rho^2 - 2 u^2) \, . \, dm / m v_s.$$

Ist die Ausdehnung des Körpers in Richtung der u-Achse gering, so daß $2 \, . \int u^2 \, . \, dm$ gegen $\int \rho^2 \, . \, dm = J_\eta$ vernachlässigt werden kann, so folgt: $v_1 = J_\eta / m \, . \, v_s =$ reduzierte Pendellänge für die η-Achse als Aufhängeachse, d. h. die Zentrifugalkraft geht durch den Schwingungsmittelpunkt oder Stoßpunkt (S. 234 unter 5 und S. 241 unter b).

c) Es wird $C = 0$, wenn $\xi_s = \eta_s = 0$, d. h. wenn der Schwerpunkt in der Drehachse liegt. — Statische Ausbalancierung.

Es wird $M(C) = 0$, wenn $J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$, d. h. wenn die Drehachse Hauptträgheitsachse für den Nullpunkt ist (S. 193). — Dynamische Ausbalancierung.

Treffen beide Bedingungen zu, so ist der Körper vollständig ausbalanciert hinsichtlich der $\mathfrak{Z}$-Achse.

4. Widerstände der Achslagerung. Freie Achsen.

a) Die Drehachse ($\mathfrak{Z}$-Achse des rechtwinkligen mit dem Körper umlaufenden Achsenkreuzes) sei im Nullpunkte O und im Punkte O' (Abstand $OO' = a$) gelagert; die Lagerwiderstände in O und O' seien A und B. Das System der äußeren angreifenden Kräfte liefere bei Reduktion an den Nullpunkt die Kraft $\mathbf{P}$ und das Moment $\mathbf{M}$.

Die Trägheitswiderstände (Abb. 101) setzen sich zusammen aus den Zentrifugalkräften $r\omega^2 \, . \, dm$ (Komponenten und Momente s. unter 3a) und den der Geschwindigkeitszunahme entgegenwirkenden Umfangskräften $r \dfrac{d\omega}{dt} \, dm = r\varepsilon \, . \, dm$, mit den Komponenten und Momenten:

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$
Komponenten	$+\int \eta\varepsilon \, . \, dm = + m\eta_s\varepsilon$	$-\int \xi\varepsilon \, . \, dm = - m\xi_s\varepsilon$	0
Momente	$+\int \xi\zeta\varepsilon \, . \, dm = + J_{\xi\zeta}\varepsilon$	$+\int \eta\zeta\varepsilon \, . \, dm = + J_{\eta\zeta}\varepsilon$	$-\int r^2\varepsilon \, . \, dm = - J_\zeta\varepsilon$

Zur Bestimmung der Lagerwiderstände hat man also nach d'Alembert (S. 225):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_\xi + A_\xi + B_\xi + m\xi_s \, . \, \omega^2 + m \, . \, \eta_s\varepsilon = 0,\\
&\mathbf{P}_\eta + A_\eta + B_\eta + m\eta_s \, . \, \omega^2 - m \, . \, \xi_s\varepsilon = 0,\\
&\mathbf{P}_\zeta + A_\zeta + B_\zeta = 0,\\
&\mathbf{M}_\xi - B_\eta \, . \, a - J_{\eta\zeta} \, . \, \omega^2 + J_{\xi\zeta} \, . \, \varepsilon = 0,\\
&\mathbf{M}_\eta + B_\xi \, . \, a + J_{\xi\zeta} \, . \, \omega^2 + J_{\eta\zeta} \, . \, \varepsilon = 0,\\
&\mathbf{M}_\zeta - J_\zeta \, . \, \varepsilon = 0.
\end{aligned}$$

A_ζ und B_ζ sind einzeln nur mit Hinzuziehung der Elastizitätstheorie oder unter besonderen Bedingungen bestimmbar; ist z. B. in O' ein Halslager (nur Führung), in O ein Spurlager (Führung und Stützung), so ist $B_\zeta = 0$, $A_\zeta = -P_\zeta$.

Digitized by Google

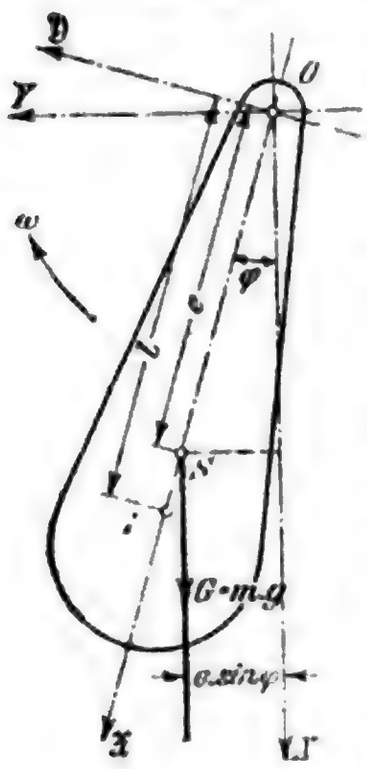
Die Lagerwiderstände A und B kreisen mit dem Körper um die $\mathfrak{Z}$-Achse.

b) Ist der Körper vollständig ausbalanciert (s. unter 3c, S. 233), also $\xi_s = \eta_s = 0$ und $J_{\xi\mathfrak{z}} = J_{\eta\mathfrak{z}} = 0$, so heben sich nicht nur die Zentrifugalkräfte auf, sondern auch die $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Komponenten und -Momente der tangentialen Trägheitswiderstände; die Lagerwiderstände berechnen sich dann genau wie für einen zweifach gestützten ruhenden Körper.

Reduzieren sich die gegebenen äufseren Kräfte auf ein Moment um die $\mathfrak{Z}$-Achse, so werden demnach die Lagerwiderstände A und B gleich Null, die Achse braucht nicht gehalten zu werden (freie Achse).

Der Lagerwiderstand B wird Null, d. h. Stützung im Punkte O genügt, wenn $J_{\xi\mathfrak{z}} = J_{\eta\mathfrak{z}} = 0$ und $\mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_\eta = 0$, d. h. die Drehachse Trägheitshauptachse für den Nullpunkt ist und die gegebenen äufseren Kräfte sich auf $P_\mathfrak{z}$ in der Drehachse und eine in der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-Ebene liegende nicht durch die Drehachse gehende Kraft reduzieren.

Abb. 103.



5. **Physisches Pendel.** Es gilt mit den Bezeichnungen der Abb. 103

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\varepsilon = -mge\sin\varphi,$$

d. h. das Pendel schwingt genau so wie ein mathematisches Pendel (S. 189) von der Länge (**reduzierte Pendellänge**) $l = \dfrac{J}{me}$.

Trägt man auf der Verbindungslinie Aufhängepunkt — Schwerpunkt vom ersteren aus die Strecke l ab, so heifst der Endpunkt der Schwingungsmittelpunkt des Pendels, eine durch ihn zur Aufhängungs(Dreh-)achse parallele Gerade die Schwingungsachse. Vertauscht man Aufhängungsachse und Schwingungsachse, so bleibt die Schwingungszeit dieselbe.

Für die **Widerstände des Aufhängepunktes** gelten bei symmetrischem Pendel ($\eta_s = 0$) folgende Ansätze in bezug auf ein im Körper festes, d. h. mit ihm schwingendes Achsenkreuz $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$:

in Richtung der $\mathfrak{X}$-Achse: $A_\xi = -mg\cos\varphi - me\omega^2$,

„ „ „ $\mathfrak{Y}$- „ : $A_\eta = +mg\sin\varphi + me\varepsilon$,

darin ist einzusetzen:

$$\varepsilon = -\frac{mge}{J}\sin\varphi \quad \text{(aus der Bewegungsgleichung) und}$$

$$\omega^2 = +\frac{2mge}{J}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

(aus dem Prinzip der lebendigen Kraft; α = gröfster Ausschlagwinkel).

Digitized by Google

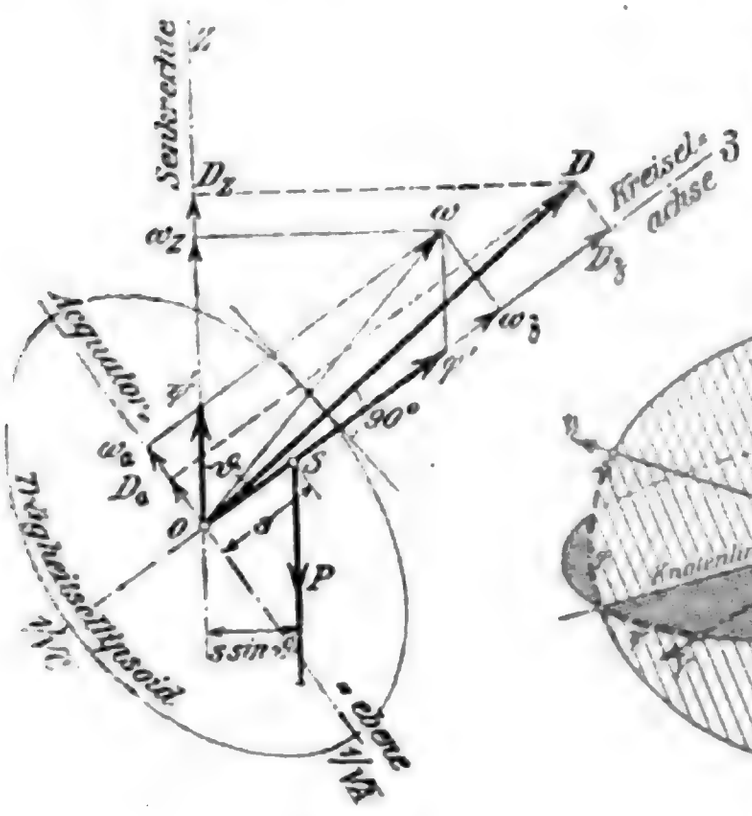
3. Drehung des starren Körpers um einen festen Punkt (Kreiselbewegung).

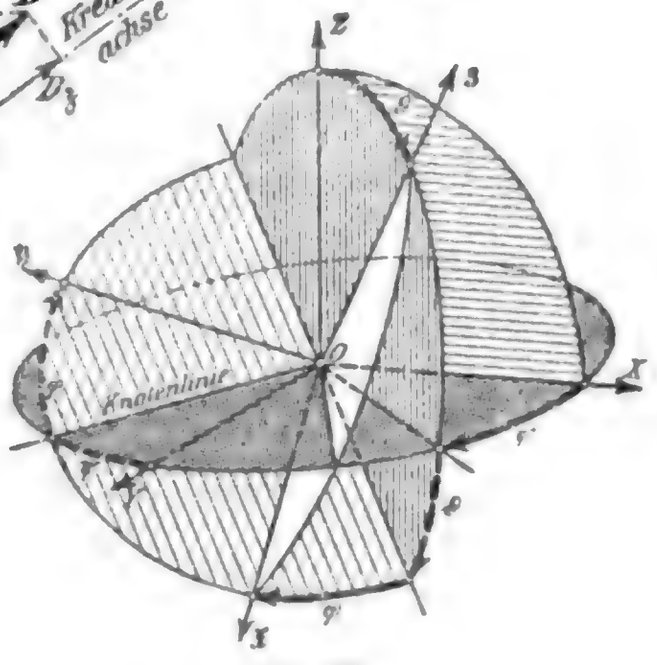
1. Drehachse (Drehvektor) und Drall. a) Bezeichnet man ebenso wie die Drehachse (s. S. 207 unter 5) auch den Drall in jeder Lage sowohl im festen Raume ($\dot{D}$) wie auch im Kreisel ($\dot{\mathfrak{D}}$), so erhält man einen festen und einen beweglichen Drallkegel; je zwei zusammengehörige Bogenelemente $\overline{d\,\dot{D}}$ und $\overline{d\,\dot{\mathfrak{D}}}$ der Begrenzungskurven beider Kegelmäntel sind im allgemeinen nicht gleich grofs, d. h. die beiden Drallkegel gleiten im allgemeinen während der Bewegung aufeinander.

b) Zwischen Drall, Drehvektor und Trägheitsellipsoid für den Unterstützungspunkt besteht folgende geometrische Beziehung:

Der Drall steht in jedem Augenblick senkrecht auf der Ebene, die das Trägheitsellipsoid im Schnittpunkte mit dem augenblicklichen Drehvektor berührt.

Für den bei den praktischen Anwendungen stets vorliegenden Fall des symmetrischen Kreisels — Trägheitsellipsoid für den Unterstützungspunkt = Rotationsellipsoid, dessen Umdrehungsachse durch den Kreiselschwerpunkt geht — gilt demnach:





In jedem Augenblick liegen Drall, Drehvektor und Kreiselachse in einer Ebene (Abb. 104).

2. Die Eulerschen Gleichungen. a) Die Lage des Kreisels, d. h. des mit ihm fest verbundenen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$-Kreuzes gegen ein im Raume festes Achsenkreuz XYZ (gemeinschaftlicher Nullpunkt = Unter-

Digitized by Google

stützungspunkt), wird am einfachsten durch die drei Eulerschen unsymmetrischen Winkel φ, ψ, ϑ bestimmt (Abb. 105, S. 235):

ψ = Winkel zwischen $Z\mathfrak{Z}$-Ebene und ZX-Ebene = Winkel zwischen Knotenlinie und Y-Achse (Knotenlinie = derjenige Halbstrahl der Schnittlinie von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$- und XY-Ebene, von dem aus gesehen die Z-Achse durch eine Rechtsdrehung auf kürzestem Wege in die $\mathfrak{Z}$-Achse gelangt).

ϑ = Winkel zwischen $\mathfrak{Z}$-Achse und Z-Achse = Winkel zwischen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-Ebene und XY-Ebene.

φ = Winkel zwischen $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$-Ebene und $\mathfrak{Z}Z$-Ebene = Winkel zwischen $\mathfrak{Y}$-Achse und Knotenlinie.

b) Die Winkelgeschwindigkeiten $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$, $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$, $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt}$ um die $+\mathfrak{Z}$-Achse, die $+Z$-Achse und die Knotenlinie stehen mit den Winkelgeschwindigkeitskomponenten für das feste und das bewegliche Achsenkreuz in folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \omega_x &= +\varphi' \sin\vartheta \cos\psi - \vartheta' \sin\psi, \\ \omega_y &= +\varphi' \sin\vartheta \sin\psi + \vartheta' \cos\psi, \\ \omega_z &= +\varphi' \cos\vartheta + \psi'. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \omega_\xi &= -\psi' \sin\vartheta \cos\varphi + \vartheta' \sin\varphi, \\ \omega_\eta &= +\psi' \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta' \cos\varphi, \\ \omega_\zeta &= +\varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Eulersche geometrische Gleichungen.

c) Für die Dralländerung im festen Raume gilt nach S. 228 $\frac{\vec{d}\,\dot{\mathfrak{D}}}{dt} = \dot{\mathfrak{M}}$; $\frac{\vec{d}\,\dot{\mathfrak{D}}}{dt}$ kann aufgefafst werden als die Geschwindigkeit des Drallendpunktes im festen Raume; die Geschwindigkeit des Drallendpunktes im bewegten Körper ist folglich (S. 223):

$$\frac{\vec{d}\,\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\vec{d}\,\dot{\mathfrak{D}}}{dt} \rightarrow \mathfrak{v} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{v} = \mathbf{V}(\omega\,\dot{\mathfrak{D}}) = -\mathbf{V}(\dot{\mathfrak{D}}\,\omega) \text{ (S. 227 u. 216)},$$

$\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeit des Kreiselpunktes der augenblicklich mit dem Drallendpunkte zusammenfällt.

Mithin:

$$\frac{\vec{d}\,\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\vec{d}\,\dot{\mathfrak{D}}}{dt} + \mathbf{V}(\dot{\mathfrak{D}}\,\omega) = \dot{\mathfrak{M}} + \mathbf{V}(\dot{\mathfrak{D}}\,\omega) \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\mathfrak{D}_\xi}{dt} = \mathfrak{M}_\xi + \mathfrak{D}_\eta \omega_\zeta - \mathfrak{D}_\zeta \omega_\eta \text{ usw.}$$

und wenn die $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$-Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallend genommen werden:

$$J_\xi \cdot \frac{d\omega_\xi}{dt} = \mathfrak{M}_\xi + (J_\eta - J_\zeta)\,\omega_\eta\,\omega_\zeta \text{ usw.}$$

Eulersche dynamische Gleichungen.

3. Der freie symmetrische Kreisel unter der Einwirkung der Schwerkraft. Die Z-Achse des im Raume festen Achsenkreuzes sei senkrecht; das Gewicht des Kreisels sei P; der Abstand seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte s; der Momentvektor der Schwerkraft also $\dot{\mathfrak{M}} = Ps \sin\vartheta$, in die Knotenlinie fallend; die Hauptträgheitsmomente für den Unterstützungspunkt seien $J_\xi = J_\eta = A$, $J_\zeta = C$.

Digitized by Google

Für den ganzen Verlauf der Bewegung gilt:

α) Die Projektion des Dralls auf die Z-Achse (Vertikale) ist gleichbleibend.

Denn: $\frac{\overrightarrow{d}\dot{\mathfrak{D}}}{dt} = \dot{\mathfrak{M}}$, d. h. stets wagerecht gerichtet.

β) Die Projektion des Dralls auf die $\mathfrak{Z}$-Achse (Kreiselachse) ist gleichbleibend.

Denn: $\frac{\overrightarrow{d}\dot{\mathfrak{D}}}{dt} = \dot{\mathfrak{M}} \perp \mathfrak{V}(\dot{\mathfrak{D}}\omega)$; $\mathfrak{V}(\dot{\mathfrak{D}}\omega)$ steht aber beim symmetrischen Kreisel (1b, S. 235), $\dot{\mathfrak{M}}$ stets senkrecht zur Kreiselachse.

Nimmt man noch das Prinzip der lebendigen Kraft zu Hülfe, so erhält man als die drei Bewegungsgleichungen des Kreisels (wenn für $t=0$ noch $\vartheta'=0$, d. h. die Neigung der Kreiselachse gegen die Senkrechte ein Gröfst- oder Kleinstwert ist):

$$\mathfrak{D}_z = C(\varphi' + \psi'\cos\vartheta)\cos\vartheta + A\,\psi'\sin^2\vartheta,$$

$$\mathfrak{D}_3 = C(\varphi' + \psi'\cos\vartheta),$$

$$\frac{A}{2}(\psi'^2\sin^2\vartheta + \vartheta'^2) + P s\cos\vartheta = \frac{A}{2}\psi_0'^2\sin^2\vartheta_0 + P s\cos\vartheta_0.$$

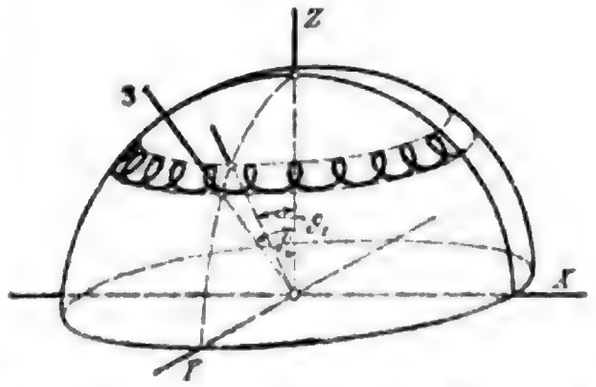
Es folgt mit der Abkürzung $\cos\vartheta = z$:

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \psi' = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathfrak{D}_z - \mathfrak{D}_3 z}{A(1-z^2)}\,\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$\varphi' = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_z z}{A(1-z^2)}\,\frac{dz}{\sqrt{Z}} + \mathfrak{D}_3\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t,$$

wo Z ein Ausdruck dritten Grades in z ist, dessen Koeffizienten sich aus $A, C, P, s, \mathfrak{D}_z, \mathfrak{D}_3, z_0 = \cos\vartheta_0$ zusammensetzen (t, ψ, φ = elliptische Integrale von z).

Abb. 106.



Eine nähere Untersuchung der Integralausdrücke auf Grund der Eigenschaften von $\sqrt{Z}$ zeigt (Schwerpunkt oberhalb des Unterstützungspunktes vorausgesetzt), vgl. Abb. 106: Die sphärische Kurve, die ein beliebiger Punkt der Kreiselachse (z. B. der Schwerpunkt) auf der zugehörigen Kugel um den Unterstützungspunkt beschreibt, verläuft innerhalb einer wagerechten Kugelzone, deren Begrenzungsparallelkreise von dem beschreibenden Punkte abwechselnd berührt werden; die Bogen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit dem oberen Parallelkreise sind untereinander kongruent und werden durch den Berührungspunkt mit dem unteren Parallelkreise in je zwei symmetrische Halbbogen geteilt; die Anzahl der Bogen ist je nach den Anfangsbedingungen endlich oder unendlich grofs. Im Sonderfalle setzen sich die Bogen auf dem oberen Parallelkreise mit Spitzen auf.

4. Reguläre und pseudoreguläre Präzession. a) Unter der Bedingung

$$P s = C\varphi'\psi' - (A - C)\psi'^2\cos\vartheta_0 \quad \text{(S. 238 unter 5)}$$

Digitized by Google

schrumpft die Kugelzone, in der die Bewegung des Kreiselschwerpunktes statthat, auf einen Parallelkreis zusammen; dann wird mit $\vartheta = \vartheta_0 =$ konst auch $\psi' =$ konst und $\gamma' =$ konst; die aus ψ' und φ' resultierende Winkelgeschwindigkeit ω wird ebenfalls unveränderlich und behält während des ganzen Verlaufs der Bewegung ihre anfängliche Neigung gegen Senkrechte und Kreiselachse bei (beweglicher und fester Achsenkegel = Kreiskegel); reguläre Präzession, $\psi' =$ Präzessionsgeschwindigkeit.

b) Hat der anfängliche Drall $\mathfrak{D}_0$ eine beträchtliche Gröfse im Vergleich zur Schwerewirkung und fällt er überdies mit der Kreiselachse nahezu zusammen, so wird die Kugelzone sehr schmal und die Bogen der vom Schwerpunkte beschriebenen Kurve erhalten so kleine Abmessungen und werden so schnell durchlaufen, dafs der Schein einer regulären Präzession erweckt wird; pseudoreguläre Präzession (gewöhnlicher beim Spielkreisel in Betracht kommender Fall); die Kurve des Schwerpunktes kann als Zykloide mit sehr kleinem Rollkreise aufgefafst werden (fortschreitende Bewegung des Rollkreismittelpunktes auf dem mittleren Parallelkreise der Kugelzone = Präzession, gleichzeitige Drehbewegung des Rollkreises um seinen Mittelpunkt = Nutation) (Abb. 106).

5. Trägheitswiderstand und Kreiselwirkung bei regulärer Präzession. Wie die Winkelgeschwindigkeit ω (s. unter 4) behält auch der Drall $\dot{\mathfrak{D}}$ seine Gröfse bei und beschreibt im festen Raume einen geraden Kreiskegel um die Senkrechte (im Kreisel einen geraden Kreiskegel um die Figurenachse $\mathfrak{Z}$) (Abb. 104, S. 235). Ist r der Abstand des Drallendpunktes von der Senkrechten, so gilt nach S. 236 unter 2, c

$$\frac{\overrightarrow{d\,\dot{\mathfrak{D}}}}{dt} = r\,\psi' = \dot{\mathfrak{M}} = -\dot{M}(\mathrm{T}),$$

wo $\dot{\mathfrak{M}}$ das zur Aufrechterhaltung der Bewegung erforderliche Moment und $\dot{M}(\mathrm{T})$ der Trägheitswiderstand ist. Mit

$$\mathfrak{D}_3 = C\,\omega_3 = C\,(\varphi' + \psi'\cos\vartheta); \quad \mathfrak{D}_a = A\,\omega_a = A\,\psi'\sin\vartheta$$

folgt:

$$\frac{\overrightarrow{d\,\dot{\mathfrak{D}}}}{dt} = (\mathfrak{D}\sin\vartheta - \mathfrak{D}_a\cos\vartheta)\,\psi'$$
$$= C\,\varphi'\,\psi'\sin\vartheta + (C - A)\,\psi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

$-C\,\varphi'\,\psi'\sin\vartheta$ ist das Moment der Corioliskräfte für die aus den Drehungen φ' und ψ' zusammengesetzte Bewegung; $-(C-A)\,\psi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta$ ist das Moment der Zentrifugalkräfte für die Drehung um die Senkrechte (erste Zusatzkräfte); die Relativkräfte (Zentripetalkräfte der Drehung um die Kreiselachse) heben sich auf (S. 234 unter 2).

$K = -\mathfrak{D}_3\,\psi'\sin\vartheta$ heifst die Kreiselwirkung. Der in die Kreiselachse fallende Eigendrall $\mathfrak{D}_3$ ist stets wesentlich gröfser als die in die Aequatorebene fallende Drallkomponente $\mathfrak{D}_a$; $\dot{\mathfrak{M}}$ dreht also im Uhrzeigersinne, $\dot{M}(\mathrm{T})$ gegen den Uhrzeigersinn um die in Abb. 104, S. 235, nach vorn weisende Knotenlinie.

Digitized by Google

Bei den praktischen Anwendungen ist meist $\vartheta = 90^0$, dann wird:

$$\dot{M}(T) = K = -D_1 \psi' = -C \varphi' \psi'.$$

Der Trägheitswiderstand (die Kreiselwirkung) sucht die positive Kreiselachse mit der positiven Achse der Präzessionsbewegung zur Deckung zu bringen (positive Drehachse S. 141 unter 3).

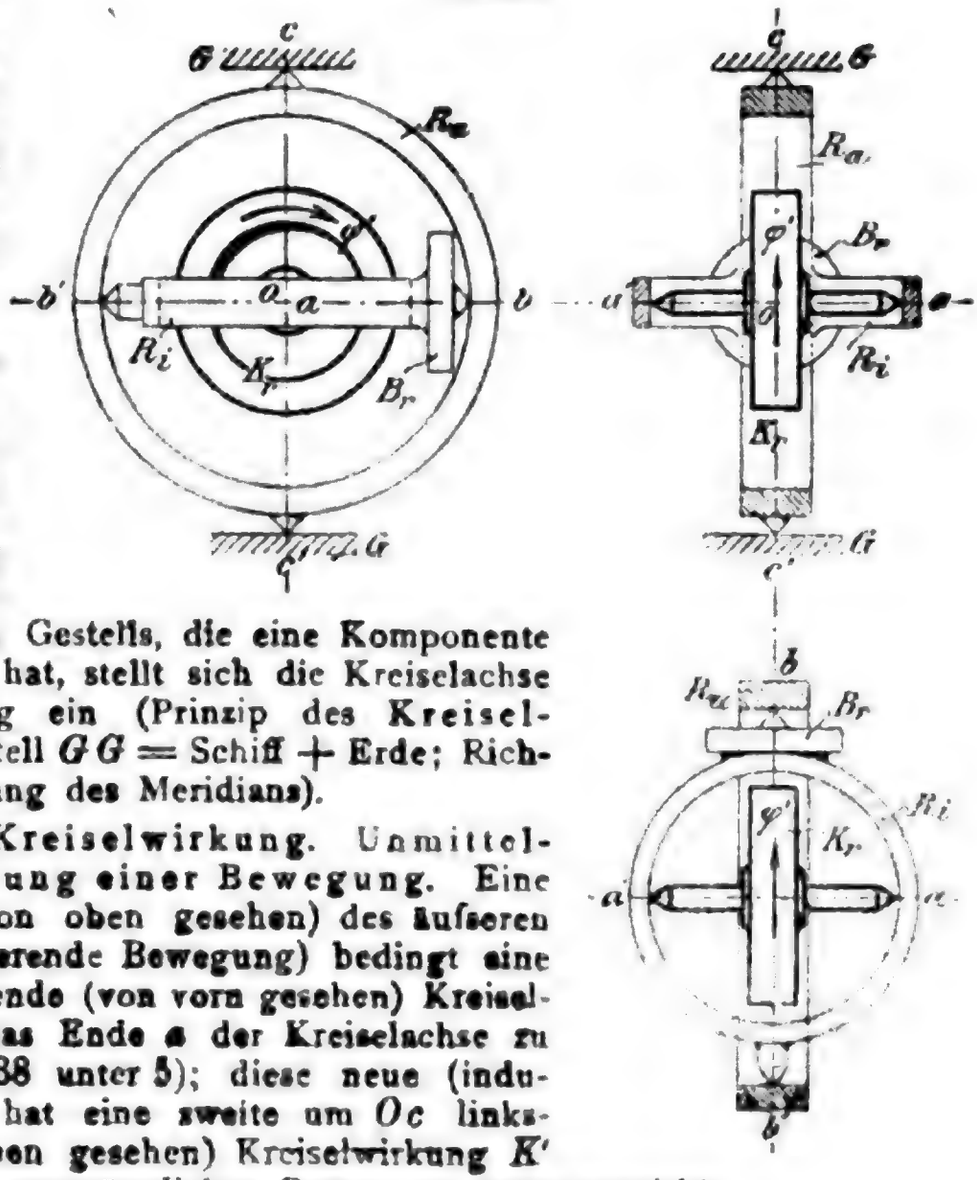
6. Technische Anwendungen des Kreisels.

Der in Abb. 107 gezeichnete Kreisel Kr hat bei festgehaltenem Gestell GG vermöge der kardanischen Aufhängung R_i R_a noch 3 Freiheitsgrade der Bewegung (Drehungen um die 3 Achsen aa', bb', cc'). — Der Kreisel läuft mit der grofsen Winkelgeschwindigkeit φ' um; der innere Ring R_i trägt beim Schiffskreisel eine Bremsscheibe Br.

a) Bei beliebigen Bewegungen des Gestells GG behält die Kreiselachse aa' ihre Richtung im Raume bei.

Die bei (schädlichen) Bewegungen des Gestells eintretende Relativbewegung zwischen diesem und dem Kreisel mit seinem Gehänge kann zum Steuern eines Hilfsmotors benutzt werden, der die Bewegung des Gestells rückgängig macht, mittelbare Stabilisierung einer Bewegung.

Abb. 107.



b) Einfache Kreiselwirkung (S. 238 unter 5). Aeufserer Ring R_a mit dem inneren Ring R_i gekuppelt. Bei einer Drehung des Gestells, die eine Komponente in Richtung bb' hat, stellt sich die Kreiselachse in diese Richtung ein (Prinzip des Kreiselkompasses; Gestell GG = Schiff + Erde; Richtung bb' = Richtung des Meridians).

c) Doppelte Kreiselwirkung. Unmittelbare Stabilisierung einer Bewegung. Eine Rechtsdrehung (von oben gesehen) des äufseren Ringes R_a (induzierende Bewegung) bedingt eine um Ob' linksdrehende (von vorn gesehen) Kreiselwirkung K, die das Ende a der Kreiselachse zu heben sucht (S. 238 unter 5); diese neue (induzierte) Bewegung hat eine zweite um Oc linksdrehende (von oben gesehen) Kreiselwirkung K' zur Folge, die der ursprünglichen Bewegung entgegenwirkt.

Digitized by Google

Schlickscher Schiffskreisel. Gestell + äufserer Ring = Schiffskörper. Achse aa' parallel zur senkrechten Querachse des Schiffes; durch ein Gegengewicht ist der Schwerpunkt des Kreiselpendels unter die Schwingungsachse bb' verlegt; bei Rollschwingungen des Schiffes (Schwingungen um die Längsachse) pendelt der Kreisel in der Längsrichtung des Schiffes, wodurch die der störenden Bewegung entgegengesetzte Kreiselwirkung K' hervorgerufen wird; die am Rahmen R_i angebrachte Bremse mufs so bedient werden, dafs der Kreisel nicht festgebremst wird (dann könnte die Kreiselwirkung K' nicht zustande kommen) und dafs er möglichst in Phase mit dem Schiffe schwingt (gleichzeitiger Durchgang durch die Mittellagen, gleichzeitiger gröfster Ausschlag); dann wird die an das Schiff übertragene Wellenenergie fortdauernd vernichtet, die Schiffsschwingungen wirksam verringert (der ungebremste Kreisel eilt um eine Viertelperiode den Schiffsschwingungen nach, die Energie pendelt zwischen Schiff und Kreisel hin und her, die Schwingungen werden wohl verlangsamt, aber nicht gedämpft).

d) Steuerung der Präzessionsbewegung. Die nach c) bei einer Rechtsdrehung von R_a eintretende linksdrehende Präzessionsbewegung von R_i bleibt unverändert, wenn R_a durch ein die Kreiselwirkung K' aufhebendes Moment in seiner gedrehten Lage festgehalten wird. Beschleunigt man aber (etwa mittels eines anstelle von Br angeordneten Zahnkranzes, der von R_a aus angetrieben wird) die Präzessionsbewegung von R_i, so vermag die verstärkte Kreiselwirkung K' die Drehung von R_a rückgängig zu machen.

Einschienenbahn von Brennan und Scherl. Gestell + äufserer Ring = Wagenkasten, Achse aa' parallel zur senkrechten Querachse des Wagens. Der Kreisel mufs labil aufgehängt sein (Schwerpunkt über der Drehachse bb'), aufser der Beschleunigung des Kreiselrahmens ist eine Dämpfung der Wagenschwingung erforderlich (Schienenreibung). Für das Durchfahren von Kurven werden zwei entgegengesetzt umlaufende Kreisel angeordnet.

E. Stofs.

Die gerade Linie, die im Berührungspunkte zweier sich stofsenden Körper zur gemeinsamen Berührungsebene winkelrecht steht, heifst Stofslinie. Befinden sich die Schwerpunkte der Körper in dieser Linie, so heifst der Stofs ein **zentrischer** oder **Zentralstofs**, im anderen Falle ein **exzentrischer Stofs**. Fallen die Bewegungsrichtungen der beiden sich berührenden Punkte in die Stofslinie, so heifst der Stofs **gerade**, im anderen Falle **schief**.

Der Stofsvorgang besteht im allgemeinen aus einer Zusammendrückungs- und einer Wiederausdehnungsperiode.

Unter einer Momentan- oder Stofskraft versteht man eine aufserordentlich (im Grenzfall unendlich) grofse Kraft, die nur eine aufserordentlich (im Grenzfall unendlich) kurze Zeit wirkt. Sie wird gemessen durch die Aenderung des Impulses (der Bewegungsgröfse), die sie an dem von ihr betroffenen Massenpunkte hervorbringt und die gleich dem Antriebe der Stofskraft ist:

$$m \cdot \Delta v = m(v' - v) = \int_t^{t'} P \, dt = \mathfrak{P}.$$

Gegenüber den Stofskräften dürfen im allgemeinen die Wirkungen endlicher stetiger Kräfte vernachlässigt werden.

a. Gerader, zentrischer Stofs.

Es seien m_1 m_2 die Massen der beiden Körper, v_1 v_2 ihre Geschwindigkeiten zu Beginn des Stofses, u ihre gemeinschaftliche Ge-

Digitized by Google

schwindigkeit im Augenblick der gröfsten Zusammendrückung, v_1' v_2' ihre Geschwindigkeiten am Ende des Stofses; es gilt dann:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u = m_1 v_1' + m_2 v_2', \qquad \text{und}$$

$$\mathfrak{P}_1 = m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2); \quad \mathfrak{P}_2 = m_1 (u - v_1') = m_2 (v_2' - u).$$

Der Quotient $k = \dfrac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = \dfrac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$ heifst Stofsziffer; sein Wert hängt von den elastischen bzw. plastischen Eigenschaften der zusammenstofsenden Körper ab; die Grenzwerte der Stofsziffer sind $k = 0$ für den vollkommen unelastischen Stofs, $k = 1$ für den vollkommen elastischen Stofs.

Allgemeiner Fall: $0 < k < 1$. Es folgt

für die Geschwindigkeiten: $u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$,

$$v_1' = u - k \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \qquad v_2' = u + k \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2),$$

für die gesamte Impulsänderung:

$$\mathfrak{P} = m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2),$$

für den Verlust an lebendiger Kraft:

$$E = m_1 \frac{v_1^2 - v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2 - v_2'^2}{2} = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

Vollkommen unelastischer Stofs: $k = 0$, $v_1' = v_2' = u$.

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} = m_1 \cdot \frac{(v_1 - u)^2}{2} + m_2 \cdot \frac{(u - v_2)^2}{2}$$

(Carnotscher Satz).

Vollkommen elastischer Stofs: $k = 1$, $E = 0$.

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = \frac{2 m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2},$$

für $m_1 = m_2$ wird $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$,

für $v_2 = 0$ wird $v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $\qquad v_2' = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1$.

Bestimmung der Stofsziffer k: Es gilt $k^2 = \dfrac{h_1}{h}$, wo h_1 die Höhe bedeutet, bis zu der eine Kugel zurückprallt, die aus der Höhe h auf eine wagerechte festliegende Platte niederfällt ($v_2 = 0$, $m_2 = \infty$, $v_1 = \sqrt{2gh}$, $v_1' = \sqrt{2gh_1}$). Die Gröfse von k^2 hängt wesentlich ab von der Geschwindigkeit, mit der die Kugel auftrifft, d. h. von h. Im Mittel ist für Elfenbein $k = {}^8/_9$, für Stahl und Kork $k = {}^5/_9$, für Glas $k = {}^{15}/_{16}$, für Holz $k = {}^1/_2$ bei $v \sim 2{,}8$ m/sk.

b. Gerader, exzentrischer Stofs.

Zwei um parallele Achsen A_1 und A_2 (Abb. 108, S. 242) sich drehende Körper treffen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 zusammen.

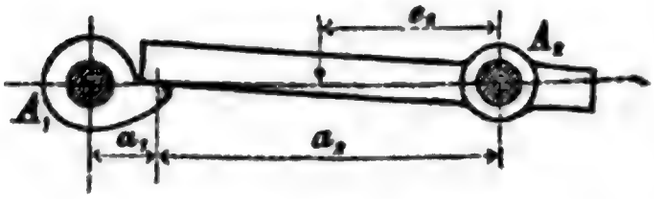
Digitized by Google

Die Trägheitsmomente der beiden Körper, bezogen auf die Drehachsen, seien J_1 und J_2. Es gelten alsdann die Formeln für den geraden, zentrischen Stofs, wenn man einsetzt:

$$m_1 = \frac{J_1}{a_1^2}, \quad m_2 = \frac{J_2}{a_2^2}; \quad v_1 = a_1\omega_1, \quad v_2 = a_2\omega_2, \quad v_1' = a_1\omega_1', \quad v_2' = a_2\omega_2'$$

(m_1 und m_2 sind die auf die Stofsstelle reduzierten Massen, S. 231).

Abb. 108.



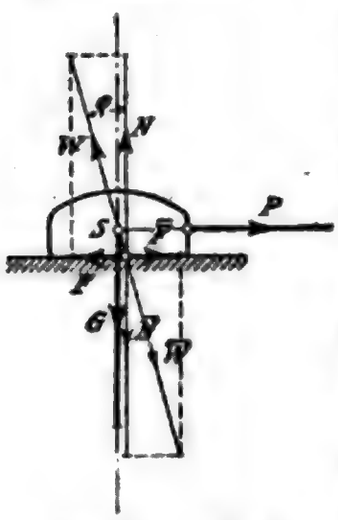
Soll die Uebertragung der Stofswirkung (Prellung) auf die Achse A_2 vermieden werden, so müssen Stofspunkt und Drehpunkt A_2 in derselben Beziehung zueinander stehen wie Schwingungsmittelpunkt und Aufhängungspunkt beim physischen Pendel (S. 234), d. h. es mufs $a_2 = \frac{J_2}{m_2 e_2}$ sein, wenn e_2 den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet.

VI. Reibung.

a. Gleitende Reibung.

An einem auf wagerechter ebener Unterlage ruhenden Körper vom Gewicht G (Abb. 109) wirke eine wagerechte von Null an wachsende Kraft P, die durch den Schwerpunkt hindurchgeht. Die Erfahrung lehrt:

Abb. 109.



1. Der Körper bleibt in Ruhe, solange die Triebkraft P den Grenzwert der ruhenden (statischen) Reibung F_0 nicht übersteigt.

2. Die Reibung bei der Bewegung (dynamische Reibung) F — gleich der zum Aufrechterhalten einer gleichförmigen Bewegung erforderlichen Triebkraft P — ist stets kleiner als F_0.

Man setzt unter Einführung zweier durch den Versuch von Fall zu Fall bestimmbarer Koeffizienten μ_0 (Reibungszahl der Ruhe) und μ (Reibungszahl der Bewegung)

$$F_0 = \mu_0 N, \qquad F = \mu N,$$

wo N der Normalwiderstand der Unterlage (in Abb. 109 $N = G$) ist.

N und F_0 bzw. F liefern zusammen den gesamten Widerstand W_0 bzw. W am Körper. Die Winkel $\varrho_0 = \sphericalangle (W_0, N)$ bzw. $\varrho = \sphericalangle (W, N)$ heifsen Reibungswinkel der Ruhe bzw. der Bewegung; es gilt:

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = \frac{F_0}{N} = \mu_0, \qquad \operatorname{tg} \varrho = \frac{F}{N} = \mu.$$

Läfst man W_0 bzw. W um die Normale der Berührungsebene als Achse kreisen, so erhält man die entsprechenden Reibungskegel.

Digitized by Google

Von den Eigenschaften des Schmiermittels selbst kommt für die Reibungszahl nach Ubbelohde*) aufser der Kapillarität (das Schmiermittel mufs die Flächen benetzen) nur die Zähigkeit η (aus den beobachteten Engler-Graden nach den Ubbelohdeschen Tafeln umzurechnen) in Betracht.

Bei reichlicher Schmierung und hinreichend grofser Geschwindigkeit v ist die Reibungszahl nach Petroff-Ubbelohde:**) proportional η und v, umgekehrt proportional dem Flächendrucke p und der Dicke δ der Schmierschicht. Bei unveränderter Temperatur ist δ umgekehrt proportional $\sqrt{p}$. Die Temperatur der Schmierschicht ist von den Eigenschaften des Schmiermittels, von der Geschwindigkeit, vom Drucke, von der Wärmeleitung der die Schmierschicht umgebenden Körper und von der Temperatur der umgebenden Luft abhängig.

In wichtigen Fällen sind besondere Versuche zur Ermittlung von μ anzustellen.

3. Die Reibung wirkt stets der Relativbewegung (-geschwindigkeit) entgegen, die der betrachtete Körper gegenüber dem Nachbarkörper hat (gleichgültig, welches die Richtung der angreifenden Kraft ist).

4. Bewegt sich ein Körper auf einer Unterlage, so wird die Bewegung durch jede noch so kleine Kraft in deren Sinne abgeändert (wie wenn keine Reibung vorhanden wäre).

Beispiele: Zusatzkraft in der Bewegungsrichtung: Regulierung der Parsonsturbine. Zusatzkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung: Regelung bei der Riderschiebersteuerung.

b. Reibungszahlen.

1. Eiserne **Radreifen** auf trockenen eisernen **Schienen**, nach Poirée.

(Eisenbahnwagen von 3400 bis 8400 kg Gewicht.)

Geschwindigkeit in km/st $v =$	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
Reibungszahl . . . . $\mu =$	0,209	0,206	0,171	0,145	0,136	0,118

2. Stählerne **Radreifen auf Stahlschienen**, nach Galton.

Geschwindigkeit in km/st $v =$	0	10,93	21,8	43,9	65,8	87,6	96,48
Reibungszahl . . . . $\mu =$	0,242	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038	0,027

3. Gufseiserne **Bremsklötze** an stählernen **Radreifen**, nach Galton.

Geschwindigkeit in km/st $v =$	0	8,05	16,09	40,23	72,36	96,48
Reibungszahl . . . . $\mu =$	0,330	0,273	0,242	0,166	0,127	0,074

Ist v die (gleichbleibende) Fahrgeschwindigkeit in km/st, so haben Versuche von Wichert***) für die gleitende Reibung zwischen Bremsklötzen aus Stahlguss und stählernen Radreifen ergeben

$$\mu = \beta \frac{1 + 0{,}0112\,v}{1 + 0{,}06\,v},$$

worin für trockene Reibungsflächen $\beta = 0{,}45$, für nasse $\beta = 0{,}25$ ist. Soll ein mit der Geschwindigkeit v fahrender Zug zum Stillstande gebracht werden, so kann man für die ganze Bremsdauer eine mittlere Reibungszahl μ' in Rechnung stellen. Für verschiedene v ergeben sich folgende Reibungszahlen, wobei μ' für ungünstige Verhältnisse (feuchte Schienen) bestimmt ist:

*) Zeitschrift „Petroleum" 1912, Heft 14.
**) Petroff, „Neue Theorie der Reibung".
***) Zentralbl. Bauv. 1894 S. 73.

Digitized by Google

Geschwindigkeit in km/st $v =$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Trockene Reibungsflächen, $\mu =$	0,450	0,313	0,250	0,215	0,192	0,176	0,164	0,154	0,147	0,141
Nasse Reibungsflächen . $\mu =$	0,250	0,174	0,139	0,119	0,107	0,098	0,091	0,086	0,082	0,078
Mittlerer Wert . . . . $\mu' =$		0,201	0,164	0,142	0,128	0,117	0,109	0,103	0,098	0,093

4. Bremsen, nach L. Klein*).

μ bei Geschwindigkeiten von 1 bis 20 m/sk und Drücken von 0,5 bis 10 kg/qcm annähernd unveränderlich.

Werte von μ.

Holz in Längsfasern, Bremskränze sauber bearbeitet.

	Buche	Eiche	Pappel	Ulme	Weide
Gufseisen . . .	0,29—0,37	0,30—0,34	0,35—0,40	0,36—0,37	0,46—0,47
Schmiedeisen .	0,54	0,51—0,40	0,65—0,60	0,60—0,49	0,63—0,60

Bei Gufseisen gelten die höheren Werte, wenn die Bremsscheibe mit Benzin gereinigt; die niedrigeren, wenn die Scheibe nur sauber abgewischt ist; bei Schmiedeisen ist das Entgegengesetzte der Fall.

Für unbearbeitetes Schmiedeisen ist μ schwankend und wesentlich kleiner als für glatte Scheiben.

5. Druckwasser-Hebezeuge, nach H. Lang.

a) Bronze- oder Pockholz-Schieber auf Bronze. μ ist unveränderlich bei langsamer, wechselseitiger Bewegung und bei Flächendrücken von 2 bis 100 at.

Schieber unausgesetzt gefettet . . . . . $\mu = 0{,}06$,
Schieber mittels zahlreicher Nuten vom Wasser benetzt $\mu = 0{,}10$,
Schieber trocken laufend und knarrend . . . . . μ bis 0,30.

b) Stopfbüchsen mit Hanf, Baumwolle oder Lederstulp gedichtet. μ ist unveränderlich bei Wasserpressungen zwischen 1 und 50 at.

α) Baumwolle oder Hanf, lose oder geflochten, in heifsem Talg getränkt, Kolben glatt, Büchse nicht fest angepreßt, also Packung noch elastisch, gewöhnliche Abmessungen — selbst noch nach Monaten . . . . . $\mu = 0{,}06$ bis 0,11.

β) Baumwolle oder Hanf, schwierige Verpackung (schwere Stopfbüchse, ungünstige Lage usw.) . . . . . μ bis 0,25.

γ) Lederstulp.
weiches Leder, gute Ausführung . . . . . $\mu = 0{,}03$ bis 0,07,
hartes, stark lohgares Leder. . . . . $\mu = 0{,}10$ bis 0,13,
ungünstige Anlage (rauher Kolben, schmutziges Wasser usw.) . . μ bis 0,20.

Weiteres s. Abschnitt Maschinenteile, unter Stopfbüchsen.

6. Schleifsteine. Die Reibungszahl zwischen grobkörnigem Sandstein und Gufseisen $\mu = 0{,}21$ bis 0,24, Stahl $\mu = 0{,}29$, Schmiedeisen $\mu = 0{,}41$ bis 0,46, je nachdem der Stein frisch geschärft oder stumpf ist; für feinkörnigen Sandstein ist im Mittel zwischen dem nassen Steine und Gufseisen $\mu = 0{,}72$, Stahl $\mu = 0{,}94$, Schmiedeisen $\mu = 1{,}0$.

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 10, herausgeg. v. V. d. I., u. „Glück-Auf" 1903 S. 387.

Digitized by Google

7. Werte μ der Gesamtreibung für Strafsenfuhrwerke:

a. bei eisernen Radreifen.*)

Glatte Granitplatten-Bahn	0,006.
Gleise der Strafsenbahnen im Mittel	0,006 bis 0,008.
Gute Asphaltstrafse	0,010.
Vorzügliches Steinpflaster	0,015.
Chaussierte Strafse, gewöhnl. Schotter, in vorzügl. Zustande	0,016.
Gutes Holzpflaster	0,018.
Gutes Steinpflaster	0,020.
Chaussierte Strafse, in gutem Zustande	0,023.
dsgl., mit Staub usw. bedeckt	0,028.
Geringes Steinpflaster	0,033.
Chaussierte Strafse, mit Schlamm bedeckt, ausgefahren	0,035.
Erdwege, sehr gute	0,045.
Chaussierte Strafse von sehr geringer Beschaffenheit	0,050.
Erdwege, gute bis schlechte	0,080 bis 0,160.
Loser Sand	0,15 bis 0,30.

b. bei Gummiradreifen.

Die Art der Bereifung sowie das Gummifabrikat ist von wesentlichem Einfluss. Bei Geschwindigkeiten von 25 km/st haben Versuche mit Automobilen auf Asphaltbahnen ergeben: $\mu = 0{,}021$ bis $0{,}031$.

8. Reibungszahlen für Schlitten.

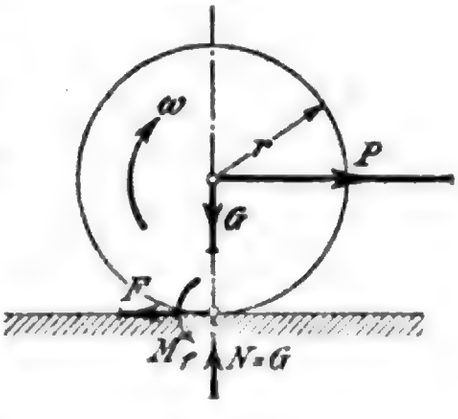
Unbeschlagene Holzkufen auf glatter Holz- oder Steinbahn,	ungeschmiert	0,38.
	geschmiert mit trockener Seife	0,15.
	geschmiert mit Talg	0,07.
Unbeschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis		0,035.
Beschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis		0,02.

9. Reibungswiderstände von **Eisenbahnfahrzeugen** s. III. Bd.; Reibungswiderstand von **Schiffen** s. I. Bd., Dynamik flüssiger Körper und II. Bd., Schiffbau.

c. Rollbewegung und rollende Reibung.

1. Ein Zylinder rolle unter dem Einfluss der Kraft P auf wagerechter Ebene, ohne zu gleiten (Abb. 110). An der Berührungsstelle tritt aufser der **gleitenden Reibung** F noch das der Drehung entgegenwirkende Kräftepaar M_f der **rollenden Reibung** auf.

Abb. 110.



Ohne die gleitende Reibung F würde keine Rollbewegung eintreten, sondern ständig dieselbe Zylindermantellinie auf der Ebene entlanggleiten.

Man setzt

$$M_f = f N,$$

wo N der Normalwiderstand der Unterlage (in Abb. 110 $N = G$) ist.

Die Gröfse f hat die Dimension einer

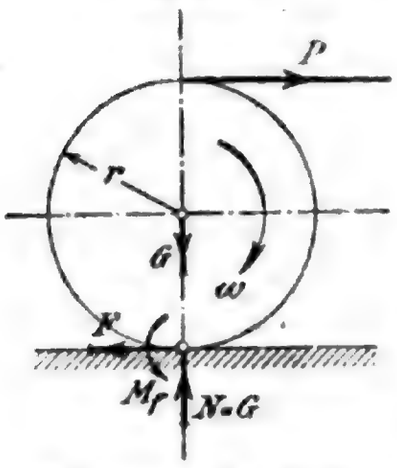
*) H. d. B. I. 8. 552. — Zentralbl. Bauv. 1888 S. 543.

Digitized by Google

Länge, heifst der Hebelarm oder die **Reibungszahl der rollenden Bewegung**, und ist z. B.

für Pockholz auf Pockholz . . . . . $f = 0{,}047$ cm,
„ Ulmenholz auf Pockholz . . . . . $f = 0{,}081$ cm,
„ Eisen auf Eisen (und Stahl auf Stahl) i. M. $f = 0{,}05$ cm.

Abb. 111.



2. Es gilt:

$$s = r\alpha, \qquad v = r\omega, \qquad p = r\varepsilon,$$

$$P - F = m\frac{dv}{dt} = mr\varepsilon,$$

$$Fr - M_f = J\frac{d\omega}{dt} = m'r^2\varepsilon,$$

wo $J = {}^1/_2 mr^2$ das Trägheitsmoment und $m' = {}^1/_2 m$ die auf den Umfang reduzierte Masse des Zylinders ist (S. 201 unter $\gamma 3$ und S. 231 unter 2 2). Es folgt:

$$P = \frac{3}{2}mr\varepsilon + \frac{M_f}{r}, \quad F = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}\frac{M_f}{r}.$$

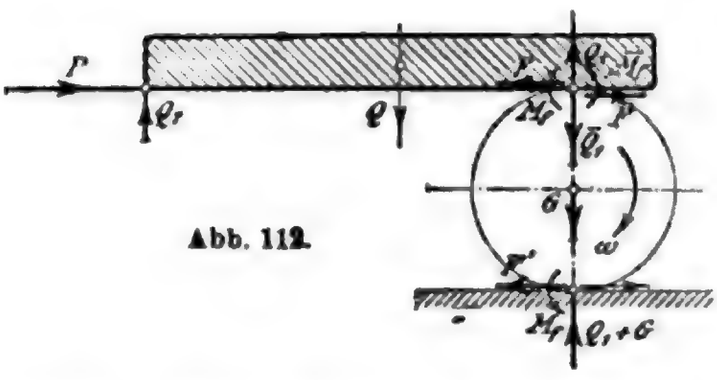
Da höchstens $F = \mu_0 G$ ist (S. 242 unter a), so erfolgt gleichzeitiges Rollen und Gleiten, wenn $P > G\left(3\mu_0 - 2\frac{f}{r}\right)$.

Für gleichförmiges Rollen ($\varepsilon = 0$) folgt: $P = F = \frac{M_f}{r}$.

Für $P = 0$ folgt die eintretende Verzögerung

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}\frac{M_f}{mr^2} \text{ und } F = \frac{2}{3}\frac{M_f}{r}.$$

Abb. 112.



3. Für Abb. 111 gilt bei gleichförmigem Rollen:

$$P = F = \frac{1}{2}\frac{M_f}{r}.$$

4. Fortwälzen einer Last Q (Abb. 112). Es gilt für gleichförmiges Rollen:

$$P = \frac{1}{2}Q_1\frac{f}{r} + \frac{1}{2}(Q_1 + G)\frac{f'}{r},$$

wo Q_1 der auf die Walze entfallende Anteil von Q, G das Gewicht der der Walze und f bzw. f' die Hebelarme der rollenden Reibung für Walze und Last bzw. für Walze und Unterlage bedeuten.

d. Zapfen- und Lagerreibung.

1. Tragzapfengleitlager.

α) Reibungswiderstand.

Ist P der auf den Zapfen ausgeübte Druck in kg,
l die Länge und $2r$ der Durchmesser des Zapfens in cm,

Digitized by Google

$p = \frac{P}{2rl}$ der mittlere Normaldruck (spezifische Lagerbelastung) in kg/qcm,

μ_1 die Zapfenreibungszahl,

$\overline{\mu} = \mu_1 p$ die Zapfenreibungszahl der Flächeneinheit (spezifische Reibungszahl), so ist

das **Moment der Zapfenreibung** für den zylindrischen Zapfen (Abb. 113)

$$M_r = \mu_1 P r \text{ in cmkg.}$$

Abb. 113.

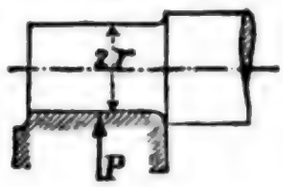
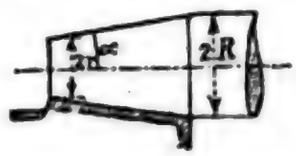


Abb. 114.



Die sekundliche Reibungsarbeit bei n Uml./min

$$A_r = \frac{M_r \pi n}{30} = \mu_1 \frac{P r \pi n}{30}$$

in cmkg/sk.

Bei kegelförmigen Zapfen (Abb. 114) ist für r der mittlere Halbmesser zu nehmen.

β) Werte der Zapfenreibungszahl μ_1.

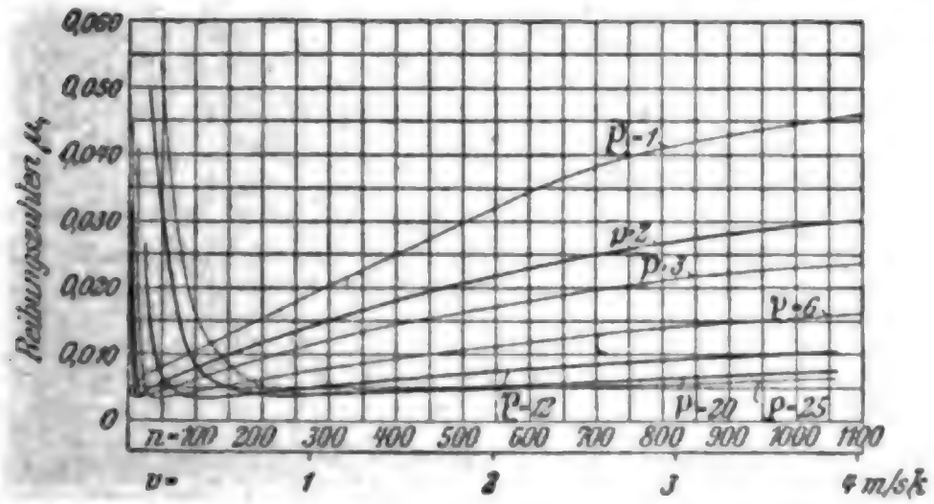
1. Die Zapfenreibungszahl ist wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeit bei der Herstellung gröfser für neue und geringer für eingelaufene Zapfen.

2. Die Zapfenreibungszahl ist abhängig von der Lagerbelastung, der Zapfenumfangsgeschwindigkeit, der Temperatur, dem Schmiermittel und der Lagerform. Aus den Versuchen von Thurston,*) Tower,*) Stribeck,**) Lasche,***) Heimann†) folgt für vollkommen geschmierte Zapfen:

a) Für ungeteilte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings um die Welle möglich ist, ist die spezifische Reibungs-

Abb. 115 nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Sellerslager mit Ringöler, 70 mm Durchmesser, 230 mm Länge. Schmierung durch Gasmotorenöl. Oeltemperatur 25° C.



*) Engineer 1884, Bd. 58 S. 57 ff.
**) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341.
***) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1881.
†) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1161.

zahl $\overline{\mu}$ vom Drucke unabhängig, die Zapfenreibungszahl also dem Flächendrucke umgekehrt proportional. Für geteilte oder besonders ausgesparte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings um die Welle nicht vorhanden ist, wächst die Reibung (bei gleichem Drucke) mit der Gröfse der Reibungsfläche.

b) Die Reibungszahl der Ruhe ist unabhängig von der Pressung. Die Reibungszahl der Bewegung nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit zunächst ab, und zwar bei kleinen Pressungen schneller als bei gröfseren. Nach Erreichung eines für alle (zulässigen) Pressungen annähernd gleichen Mindestwertes nimmt die Reibung wieder zu: bei kleinen Pressungen schneller als bei grofsen, um einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Grenze, die bei 10 m/sk erreicht wird, zuzustreben (Abb. 115, S. 247).

c) Eine Temperatursteigerung innerhalb gewisser Grenzen (0^0 bis 40^0) hat eine Verminderung von μ_1 zur Folge, u. zw. verändert sich μ_1 ungefähr umgekehrt proportional der Temperatur über dem Nullpunkte.

d) Die spezifische Reibungszahl ist angenähert umgekehrt proportional der Oelschichtdicke bzw. dem Lagerspielraum.

3. Ueber die Einwirkung verschiedener Schmierverfahren ermittelte Tower bei einem Stahlzapfen in Bronzeschale mit $d = 102$ mm, $l = 152$ mm für Rüböl (Umfangsgeschwindigkeit 0,8 m/sk):*)

Oelbad	bei $p_m = 18{,}5$ kg/qcm	.	$\mu_1 = 0{,}001\,39$,
Dochtschmierung	bei $p_m = 17{,}1$ kg/qcm	.	$\mu_1 = 0{,}009\,80$,
Reibekissen . .	$p_m = 19{,}1$ kg/qcm	.	$\mu_1 = 0{,}009\,00$.

4. Reibungszahlen μ_1 für verschiedene Oelsorten nach Versuchen des Materialprüfungsamts**) mittels Martensscher Oelprobiermaschine (Stahlzapfen $d = 100$ mm, $l = 70$ mm in Oelbad) sind in Tafel I zusammengestellt.

Tafel I.

Bezeichnung des Oeles	Druck in kg/qcm								
	10			25			40		
	Geschwindigkeit in m/sk								
	0,5	1,0	2,0	0,5	1,0	2,0	0,5	1,0	2,0
Rohes Rüböl . .	0,01068	0,01297	0,01862	0,00599	0,00617	0,00965	0,00497	0,00565	0,00676
Rohes Rüböl (aus den Achsbüchsen entnommen) . .	0,05341	0,02518	0,05722	—	0,02139	0,03727	—	—	—
Rohes Rüböl (filtriert)	0,01373	0,01572	0,02289	0,00849	0,00959	0,01375	0,00676	0,00764	0,01031
Ger. Rüböl . . .	0,00748	0,01373	0,01434	0,00635	0,00782	0,01075	0,00554	0,00642	0,00802
Amerik. Mineralöl, durchsichtig, dünnflüssig . .	0,00504	0,00763	0,00961	0,00458	0,00532	0,00611	0,00378	0,00390	0,00451
Russ. Mineralöl, durchsichtig, dünnflüssig . .	0,00763	0,01251	0,01572	0,00623	0,00819	0,00996	0,00493	0,00573	0,00760
Deutsches Zylinderöl, undurchsichtig, dickflüssig	0,08027	0,06791	0,05921	0,04094	0,03617	0,03122	0,03083	0,02590	0,02109
Gasmotorenöl (Mischöl) . . .	0,00702	0,00916	0,01389	0,00586	0,00752	0,00947	0,00481	0,00619	0,00714

*) Z. d. V. d. I. 1885 S. 836 ff.
**) Mitt. Materialpr.-Amt.

Digitized by Google

5. Die Abhängigkeit der Reibungszahl von Geschwindigkeit und Flächendruck zeigen die von Stribeck*) und Lasche**) gefundenen Werte der Abb. 115, S. 247 und der Tafeln II u. III.

Tafel II: Werte μ_1 nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Weifsmetallager mit Ringöler; $d = 70$ mm, $l = 230$ mm. Schmierung durch Gasmotorenöl. Oeltemperatur 25°.

v = m/sk	$p = 1$	2,25	4	9	16	25	36	49
7,7	—	0,0573	0,04	0,0209	0,0136	0,0112	—	—
4,03	0,067	0,048	0,0355	0,02	0,0128	0,0102	0,0087	0,0077
2,78	0,05	0,039	0,0288	0,0168	0,0114	0,0091	0,008	0,0071
1,39	0,0415	0,0302	0,0213	0,0126	0,0085	0,007	0,0063	0,0059
0,7	0,028	0,0212	0,0156	0,0091	0,0064	0,0052	0,0048	0,0045
0,23	0,018	0,0108	0,0081	0,0051	0,0035	0,0030	0,0027	0,0026
0,12	0,013	0,0072	0,0052	0,0032	0,0025	0,0021	0,0020	0,0020
0,044	0,0095	0,0046	0,0031	0,0020	0,0019	0,0017	0,0017	0,0025
0,029	0,0074	0,0039	0,0036	0,0018	0,0016	0,0017	0,0023	0,0058
0,018	0,0067	0,0034	0,0033	0,0017	0,0016	0,0019	0,0031	0,0089
0	—	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,23

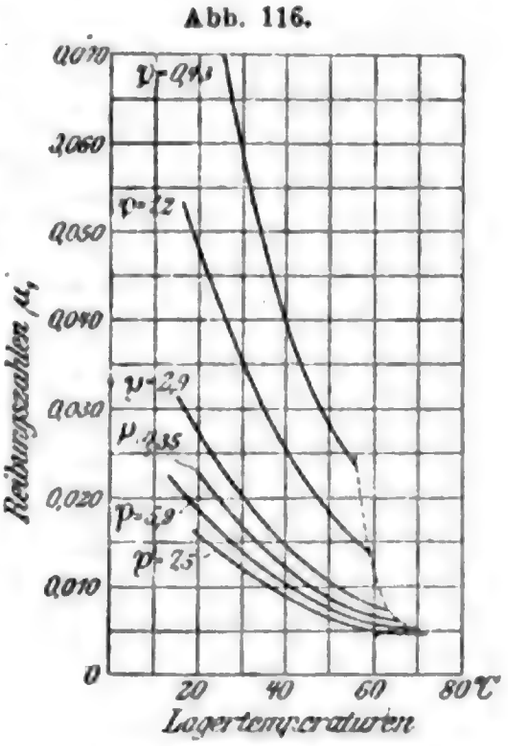
Tafel III nach Lasche.

Versuchsgegenstand: Stahlzapfen. Lagerschalen: Weifsmetall.
$d = 110$ mm, $l = 240$ mm, $p = 6{,}5$ kg/qcm. Oeltemperatur 50°.
Schmierung mit Imperial 0.

v m/sk	3	5	10	15	20	23
μ	0,0057	0,0067	0,0083	0,0104	0,010	0,0102

6. Einfluſs der Lagertemperatur nach Stribeck, Abb. 116 (Versuchsgegenstand wie bei Abb. 115). Umdrehungen i. d. Min. 1100 entsprechend 4,03 m/sk Umfangsgeschwindigkeit.

Abb. 116.



7. Für überschlägliche Rechnungen, bei denen eine gewisse Sicherheit gegen zu niedrige Beurteilung der Reibung verlangt wird, kann genommen werden: bei guter Schmierung mit Rüböl, Mineralfett, Mineralöl oder deren Mischungen mit Petroleum für gut eingeschliffene Stahlzapfen in Bronzelagern $\mu_1 = 0{,}06$. Bei schlechter Schmierung und im Freien (Seiltriebe, Drehscheiben, Schiebebühnen usw.) ist $\mu_1 = 0{,}08$ bis $0{,}10$.

2. Spurzapfenlager.

α) Reibungswiderstand.

Ist P der Zapfendruck in der Zapfenachse in kg,

*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341 ff. **) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1831 ff.

Digitized by Google

dF ein Element der Zapfenoberfläche in qcm,
y dessen Abstand von der Drehachse in cm,
p der Flächendruck für dF in kg/qcm,
μ die Reibungszahl für gleitende Reibung,

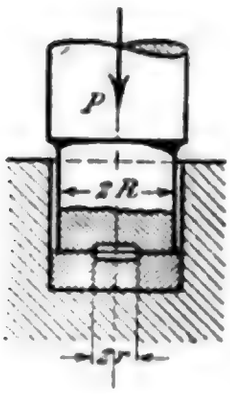
so ist das Moment der Zapfenreibung

$$M_r = \mu p \int y \cdot dF \text{ in cmkg},$$

die sekundliche Reibungsarbeit bei n Uml./min

$$A_r = \frac{M_r \pi n}{30} \text{ in cmkg/sk}.$$

Abb. 117.



Für den Zapfen nach Abb. 117 (auch für den Kammzapfen bei Halslagern) gilt dann:

$$M_r = \frac{2}{3} \mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2};$$

Mit $r = 0$ folgt für den vollen ebenen Zapfen

$$M_r = \frac{2}{3} \mu P R.$$

β) Werte der Reibungszahl μ.

1. Allgemeines über Veränderlichkeit von μ und seine Gröfse vgl. S. 243. Im übrigen gilt auch hier das Gesetz wie für Tragzapfen, dafs die Reibungszahl umgekehrt mit der Pressung und direkt mit der Dünnflüssigkeit des Oeles, d. h. mit zunehmender Temperatur abnimmt,*) und zwar umsoweniger, je gröfser die Pressung ist.

2. Einfluſs von Pressung und Temperatur auf die Reibungszahl nach Versuchen von Woodbury*) aus nachstehender Tafel:

Versuchsgegenstand: Ringzapfen aus Stahl, 57,8 mm äufserer und 36,3 mm innerer Durchmesser. Geschwindigkeit 300 Uml./min. Schmierung mit Paraffinöl.

p in at	Temperatur				
	15,5° C	21° C	26,5° C	32° C	37,5° C
0,07	0,34	0,268	0,212	0,17	0,138
0,35	0,09	0,074	0,0620	0,0520	0,0436
0,70	0,0554	0,0468	0,0402	0,0348	0,0302
1,05	0,0435	0,0375	0,0325	0,0280	0,0257
1,4	0,0375	0,0327	0,0289	0,0257	0,0227
1,76	0,0336	0,0296	0,0265	0,0236	0,0210
2,1	0,0307	0,0273	0,0245	0,0222	0,0199
2,46	0,0286	0,0256	0,0231	0,0210	0,0190
2,8	0,0221	0,0243	0,0221	0,0201	0,0181

*) Z. d. V. d. I. 1885 S. 450 ff.

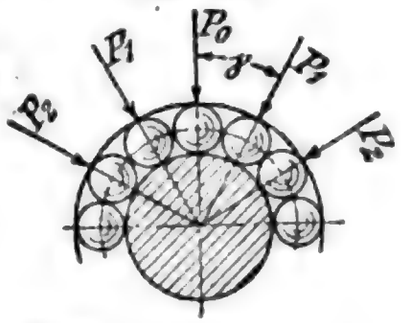
Digitized by Google

8. Kugellager.

α) Reibungswiderstand.

Ist P die Belastung eines Laufringes in kg,
S die Summe aller Einzelbelastungen der Kugeln in kg,
γ der Winkel der StützNormalen zweier benachbarter Kugeln,
d der Kugeldurchmesser in cm,
D_0 der Durchmesser des Kreises der Kugelmittelpunkte in cm,
f die Reibungszahl der rollenden Bewegung in cm,
μ_i die ideelle Reibungszahl für Kugellager,
r der Halbmesser der Welle in cm,

Abb. 118.



so ist unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter 2, nach Stribeck*) (Abb. 118)

$$M_r = S f \frac{D_0}{d} = \mu_i P r \text{ cmkg},$$

$$A_r = S f \frac{D_0}{d} \frac{\pi n}{30} \text{ cmkg/sk},$$

$$S = P_0 + 2P_1 \cos\gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \ldots . 2P_n \cos n\gamma,$$

$$P_1 = P_0 \cos^{3/2}\gamma, \quad P_2 = P_0 \cos^{3/2} 2\gamma \text{ usf.},$$

$$P = P_0 (1 + 2\cos^{3/2}\gamma + 2\cos^{3/2} 2\gamma + \ldots . + 2\cos^{3/2} n\gamma).$$

Für $z = 10$ bis 20 Kugeln im Umfange einer Laufrinne ergibt sich dann angenähert

$$P_0 = \frac{5}{z} P, \quad S \sim 1{,}2\, P, \quad f = \frac{r \mu_i}{1{,}2 \frac{D_0}{d}}.$$

Die Reibungsarbeit A_r vermindert sich mit abnehmendem Verhältnis $D_0 : d$, wird also um so kleiner, je weniger Kugeln der Laufring faßt (s. auch Abschn. Maschinenteile, Lager).

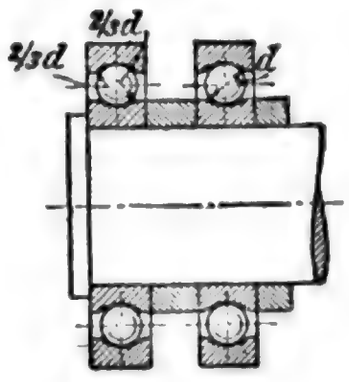
β) Zapfenreibungszahlen μ_i.

Die ideelle Reibungszahl μ_i ist innerhalb weiter Grenzen von der Umdrehungszahl und Temperatur unabhängig, nimmt dagegen mit wachsender Belastung ab.

1. Versuche von Stribeck zeigen, daß für μ_i die Bauart des Lagers von weitestgehendem Einfluß ist. Für ein Lager nach Abb. 119 mit

$$r = 3{,}5 \text{ cm}, \quad D_0 = 10{,}2 \text{ cm},$$
$$d = {}^7/_8'' = 2{,}2225 \text{ cm}$$

Abb. 119.



(Laufringe aus Stahl, sauber geschliffen, die Laufflächen der Ringe bilden im Querschnitt Kreisbogen, deren Halbmesser $^2/_3$ des Kugeldurchmessers betragen, diese Konstruktion für große Belastungen am besten geeignet) ist μ_i:

*) Z. d. V. d. I. 1901 S. 121.

Digitized by Google

Belastung P in kg	Umdrehungen i. d. Min. 65	385	780
380	0,0033	0,0035	0,0037
850	0,0020	0,0021	0,0022
1100	0,0017	0,0018	0,0019
1580	0,0016	0,0016	0,0017
2050	0,0015	0,0015	0,0015
3000	**0,0015**	**0,0013**	**0,0013**
4900	.	.	0,0011

4. Rollenlager.*)

α) Reibungswiderstand.

Ist P die Gesamtlagerbelastung in kg,
b die Rollenlänge in cm,
d der Rollendurchmesser in cm,
z die Zahl der Rollen,
D_0 der Durchmesser des Kreiszylinders, auf dem die Rollenachsen sich bewegen in cm,

$p = \frac{P}{\frac{z}{5} l d}$ die gröfste spezifische Lagerbelastung in kg/qcm,

so gelten nach Stribeck sinngemäfs die gleichen Formeln wie für Kugellager.

Unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter 1 und 3 ist dann

$$M_r = 1{,}2\, P f \frac{D_0}{d} = \mu_i\, P r \text{ cmkg.}$$

Gröfste Belastung der Rollen bei $z = 10$ bis 20 angenähert

$$P_0 = 5 \frac{P}{z}.$$

β) Zapfenreibungszahlen f und μ_i.

Die Reibung ist fast unabhängig von der Geschwindigkeit, und auch die Reibung der Ruhe unterscheidet sich nur unerheblich von der Reibung der Bewegung. (Kleiner Anlaufwiderstand.) Mit wachsender Belastung nimmt die Reibung ab, ebenso mit zunehmender Temperatur.

Für Rollenlager verschiedener Bauarten haben Versuche ergeben:

$p =$	3	5	7,5	10	15
$f =$	0,0045	0,0034	0,0027	0,0023	0,0018;

damit folgt μ_i aus:

$$\mu_i = \frac{1{,}2}{r} \frac{D_0}{d} f.$$

*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1463.

Digitized by Google

e. Reibung an Getrieben.

1. Allgemeines.

α) Bezeichnet für eine bestimmte Bewegung (Hub; gegebenenfalls auch unendlich kleine Bewegung) eines Getriebes

P die zugeführte Triebkraft in kg,
Q den Nutzwiderstand (Nutzlast) in kg,
$A_p = Pp$ die zugeführte Arbeit in mkg,
$A_q = Qq$ die Nutzarbeit in mkg,

so gilt, wenn die Arbeiten der toten Gewichte und etwaige Aenderungen der lebendigen Kraft nicht berücksichtigt zu werden brauchen:

$$A_p = A_q + A_r, \qquad A_r = \text{Reibungsarbeit},$$

$$\eta = \frac{A_q}{A_p} \text{ Wirkungsgrad}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{A_r}{A_q} \text{ verhältnismäfsiger Arbeitsverlust}.$$

Es ist: $\mathfrak{B} = \frac{1}{\eta} - 1, \qquad \eta = \frac{1}{1+\mathfrak{B}}.$

Bezeichnet P_0 in kg die ideelle Triebkraft, welche die Nutzlast Q ohne Vorhandensein der Reibungswiderstände im Gleichgewicht halten würde, und Q_0 in kg die ideelle Nutzlast, die durch die wirkliche Triebkraft bei reibungsloser Bewegung überwunden werden könnte, so ist auch

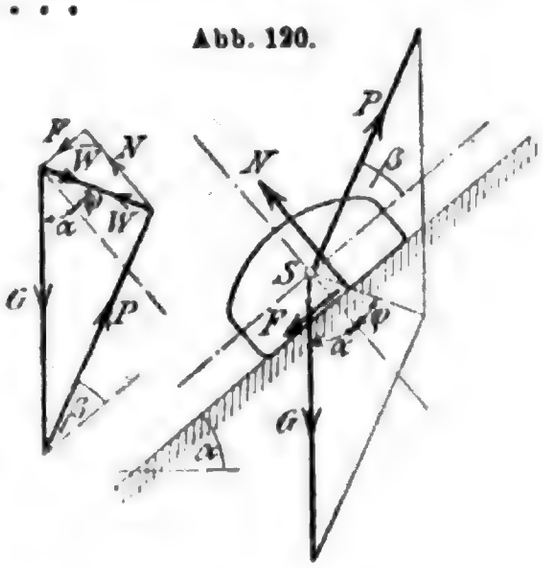
$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Besteht ein Getriebe aus mehreren Teilgetrieben mit den Wirkungsgraden $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$, so ist der **Gesamtwirkungsgrad**

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots\ldots$$

β) Beim Rückwärtsgang wirkt die Nutzlast treibend. Es ist entweder eine Kraft P' erforderlich, um den Rückwärtsgang zu verhindern ($P' < P$); oder es mufs eine entgegengesetzt gerichtete Kraft P'' aufgewendet werden, um den Rückwärtsgang einzuleiten (**selbsthemmendes** oder selbstsperrendes **Getriebe**.

Abb. 120.



2. Reibung auf der schiefen Ebene.

Für P, P' und P'' (Bedeutung oben unter β; Abb. 120) gilt:

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = G\,\frac{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}{\cos\beta \pm \mu\sin\beta} = G\,\frac{\sin(\alpha \pm \varrho)}{\cos(\beta \mp \varrho)}.$$

Selbsthemmung für $\alpha < \varrho$.

Für die beschleunigte Aufwärtsbewegung z. B. ist:

$$m\frac{dv}{dt} = P(\cos\beta + \mu\sin\beta) - G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$= P\,\frac{\cos(\beta-\varrho)}{\cos\varrho} - G\,\frac{\sin(\alpha+\varrho)}{\cos\varrho}.$$

Digitized by Google

Für $\beta = -\alpha$, P wagerecht, gilt:

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = G \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho); \quad \eta = \operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varrho).$$

3. Reibung am Keil.

Für das Getriebe (Abb. 121) gilt (P, P', P'' S. 253 unter β):

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = Q \frac{\cos\varrho_3}{\cos\varrho_1} \frac{\sin[\alpha \pm (\varrho_1 + \varrho_2)]}{\cos[\alpha \pm (\varrho_2 + \varrho_3)]}.$$

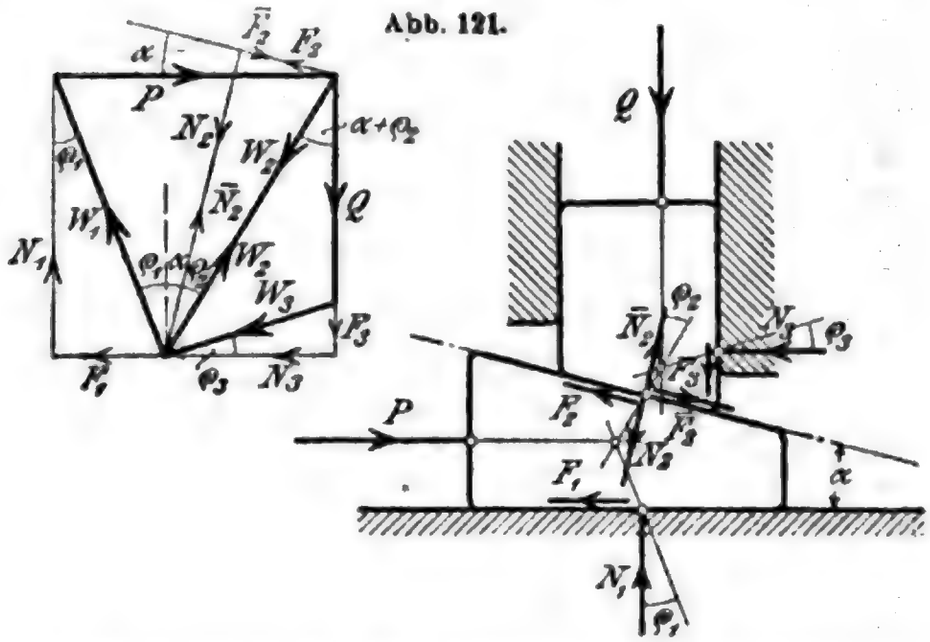
Am Keil halten sich P, W_1, W_2, am Gleitstück Q, $\bar{W}_2$, W_3 das Gleichgewicht.

Selbsthemmung für $\alpha < \varrho_1 + \varrho_2$.

Für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ wird einfacher:

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm 2\varrho); \quad \eta = \operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}(\alpha + 2\varrho).$$

Abb. 121.



4. Reibung am Schraubengewinde.

Bei Schraubengetrieben sind noch zu berücksichtigen: Reibung am Hals- oder Spurzapfen, Reibung an der Führung für die Wandermutter u. dgl.

α) Flachgängiges (Rechteck-) Gewinde. Es sei Abb. 122:

h die Ganghöhe der Schraube,

r der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,

α der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{2r\pi} = 1 : n$ die Steigung der mittleren Schraubenlinie,

P die am Halbmesser r wirkende Kraft,

K die am Halbmesser R (Schlüssel) wirkende Kraft,

Q die (senkrechte) Last.

Es ist $KR = Pr$ und (P, P', P'' S. 253 unter β):

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho) = Q \frac{h \pm 2r\pi\mu}{2\pi r \mp \mu h}.$$

Digitized by Google

Selbsthemmung für $\alpha < \varrho$.

Wirkungsgrad $\eta = \operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$.

β) Scharfgängiges (Dreieck-) Gewinde. Bezeichnungen wie unter α). Ferner sei β der halbe Kantenwinkel des Gewindes.

Es gilt:

$$\left.\begin{matrix} P \\ P', -P'' \end{matrix}\right\} = Q\,\frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \mu\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}{1 \mp \mu\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}} = Q\operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho'),$$

wo

$$\operatorname{tg}\varrho' = \mu\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta} = \mu\sqrt{1+\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta};$$

meist ist α ein kleiner Winkel und sehr angenähert

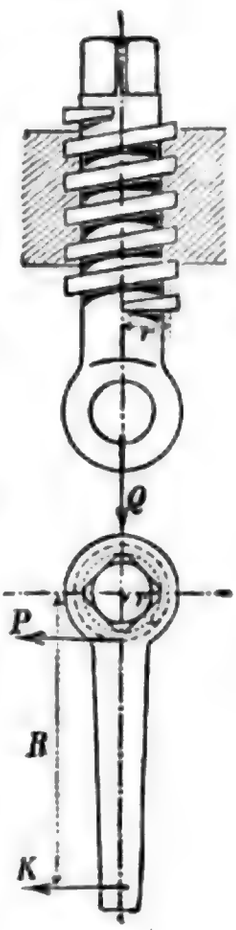
$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu}{\cos\beta}.$$

Selbsthemmung für $\alpha < \varrho'$.

Wirkungsgrad $\eta = \operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varrho')$.

Es ist $\varrho' > \varrho$, also bei gleichem Steigungswinkel der Wirkungsgrad für Dreieckgewinde stets kleiner als für Rechteckgewinde ($\beta = 0$).

Abb. 122.



γ) Ist d der äufsere Gewindedurchmesser, d_1 der Kerndurchmesser, s_0 die Schlüsselweite (s. Abschnitt Maschinenteile, Schrauben), r_0 der Halbmesser der Muttersitzfläche und μ_1 die Reibungszahl zwischen Mutter und Unterlage, so ist

$$r = \frac{d + d_1}{4}, \qquad r_0 = \frac{d + s_0}{4} \sim 1{,}4\,r,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{\mu(d + d_1)},$$

und daher das Drehmoment zum **Anziehen der Mutter**

$$M = Pr + Q r_0 \mu_1 = [\operatorname{tg}(\varrho' + \alpha) + 1{,}4\,\mu_1]\,Q\,r$$

und das Drehmoment zum **Lösen der Mutter**

$$M'' = P''r + Q r_0 \mu_1 = [\operatorname{tg}(\varrho' - \alpha) + 1.4\,\mu_1]\,Q\,r.$$

Für Rechteckgewinde ist ϱ statt ϱ' zu setzen.

5. Reibung an Zahnrädern.

1. Stirnräder.

$\mathfrak{d}$ (Abb. 123, S. 256) sei der augenblickliche Berührungspunkt der beiden Zahnprofile k_1 und k_2 (S. 213 u. f.). Der in die Richtung $\mathfrak{d}\mathfrak{P}$ fallende Normalwiderstand N liefert mit der Reibung $F = \mu N$ zusammengesetzt den zwischen den beiden Profilen auftretenden Gesamtwiderstand W, der die gemeinschaftliche Tangente der Teilkreise im Punkte ν schneidet.

Bestimmt man zu den Widerständen W_1 und W_2 (gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet) die in die Geraden $\nu\mathfrak{P}$ und νM_1 bzw. νM_2 fallenden Gleichgewichtskräfte $P_1 P_2$ und S_1 bzw. S_2 (Abb. 123), so gilt $(P_1 - P_2)\,v = \mu N (c_1 - c_2)$, wo v die Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis und c_1, c_2 die Gleitgeschwindigkeit der Zahnflanken sind (S. 214 unter 4); d. h. $(P_1 - P_2)$ ist der zur Ueberwindung der Reibung

Digitized by Google

erforderliche Teil der Umfangskraft. Trägt man $(P_1 - P_2)$ als Ordinate und die Abwicklung des zugehörigen Teilkreisbogens als Abszisse einer Kurve auf, so stellt deren Fläche die Reibungsarbeit dar.

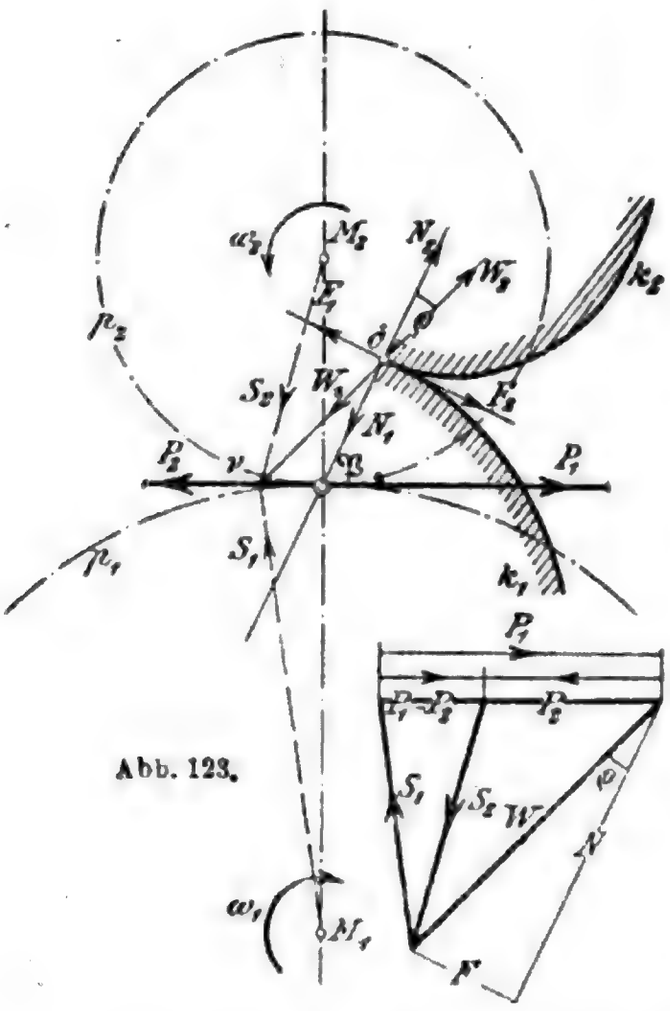


Abb. 123.

Gesamtwirkungsgrad eines Stirnradvorgeleges einschl. Zapfenreibung (maschinengeformte rohe Zähne) $\eta = 0{,}92$ bis $0{,}95$.

2. Schraubenräder.

Zu der eigentlichen Zahnreibung tritt noch die meist viel gröfsere Reibung hinzu, die durch Gleiten der Zähne in ihrer Breitenrichtung entsteht. Bezeichnen γ und γ_1 die Neigungswinkel der beiden Schraubenräder, so ist der von diesem Gleiten herrührende verhältnismäfsige Arbeitsverlust

$$\mathfrak{B}_s = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma} \frac{\sin (\gamma + \varrho)}{\sin (\gamma_1 - \varrho)} - 1.$$

Für $(\gamma_1 = 90^0 - \gamma)$ wird

$$\mathfrak{B}_s = \frac{\operatorname{tg} (\gamma + \varrho)}{\operatorname{tg} \gamma} - 1; \quad \operatorname{tg} \gamma = t/2\pi r,$$

t = Teilung, r = mittlerer Halbmesser der Schnecke.

Stribeck*) fand für eine eingelaufene eingängige Schnecke, Gufseisen auf Gufseisen (äufserer Durchmesser 95 mm, Kerndurchmesser 60 mm, $z = 30$, Ganghöhe $t = 8\pi$, mittlere Steigung 1 : 10, Zahnbreite 77 mm, P = Zahndruck, v = Gleitgeschwindigkeit im Teilkreise):

v m/sk	P kg	μ (bei 60° C)
0,5	500	0,060
1	500	0,051
1,5	500	0,047
2	400	0,040
3	250	0,030
4	160	0,025

Vgl. Abschn. Maschinenteile, Schneckenräder

6. Reibung und Arbeitsverluste an Zugmitteln.

α. Kraftverhältnisse.

Für das um einen Zylinder geschlungene Zugmittel (Seil, Riemen, Bremsband; Abb. 124) bezeichne S_1 und S_2 die Spannkräfte an den

*) Z. d. V. d. I. 1898, S. 1162.

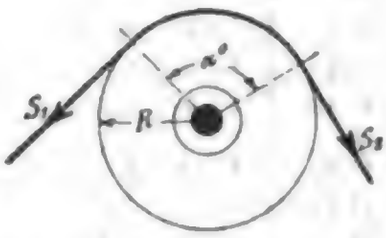
Digitized by Google

beiden Enden ($S_1 > S_2$), $P = S_1 - S_2$ den Reibungswiderstand am Zylinderumfang, d. i. bei drehbarem Zylinder, auf dem das Zugmittel in relativer Ruhe verharrt, die übertragbare Umfangskraft, $\alpha = 2\pi \frac{\alpha^0}{360^0}$ den Umspannungsbogen, μ die Reibungszahl zwischen Band und Zylinder, e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (S. 48). Ohne Berücksichtigung der Zentrifugalkräfte gilt dann:

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha},$$

$$P = \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} S_1 = (e^{\mu\alpha} - 1) S_2.$$

Abb. 124.



Für μ ist, je nachdem zwischen Zugmittel und Zylinder eine Bewegung stattfindet oder nicht, die Reibungszahl der Bewegung oder der Ruhe einzusetzen.

Werte von μ und μ_0 (vgl. auch Abschn. Maschinenteile, Riemen- und Seilbetrieb) und zugehörige Werte von $e^{\mu\alpha}$:

Verhältnis des umspannt. Bogens zum Umfang	Lederriemen auf Scheiben aus Holz || Gufseisen				Hanfseile				Eiserne Bremsbänder auf eisernen Scheiben
	Zustand des Riemens								
	etwas gefettet	sehr gefettet	etwas gefettet	feucht	auf Eisentrommeln	auf Holztrommeln	auf rauhem Holz	auf poliertem Holz	
$\frac{\alpha}{3\pi}$	$\mu_0 =$ 0,47	0,12	0,28	0,38	$\mu_0 = 0{,}25$	$\mu_0 = 0{,}4$	$\mu_0 = 0{,}5$	$\mu_0 = 0{,}33$	$\mu_0 = \mu = 0.18$
0,1	1,34	1,02	1,19	1,27	1,17	1,29	1,37	1,23	1,12
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61	1,37	1,65	1,87	1,51	1,25
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05	1,60	2,13	2,57	1,86	1,40
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60	1,87	2,73	3,51	2,29	1,51
0,425	3,51	1,38	2,11	2,76	1,95	2,91	3,80	2,41	1,62
0,45	3,78	1,40	2,21	2,93	2,03	3,10	4,11	2,54	1,66
0,475	4,07	1,43	2,31	3,11	2,11	3,30	4,45	2,68	1,71
0,5	4,38	1,46	2,41	3,30	2,19	3,51	4,81	2,82	1,76
0,525	4,71	1,49	2,52	3,50	2,28	3,74	5,20	2,97	1,81
0,55	5,63	1,51	2,63	3,72	2,37	3,98	5,63	3,13	1,86
0,6	5,88	1,57	2,81	4,19	2,57	4,52	6,59	3,47	1,97
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32	3,00	5,81	9,00	4,27	2,21
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75	3,51	7,47	12,34	5,25	2,47
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57	4,11	9,60	16,90	6,46	2,77
1,0	19,2	2,12	5,81	10,9	4,81	12,35	23,14	7,95	3,10
1,5	.	.	.	.	10,55	43,38	111,16	22,42	5,45
2,0	.	.	.	.	23,14	152,4	535,47	63,23	9,60
2,5	.	.	.	.	50,75	535,5	2576,0	178,5	16,9
3,0	.	.	.	.	111,3	1881	12392	502,9	29,8
3,5	.	.	.	.	244,2	6611	59610	1418	52,4

Es ist $e^{\pi} = 23{,}1407$ und $\log e^{\pi} = 1{,}3643764$.

Tafel für $e^{\mu\alpha}$.

$\frac{\alpha}{2\pi}$	μ								
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,1	1,06	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76	1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2,13	2,34	2,57
0,4	1,29	1,46	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10	3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33	3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57	4,11
0,475	1,35	1,56	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83	4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11	4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	4,41	5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,35	3,98	4,74	5,63
0,6	1,46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	5,45	6,59
0,7	1,52	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	7,24	9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	9,60	12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	12,74	16,90
1,0	1,87	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90	23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49	111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68	535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,32	244,15	535,49	1174,5	2575,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,68	733,14	1881,5	4828,5	12391
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851	59608
4,0	12,35	43,38	152,40	535,49	1881,5	6610,7	23227	81610	286744

β. Arbeitsverluste.

a) Arbeitsverlust durch Steifigkeit des Zugmittels.

Der Arbeitsaufwand zum Biegen des Zugmittels setzt sich zusammen aus der elastischen Formänderungsarbeit und der Arbeit zur Ueberwindung der inneren Reibung; die beim Auflauf verbrauchte Formänderungsarbeit wird beim Ablauf wiedergewonnen, während die Reibungsarbeit sowohl beim Auflauf wie Ablauf zu leisten ist.

Die Reibungssteifigkeit wird berücksichtigt, indem man statt des Wickelhalbmessers R setzt:

für den Auflauf (Spannung S_2): $R + \xi$,
„ „ Ablauf (Spannung S_1): $R - \xi$,

so dafs für gleichzeitiges Auf- und Abwickeln $S_1 = \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) S_2$.

Bei Hanfseilen $\xi = 0{,}03\,d^2$ bis $0{,}09\,d^2$
bei Ketten . . $\xi = 0{,}1\,d$ „ $0{,}15\,d$ } d und ξ in cm.

Digitized by Google

Für Drahtseile liegen ausreichende Versuche nicht vor. Man nehme etwa die gleichen Werte wie bei Ketten.

Findet nur Aufwickeln statt, so gilt: $S_1 = \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) S_2$. In diesem Falle ist auch, zumal bei Drahtseilen, die Formänderungsarbeit zu berücksichtigen (Festigkeitslehre und Drahtseile).

b) Arbeitsverlust durch Gleiten des Zugmittels*)

infolge der Verschiedenheit der elastischen Dehnungen beim Auf- und Ablauf (nicht infolge ungenügender Reibung auf der Scheibe).

Für die treibende und getriebene Scheibe zusammen (geschlossener Trieb) beträgt der verhältnismäfsige Arbeitsverlust theoretisch:

$$\mathfrak{V} = \alpha\,(S_1 - S_2)/f = \alpha\,P/f = \alpha\,c$$

f = Querschnitt des Zugmittels in qcm, $c = P/f$ die übertragene Kraft in kg qcm, $\alpha = 1/E$ = Dehnungszahl in qcm/kg.

Wegen der ungleichmäfsigen Spannungsverteilung über den Querschnitt und der Veränderlichkeit von α setzt Bach:

$$\mathfrak{V} = \varphi\,\alpha\,P/f = \varphi\,c/E\ .$$

für Lederriemen $\varphi = 2{,}0$, Hanfseile $\varphi = 1{,}25$, Drahtseile $\varphi = 1{,}5$.

Es berechnet sich dann:

1. für neue Lederriemen mit $\varphi = 2$; $c = 10$ kg/qcm; $E = 1250$ kg/qcm;
$\mathfrak{V} = 2 \cdot 10 : 1250 = 0{,}016 = 1{,}6\ \%$;
2. für gebrauchte Lederriemen mit $\varphi = 2$; $c = 10$ kg/qcm; $E = 2250$ kg/qcm;
$\mathfrak{V} = 2 \cdot 10 : 2250 = 0{,}009 = 0{,}9\ \%$;
3. für Hanfseile**) mit $\varphi = 1{,}25$; $c = 9{,}6$ kg/qcm; $E = 7500$ kg/qcm;
$\mathfrak{V} = 1{,}25 \cdot 7{,}5 : 7500 = 0{,}0016 = 0{,}16\ \%$;
4. für neue Drahtseile**) mit $\varphi = 1{,}5$; $c = 300$ kg/qcm; $E = 700\,000$ kg/qcm;
$\mathfrak{V} = 1{,}5 \cdot 300 : 700\,000 = 0{,}00064 = 0{,}064\ \%$

c) Werte von Wirkungsgraden η.

1. Rollenzüge mit 180° Umschlingungsbogen bei kleinen Geschwindigkeiten (einschliefslich Zapfenreibung):

Bei Ketten- und Drahtseilrollen

für feste Rollen 0,94 bis 0,96,
„ lose „ 0,97.

Bei Hanfseilrollen mit einem Seildmr. von

	1,6	2,6	3,6	4,6	5,2 cm
für feste Rollen	0,94–0,96	0,91–0,95	0,89–0,93	0,84–0,92	0,85–0,91,
für lose „	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93.

2. Riemen- und Seiltriebe für gröfsere Leistungen vgl. Abschn. Maschinenteile, Riemen- und Seilbetrieb.

*) Vgl. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 11. Aufl. Stuttgart 1913. S. 421, 441, 484 u. 487.

**) c und E sind auf den tatsächlichen Querschnitt der Litze bzw. der Eisendrähte bezogen, also auf einen Querschnitt von $\sim 0{,}66\,\pi\,d^2 : 4$ bzw. $0{,}42\,\pi\,d^2 : 4$, wenn d der Seildurchmesser ist.

Digitized by Google

B. Mechanik tropfbar flüssiger Körper.

I. Allgemeine Begriffe und Eigenschaften.

Tropfbare Flüssigkeiten sind Massenvereinigungen, deren Teilchen sich schon unter dem Einfluſs kleinster Kräfte, z. B. dem Gewicht des kleinsten Teilchens gegeneinander verschieben, obgleich eine Zähigkeit (Scherkraft) zwischen den Teilchen besteht, die sich mit abnehmendem Wärmegrad (bis zum Zustand der Erstarrung) vergröſsert.

Sie nehmen infolge starker Massenanziehung ihrer Teilchen (Kohäsion) schon ohne Einwirkung äuſseren Druckes den annähernd geringsten Raum ein. Sie lassen sich auch durch sehr hohen Druck nur noch sehr wenig zusammendrücken (Raumverminderung für je 1 kg/qcm Druck bei Wasser 0,000044, bei Aether 0,00011, bei Quecksilber 0,000003).

Die Oberfläche (Flüssigkeitsspiegel) bildet sich, soweit sie nicht von festen Körpern begrenzt ist, allein unter dem Einfluſs der Schwere, der Massenanziehung, und dem auf ihr lastenden Drucke, z. B. Wind.

Die Teilchen von gleichem Einheitsgewicht bilden Schichten parallel zur Oberfläche.

Gesetz von Pascal: Wird eine Flüssigkeit einem äußeren Drucke ausgesetzt, der nur in einer Richtung wirkt, so pflanzt sich dieser Druck auf alle Teile nach allen Richtungen hin unverändert fort.

Kapillarität und Oberflächenspannung.

In der Nähe fester Körper (Gefäßwand oder die Wandfläche eingetauchter Körper) krümmt sich die Oberfläche unter dem Einfluß von Adhäsion und Kohäsion der Flüssigkeit. Bei überwiegender Adhäsion (benetzte Wand) steigt die Oberfläche zwischen nahegelegenen Wandflächen empor (Kapillarität). Quecksilber mit seiner überwiegenden Kohäsion zeigt entgegengesetztes Verhalten.

Wasser steigt in Röhrchen vom Durchmesser d in mm um die Höhe $h \sim 30 : d$ in mm empor, zwischen Platten im Abstande a in mm wird $h \sim 15 : a$.

Dieses Verhalten tropfbarer Flüssigkeiten ist begründet in der ihnen eigenen Oberflächenspannung, welche abhängig ist von den Eigenschaften der in Berührung miteinander stehenden Flüssigkeiten, bzw. Flüssigkeit und festem Körper. Die Tropfenbildung beruht ebenfalls auf der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit.

Zähigkeit und innere Reibung.

Bei allen Flüssigkeiten haften benachbarte Teilchen aneinander und setzen gegenseitiger Verschiebung einen tangentialen Widerstand (Schubspannung) entgegen. Er ist proportional der „Zähigkeit".

Einheit der Zähigkeit ist die auf die Flächeneinheit bezogene Schubkraft, die auftritt, wenn sich die parallelen Grenzflächen einer

Digitized by Google

Flüssigkeitsschicht von der Dicke 1 mit der Geschwindigkeit 1 gleichförmig und parallel zueinander verschieben.

Bedeutet

s die Dicke einer Schicht in cm,
v den Geschwindigkeitsunterschied ihrer Grenzflächen in cm/sk,
F deren Flächeninhalt in qcm,
γ das Einheitsgewicht der Flüssigkeit in g/ccm,
g die Beschleunigung durch die Schwere = 981 cm/sk²,
η die Zähigkeitszahl im physikalischen Maßsystem in Dynen . sk/qcm (1 Dyne = 1 g : 981),

so setzt man (nach Maxwell) die in jeder Grenzfläche der Bewegung entgegenwirkende Schubkraft R der Erfahrung gemäfs

$$R = \eta F \frac{dv}{ds} \text{ in Dynen } = \frac{\eta}{981} F \frac{dv}{ds} \text{ in g.}$$

R ist danach (im Gegensatz zu der Reibung bei festen Körpern) unabhängig vom Drucke, dagegen proportional der Flächengröfse und dem Geschwindigkeitsunterschied benachbarter Teilchen. Praktisch ist der „Zähigkeitsmodul" von Bedeutung, der im technischen Maßsystem $= \eta g : 981\gamma = \eta : \gamma$ in qcm/sk ist, oder $= \eta : 10\gamma$ in qm/sk, wenn γ in kg/cbm. η ändert sich wesentlich mit dem Wärmegrad t der Flüssigkeit. Zähigkeitsmodul η/γ in qcm/sk:

$$\left(\text{für Wasser } \eta = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}0331\,t + 0{,}000244\,t^2}\right)$$

bei °C	Rüböl	Wasser	bei °C	Rüböl	Wasser
0	27,7	0,01775	30	1,1	0,0081
10	4,07	0,0131	100	—	0,0027
20	1,98	0,0101	1200	—	—

Der bei Schmierölen oft angegebene „spezifische Zähigkeitsmodul" ist bezogen auf Wasser von 20°.

Zähigkeitszahl η für verschiedene Flüssigkeiten bei 18 °C

Quecksilber . .	0,0159	Anilin	0,0461
Aether	0,00265	Benzol	0,0658
Alkohol	0,01305	Glyzerin . . .	9,8100
Olivenöl . . .	0,9220		

II. Statik tropfbar flüssiger Körper.

A. Grundgleichungen von L. Euler.

Bedeuten

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P der Flüssigkeit,
X, Y, Z die Seitenkräfte der in P wirkenden, beschleunigenden Kraft nach den drei Koordinatenachsen,
p den Druck auf die Flächeneinheit bei P,
g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk²,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit (für tropfbare Flüssigkeiten annähernd unveränderlich),

Digitized by Google

so ist für ein unendlich kleines Parallelepipedon der Flüssigkeit von den Seiten dx, dy, dz, dessen eine Ecke in P liegt, im Zustande des Gleichgewichts

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z,$$

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X dx + Y dy + Z dz).$$

Für die freie Oberfläche sowie für alle Flächen gleichen Druckes (Niveauflächen) wird

$$X dx + Y dy + Z ds = 0.$$

Die Mittelkraft der drei Kräfte X, Y, Z ist in jedem Punkte winkelrecht zu den Flächen gleichen Druckes gerichtet.

B. Hydrostatischer Druck, Auftrieb.

α) Normaldruck (oder Seitendruck) auf eine Fläche.

1. Ebene Fläche.

Bedeutet

F den Inhalt der gedrückten ebenen Fläche in qm,
h den lotrechten Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel in m,
α den Neigungswinkel von F gegen die Wagerechte,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit in kg,
x und y die Koordinaten des Druckmittelpunktes (Angriffspunktes des Flüssigkeitsdruckes), wenn die x-Achse die Schnittlinie der durch F gelegten Ebene mit dem Flüssigkeitsspiegel und die y-Achse eine in derselben Ebene rechtwinklig zur x-Achse gerichtete Linie ist,
e die Entfernung der Oberkante von F von der x-Achse,
S das statische Moment } von F, bezogen auf die x-Achse,
J das Trägheitsmoment }
J_{xy} das Zentrifugalmoment von F, bezogen auf die x- und die y-Achse, so ist der

Normaldruck oder Seitendruck $= Fh\gamma$,

und die Koordinaten des Angriffspunktes der Mittelkraft sind

$$y = \frac{J}{S} = \frac{J \sin\alpha}{Fh}, \qquad x = \frac{J_{xy}}{S} = \frac{J_{xy}}{Fh} \sin\alpha.$$

Besitzt F winkelrecht zur x-Achse eine Symmetrieachse, die man als y-Achse wählt, so wird $x = 0$.

Abstand y für verschiedene Flächen:

Rechteck, Oberkante parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand Oberkante von Unterkante $= a$:

$$y = \frac{a}{3}\,\frac{3e + 2a}{2e + a} + e; \qquad \text{für } e = 0 \text{ wird } y = {}^2/_3\, a.$$

Digitized by Google

Trapez, die parallelen Seiten b_o und b_u parallel zum Flüssigkeitsspiegel, b_o die höher gelegene Seite, a der Abstand der Seite b_o von b_u:

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{2e(b_o + 2b_u) + a(b_o + 3b_u)}{3e(b_o + b_u) + a(b_o + 2b_u)} + e.$$

Dreieck, Grundlinie parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand der Spitze von der Grundlinie $= a$:

Wenn die Grundlinie oberhalb der Spitze,

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{2e + a}{3e + a} + e; \qquad \text{für } e = 0 \text{ wird } y = {}^1/_3 a;$$

wenn die Spitze im Flüssigkeitsspiegel, $y = {}^3/_4 a$.

Kreis vom Durchmesser $2a$ oder

Ellipse mit lotrechter Hauptachse $2a$:

$$y = a + e + {}^1/_4\,\frac{a^2}{a + e}.$$

Berührt der Kreis oder die Ellipse den Flüssigkeitsspiegel, so wird $y = {}^5/_4 a$.

2. Gekrümmte Fläche.

Die gekrümmte Fläche ist in ebene Teilflächen zerlegt zu denken, deren Normaldrücke, wie unter 1. angegeben, zu bestimmen sind. Durch Zusammensetzung der nach drei Richtungen zu zerlegenden Einzeldrücke erhält man zunächst in diesen Richtungen je eine Mittelkraft; die Vereinigung dieser Mittelkräfte zu einer Gesamtmittelkraft ist nur möglich, wenn sich ihre Richtungen im Raume schneiden (S. 158).

β) Druck in beliebig bestimmter Richtung.

Für eine beliebig gestaltete Fläche ist die Mittelkraft des Flüssigkeitsdruckes in einer bestimmten Richtung gleich der Summe der Produkte für alle Flächenelemente, gebildet aus der Projektion der Elemente winkelrecht zu dieser Richtung, dem Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel und dem Gewichte der Raumeinheit.

Hiernach ist der lotrechte Druck gleich dem Gewichte der lotrechten Flüssigkeitssäule zwischen Fläche und Flüssigkeitsspiegel.

Der Druck auf eine Ebene F, deren Schwerpunktabstand vom Spiegel h ist, wird in einer Richtung, die mit F den spitzen Winkel β einschliefst, $= F h \gamma \sin \beta$.

Der Druckmittelpunkt ist dem für den Normaldruck gleich.

Für ein- oder untergetauchte Körper wird die Summe von Auftrieb und Abtrieb gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit.

C. Statische Stabilität schwimmender Körper.

Bezeichnet s den Schwerpunkt des Körpers vom Gewichte S und d den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge vom Gewichte D,

Digitized by Google

und wirken als Kräfte nur die Schwerkraft des Körpers und der Auftrieb der Flüssigkeit, so liegen s und d in einer Lotrechten, Schwimmachse genannt.

Der Körper schwimmt frei (ohne Einwirkung äufserer Kräfte), sobald $D = S$ und zugleich d und s in derselben Lotrechten (Schwimmachse) liegen. Bleibt $D < S$, so sinkt der Körper unter.

Treten Kräfte hinzu, die den Körper um s drehen (kippen) und die Schwimmachse um den Winkel α von der Lotrechten ablenken, so trifft der Auftrieb D die Schwimmachse in einem Punkte, der das **Metazentrum** genannt wird.

Bedeutet noch

m den Abstand des Metazentrums vom Körperschwerpunkte s,

e den Abstand des Flüssigkeitsschwerpunktes d von s, u. zw. sei e positiv, wenn d oberhalb s liegt, sonst negativ,

F die Gröfse des eingetauchten lotrechten Querschnitts,

b die Breite von F am Flüssigkeitsspiegel, bei $\alpha = 0$,

l die Länge des Körpers, soweit dieser gleiches F mit b besitzt,

γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

dann gilt als **Mafs der Stabilität** das Drehmoment des Auftriebes $= F l \gamma m \sin \alpha$.

Hierin ist zu setzen:

bei parallelen ein- und austauchenden Seitenwänden

$$m = \frac{b^3}{24\,F}\left(1 + \frac{1}{\cos^3 \alpha}\right) + e,$$

bei gekrümmten Seitenwänden mit b unveränderlich innerhalb α

$$m = \frac{b^3}{12\,F}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + e.$$

Stabilität ist auch noch bei negativem e vorhanden, solange das Glied mit $b^3 > e$.

III. Dynamik tropfbar flüssiger Körper.

A. Allgemeines.

1. Grundgleichungen von L. Euler.

Neben den Bezeichnungen auf S. 261 seien noch u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des Flüssigkeitselementes in P zur Zeit t nach der x-, y- und z-Achse;

dann ist

1. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},$$

2. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},$$

3. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Digitized by Google

4. Die physikalische Beschaffenheit der Flüssigkeit liefert eine Beziehung zwischen p und γ. Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten ist γ unveränderlich. — Ferner ist allgemein:

$$5.\ \frac{d\gamma}{dt}+\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$ (Kontinuitätsgleichung.)

Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten geht die Kontinuitätsgleichung über in $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$

2. Aenderung der Oberfläche.

Durch einen nach Gröfse oder Richtung wechselnden Druck auf einen Teil der Oberfläche geraten alle Teile der Flüssigkeit in schwingende Bewegung (Wellen mit Interferenz und Reflexion). Die kreisförmige Bahn der Teile an der Oberfläche geht in gröfserer Tiefe in eine Ellipse über.

Mittels Gefäfses geradlinig und parallel zur ruhenden Oberfläche bewegte Flüssigkeit behält bei gleichbleibender Geschwindigkeit wagerechte Oberfläche. Bei wagerechter, gleichmäfsig beschleunigter Bewegung neigt sich die Oberfläche um den Winkel α gegen die Bewegungsrichtung

entsprechend $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{g}$, wobei bedeutet

p die Beschleunigung der Flüssigkeit und
g die Beschleunigung durch die Schwere ($=9{,}81$ m/sk^2).

Dreht sich eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäfs vom Halbmesser r (in m) um dessen lotrechte Achse mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω, so bildet die Oberfläche eine Höhlung (Umdrehungsparaboloid), deren tiefster Punkt um $0{,}0255\, r^2\omega^2$ (in m) unter der dem Ruhezustande entsprechenden Oberfläche liegt.

Dreht sich die Flüssigkeit in beliebig gestaltetem Gefäfs um eine wagerechte Achse (Wasserräder) mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω, so krümmt sich die Oberfläche nach einem liegenden Zylinder, dessen Achse um $9{,}81 : \omega^2$ (in m) lotrecht über der Umdrehungsachse liegt.

Weiteres über „theoretische Hydromechanik" ist im nachfolgenden Abschnitt „Dynamik luftförmiger Körper" behandelt (S. 335).

B. Ausfluſs durch Oeffnungen in Gefäfsen oder Stauanlagen.

1. Eigenschaften des ausfliefsenden Strahles.

Die Richtung des Strahles ist bei dem Durchfluſs durch Oeffnungen

1. ohne Ansätze (Mundstücke, Gerinne) in besonders dünner oder mit zugeschärften Durchfluſskanten versehener Wandung:
   a) winkelrecht zu der durch die Durchfluſskanten gelegten Ebene, wenn sich die Oeffnung gänzlich unter dem Flüssigkeitsspiegel befindet,
   b) angenähert wagerecht an der Oberfläche, mit Uebergang zum Zustande wie bei a) für die Unterkante der Oeffnung, wenn die Oeffnung in den Flüssigkeitsspiegel hineinragt (Ueberfall mit lotrechtem oder geneigtem Wehr);

Digitized by Google

2. ohne Ansätze, aber in so dicker Wandung, dafs der Strahl die Seitenflächen der Oeffnung bestreicht: parallel oder achsial zu diesen Seitenflächen;
3. mit Ansätzen (inneren oder äufseren Einfassungen, Gerinnen, Mundstücken): soweit sie vom Strahl benetzt werden, parallel oder achsial zu ihnen.

Einschnürung (Kontraktion) des Strahles: Bei dem Ausfluſs durch Oeffnungen streben alle Flüssigkeitsfäden der Strahlachse zu; die seitlich zuströmenden Fäden erstreben dabei eine Einschnürung (Kontraktion) des Strahles mit nachfolgender Wiederausdehnung desselben. Die Kontraktion wird eine vollständige bei plötzlicher Ablenkung der seitlichen Fäden, also bei scharfen Durchflufskanten; selbst die Adhäsion an nachfolgender benetzter Wandung von Mundstücken reicht dann nicht mehr aus, um die Loslösung des Strahles von der Wandung dicht hinter der Ablenkung zu verhindern. Bei kreisrunden Oeffnungen vom Durchmesser d ist die Kontraktion am gröfsten in der Entfernung $\frac{1}{2}d$ von der Oeffnung. In dieser Entfernung beträgt der Durchmesser nur noch $0{,}8\,d$ und demnach der Querschnitt $0{,}64\,d^2\pi : 4$. Bei nicht kreisrunden Oeffnungen flieſsen die einzelnen Flüssigkeitsfäden wellenförmig zur Strahlachse aus; dabei wechselt die Oberfläche und die Querschnittsform des Strahles entsprechend wellenförmigen Durchdringungen.

Bei Oeffnungen in so dicker Wand oder mit so langen Ansätzen (inneren oder äufseren), dafs der eingeschnürte Strahl bei seiner Wiederausbreitung die Wandflächen noch vor dem Mündungsquerschnitt benetzt, verläuft die Oberfläche des ausflieſsenden Strahles parallel zu den Seiten des Mündungsquerschnitts.

Gleichmäfsige Querschnittsänderung des Strahles: Der Querschnitt des frei ausflieſsenden Strahles verkleinert sich allmählich bei fallender Strahlrichtung entsprechend der zunehmenden Fallgeschwindigkeit; er vergröfsert sich allmählich bei ansteigender Richtung infolge abnehmender Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen. Die Strahlachse folgt den Gesetzen für die Wurfbewegung.

Die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden ist fast gleich im Querschnitt der Strahleinschnürung nach dem Durchfluſs scharfer Kanten, und sie wird wesentlich verschieden nach der Wiederausbreitung des Strahles, namentlich nach erfolgter Anlegung an die Seitenwände von Ansätzen; diese verzögern die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden, umsomehr, je näher letztere der Wandung liegen.

Der Zufluſs zur Oeffnung ist allseitig radial auf den Schwerpunkt der Oeffnung gerichtet; die Zufluſsgeschwindigkeit der Flüssigkeitselemente nimmt mit ihrem Abstande von der Oeffnung schnell ab und beträgt z. B. bei kreisrunder Oeffnung im Abstande gleich ihrem doppelten Durchmesser nur noch 6 vH der Geschwindigkeit an der Oeffnung selbst.

Wirbelförmiger Zufluſs (Strudel) entsteht über Oeffnungen in wagerechtem Boden, sobald die Flüssigkeitshöhe weniger als das 3- bis 4fache des Durchmessers der Oeffnung beträgt (unter Umständen schon bei 8facher Flüssigkeitshöhe).

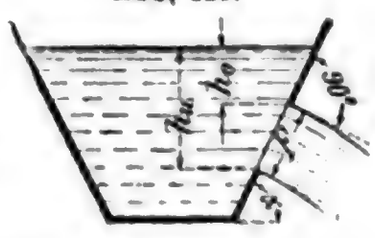
2. Ausfluſs bei unveränderlicher Druckhöhe.

(Ausfluſsmenge, Ausfluſsgeschwindigkeit.)

Es bedeute (Abb. 125)

F die maſsgebende Ausfluſsöffnung in qm, d. i. der kleinste Durchfluſsquerschnitt der Wandöffnung bzw. des angesetzten Mundstückes rechtwinklig zur Richtung des Ausfluſsstrahles,

Abb. 125.



α den Winkel zwischen F und der Wagerechten,

v_0 die theoretische mittlere Ausfluſsgeschwindigkeit aller Flüssigkeitsfäden in der Oeffnung F in m/sk; die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden ist, ohne Rücksicht auf Reibung an den Wandflächen etwa vorhandener Mundstücke oder Gerinne, proportional der Wurzel ihres Abstandes vom Flüssigkeitsspiegel,

v_z die Komponente der Zufluſsgeschwindigkeit zum Gefäfs in der Stromrichtung des Ausfluſsstrahles in m/sk; dabei ist voraus-

Digitized by Google

gesetzt, daſs der Zufluſsstrahl auf die Ausfluſsöffnung gerichtet ist, andernfalls ist $v_z = 0$,

μ die Ausfluſszahl (Wirkungsgrad) für die Ausfluſsöffnung mit oder ohne Ansatz, d. i. das Verhältnis der tatsächlichen Ausfluſsmenge zur theoretischen Ausfluſsmenge. Somit enthält μ den Einfluſs verminderter Ausfluſsgeschwindigkeit und den Einfluſs des gegen F etwa durch Einschnürung verminderten Strahlquerschnitts,
Werte μ S. 272 ff.,

Q die tatsächliche Ausfluſsmenge in cbm/sk $= \mu v_0 F$,

h_o den lotrechten Abstand der Oberkante von F vom ideellen Flüssigkeitsspiegel in m (in einiger Entfernung von der Oeffnung F gemessen). Die ideelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels bestimmt sich aus der Höhe des tatsächlichen Spiegels $+ (v_z^2 : 2g) \pm$ Luftdruckunterschied am oberen Spiegel und am frei austretenden Ausfluſsstrahl, in m Flüssigkeitssäule (der ausfließenden Flüssigkeit) gemessen,

h_u den lotrechten Abstand der Unterkante von F, wie h_o gemessen,

H bei Ausfluſs unter Flüssigkeit (untergetauchte Oeffnung) den Abstand des unteren Flüssigkeitsspiegels vom ideellen oberen Spiegel in m, wie h_o gemessen,

g die Beschleunigung durch die Schwere ($= 9{,}81$ m/sk^2); $\sqrt{2g} = 4{,}4294$.

a. Lage der Ausfluſsöffnung beliebig.

Bedeutet noch

h den Abstand eines beliebigen, durch wagerechte Teilung von F erhaltenen Flächenteilchens, dessen Projektion auf eine lotrechte Ebene die Höhe dh besitzt, wie h_o gemessen,

y die Breite dieses Flächenteilchens in m, so ist

$$Q = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\int_{h_o}^{h_u} y\sqrt{h}\,dh; \qquad v_0 = \frac{Q}{\mu F} = \sqrt{2g}\,\frac{\int_{h_o}^{h_u} y\sqrt{h}\,dh}{\int_{h_o}^{h_u} y\,dh}.$$

Wenn y unveränderlich $= b$, wird:

$$Q = \frac{2}{3}\,\frac{\mu b}{\sin\alpha}\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_u^3} - \sqrt{h_o^3}),$$

$$v_0 = \frac{2}{3}\,\frac{b}{F\sin\alpha}\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_u^3} - \sqrt{h_o^3}).$$

Wird die Druckhöhe nicht in m Flüssigkeitssäule, sondern mittels des Druckes q in kg/qm der Ausfluſsöffnung gemessen und bedeutet γ das Gewicht der Flüssigkeit in kg/cbm, so ist in vorstehenden Formeln allgemein $h = q : \gamma$ zu setzen.

Für jedes in die abgeflossene, wieder gesammelte Flüssigkeit untertauchende Flächenteilchen von F ist dessen Abstand vom unteren Flüssigkeitsspiegel als Gegendruck in Abzug zu bringen; somit ist **für den eingetauchten Teil** der Oeffnung **(Rückstau)**

$$v_0 = \sqrt{2gH}, \qquad Q = \mu F\sqrt{2gH}.$$

Digitized by Google

Bei gleichförmiger Bewegung des Ausflufsgefäfses bleibt der Ausfluſs unverändert wie bei ruhendem Gefäfs.

Bei lotrecht beschleunigter Bewegung nach aufwärts oder abwärts um p in m/sk² ist in den Formeln statt g bei Aufwärtsbewegung $(g + p)$, bei Abwärtsbewegung $(g - p)$ zu setzen. Fällt das Gefäfs durch sein Eigengewicht, so wird $v_0 = 0$.

Bei lotrecht verzögerter Bewegung wechselt p in vorstehenden Fällen das Vorzeichen.

Bei Umdrehung des Gefäfses mit der Umlaufgeschwindigkeit w an der Ausfluſsöffnung (in m/sk) vermehrt sich die dort vorhandene nutzbare Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$.

b. Wagerechte Bodenöffnung. $h_o = h_u$, $\alpha = 0$.

Ist an die Bodenöffnung ein Mundstück angesetzt, so ist dessen lotrechte Höhe nur dann in h_u mit eingeschlossen, wenn der fallende Strahl die Ausfluſsmündung ganz ausfüllt. Dies trifft nur für unten an der Mündung ausreichend verengte Rohrstücke zu.

Ausfluſs ins Freie: $v_0 = \sqrt{2 g h_u}$,

Ausfluſs unter Flüssigkeit: $v_0 = \sqrt{2 g H}$.

c. Seitenöffnung ohne Rückstau, Ausfluſs ins Freie. **Durchlafs und Ueberfall ohne Rückstau:** F sei eine der folgenden Flächen:

Rechteck oder **Parallelogramm,** Oberkante parallel dem Flüssigkeitsspiegel, Breite $= b$, Abstand der wagerechten Kanten $= a = (h_u - h_o) : \sin \alpha$.

α) Durchlafs, Oberkante der Oeffnung unterhalb des Flüssigkeitsspiegels:

$$F = ab = \frac{(h_u - h_o)\, b}{\sin \alpha}; \quad v_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2 g}\, \frac{h_u^{3/2} - h_o^{3/2}}{h_u - h_o}; \quad Q = \mu F v_0;$$

oder angenähert, wenn $h_u - h_o = a \sin \alpha$ gesetzt wird und h_s die Tiefe des Schwerpunktes von F unter dem ideellen Oberspiegel in m bedeutet $[h_s = {}^1/_2 (h_u + h_o)]$:

$$v_0 = \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a \sin \alpha}{h_s}\right)^2\right] \sqrt{2 g h_s}.$$

β) Wandeinschnitt mit Ueberfall des Strahles, die Oeffnung erreicht den Flüssigkeitsspiegel:

Strahlrichtung an der ideellen Oberkante von F wagerecht; diese Oberkante deckt sich mit dem oberen Flüssigkeitsspiegel in einiger Entfernung von F. Lotrecht über der Unterkante von F senkt sich der Spiegel bereits zur Erzeugung einer Oberflächengeschwindigkeit, die etwa 0,5 h_u entspricht. Strahlrichtung an der Unterkante von F dagegen angenähert winkelrecht zur Wandfläche, soweit anschliefsendes Gerinne nicht eine andere Richtung vorschreibt.

Bei geneigtem Wehr und bei schief zur Stromrichtung eingebautem Wehr, von vollständiger oder unvollständiger Kanalbreite, mit seitlicher oder ohne seitliche Lüftung der Unterfläche des Ueberfallstrahles, ist weder die Festsetzung der zu jedem Teilchen dF zugehörigen Höhe h, noch die wirkliche Gröfse F, noch eine zureichende Schätzung des mittleren μ für die verschieden gerichteten Strahlelemente möglich. Daher wird für solche Fälle die Formel für das lotrechte Wehr mit $v_s^2 : 2g = 0$ zugrunde gelegt; vgl. S. 274.

Digitized by Google

Ohne Lüftung der Unterfläche des Strahles entsteht unter demselben Luftverdünnung, welche Strahlverbreiterung und Hochsaugung des unteren Flüssigkeitsspiegels verursacht; also tritt Vergröſserung von h_u, v und Q ein.

Bei nicht zu vernachlässigender Zufluſsgeschwindigkeit v_s liegt der ideelle Wasserspiegel um $v_s^2 : 2g$ über der Oberkante des Ausfluſsquerschnitts F, weshalb dann die Formel für den Durchlaſs anzuwenden ist, wobei $h_u = a \sin\alpha + v_s^2/2g$ und $h_o = v_s^2 : 2g$ zu setzen ist.

Kann aber $v_s^2 : 2g$ vernachlässigt werden, so wird $h_o = 0$, und hiermit bei lotrechtem Wehr

$$v_0 = {}^2/_3 \sqrt{2gh_u}, \qquad F = b h_u = a b, \qquad Q = \mu F v_0.$$

Dreieck, die Grundlinie von der Länge b und in der Tiefe h_o parallel zum Flüssigkeitsspiegel, die Spitze in der Tiefe h_u, in m:

$$Q = \frac{2}{15} \frac{\mu b \sqrt{2g}}{\sin\alpha} \frac{2 h_u^{5/2} - 5 h_u h_o^{3/2} + 3 h_o^{5/2}}{h_u - h_o};$$

oder für $h_o = 0$ und $\alpha = 90^0$ wird

$$Q = \frac{4}{15} \mu b h_u \sqrt{2gh_u}; \qquad v_0 = \frac{8}{15} \sqrt{2gh_u}.$$

Liegt die Spitze des Dreiecks oben in der Tiefe h_o, die Grundlinie in der Tiefe h_u, so sind in der Gleichung für Q die Zeichen h_u und h_o miteinander zu vertauschen.

Trapez, mit wagerechten parallelen Seiten: zerlege dasselbe in Parallelogramm und Dreieck und summiere die für diese angegebenen Werte von Q; dann ist $v_0 = Q : \mu F$.

Für $h_o = 0$ und $\alpha = 90^0$ wird mit der Länge b_o für die obere und b_u für die untere der parallelen Seiten:

$$Q = \frac{2}{15} \mu h_u \sqrt{2gh_u} (2 b_o + 3 b_u), \qquad v_0 = \frac{4}{15} \sqrt{2gh_u} \frac{2 b_o + 3 b_u}{b_o + b_u}.$$

Kreis, vom Halbmesser r und der Mittelpunkt in der Tiefe h_s in m:

$$Q = \mu r^3 \pi \sqrt{2gh_s} \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r \sin\alpha}{h_s}\right)^2 - \frac{5}{1024} \left(\frac{r \sin\alpha}{h_s}\right)^4 - \dots\right],$$

$$v_0 = \frac{Q}{\mu \pi r^2}.$$

Reicht die Kreisöffnung bis zum Wasserspiegel und ist $\alpha = 90^0$, so ist

$$Q = 0{,}964 \mu F \sqrt{2gh_s}, \qquad v_0 = 0{,}964 \sqrt{2gh_s}.$$

d. Seitenöffnung (F lotrecht) **mit Rückstau.** Grundwehr und Grunddurchlaſs. Oeffnung von gleichmäſsiger Breite b; für $v_s^2/2g$ wird die Höhe h_s gesetzt. μ_1 bezieht sich auf den oberen Teil der Oeffnung ohne Rückstau, μ_2 auf den unteren, dem Rückstau ausgesetzten Teil. H und h_o sowie h_u reichen bis zum ideellen Flüssigkeitsspiegel (S. 267).

Abb. 126 S. 270, Grundwehr:

$$Q = b \sqrt{2g} \left[{}^2/_3 \mu_1 \left(H^{3/2} - h_s^{3/2}\right) + \mu_2 (h_u - H) \sqrt{H}\right];$$

Digitized by Google

Abb. 127, Durchlafs mit teilweisem Rückstau:

$$Q = b\sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}\mu_1\left(H^{3/2} - h_0^{3/2}\right) + \mu_2 (h_u - H)\sqrt{H}\right];$$

Abb. 128, Durchlafs mit vollständigem Rückstau, Grundablafs:

$$Q = \mu b a \sqrt{2gH}.$$

Abb. 126.

Abb. 127.

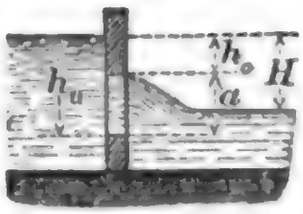
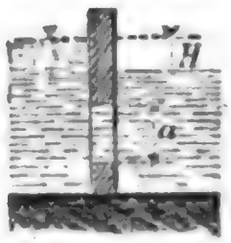


Abb. 128.



3. Ausfluſs bei veränderlicher Druckhöhe (Ausflufsdauer).

Es bedeutet

O_0 die Oberfläche der Flüssigkeit bei Beginn des Ausflusses in qm,
O_t die Oberfläche nach t sk in qm,
F die Projektion der Ausflufsöffnung auf eine zur Stromrichtung an der Mündung winkelrechte Ebene in qm,
H_0 die Druckhöhe in m bei Beginn des Ausflusses,
H_t die Druckhöhe in m nach der Ausflufszeit t,
t die Dauer des Ausflusses in sk,
Q die tatsächliche Ausflufsmenge in cbm/sk,
v_0 die theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit während der Ausflufsdauer in m/sk, also $Q = F v_0$;
μ und g (S. 267).

1. Bodenöffnung wagerecht, Gefäfs prismatisch.

a) Es findet kein Zufluſs statt, also $\mu F v_0 t = \mu O_0 (H_0 - H_t) = Q t$.

$v_0 = \sqrt{2g}\left(\frac{\sqrt{H_0} + \sqrt{H_t}}{2}\right)$, gleichbleibende Verzögerung $p = g\left(\frac{\mu F}{O_0}\right)^2$;

ohne Rücksicht auf die Zufluſsgeschwindigkeit zur Bodenöffnung wird

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right) = 0{,}452\,\frac{O_0}{\mu F}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right);$$

mit Rücksicht hierauf setze statt O_0 den Wert $\sqrt{O_0^2 - \mu^2 F^2}$.

b) Das Gefäfs erhält gleichzeitig Zufluſs durch die unveränderliche Flüssigkeitsmenge Q_1 in cbm/sk.

Wenn $Q_1 > \mu F \sqrt{2gH_0}$, so steigt die Oberfläche; sie fällt, wenn $Q_1 < \mu F \sqrt{2gH_0}$. Sobald ein Höhenunterschied $H_x = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ erreicht ist, bleiben H_x und die Ausflufsgeschwindigkeit unverändert. Die Zeit bis zur Erreichung dieses Beharrungszustandes ist unendlich grofs. Die Zeit bis zur Erreichung der Druckhöhe H_t beträgt

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} + \frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2g}} \ln \frac{\mu F \sqrt{2gH_0} - Q_1}{\mu F \sqrt{2gH_t} - Q_1}\right].$$

Digitized by Google

2. Bodenöffnung wagerecht, Gefäfs nicht prismatisch, kein Zufluſs, t bedeute die Dauer bis zur Entleerung des Gefäfses, also $H_t = 0$:

Keilförmiges Gefäfs, O_0 rechteckig:

$$t = \frac{2\,O_0\,H_0}{3\,\mu F\sqrt{2\,g\,H_0}}, \qquad Q = \frac{O_0\,H_0}{2\,t}.$$

Pyramidenförmiges Gefäfs:

$$t = \frac{2\,O_0\,H_0}{5\,\mu F\sqrt{2\,g\,H_0}}, \qquad Q = \frac{O_0\,H_0}{3\,t}.$$

Obeliskenförmiges Gefäfs (Ponton), O_0 rechteckig:

Länge und Breite von O_0 seien l und b,

Länge und Breite des Bodens O_1 seien l_1 und b_1:

$$t = [3\,O_0 + 8\,O_1 + 2\,(b\,l_1 + b_1\,l)]\,\frac{2\,H_0}{15\,\mu F\sqrt{2\,g\,H_0}}.$$

Paraboloidisches Gefäfs (Teich) $O_0 = r^2\pi$:

$$t = \frac{2\,O_0\,H_0}{3\,\mu F\sqrt{2\,g\,H_0}}, \qquad Q = \frac{O_0\,H_0}{2\,t}.$$

Kugelabschnittförmiges Gefäfs vom Halbmesser r in m.

$$t = \frac{2}{15}\,\frac{\pi\,(10\,r - 3\,H_0)\,H_0^{3/2}}{\mu F\sqrt{2\,g}};$$

für die Halbkugel mit $H_0 = r$ wird $t = \dfrac{14\,\pi r^2\sqrt{r}}{15\,\mu F\sqrt{2\,g}}$.

Unregelmäfsig gebildetes Gefäfs (**Talsperre**):

Nach der Simpsonschen Regel lege man in gleichen Abständen voneinander n wagerechte Schnitte durch den Flüssigkeitskörper, wodurch die Oberflächen O_1, O_2 . . . O_n und die entsprechenden Druckhöhen H_1, H_2 . . . H_n gebildet werden; n muſs eine gerade Zahl sein.

Dann ist

$$t = \frac{H_1 - H_n}{3\,n\,\mu F\sqrt{2\,g}}\left[\frac{O_1}{\sqrt{H_1}} + \frac{4\,O_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{2\,O_3}{\sqrt{H_3}} + \frac{4\,O_4}{\sqrt{H_4}} + \cdots\cdots \frac{O_n}{\sqrt{H_n}}\right],$$

$$Q = \frac{H_1 - H_n}{3\,n\,t}\,(O_1 + 4\,O_2 + 2\,O_3 + 4\,O_4 + \cdots\cdots O_n).$$

3. Seitenöffnung lotrecht ohne Rückstau. Oeffnung rechteckig von der Breite b in m, Gefäfs prismatisch, kein Zufluſs.

Die Seitenöffnung reicht bis zum anfänglichen Flüssigkeitsspiegel **(Ueberfall)**, H_0 und H_t bis zur Unterkante des Ueberfalls gemessen, Ausfluſs ins Freie:

$$t = \frac{3\,O_0}{\mu b\sqrt{2\,g}}\left(\frac{1}{\sqrt{H_t}} - \frac{1}{\sqrt{H_0}}\right); \qquad t = \infty \text{ für } H_t = 0.$$

Die Seitenöffnung verbleibt während des Ausflusses unter dem Flüssigkeitsspiegel, kein Rückstau **(Durchlafs ohne Rückstau)**. H_0 und

Digitized by Google

H_t bis zum Schwerpunkt von F gemessen, also H_t mindestens gleich halber Höhe der Oeffnung. Angenähert ist

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu F\sqrt{2\,g}}\left[\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} - \frac{1}{288}\left(\frac{F}{b}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{H_0^3}} - \frac{1}{\sqrt{H_t^3}}\right)\right]$$

und praktisch genau genug

$$t = \frac{2\,O_0}{\mu F\sqrt{2\,g}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{Ausdruck wie unter 1. für den Ausfluſs aus}\\ \text{einer wagerechten Bodenöffnung (S. 270).}\end{array}\right.$$

4. Ausgleich der Flüssigkeitsspiegel zwischen zwei miteinander verbundenen prismatischen Gefäſsen mit den wagerechten Querschnitten O_1 und O_2 und mit den Spiegelabständen H_0 und H_t.

Durchlaſsöffnung ständig unter Wasser **(Durchlaſs mit Rückstau):**

$$t = \frac{2\,O_1 O_2\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}\right)}{\mu F(O_1 + O_2)\sqrt{2\,g}}.$$

Ist O_1 sehr groſs gegen O_2, so ergibt sich der Wert unter 3., O_2 statt O_0 gesetzt.

5. Zusammengesetzter Ausfluſs (Durchlaſs mit zeitweisem Rückstau, einfache Schleusenkammer, Abb. 129). Das Gefäſs ist prismatisch und vom Querschnitt O_0 innerhalb der wechselnden Wasserspiegelhöhen. H_2 reicht bis zum Schwerpunkt von F_1.

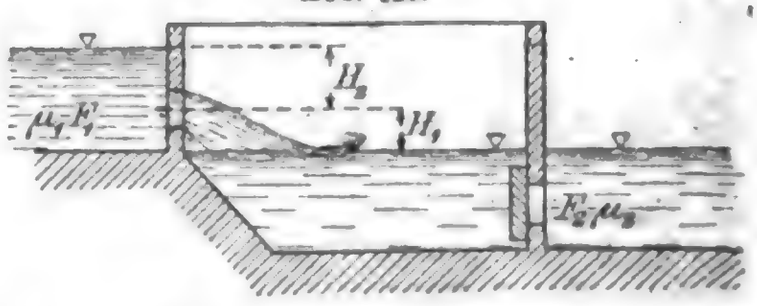
Zeit zum Anfüllen:

$$t = \frac{O_0\,(H_1 + 2\,H_2)}{\mu_1 F_1\sqrt{2\,g\,H_2}},$$

Zeit zum Entleeren:

$$t = \frac{2\,O_0\sqrt{H_1 + H_2}}{\mu_2 F_2\sqrt{2\,g}}.$$

Abb. 129.



4. Ausfluſszahlen μ für Wasser beim Ausfluſs durch Oeffnungen.

Bei allen dünnflüssigen Körpern ist μ dasselbe wie bei Wasser; selbst Luft besitzt kein kleineres μ. Für dickflüssige Körper fehlen noch Versuchszahlen.

Der Wert μ für die Ausfluſsmenge liegt im allgemeinen zwischen 0,5 und 1,0 und wird hauptsächlich durch die Einschnürung des Ausfluſsstrahles kurz nach dem Verlassen scharfkantiger Einlaufkanten beeinfluſst. In geringerem Maſse vermindert sich μ durch Herabsetzung der theoretischen Ausfluſsgeschwindigkeit infolge Flüssigkeitsreibung an den Einlaufkanten und an den Wandungen etwa vorhandener Mundstücke oder Gerinne.

Wird die Einschnürung durch den Koeffizienten α und die Verminderung der theoretischen Geschwindigkeit v_0 durch den Koeffizienten φ gemessen, so verbleibt nutzbar nur ein Strahlquerschnitt αF und eine Geschwindigkeit φv_0, so daſs zu setzen ist: $\mu = \alpha\varphi$.

Im allgemeinen wird die Einschnürung verringert, also α vergröſsert, durch Abrundung der Einlaufkanten, Verdickung der Wandung,

Digitized by Google

Abweichung von der kreisrunden Form für die Oeffnung, durch Behinderung eines allseitig gleichmäfsigen Zuflusses zur Oeffnung (Nähe von Boden- oder Seitenwand) und durch Auftreten von wesentlicher Zuflufsströmung.

α ist angenähert 1,0 — also am gröfsten — für kreisförmige Oeffnung mit stark abgerundeter Einlaufkante bei entweder dicker Wandung oder sehr kurzem zylindrischen Ansatzrohr (Abb. 133, S. 276).

Die Geschwindigkeitszahl φ ist am gröfsten beim Ausfluls aus dünner Wandung mit umgebrochener Durchfluskante ($\varphi \sim 0{,}97$) oder beim Ausfluls aus ganz kurzer, geglätteter Düse mit stark abgerundeter Einlaufkante ($\varphi \sim 0{,}99$), so dafs der Energieverlust bei solchem Ausfluls nur $1 - \varphi^2 = 6$ bzw. 2 vH. beträgt.

Bei kurzen zylindrischen Mundstücken mit scharfer Einlaufkante dagegen, deren Mündungsquerschnitt eben noch von Flüssigkeit ausgefüllt wird, wird $\mu \sim 0{,}82$, hauptsächlich der Einschnürung wegen, die der Flüssigkeitsstrahl beim Eintritt in das Ansatzrohr erfährt. Somit entsteht hier ein Energieverlust, $\sim 33\,\%$. (Bei längeren Ansatzrohren berechnet sich φ und μ nach den Angaben für den Durchfluls gefüllter Leitungen.)

Bei den Angaben von μv_0 für Seitenöffnungen wird bisweilen der theoretische Beiwert von $\sqrt{2gh_u}$ (S. 268 ff.) in den Wert μ mit eingeschlossen, was aber leicht zu unrichtigen Vorstellungen von α und φ und zu Irrtümern bei der Ausrechnung von Q führen kann.

α) Die Oeffnung erreicht den Flüssigkeitsspiegel; Ueberfallwehr.

Die hier angegebenen Werte μ für Wasser enthalten zugleich den Einfluls der Zuflufsgeschwindigkeit v_z, so dafs trotz Berücksichtigung derselben zu setzen ist

$$Q = \mu F \frac{2}{3} \sqrt{2gh_u} \text{ (S. 269).}$$

Es bedeute

B die Breite des Zuflufskanals in m,
b die Wehrbreite in m,
h_k die Kanaltiefe vor dem Wehr in m,
h_u die Tiefe der Wehrkante unter dem Flüssigkeitsspiegel in m, dieselbe mindestens im Abstande $3\,h_u$ vor der Ueberfallkante gemessen.

1. $b = B =$ unveränderl., keine seitliche Einschnürung des Strahles, Zuflufsgeschwindigkeit durch den Wert μ mitberücksichtigt.

Bei lotrechtem Wehr, Wehrkrone dünn und scharfkantig, Strahlunterfläche gut gelüftet.

Nach Frese,*) soweit $b > h_u$ und $h_u > 0{,}1$ m,

$$\mu = \left(0{,}6150 + \frac{0{,}0021}{h_u}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h_u}{h_k}\right)^2\right],$$

Mittelwerte: $\mu = 0{,}63$, $\quad Q = 0{,}42\sqrt{2gh_u}$.

*) Z. d. V. d. I. 1890 S. 1285.

Digitized by Google

Nach Aichel*) setze statt des ersten Klammerausdrucks

$$\left(0{,}616 + \frac{0{,}00049}{h_u - 0{,}0083}\right).$$

Nach Bazin beträgt

die Strahlgeschwindigkeit an der Unterfläche $= 0{,}946\sqrt{2\,g\,h_u}$,

„ „ „ „ Oberfläche $= 0{,}495\sqrt{2\,g\,h_u}$,

die mittlere Strahlgeschwindigkeit

$$\text{etwa } 0{,}98 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2\,g\,h_u} = 0{,}65\sqrt{2\,g\,h_u},$$

die Strahldicke an der Stelle gröfster Einschnürung $0{,}648\,h_u$; die Absenkung des Spiegels ist im Abstande $3\,h_u$ von der Wehrkrone nicht mehr mefsbar.

Bei geneigtem Wehr, Wehrkrone dünn und scharfkantig, Strahlunterfläche gut gelüftet:

Wenn φ den Winkel zwischen Wehrebene und der Wagerechten auf der Zufluſsseite bedeutet, vervielfältige die Werte μ für lotrechtes Wehr (nach Bazin)**)

bei $\varphi =$	45^0	70^0	90^0	135^0	153^0
mit	0,93	0,96	1,00	1,10	1,11.

Wenn $\varphi > 153^0$, nimmt μ wieder ab bis zum Werte 1,0.

Ohne Luftzutritt unterhalb des Ueberfallstrahles wächst μ (nach Bazin)

bei $h_u < 0{,}23$ m bis zum 1,08fachen
„ $h_u \sim 0{,}23$ „ „ „ 1,29 „
„ $h_u > 0{,}29$ „ „ „ 1,15- bis 1,19fachen

} des Wertes von μ für den Fall mit Lüftung.

Bei lotrechtem Wehr mit breiter, stromaufwärts scharfkantiger Wehrkrone von der Stärke δ in m vervielfältige den Wert für dünne, scharfe Wehrkrone (nach Bazin)

bei $h_u : \delta =$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
mit	0,75	0,78	0,82	0,86	0,90	0,93.

Bei $h_u < 1{,}5\,\delta$ wird die Wehrkrone stets benetzt, bei $h_u \sim 1{,}5$ bis $2{,}0\,\delta$ ist die Benetzung nicht sicher zu erhalten, und bei $h_u > 2\,\delta$ springt der Strahl frei über die Wehrkrone, so dafs μ den Wert wie bei scharfer Ueberfallkante erhält.

Wird noch die stromaufwärts liegende Wehrkante stark abgerundet, so vergröfsert sich μ um 0,1 bis 0,15.

Bei schief zur Stromrichtung eingebautem lotrechten Wehr mit dem Winkel β zwischen Wehrkante und Ufer vervielfältige (nach Aichel) den Wert μ für das normal eingebaute Wehr mit dem Beiwert (gültig für $h_u < 0{,}4\,h_k$)

$$1 - 250\,\frac{h_u}{h_k - h_u} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

worin für $\beta =$	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0
$\varrho =$	305	532	893	1923	6579.

*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 1752.
**) Z. d. V. d. I. 1890 S. 880 und 1889 S. 513.

Digitized by Google

2. $b < B$ (seitliche Einschnürung des Strahles), Wehr lotrecht und winkelrecht zum Strom gerichtet, Durchflufskanten scharfkantig. Nach Frese, soweit $h_u > 0{,}1$ m und $< 0{,}6$ m:

$$\mu = m\left\{1 + \left[0{,}25\left(\frac{b}{B}\right)^2 + 0{,}025 + \frac{0{,}0375}{(h_u : h_k)^3 + 0{,}02}\right]\left(\frac{h_u}{h_k}\right)^2\right\}, \text{ worin}$$

$$m = 0{,}5755 + \frac{0{,}017}{h_u + 0{,}18} - \frac{0{,}075}{b + 1{,}2} \text{ zu setzen ist.}$$

Für die unter 1. bezeichneten besonderen Fälle vervielfältige μ mit den dort angegebenen Beiwerten.

β) Die Oeffnung liegt unter dem Flüssigkeitsspiegel; Bodenöffnung oder seitlicher Durchlafs.

1. Oeffnung ohne Strahlführung, also Oeffnung in ebener, sehr dünner Wandung oder mit von aufsen her zugeschärfter Durchflufsöffnung bei dickerer Wandung. (Angaben nach Weisbach.)

a) Zuflufsquerschnitt vor der Oeffnung $\geqq 10\,F$, so dafs die Zuflufsgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann. (Bedeutung von F und h_0 S. 266 u. 267.)

Bei kreisförmiger Oeffnung (vollkommene Kontraktion):

Bei gröfserer Tiefe und gröfserer Oeffnung: $\mu = 0{,}61$.

Bei kleineren Mafsen für Tiefe und Oeffnung, nach Weisbach:

Durchmesser der Oeffnung		0,44	1	2	3	4 cm
Wassertiefe 0,25 m . . .	$\mu =$	0,68	0,64	0,63	0,62	0,614
„ 0,60 m . . .	$\mu =$	0,66	0,63	0,62	0,61	0,607.

Beim Ausflufs unter Wasser ist μ etwa 0,01 kleiner als vorstehend.

Neuere Versuche von Sternberg ergeben, dafs μ bei kleinem d und bei $v < 5$ m wesentlich von v und H_0 abhängig ist, und dafs die Kurve für μ nach Art einer Dampfexpansionskurve bis zu dem Werte 0,72 ansteigt.

Bei geradlinig begrenzter Oeffnung (unvollkommene Kontraktion):

Der Wert μ ist am kleinsten für das Quadrat und beinahe gleich dem für die Kreisöffnung; μ wird aber gröfser für langgestreckte Oeffnungen und wächst bis etwa 0,9 für ganz schmale Schlitze. (Einflufs der Gröfse von F und der Wassertiefe wie bei kreisförmigen Oeffnungen.)

b). Der vor F befindliche Zuflufsquerschnitt $F_z \leqq 10\,F$, Zuflufsgeschwindigkeit wesentlich, unvollkommene Kontraktion. Vervielfältige (nach Weisbach) vorstehende Werte μ mit folgenden Zahlen:

wenn $F : F_z =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
F kreisrund:	1,014	1,034	1,06	1,09	1,13	1,19	1,26	1,35	1,47	1,63
F rechteckig:	1,019	1,042	1,07	1,11	1,15	1,21	1,28	1,36	1,47	1,61

2. Oeffnung mit Strahlführung, also Oeffnung in dicker Wandung oder Oeffnung mit kurzem Ansatz (Mundstück, Gerinne).

(Angaben nach Weisbach.)

a) **Oeffnung in dicker Wand.** Ist die Einlaufkante scharfkantig oder ihr Brechungswinkel $< 150^0$, so bleibt bei geringer Ausdehnung der

Digitized by Google

Brechungskante die Kontraktion wie bei der Oeffnung in sehr dünner Wandung bestehen, und bei der folgenden Wiederausbreitung des Strahles legt sich derselbe bei parallelen Seiten der Oeffnung nur dann an die Wandung der Oeffnung oder des Ansatzes an, wenn die Entfernung zwischen Einlauf und Auslaufebene gröfser ist als die Weite der Oeffnung; bei geringerer Länge gelten die Werte μ wie unter 1. angegeben.

b) **Rechtwinklig zur inneren Wandfläche angesetzte runde Mundstücke.** Der Mündungsquerschnitt wird vom Strahl nicht ausgefüllt bei lotrechten zylindrischen Ansätzen an Bodenöffnungen und bei beliebig angesetzten sich erweiternden Mundstücken an Boden- oder Seitenwänden. Bei solchen Mundstücken entsteht am engeren Querschnitt Verminderung des Seitendrucks neben Geschwindigkeitsvergröfserung, und der Strahl tritt an der Mündung besenförmig aus. Dabei kann der Wert μ in bezug auf den engeren Querschnitt wesentlich höhere Werte als 1 annehmen (vgl. die Angaben zu Abb. 134 u. 148, S. 302).

Abb. 130. Abb. 131. Abb 132. Abb. 133. Abb. 134.

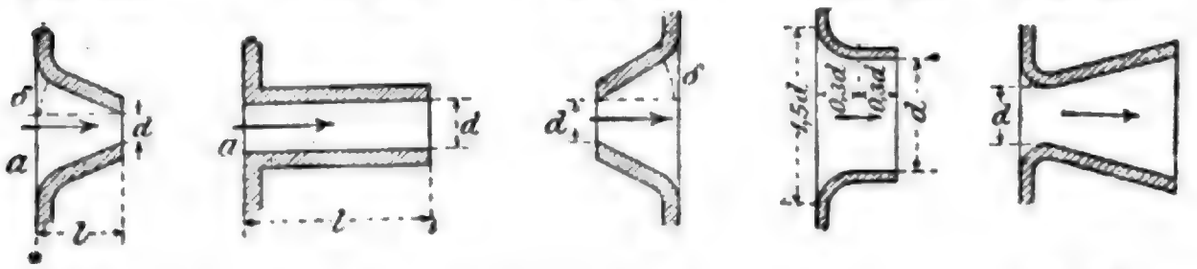
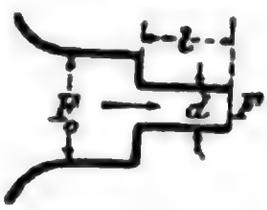


Abb. 135.



Für den Widerstand in längeren oder zusammengesetzten Ansätzen vgl. folgenden Abschn. C.

Abb. 130,	$\delta =$	0^0	$5^3/_4{}^0$	$11^1/_4{}^0$	$22^1/_2{}^0$	45^0	$67^1/_2{}^0$	90^0
Kante a stark abgerundet:	$\mu =$	0,97	0,95	0,92	0,88	0,75	0,68	0,63 ($l = 3d$).
Kante a scharf:	$\mu =$	0,83	0,94	0,92	0,85	0,75	0,68	0,63 ($l = 2{,}6\,d$).

Bei scharfer Kante wird μ Höchstwert = 0,946 für $\delta = 6^3/_4{}^0$.

Abb. 131, $l = 3$ bis $5\,d$;

Kante a scharf: μ etwa 0,82,
Kante a schwach abgerundet: μ etwa 0,90,
Kante a stark abgerundet: μ etwa 0,97.

Abb. 132, Dicke der gegen den Strom gerichteten Ringfläche wenigstens 5 mm:

$\delta =$	0^0	$22^1/_2{}^0$	45^0	$67^1/_2{}^0$	90^0
$\mu =$	0,54	0,55	0,58	0,60	0,63 ($l = d$).

Ist die Oeffnung mit $\delta = 0^0$ der Zuflufsrichtung entgegen schneidenartig zugeschärft, so nimmt μ den kleinsten durch Kontraktion erreichbaren Wert 0,50 an.

Abb. 133, für $l = 0{,}6\,d$, mit der Glätte der Wandung und der Durchflufsgeschwindigkeit wachsend, wird

$$\mu = 0{,}96 \text{ bis } 0{,}99.$$

Digitized by Google

Abb. 134. Je nach Winkel, Stützenlänge und Durchflufsgeschwindigkeit ist $\mu = 0{,}96$ bis 2,3 (bezogen auf den engeren Querschnitt); Austritt besenförmig, hohler Strahl (S. 302).

Abb. 135, $l = 3\,d$, F und F_0 bedeuten Querschnitte. Durchflufskante scharfwinklig;

bei $\frac{F}{F_0} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
$\mu =$	0,83	0,84	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,94	0,965	1,00

c) **Schiefwinklig angesetzte Rohrstutzen** mit scharfer Einlaufkante und $l = 3\,d$, wenn γ den Winkel zwischen Wandfläche und Strahlachse bedeutet:

$\gamma =$	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°
$\mu =$	0,82	0,80	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72.

d) **Teilweise umkränzte Oeffnungen** in dünner Wand, aufsen oder innen zur Stromrichtung parallel angesetzte Leitflächen oder Gerinne, welche auch durch den Boden oder die Seitenwand des Gefäfses gebildet sein können, indem der zur Oeffnung gerichtete Strahl an ihnen entlang fliefsen mufs.

Bedeutet $\frac{1}{n}$ den umkränzten Teil des benetzten Umfanges der Oeffnung, so vergröfsert sich (nach Bidone und Weisbach) der auf S. 275 unter 1 angegebene Wert μ für allseitig scharfe Durchflufskanten (infolge aufgehobener Kontraktion an den umkränzten Teilen, teilweise Kontraktion genannt) um den Wert

$0{,}128 : n$ bei kleinen kreisförmigen Oeffnungen,
$0{,}134 : n$ bei kleinen rechteckigen Oeffnungen,
$0{,}157 : n$ bei gröfseren rechteckigen Oeffnungen.

C. Durchflufs durch gefüllte Rohrleitungen.

1. Allgemeines über die Widerstände und Fliefszustände.

Jeder Geschwindigkeit v der Flüssigkeit in m/sk entspricht ohne Rücksicht auf die Widerstände bereits ein Aufwand an Fallhöhe (**Geschwindigkeitshöhe**) $= \frac{v^2}{2g}$ (in m), worin $g = 9{,}81$ m/sk² (vgl. Tafel S. 278 u. 279).

Hierzu tritt der Aufwand für Ueberwindung der Widerstände beim Durchflufs der Leitung, die sich fast sämtlich der Geschwindigkeitshöhe proportional zeigen, weshalb zweckmäfsig alle Widerstände ohne Ausnahme als Vielfaches von $v^2 : 2g$ mittels Widerstandszahlen ζ bewertet werden.

Die Widerstände sind unabhängig von dem Material der benetzten Wandung und von der Seitenpressung der Flüssigkeit, also auch unabhängig von dem auf der Oberfläche lastenden Drucke und unabhängig von der Tiefe unter der Oberfläche.

Die Widerstände sind abhängig von der Form und dem Rauhigkeitsgrade der benetzten Wandung, ferner von dem Flüssigkeits-

Digitized by Google

Tafeln für Fallhöhen

Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen h in m für Endgeschwindigkeiten v zwischen 0 und 1000 m/sk.

$h = v^2/2\,g, \qquad g = 9{,}8$ m/sk^2.

v	h	v	h	v	h	v	h	v	h
0	0,00000	40	81,5494	80	326,198	285	4139,91	645	21204,1
1	0,05097	41	85,6779	81	334,404	295	4435,52	655	21866,7
2	0,20387	42	89,9083	82	342,712	300	4587,16	665	22539,5
3	0,45872	43	94,2406	83	351,121	305	4741,34	675	23222,5
4	0,81549	44	98,6748	84	359,633	315	5057,34	685	23915,7
5	1,27421	45	103,211	85	368,247	325	5383,54	695	24619,0
6	1,83486	46	107,849	86	376,962	335	5719,93	700	24974,5
7	2,49745	47	112,589	87	385,780	345	6066,51	705	25332,6
8	3,26198	48	117,431	88	394,699	355	6423,29	715	26056,3
9	4,12844	49	122,375	89	403,721	365	6790,26	725	26790,3
10	5,09684	50	127,421	90	412,844	375	7167,43	735	27534,4
11	6,16718	51	132,669	91	422,069	385	7554,79	745	28288,7
12	7,33945	52	137,819	92	431,397	395	7952,34	755	29053,3
13	8,61366	53	143,170	93	440,826	400	8154,94	765	29828,0
14	9,98981	54	148,624	94	450,357	405	8360,09	775	30612,9
15	11,4679	55	154,179	95	459,990	415	8778,03	785	31408,0
16	13,0479	56	159,837	96	469,725	425	9206,17	795	32213,3
17	14,7299	57	165,596	97	479,562	435	9644,50	800	32619,8
18	16,5138	58	171,458	98	489,501	445	10093,0	805	33028,8
19	18,3996	59	177,421	99	499,541	455	10551,7	815	33854,5
20	20,3874	60	183,486	100	509,684	465	11020,6	825	34690,4
21	22,4771	61	189,653	105	561,927	475	11499,7	835	35536,4
22	24,6687	62	195,923	115	674,057	485	11989,0	845	36392,7
23	26,9623	63	202,294	125	796,381	495	12488,5	855	37259,2
24	29,3578	64	208,767	135	928,899	500	12742,1	865	38135,8
25	31,8552	65	215,341	145	1071,61	505	12998,2	875	39022,7
26	34,4546	66	222,018	155	1224,52	515	13518,1	885	39919,7
27	37,1560	67	228,797	165	1387,61	525	14048,2	895	40827,0
28	39,9592	68	235,678	175	1560,91	535	14588,4	900	41284,4
29	42,8644	69	242,661	185	1744,39	545	15138,9	905	41744,4
30	45,8716	70	249,745	195	1938,07	555	15699,5	915	42672,0
31	48,9807	71	256,932	200	2038,74	565	16270,4	925	43609,8
32	52,1917	72	264,220	205	2141,95	575	16851,4	935	44557,8
33	55,5046	73	271,611	215	2356,01	585	17442,7	945	45516,1
34	58,9195	74	279,103	225	2574,34	595	18044,1	955	46484,5
35	62,4363	75	286,697	235	2814,73	600	18348,6	965	47463,1
36	66,0551	76	294,393	245	3059,38	605	18655,3	975	48451,8
37	69,7757	77	302,192	255	3314,22	615	19277,5	985	49450,8
38	73,5984	78	310,092	265	3579,26	625	19909,5	995	50460,0
39	77,5229	79	318,094	275	3854,48	635	20551,7	1000	50968,4

Digitized by Google

und Endgeschwindigkeiten.

Endgeschwindigkeiten v in m/sk für Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen h zwischen 1 und 1000 m.

$$v = \sqrt{2\,g\,h}, \qquad g = 9{,}81 \text{ m/sk}^2.$$

h	v	h	v	h	v	h	v	h	v
1	4,42945	41	28,3623	81	39,8650	210	64,1888	610	109,399
2	6,26418	42	28,7061	82	40,1103	220	65,6993	620	110,292
3	7,67202	43	29,0458	83	40,3542	230	67,1759	630	111,435
4	8,85889	44	29,3816	84	40,5032	240	68,6207	640	112,057
5	9,90454	45	29,7136	85	40,8375	250	70,0357	650	112,929
6	10,8499	46	30,0420	86	41,0770	260	71,4227	660	113,795
7	11,7192	47	30,3668	87	41,3151	270	72,7832	670	114,653
8	12,5284	48	30,6881	88	41,5519	280	74,1188	680	115,506
9	13,2883	49	31,0061	89	41,7873	290	75,4308	690	116,352
10	14,0071	50	31,3209	90	42,0214	300	76,7202	700	117,192
11	14,6908	51	31,6326	91	42,2542	310	77,9884	710	118,026
12	15,3440	52	31,9412	92	42,4858	320	79,2364	720	118,855
13	15,9706	53	32,2469	93	42,7160	330	80,4649	730	119,677
14	16,5730	54	32,5497	94	42,9451	340	81,6750	740	120,494
15	17,1553	55	32,8496	95	43,1729	350	82,8673	750	121,305
16	17,7178	56	33,1469	96	43,3995	360	84,0429	760	122,111
17	18,2630	57	33,4416	97	43,6250	370	85,2021	770	122,912
18	18,7925	58	33,7337	98	43,8493	380	86,3458	780	123,708
19	19,3075	59	34,0232	99	44,0724	390	87,4746	790	124,498
20	19,8091	60	34,3105	100	44,2945	400	88,5889	800	125,284
21	20,2983	61	34,5951	105	45,3883	410	89,6895	810	126,064
22	20,7759	62	34,8775	110	46,4564	420	90,7767	820	126,840
23	21,2428	63	35,1577	115	47,5005	430	91,8510	830	127,611
24	21,6998	64	35,4356	120	48,5224	440	92,9129	840	128,378
25	22,1472	65	35,7113	125	49,5227	450	93,9627	850	129,140
26	22,5858	66	35,9850	130	50,5037	460	95,0010	860	129,897
27	23,0161	67	36,2566	135	51,4655	470	96,0281	870	130,650
28	23,4384	68	36,5262	140	52,4099	480	97,0443	880	131,399
29	23,8535	69	36,7938	145	53,3376	490	98,0500	890	132,143
30	24,2611	70	37,0594	150	54,2492	500	99,0454	900	132,883
31	24,6621	71	37,3232	155	55,1462	510	100,031	910	133,620
32	25,0567	72	37,5851	160	56,0284	520	101,007	920	134,352
33	25,4452	73	37,8452	165	56,8973	530	101,974	930	135,080
34	25,8279	74	38,1035	170	57,7529	540	102,931	940	135,804
35	26,2050	75	38,3601	175	58,5961	550	103,880	950	136,525
36	26,5767	76	38,6150	180	59,4272	560	104,820	960	137,241
37	26,9433	77	38,8682	185	60,2470	570	105,752	970	137,954
38	27,3049	78	39,1198	190	61,0555	580	106,675	980	138,664
39	27,6619	79	39,3698	195	61,8539	590	107,591	990	139,369
40	28,0143	80	39,6182	200	62,6418	600	108,499	1000	140,071

Digitized by Google

grade (Zähflüssigkeit) und von dem Einheitsgewichte (Dichte) der Flüssigkeit, daher auch abhängig vom Wärmegrade.

Der Durchfluſs einer Leitung hört auf, wenn an ihrer Scheitelstrecke infolge Verminderung der Seitenpressung oder durch Erwärmung der Flüssigkeit sich so viele Gase oder Dämpfe angesammelt haben, daſs der Scheitelquerschnitt von ihnen ausgefüllt wird. Je nach der Seitenpressung und dem gleichzeitigen Wärmegrade entwickelt jede Flüssigkeit Dämpfe und nimmt mechanisch gebundene Gase auf oder gibt solche ab. Z. B. nimmt Wasser bei 1 at Druck abs. und 15° an R.-T. 0,02 Luft, 1,0 Kohlensäure, 3,2 Schwefelwasserstoff, 450 Chlorwasserstoff, 727 Ammoniakgas auf (Abschn. Wärme).

Man unterscheidet zwei verschiedene Fliefszustände. Bei engen und zugleich glatten, geraden Rohren fliefsen die Flüssigkeitsfäden bei den kleineren Geschwindigkeiten parallel zueinander; bei den meist betrachteten Rohrweiten und Geschwindigkeiten dagegen fliefsen sie durcheinanderwirbelnd oder schraubenförmig im Rohr entlang. Beide Zustände trennen sich an der sogen. kritischen oder Grenz-Geschwindigkeit (S. 294), die sich (nach Versuchen von Lang) durch einen unruhigen Wasserstand im Standrohr zu erkennen gibt. Durch allmähliche Vermehrung der Geschwindigkeit kann die Erreichung der Grenzgeschwindigkeit etwas hinausgeschoben werden (Wirbelverzug).

Bei beiden Fliefszuständen besitzt der mittlere Flüssigkeitsfaden die gröfste Durchflufsgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeiten der anderen Fäden nehmen nach der Wand zu parabolisch ab. Die Geschwindigkeit an der Wand ist unterhalb der kritischen Geschwindigkeit Null, oberhalb dagegen etwa das 0,57fache von der in der Achse oder das 0,64fache von der mittleren Geschwindigkeit des ganzen Durchflufsquerschnitts. Diese mittlere Geschwindigkeit beträgt unterhalb der kritischen Geschwindigkeit das 0,5fache, oberhalb etwa das 0,84fache von der Höchstgeschwindigkeit in der Achse.

2. Allgemeine Beziehungen für Leitungen mit wechselnden Höhenlagen, Querschnitten und Widerständen.

Abb. 136 S. 282 zeigt die Druckverhältnisse in einer Heberleitung, Abb. 137 S. 282 die in einer Saugleitung.

Es bedeutet

F_e und F_a den Einlauf- bzw. Ausflufsquerschnitt der Leitung in qm,
F_s den Querschnitt am Scheitel der Leitung in qm,
F_1, F_2 usw. Querschnitte der Leitung zwischen F_e und F_a, winkelrecht zur Stromrichtung gemessen, in qm,
F_0 den gedachten „gleichwertigen Querschnitt" einer Leitung ohne Widerstände, die bei gleichem H_0 gleiches Q liefern würde,
Q die durch die Leitung abzuführende Flüssigkeitsmenge in cbm/sk unter Berücksichtigung aller Widerstände und Masseneinflüsse,
Q_0 die theoretisch, ohne Widerstände abführbare Flüssigkeitsmenge in cbm/sk,

Digitized by Google

v_e, v_1, v_a usw. die mittlere Durchfluſsgeschwindigkeit in m/sk in den Querschnitten F_e, F_1, F_a usw.,

v_0 die Q_0 entsprechende theoretische mittlere Ausfluſsgeschwindigkeit im Ausfluſsquerschnitt F_a in m/sk,

v_z die Komponente der Zulaufgeschwindigkeit zu F_e in der Richtung der Einlaufgeschwindigkeit in m/sk. Vorausgesetzt ist dabei, daſs der Zulaufstrom auf den Einlaufquerschnitt F_e gerichtet ist, andernfalls ist $v_z = 0$,

$\frac{v_e^2}{2g}$, $\frac{v_a^2}{2g}$ usw. die zur Erzeugung von v_e, v_a usw. theoretisch erforderliche Fallhöhe, **Geschwindigkeitshöhe** genannt (Tafel S. 278),

H_e und H_a die Höhen der Flüssigkeitsspiegel bei F_e bzw. F_a über dem Schwerpunkt von F_a in m,

H_0 die treibende Druckhöhe in m der Flüssigkeit, theoretischer Stau, theoretische **Fallhöhe**,

h_e, h_a, h_1 usw. die absoluten Druckhöhen bei F_e, F_a, F_1 usw. der in Ruhe gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in m der Flüssigkeitssäule; **hydrostatischer Seitendruck**; der dynamische Einfluſs von v_z ist durch die Höhe $v_z^2 : 2g$ mit einbegriffen,

p_e, p_a, p_1 usw. die absoluten Druckhöhen bei F_e, F_a, F_1 usw. der in Bewegung gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in m der Flüssigkeitssäule; **hydraulischer** oder **hydrodynamischer Seitendruck**,

q_e, q_a, q_s, q_1 usw. den am Querschnitt F_e, F_a usw. wirkenden äuſseren Luftdruck in m der Flüssigkeitssäule,

s die der Temperatur der Flüssigkeit entsprechende Dampfspannung in m der Flüssigkeitssäule (vgl. 3. Abschn. Wärme),

w_e, w_a, w_1 usw. den bei F_e, F_a, F_1 usw. auftretenden Widerstand, wie p gemessen; **Widerstandshöhe**,

$\Sigma_e^1 w$, $\Sigma_e^a w$ usw. die Summe der Widerstände auf den Strecken zwischen F_e und F_1 bzw. F_e und F_a usw., wie p gemessen,

ζ_e, ζ_a, ζ_1 usw. die **Widerstandszahl**, die den in F_e, F_a, F_1 usw. stattfindenden hydraulischen Widerstand als Teil der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_e^2}{2g}$, $\frac{v_a^2}{2g}$, $\frac{v_1^2}{2g}$ usw. angibt; also allgemein $\zeta \frac{v^2}{2g} = w$; Werte ζ S. 286 ff.,

$\Sigma_e^1 \zeta_a$ die Widerstandszahl für die Summe der Widerstände auf der Strecke F_e bis F_1, die als Teile von $v_a^2 : 2g$ gemessen werden; andere Zeiger geben entsprechende Strecken und Geschwindigkeitshöhen an, z. B. $\Sigma_1^a \zeta_1$ ist die Widerstandszahl zu $v_1^2 : 2g$ für die Strecke F_1 bis F_a oder $F_0 : F_a$,

μ_a die **Ausfluſszahl** (Wirkungsgrad) der ganzen Leitung, d. i. das Verhältnis $Q : Q_0$ oder $v_a : v_0$,

γ das Gewicht der Flüssigkeit in der Rohrleitung in kg/cbm. Die in m Flüssigkeitshöhe gemessenen Höhen ergeben mit γ vervielfältigt den entsprechenden Druck in kg/qm oder mit $\gamma : 10\,000$ vervielfältigt den Druck in kg/qcm = Druck in at.

Digitized by Google

Für Süfswasser ist bei

0^0	4^0	10^0	20^0	40^0	60^0	80^0	100^0
$\gamma = 0{,}9998$	1,000	0,9997	0,998	0,992	0,983	0,972	0,958,

für Seewasser bei 15^0: $\gamma = 1{,}02$ bis 1,03,

„ Quecksilber „ 15^0: $\gamma = 13{,}595$.

Abb. 136 Heberleitung.

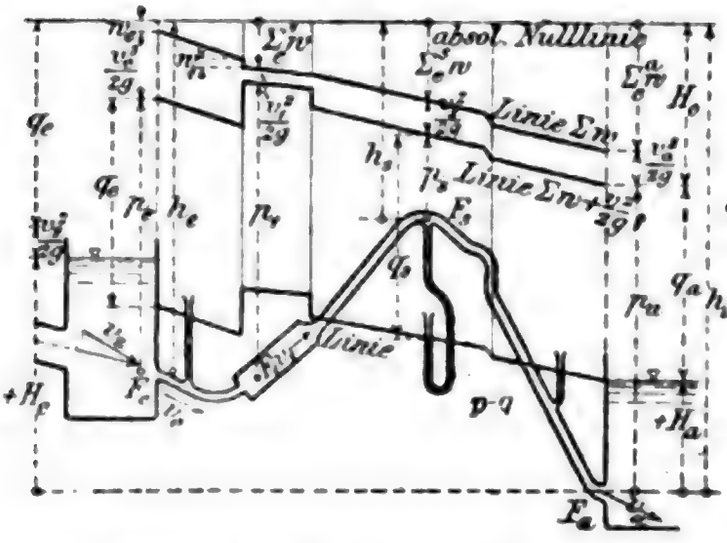
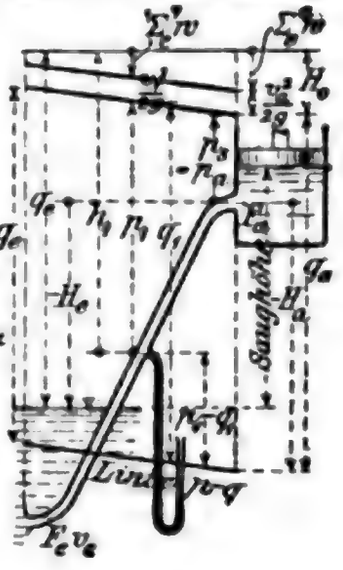


Abb. 137. Saugleitung.



Grundgleichungen:

$$H_0 = H_e - H_a + v_z^2/2\,g + q_e - q_a = v_0^2/2\,g;$$

$$H_0 = h_a - p_a = v_a^2/2\,g + \Sigma_e^a w = (1 + \Sigma_e^a \zeta_a)\, v_a^2/2\,g;$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2\,g\,H_0}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}}, \quad v_0 = \sqrt{2\,g\,H_0}.$$

(Wird anstatt H_0 die Druckhöhe H_1 einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht γ_1 gemessen, so ist $H_0 = H_1\,\gamma_1 : \gamma$ zu setzen.)

Hierin ist

$$h_a = H_e + v_z^2/2\,g + q_e; \qquad p_a = H_a + q_a;$$

$$\Sigma_e^a \zeta_a = \zeta_e \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 + \ldots\ldots + \zeta_a.$$

$$Q = F_a v_a = F_0 v_0 = \mu_a F_a v_0 = \mu_a Q_0;$$

$$\frac{2\,g\,H_0}{Q^2} = \frac{1}{F_a^2} + \frac{\Sigma_e^a \zeta_a}{F_a^2} = \frac{1}{F_0^2}$$

$$= \frac{1}{F_a^2} + \frac{\zeta_e}{F_e^2} + \frac{\zeta_1}{F_1^2} + \frac{\zeta_2}{F_2^2} + \frac{\zeta_a}{F_a^2}.$$

Je zwei dieser Summanden, jeder eine Kathete desselben rechtwinklichen Dreiecks darstellend, ergeben zur Resultante die Höhe dieses Dreiecks über der Hypothenuse.*)

$$\mu_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}} \quad \text{oder} \quad \Sigma_e^a \zeta_a = \frac{1}{\mu_a^2} - 1.$$

*) Blaess, die Strömung in Röhren; Verlag Oldenbourg. 1911.

Digitized by Google

Werte $\Sigma_e^a \zeta_a$

$\mu_a =$	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	0,09	0,10	0,23	0,38	0,56	0,78	1,04	1,37	1,78	2,31	3,00
$\mu_a =$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,00
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	3,94	5,25	7,16	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399	1599	∞

Erst nach der Feststellung von v_a lassen sich die Zustände in den übrigen Querschnitten der Leitung ermitteln.

Beispielsweise gilt für F_2, während für andere Querschnitte nur die zugehörigen Zahlenzeiger sinngemäfs einzusetzen sind:

$$v_2 = v_a F_a : F_2,$$

$$h_2 - p_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma_e^2 w = \left(1 + \Sigma_e^2 \zeta_2\right) \frac{v_2^2}{2g}$$

$$= \left(1 + \Sigma_e^2 \zeta_2\right) \left(\frac{F_a}{F_2}\right)^2 \frac{v_a^2}{2g} = H_0 \left(\frac{F_a}{F_2}\right)^2 \frac{1 + \Sigma_e^2 \zeta_2}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a};$$

Steighöhe im offenen Standrohr bei $F_2 = p_2 - q_2$.

Widerstandshöhe

$$\Sigma_e^2 w = w_e + w_1 + w_2 = (\zeta_e v_e^2 + \zeta_1 v_1^2 + \zeta_2 v_2^2) 2g$$

$$= \Sigma_e^2 \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \Sigma_e^2 \zeta_a \frac{v_a^2}{2g};$$

Widerstandszahl:

$$\Sigma_e^2 \zeta_2 = \zeta_e \left(\frac{v_e}{v_2}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + \zeta_2 = \zeta_e \left(\frac{F_2}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + \zeta_2,$$

$$\Sigma_e^2 \zeta_a = \zeta_e \left(\frac{v_e}{v_a}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{v_1}{v_a}\right)^2 + \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_a}\right)^2 = \zeta_e \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 + \zeta_2 \left(\frac{F_a}{F_2}\right)^2.$$

Einzelwerte ζ S. 287 u. 291 ff.

Weisbach hat für die einzelnen Widerstände die Angabe von Widerstandszahlen ζ (Teilzahlen der Geschwindigkeitshöhen) statt der vordem üblichen Angabe von Ausflußzahlen μ (Teilzahlen der theoretischen Ausflußmenge) eingeführt (s. Vorrede von Weisbach zu seiner Schrift über „Versuche", Leipzig 1842), weil dadurch die rechnerische Zusammenfassung aller Widerstände einer Leitung sehr erleichtert wird, zumal die Widerstände, mit Ausnahme für den geraden Rohrstrang, sich als proportional v^2 erweisen.

3. Besondere Fälle, Erklärung besonderer Erscheinungen.*)

Bei kurzen Leitungen mit gleichen Feuchtigkeitsverhältnissen der Luft über F_e und F_a kann $q_e = q_a$ gesetzt werden; ist aufserdem $r_3 = 0$, so wird $H_0 = H_e - H_a$. Bei langen Leitungen dagegen ist stets die Verschiedenheit von q_e und q_a zu berücksichtigen, die infolge Witterungswechsels fortwährend kleinen Aenderungen ausgesetzt ist.

*) Eine Fülle von Aufgaben aus der Hydraulik nebst Lösungen findet sich in „Wittenbauer, Aufgaben aus der technischen Mechanik. Bd. III", Verlag Springer,

Digitized by Google

Für einen Querschnitt F_n nahe dem Ausfluſs setze zur bequemeren Berechnung

$$\Sigma_e^n w = \Sigma_e^a w - \Sigma_n^a w = H_0 - v_a^2 : 2g - \Sigma_n^a w;$$

dann wird $h_n - p_n = H_0 + \left[\left(\frac{F_a}{F_n}\right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a\right] \frac{v_a^2}{2g}$;

bei wagerechter Endigung der Leitung von h_n ab ist hierin

$$h_n = h_a \quad \text{und} \quad h_a - H_0 = H_a + q_a, \text{ somit}$$

$$H_a + q_a - p_n = \left[\left(\frac{F_a}{F_n}\right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a\right] \frac{v_a^2}{2g} \text{ oder}$$

$$= \frac{\left(\frac{F_a}{F_n}\right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a} H_0 \text{ (vgl. } \gamma. \text{ S. 300).}$$

Bei freiem Ausfluſs ist noch $H_a = 0$, und $q_a - p_n$ stellt dann den Unterdruck im Querschnitt F_n dar.

Nachgiebiges Rohrmaterial (Gummi, Hanf, Blei, Leder u. dgl.) erstrebt unter Formänderung den Zustand $p = q$. Dies bedingt bei sonst innerem Ueberdrucke eine Vergröſserung von $v^2 : 2g$ mittels Verkleinerung von F, und umgekehrt eine Vergröſserung von F bei sonst äuſserem Ueberdrucke, der z. B. durch streckenweise Einlegung eines dünnen Schlauches in Wasser erzeugt werden kann (Z. d. V. d. I. 1909 S. 1496). Der äuſsere Ueberdruck muſs aber $< H_0$ bleiben, sonst hört der Durchfluſs auf.

Unterdruck ($p_x < q_x$) entsteht in einer Leitung bei F_x, sobald der statische Ueberdruck $h_x - q_x < \frac{v_a^2}{2g}\left(\frac{F_a}{F_x}\right)^2 + \Sigma_e^x w$, also am ehesten in fallenden oder kurzen Leitungen mit kleinen Widerständen, oder an Verengungen (z. B. an teilweise geschlossenen Regulier- oder Absperrvorrichtungen); die Widerstände und Verengungen wirken um so mehr auf Unterdruck hin, je näher sie zu F_e liegen.

Bei Undichtigkeiten der Leitung in einem Querschnitt F_x tritt an demselben Flüssigkeit aus, wenn $p_x > q_x$; dagegen tritt ein Ansaugen ein, falls $p_x < q_x$, also auch falls $\frac{h_x - q_x}{v_a^2 : 2g} < \left(\frac{F_a}{F_x}\right)^2 + \Sigma_e^x \zeta_a$ wird (vgl. in Abb. 136 u. 137 S. 282 den Rohrstrang oberhalb der Linie für $p - q$).

Der Ausfluß hört bei Heber- und Saugleitungen allmählich auf (unter Zertrennung des Flüssigkeitsfadens an der Scheitelstelle) bei Aufhören der Eintauchung von F_e oder infolge Lufteintritts an undichten Stellen mit $p_x < q_x$, oder infolge Erwärmung der Scheitelstrecke (etwa durch Sonnenstrahlen bei freiliegendem Scheitel), wobei sich aufgenommen gewesene Gase bei F_s ausscheiden, oder sobald p_s bei F_s den der Temperatur der Flüssigkeit entsprechenden Dampfdruck s erreicht, also wenn

$$p_s = h_s - \frac{v_s^2}{2g} - \Sigma_e^s w \leqq s \quad \text{oder} \quad \frac{h_s - s}{v_a^2 : 2g} \leqq \left(\frac{F_a}{F_s}\right)^2 + \Sigma_e^s \zeta_a.$$

Digitized by Google

Durchfluſs durch Heberleitungen (ohne merkliche Kapillarwirkung, S. 260) ist nicht erreichbar, wenn neben $H_a = 0$ die an F_a sich anschließende Leitungsstrecke größeres Gefälle besitzt, als die Linie für $p - q$ im Falle gedachten Durchflusses, daſs also auf dieser Strecke Unterdruck ($p_x < q_x$) und Lufteintritt bei F_a entstehen würde. Dieses Gefälle wird durch besonderen Widerstand bei F_a verkleinert, z. B. durch Verengung von F_a, durch Einlegen von Sieben bei F_a oder durch Aufwärtsbiegen des Rohrendes. Durchfluſs wird sofort erreicht, sobald $H_a > 0$.

Leitungen bleiben auf folgenden Strecken ungefüllt, werden also auf diesen wie ein offener Kanal durchflossen (soweit nicht Kapillarwirkung dem entgegensteht):

a) Auf fallender Endstrecke vor F_a, wenn auſser $H_a = 0$ auf dieser Strecke bei gedachter Füllung Unterdruck ($p_a < q_a$) entstehen würde. Durch Eintritt von Luft bei F_a bildet sich dann an höher gelegener Stelle (meist am Uebergangspunkt vom geringeren zum größeren Gefälle) ein gefüllter Endquerschnitt, dessen h die wahre Fallhöhe H_0 und dessen Größe die Werte F_a und v_a bestimmt, wenn er so gelegen ist, daſs oberhalb derselben kein weiterer Unterdruck $\gtrless s$ auftritt. Ausfluſs unter Wasser oder Aufwärtsbiegen des Rohrendes füllt die Endstrecke über F_a bis zur Höhe q_a + Widerstandshöhe + Geschwindigkeitshöhe dieser Endstrecke.

b) Auf fallender Zwischenstrecke, wenn an deren Oberteil die Spannung s unterschritten wird, das ist bei gleichbleibendem Leitungsquerschnitt der Teil der Strecke, dessen Fallhöhe $> q_a$ + Geschwindigkeitshöhe + Widerstandshöhe + Stauhöhe der nachfolgenden ansteigenden Strecke. Eine mehrfach auf- und absteigende Leitung kann mehrere ungefüllte Zwischenstrecken enthalten; die zu F_e nächstgelegene enthält an ihrem höchsten Punkte den wahren Querschnitt F_a, der H_a bestimmt (Leitungen in Bergwerken, auf bergigem Gelände, für Wassertrommelgebläse; bei diesen bestimmt die Höhe der wieder ansteigenden Endstrecke (Steigrohr) den hydraulischen Druck, unter dem sich die an einer Erweiterung abgeschiedene Preſsluft befindet).

c) An Scheitelstrecken infolge dortiger Ansammlung von Gasen, die von der Flüssigkeit aufgenommen gewesen sind, und die entweder infolge von Erwärmung (Sonnenbestrahlung) oder von Verminderung der Seitenpressung p zum Scheitel gelangen (Saugleitung, Verengung, Kontraktion, wesentliche Stromablenkung). Nimmt die Ansammlung der Gase bis zur Ausfüllung des Scheitelquerschnitts zu, so hört der Durchfluſs gänzlich auf, wenn nicht Kapillarwirkung vorhanden ist.

Zur Beseitigung der angesammelten Gase dienen bei Ueberdruck am Scheitel ($p_s > q_s$) Standrohre oder selbsttätige Schwimmerventile; bei Unterdruck am Scheitel ($p_s < q_s$, Heber- oder Saugleitung, fallende Strecken mit zwischenliegendem Buckel) müssen die Gase am Scheitel abgepumpt werden.*) Grundwasser enthält im allgemeinen 0,02 der Flüssigkeitsmenge in cbm an Luft; daher sind bei Heberleitungen mit einer absoluten Seitenpressung p_s in m am Scheitel $(1 - 0{,}1\,p_s)$ $0{,}02\,Q_a$ cbm Luft in der Sekunde abzupumpen.

*) Ueber Entlüftung von Heberleitungen, Eger, Zentralbl. Bauv. 1913 S. 181.

Digitized by Google

Verzweigte Leitungen (ohne Umlauf) denke man sich in ebenso viele Einzelleitungen zerlegt, wie Zulauf- bezw. Auslaufzweige vorhanden sind, uud stelle für jede Einzelleitung zur Bedingung, dafs gemeinschaftlich benutzte Teile gleiche Geschwindigkeiten und gleiche Seitendrücke enthalten, und dafs die Summe der Durchflufsmengen der einzelnen Zweige die Gesamtmenge Q ergibt.

Erhöhter Wanddruck p in der Leitung entsteht beim Verzögern und Absperren des Durchflusses (vgl. die Angabe über Drucksteigerung bei Absperrvorrichtungen S. 306).

4. Beziehungen für einen geraden Rohrstrang von gleichem Querschnitt und von gleicher Form (Widerstand gleichförmig).

Es bedeute neben den Zeichen unter 1. und 2:

l die Länge des Rohrstranges mit unveränderlichem Querschnitt in m der gerade gestreckt gedachten Achse,
F den Querschnitt in qm,
d den Durchmesser, falls der Querschnitt kreisförmig ist, in m,
u den benetzten Umfang des Querschnitts F in m,
v die mittlere Geschwindigkeit aller Flüssigkeitsfäden im Rohrstrange in m/sk,
w die Widerstandshöhe (Reibungshöhe) für die gerade Strecke l in m Flüssigkeitssäule,
W den Widerstand auf der Strecke l in kg,
$i = w : l$ das relative Reibungsgefälle der Rohrachse (Abb. 136 S. 282),
ζ die dem Widerstande im ganzen Rohrstrang entsprechende Teilzahl von $v^2 : 2g$, Widerstandszahl genannt,
ϱ und λ Reibungszahlen für die benetzte Flächeneinheit, ϱ für beliebigen, λ für kreisförmigen Querschnitt geltend; $\lambda = 4\varrho$.

Der Widerstand im geraden Rohrstrang ist proportional der benetzten Wandfläche des Rohres, also proportional l und u bzw. d, und je nach der Geschwindigkeit v, dem Wärmegrade der Flüssigkeit und der Rauhigkeit der Wandung proportional $v^{1,75}$ bis $v^{2,0}$. Es ist aber für eine erleichterte Zusammenfassung der verschiedenartigen Widerstände einer Leitung zweckmäfsig und daher üblich, auch den Widerstand des geraden Rohrstranges genau proportional v^2 anzusetzen und den dadurch entstehenden Unterschied durch entsprechende Bewertung der Reibungszahl auszugleichen.

Der Widerstand ist unabhängig von der Seitenpressung, also auch unabhängig von der Neigung der Rohrachse (S. 277, Einleitung zu C.).

Dann gilt für beliebigen Querschnitt:

W in kg $= F\gamma w = ul\gamma\varrho v^2 : 2g$; ul = benetzte Oberfläche.

(Der Widerstand in kg ist hiernach gleich dem Gewicht eines prismatischen Körpers, dessen Grundfläche die benetzte Oberfläche, dessen Höhe die Geschwindigkeitshöhe $v^2 : 2g$ ist und dessen Einheitsgewicht $\varrho\gamma$ in kg beträgt.)

In manchen Schriften wird der Wert $\varrho\gamma : 2g$ oder $\varrho : 2g$ als Reibungszahl bezeichnet. Wird die Widerstandshöhe mittels einer anderen Flüssigkeit vom spez. Gewicht γ_1 bezeichnet und diese w_1 benannt, so ist $\gamma w = \gamma_1 w_1$ zu setzen.

Digitized by Google

Der Wert für ϱ ist im allgemeinen für glatte Flächen $\sim 0{,}003$ bis $0{,}006$; er verkleinert sich etwas mit zunehmendem $F:u$ und wachsender Geschwindigkeit (vgl. S. 295). Der kleinste Wert von ϱ für polierte Flächen ist zu $0{,}00225$ zu schätzen. (Ueber Wasserbremsung Z. d. V. d. I. 1907 S. 607.)

Somit ist $w = \varrho \frac{l}{F} \frac{u}{2g} v^2$, also $\zeta = \varrho \frac{l}{F} u$;

$$i = \frac{w}{l} = \varrho \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}, \qquad v = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \sqrt{\frac{iF}{u}}, \qquad Q = Fv.$$

Der Wert $\frac{F}{u}$ wird allgemein „hydraulischer Radius" genannt und mit R bezeichnet (vgl. S. 310 u. 312). Für den rechteckigen Querschnitt mit der breiten Seite a und der schmalen Seite b wird $R = 0{,}5\, b\,(1 + b/a)$, oder $= 0{,}5\, b$, wenn b sehr klein gegen a; für den Kreisquerschnitt ist $R = 0{,}25\, d$; für den Ringquerschnitt von der Stärke δ wird $R = 0{,}5\, \delta$.

Für den **Kreisquerschnitt** ist

$$\frac{F}{u} = \frac{d}{4}, \qquad Q = \frac{d^2 \pi}{4} v, \qquad v = 1{,}27 \frac{Q}{d^2}, \qquad 4\varrho = \lambda, \text{ somit}$$

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \qquad \zeta = \lambda \frac{l}{d}, \qquad i = \frac{w}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g}, \qquad v = 4{,}43 \sqrt{\frac{id}{\lambda}},$$

$$\lambda v = 2g \frac{w}{v} \frac{d}{l}, \qquad \sqrt{dv} = 1{,}127 \sqrt{\frac{Q}{d}};$$

$$Q = 3{,}47 \sqrt{\frac{d^5 w}{\lambda l}}; \qquad d^5 = \frac{0{,}083\, \lambda Q^2 l}{w}, \text{ wenn } Q \text{ in cbm/sk,}$$

oder $1000^2\, d^5 = \frac{0{,}083\, \lambda Q^2 l}{w}$, wenn Q in l/sk in Rechnung gestellt wird (Taf. S. 288 bis 290).

Für eine andere Flüssigkeit als Wasser, dessen Reibungszahl hier zum Unterschied mit $\lambda_{\mathfrak{W}}$ bezeichnet sei, ermittelt sich die entsprechende Zahl $\lambda_{\mathfrak{F}}$ der anderen Flüssigkeit in einfacher Weise mittels Vergleichs der Ausflufszeiten beim Durchfluſs durch ein und dasselbe gerade Versuchsrohr bei gleichen Ausflufsverhältnissen; dieselben erfordern gleiches F bzw. d, gleiches l, Q, H_0 und H_t (S. 270).

Die Ausflufszeiten verhalten sich dann umgekehrt wie die Ausflufsgeschwindigkeiten, also ist nach S. 281, wenn als Widerstand im Durchflufsrohr nur Wandreibung in Frage kommt und wenn

$Z_{\mathfrak{W}}$ die Ausflufszeit für Wasser,

$Z_{\mathfrak{F}}$ die Ausflufszeit für die andere Flüssigkeit, mit gleichem Zeitmafsstabe gemessen, bedeutet:

$$\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{W}}} = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{\mathfrak{F}} \frac{l}{d}}{1 + \lambda_{\mathfrak{W}} \frac{l}{d}}} \quad \text{oder} \quad \lambda_{\mathfrak{F}} = \left(\lambda_{\mathfrak{W}} + \frac{d}{l}\right) \left(\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{W}}}\right)^2 - \frac{d}{l}.$$

Digitized by Google

Werte λ S. 295; sie sind bei kleinem d und v sehr verschieden mit v und d.

Das Verhältnis $Z_{\text{Fr}} : Z_{\text{W}}$ ist bei allen Flüssigkeiten (namentlich bei Oelen) sehr abhängig von ihrem Wärmegrade (vgl. S. 261). Bei 20° C finden sich bei folgenden Flüssigkeiten die Werte für $Z_{\text{Fr}} : Z_{\text{W}}$: Quecksilber 1,01; Benzin 0,92; Alkohol 1,1; Terpentin 1,1; dickflüssiges Mineral-Schmieröl, Erstarrung bei — 20° C, 30 bis 45, Erstarrung bei — 5° C, 45 bis 60; dünnflüssiges Mineral-Schmieröl, Erstarrung bei — 15° C, 18 bis 20; Mineral-Lampenöl 1,1 bis 1,2; Rüböl 15 bis 22; Leinöl 9 bis 11; Rizinusöl 203 bis 377.

[Die Ausflufsvorrichtung für den Vergleich der Ausflufszeiten erhält zweckmäfsig wagerechtes Ausflufsrohr mit $d \gtrless 0{,}006$ und $l \lesseqgtr 10\,d$ und abgerundete Einlaufkante, anstatt wie bei dem Englerschen Zähflüssigkeitsmesser lotrechtes Rohr mit scharfer Einlaufkante von $d = 0{,}003$ und $l = 6{,}6\,d$. Bei scharfer Einlaufkante enthält der Wert $\Sigma'_e \zeta_a$ (S. 283) neben dem Einfluss der Rohrreibung noch den von der Kontraktion herrührenden Anteil ($\sim 0{,}5$ S. 298, Abb. 139 u. 140), wogegen für die abgerundete Kante ohne Kontraktion die Widerstandszahl im allgemeinen vernachlässigt werden kann, da sie nur etwa 0,01 von $\Sigma^a_e \zeta_a$ beträgt].

Werte $1000^2\,d^5$ und Widerstandshöhen w in m für $l = 100$ m u. $\lambda = 0{,}02 + 0{,}0018 : \sqrt{v\,d}$.

d	$1000^2\,d^5$	Geschwindigkeit des Wassers v in m/sk						
in m	in m	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0,010	0,0001	0,3920	0,7624	1,2283	1,7839	2,4247	3,9517	5,7924
0,020	0,003	0,1535	0,3031	0,4940	0,7240	0,9917	1,6360	2,4210
0,030	0,024	0,0898	0,1790	0,2939	0,4330	0,5959	0,9903	1,4738
0,040	0,101	0,0618	0,1240	0,2045	0,3026	0,4178	0,6879	1,0425
0,050	0,312	0,0463	0,0935	0,1549	0,2300	0,3183	0,5338	0,7997
0,060	0,777	0,0367	0,0745	0,1238	0,1842	0,2555	0,4298	0,6454
0,070	1,681	0,0302	0,0616	0,1025	0,1530	0,2124	0,3584	0,5392
0,080	3,276	0,0256	0,0522	0,0872	0,1303	0,1813	0,3064	0,4619
0,090	5,905	0,0221	0,0452	0,0757	0,1133	0,1577	0,2672	0,4034
0,100	10,000	0,0194	0,0398	0,0667	0,1000	0,1394	0,2365	0,3574
0,125	30	0,0147	0,0304	0,0512	0,0769	0,1075	0,1830	0,2773
0,150	76	0,0118	0,0245	0,0413	0,0622	0,0871	0,1487	0,2257
0,175	163	0,0098	0,0204	0,0345	0,0521	0,0730	0,1249	0,1899
0,200	320	0,0083	0,0174	0,0296	0,0447	0,0627	0,1075	0,1637
0,250	975	0,0064	0,0134	0,0229	0,0347	0,0488	0,0838	0,1279
0,300	2 430	0,0052	0,0109	0,0186	0,0282	0,0398	0,0685	0,1047
0,350	4 410	0,0043	0,0091	0,0156	0,0237	0,0335	0,0578	0,0885
0,400	10 240	0,0037	0,0078	0,0134	0,0205	0,0289	0,0500	0,0765
0,450	18 450	0,0032	0,0069	0,0118	0,0180	0,0254	0,0439	0,0674
0,500	31 250	0,0029	0,0061	0,0105	0,0160	0,0226	0,0392	0,0601

Digitized by Google

d	$1000^2\, d^5$	Geschwindigkeit des Wassers v in m/sk						
in m	in m	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0.550	50 328	0,0026	0,0055	0,0094	0,0144	0,0204	0,0354	0,0543
0.600	77 760	0,0023	0,0050	0,0086	0,0131	0,0185	0,0322	0,0495
0.650	116 029	0,0021	0,0045	0,0078	0,0120	0,0170	0,0295	0,0454
0.700	168 070	0,0020	0,0042	0,0072	0,0111	0,0157	0,0273	0,0416
0.750	237 304	0,0018	0,0039	0,0067	0,0103	0,0146	0,0253	0,0390
0.800	327 680	0,0017	0,0036	0,0062	0,0096	0,0136	0,0236	0,0364
0.850	443 705	0,0016	0,0034	0,0058	0,0090	0,0127	0,0222	0,0341
0.900	590 490	0,0015	0,0032	0,0055	0,0084	0,0119	0,0208	0,0321
0.950	773 780	0,0014	0,0030	0,0052	0,0079	0,0113	0,0197	0,0303
1,000	1 000 000	0,0013	0,0028	0,0049	0,0075	0,0107	0,0186	0,0287

	$v =$ 0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0.010	7,9338	10,367	13,087	16,088	19,367	28,749	39.793	52.461	66,727
0.020	3,3423	4.3971	5,5829	6,8978	8,3404	12,297	17,426	23,118	29,562
0.030	2,0440	2,6989	3,4386	4,2592	5,1631	7,7753	10,887	14,496	18,586
0.040	1,4504	1,9212	2,4516	3,0434	3,6952	5,5846	7,8406	10,459	13,437
0.050	1,1152	1,4795	1,8919	2,3524	2,8593	4,3323	6,0940	8,1448	10,475
0.060	0,9017	1,1898	1,5340	1,9092	2,3232	3,5270	4,9695	6,6481	8,5613
0.070	0,7544	1,0036	1,2866	1,6024	1,9513	2,9682	4,1874	5,6060	7,2258
0.080	0,6471	0,8618	1,1056	1,3783	1,6797	2,5576	3,6118	4,8408	6,2437
0.090	0,5657	0,7540	0,9681	1,2074	1,4724	2,2449	3,1728	4,2561	5,4910
0.100	0,5018	0,6694	0,8600	1,0734	1,3095	1,9982	2,8266	3,7935	4,8981
0.125	0,3901	0,5211	0,6704	0,8378	1,0231	1,5643	2,1962	2,9781	3,8491
0.150	0,3181	0,4255	0,5479	0,6853	0,8375	1,2826	1,8192	2,4468	3,1651
0.175	0,2680	0,3587	0,4625	0,5788	0,7078	1,0854	1,5409	2,0740	2,6844
0.200	0,2312	0,3098	0,3996	0,5004	0,6123	0,9397	1,3352	1,7984	2,3289
0.250	0,1809	0,2428	0,3135	0,3929	0,4811	0,7397	1,0522	1,4186	1,8386
0.300	0,1483	0,1992	0,2574	0,3229	0,3956	0,6089	0,8671	1,1699	1,5171
0.350	0,1226	0,1690	0,2177	0,2737	0,3356	0,5170	0,7367	0,9934	1,2903
0.400	0,1086	0,1461	0,1890	0,2374	0,2911	0,4489	0,6400	0,8644	1,1219
0.450	0,0957	0,1288	0,1667	0,2094	0,2569	0,3964	0,5655	0,7641	0,9921
0.500	0,0855	0,1151	0,1490	0,1873	0,2298	0,3548	0,5064	0,6859	0,8889
0.550	0,0772	0,1040	0,1347	0,1693	0,2079	0,3210	0,4583	0,6195	0,8051
0.600	0,0703	0,0948	0,1229	0,1545	0,1896	0,2930	0,4185	0,5704	0,7354
0.650	0,0646	0,0871	0,1129	0,1420	0,1743	0,2695	0,3850	0,5209	0,6769
0.700	0,0597	0,0805	0,1044	0,1313	0,1613	0,2494	0,3564	0,4851	0,6268
0.750	0,0555	0,0749	0,0971	0,1221	0,1501	0,2321	0,3318	0,4489	0,5836
0.800	0,0518	0,0700	0,0907	0,1142	0,1402	0,2170	0,3102	0,4199	0,5460
0.850	0,0486	0,0656	0,0851	0,1071	0,1316	0,2038	0,2913	0,3944	0,5128
0.900	0,0458	0,0618	0,0802	0,1009	0,1240	0,1920	0,2746	0,3717	0,4835
0.950	0,0432	0,0584	0,0757	0,0954	0,1172	0,1815	0,2597	0,3516	0,4573
1,000	0,0410	0,0553	0,0718	0,0904	0,1111	0,1721	0,2462	0,3334	0,4337

Digitized by Google

Wassermengen $Q = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$ in l/sk.

(Für $d < 0{,}1$ m teile die Werte d durch 10 und die zugehörigen Werte Q durch 100.)

Dmr. d in m	Geschwindigkeit des Wassers v in m/sk							
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0,100	0,393	0,785	1,178	1,571	1,963	2,356	3,142	3,927
0,125	0,614	1,227	1,841	2,454	3,068	3,682	4,909	6,136
0,150	0,884	1,767	2,651	3,534	4,418	5,301	7,069	8,836
0,200	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9,425	12,566	15,708
0,250	2,454	4,909	7,363	9,818	12,272	14,726	19,635	24,544
0,300	3,534	7,069	10,603	14,137	17,671	21,206	28,274	35,343
0,350	4,811	9,621	14,432	19,242	24,053	28,863	38,485	48,106
0,400	6,283	12,566	18,850	25,133	31,416	37,699	50,266	62,832
0,450	7,952	15,904	23,856	31,809	39,761	47,713	63,617	79,522
0,500	9,818	19,635	29,453	39,270	49,088	58,905	78,540	98,175
0,550	11,879	23,758	35,637	47,517	59,396	71,275	95,033	118,79
0,600	14,137	28,274	42,411	56,549	70,686	84,823	113,10	141,37
0,650	16,592	33,183	49,775	66,366	82,958	99,549	132,73	165,92
0,700	19,242	38,485	57,727	76,969	96,211	115,45	153,94	192,42
0,750	22,089	44,179	66,268	88,357	110,45	132,54	176,72	220,89
0,800	25,133	50,266	75,398	100,53	125,66	150,80	201,06	251,33
0,850	28,373	56,745	85,118	113,49	141,86	170,24	226,98	283,73
0,900	31,809	63,617	95,426	127,23	159,04	190,85	254,47	318,09
0,950	35,441	70,882	106,32	141,76	177,21	212,65	283,53	354,41
1,000	39,270	78,540	117,81	157,08	196,35	235,62	314,16	392,70

	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,100	4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9,817	11,781	13,744	15,708
0,125	7,363	8,590	9,817	11,045	12,272	15,340	18,408	21,476	24,544
0,150	10,603	12,370	14,137	15,904	17,672	22,089	26,507	30,925	35,343
0,200	18,850	21,991	25,133	28,274	31,416	39,270	47,124	54,978	62,832
0,250	29,452	34,361	39,270	44,179	49,087	61,359	73,631	85,903	98,175
0,300	42,411	49,480	56,549	63,617	70,686	88,357	106,03	123,70	141,37
0,350	57,727	67,348	76,969	86,590	96,211	120,26	144,32	168,37	192,42
0,400	75,398	87,965	100,53	113,10	125,66	157,08	188,50	219,91	251,33
0,450	95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	198,80	238,57	278,33	318,09
0,500	117,81	137,45	157,08	176,72	196,35	245,44	294,53	343,61	392,70
0,550	142,55	166,31	190,07	213,82	237,58	296,98	356,37	415,77	475,17
0,600	169,65	197,92	226,19	254,47	282,74	353,43	424,11	494,80	565,49
0,650	199,10	232,28	265,46	298,65	331,83	414,79	497,75	580,70	663,66
0,700	230,91	269,39	307,88	346,36	384,85	481,06	577,27	673,48	769,69
0,750	265,07	309,25	353,43	397,61	441,79	552,23	662,68	773,13	883,58
0,800	301,59	351,86	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3
0,850	340,47	397,22	453,96	510,71	567,45	709,31	851,18	993,04	1134,9
0,900	381,70	445,32	508,94	572,56	636,17	795,22	954,26	1113,3	1272,3
0,950	425,29	496,18	567,06	637,94	708,82	886,03	1063,2	1240,4	1417,6
1,000	471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8

Digitized by Google

Werte λ für Wasser: Für vorläufige Berechnung setze $\lambda = 0{,}03$; genaue Werte S. 294 ff. Da λ teilweise von v und d abhängt, so ist bei allen genaueren Berechnungen das Näherungsverfahren anzuwenden.

Tafel von Werten für w für Wasser, für Q und d^5 allgemein gültig (S. 288 bis 290).

Uebliche Werte von v für städtische Wasserversorgung sind $v = 0{,}6$ bis $0{,}7$ m.

Durch allmähliche Veränderung der inneren Rohrwandung nimmt Q im allgemeinen mit der Zeit ab, so dafs dem berechneten d in den meisten Fällen zweckmäfsig 20 mm (oder mehr, S. 296 unter d.) für die Ausführung zuzugeben sind.

Bei vorhandener Leitung von nicht genau ermitteltem Durchmesser berechnet sich aus beobachtetem Q und einem vorläufig angenommenen d (Solldurchmesser oder ursprünglicher Durchmesser) ein Wert λ, der zu dem λ_1 für den tatsächlichen Durchmesser d_1 in dem Verhältnis steht $\lambda : \lambda_1 = (d : d_1)^5$.

Beispiele:

1. Gegeben Q, l, d; gesucht H_0 (S. 282).
   Suche mit Tafel S. 290 für Q und d die Geschwindigkeit v, mit Tafel S. 288 u. 289 für v und d die Widerstandshöhe für 100 m, vervielfältige diese mit $l : 100$ und berechne mit den übrigen Widerstandshöhen der Leitung, ermittelt aus den Widerstandszahlen ζ (S. 298 bis 305) und den zugehörigen Geschwindigkeitshöhen, die erforderliche Druckhöhe $H_0 = v_a^2 : 2g + \Sigma_e^a w$ (S. 287).
2. Gegeben H_0, l, d; gesucht Q.
   Setze vorläufig $H_0 = w$, vervielfältige w mit $100 : l$, suche hierfür mit Tafel S. 288 u. 289 für d und w die angenäherte Geschwindigkeit v. Bezeichnet $\Sigma_e^a \zeta_a$ die Summe der von dem geraden Rohrstrang unabhängigen Widerstandszahlen der Leitung, bezogen auf $v_a^2 : 2g$, so bleibt für den geraden Rohrstrang zur Verfügung $w = H_0 - v_a^2 \left(1 + \Sigma_e^a \zeta_a\right) : 2g$.

   Für dieses w suche mit d aus Tafel S. 288 u. 289 ein verbessertes v und damit aus Tafel S. 290 das angenäherte Q.

   Zur genaueren Ermittlung von Q ist aus letzterem v und dem gegebenen d der Wert λ nach den Angaben auf S. 295 festzulegen, dann $v = 4{,}43 \sqrt{w d : \lambda l}$ zu berechnen, wonach sich Q aus $d^2 \pi v : 4$ oder aus Tafel S. 290 bestimmt.
3. Gegeben Q in l/sk, l, w; gesucht d.
   Setze vorläufig $\lambda \sim 0{,}03$, berechne damit $1000^2 d^5 = Q^2 l : 400\, w$, bestimme aus zweiter Spalte der Tafel S. 288 ein vorläufiges d und aus d und Q mit Tafel S. 290 das zugehörige v.

   Nunmehr ist λ nach den Angaben auf S. 295 zu verbessern, und durch neue Berechnung von $1000^2 d^5$ ist ein genaueres d zu ermitteln; oder man rundet den für d vorläufig gefundenen Wert nach oben zu ab, um dadurch dem mit der Zeit zunehmenden Widerstand Rechnung zu tragen (S. 297).

5. Widerstandszahlen für die einzelnen Rohrstrecken verschiedener Formen einer mit Wasser gefüllten Rohrleitung.

α) Gerader kreisförmiger Rohrstrang ohne Querschnitts- und Richtungs-Aenderung.

Bedeutung der Zeichen wie S. 286 angegeben.

Die Widerstandszahl ist unabhängig vom Baustoffe der Rohrwandung, dagegen besonders abhängig von dem Rauhigkeitsgrade der benetzten Wandung und im allgemeinen ein wenig veränderlich mit der Wärme

Digitized by Google

und der Durchflufsgeschwindigkeit der Flüssigkeit, sowie mit der Rohrweite.

Nach **Weisbach**: $4\varrho = \lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$

Die Formel gilt nur für ganz glatte Rohrwandung und liefert im allgemeinen bei $d > 0{,}04$ m zu grofse Werte, bei engeren Rohren zu kleine Werte.

Nach **Darcy**: Bei Rohren ohne innere Ablagerungen:

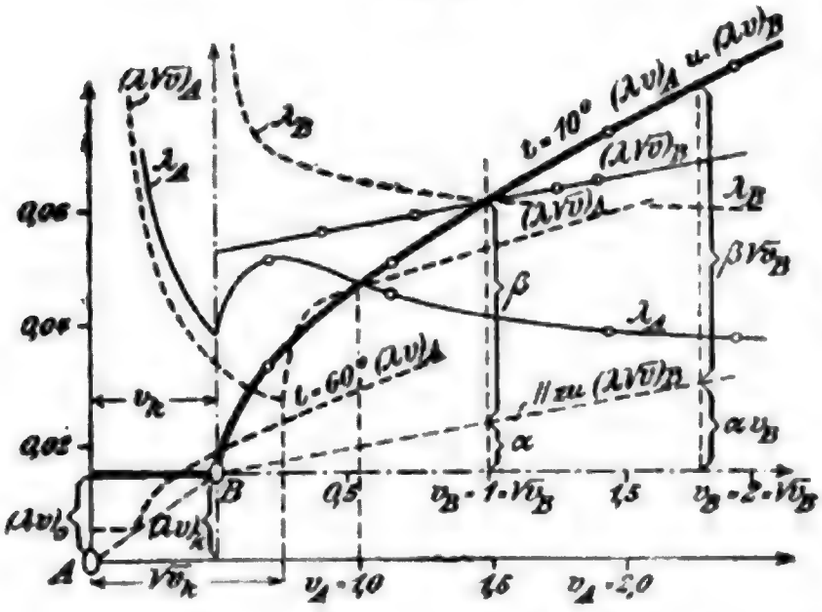
$$4\varrho = \lambda = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}.$$

Diese Formel liefert brauchbare Werte für alle $d < 0{,}5$ m, wenn gleichzeitig v etwa 0,25 m/sk bei ganz glatter Wandung oder v etwa 1,0 m sk bei neuer gufseiserner Wandung beträgt.

Bei den vielfachen Einflüssen, die den Wert λ bedeutend beeinflussen, und neben der Unsicherheit richtiger Einschätzung dieser Einflüsse ist es nicht gerechtfertigt, den Wert λ mit so vielen Dezimalen anzugeben, wie es von Weisbach und Darcy geschehen ist.

Viele andere in Vorschlag gebrachte Annäherungsformeln für λ sind sich gleichwertig für $v \sim 1$ m und für ein beschränktes Gebiet von Rohrweiten. Eine Sammlung von Formeln gibt Frank, Glaser Ann. 1893 S. 125 an.

Abb. 138.



Nach **H. Lang** (Unbegrenzt gültige Formel; Berücksichtigung aller bis 1913 veröffentlichten Versuche und etwa 300 eigener Versuche mit $v = 0{,}004$ bis 53 m/sk):*)

Die Werte ϱ bzw. λ ändern sich mit v, (F, u) bzw. d, mit dem Rauhigkeitsgrade der benetzten Fläche und mit dem Zähigkeitsmodul der Flüssigkeit. Die zeichnerische Darstellung von w oder ϱ bzw. λ führt zu parabel- bzw. hyperbelähnlichen Linien, die diese verschiedenen Einflüsse schwer einzeln erkennen lassen; dies wird aber erleichtert durch die Darstellung der Werte $(w : v)$ oder λv und wird besonders gut erreicht durch die Darstellung von $(w : v^{3/2})$ oder $\lambda\sqrt{v}$.

Ermittelt man zunächst aus der allgemeinen Beziehung $w = \varrho \frac{lu}{F} \frac{v^3}{2g}$ (S. 287) für verschiedene v die Werte $\varrho v = \frac{w}{l} \frac{F}{u} \frac{2g}{v}$ für beliebigen, bzw. $\lambda v = 2g \frac{d}{v} \frac{w}{l}$ für kreisförmigen Querschnitt und trägt

*) Vgl. auch Biel, Z. d. V. d. I. 1908 S. 1035 oder Forschungsarbeit. Heft 44 d. V. d. I. u. Bleelus, dgl., Heft 131.

Digitized by Google

dieselben, wie in Abb. 138 geschehen, in ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt A ein, so erhält man im allgemeinen die in der Abb. 138 kräftig ausgezogene, bei B gebrochene Linie. Mit wachsendem d und mit abnehmender Zähflüssigkeit rückt Punkt B auf A zu.

Der erste und gerade Teil der $(\lambda v)_A$-Linie entspricht bis zum Punkte B dem Fliefszustande mit parallelen Flüssigkeitsfäden, also demjenigen unterhalb der kritischen Geschwindigkeit v_k. Für diesen Fliefszustand gilt

$$(\varrho v)_A \text{ bzw. } (\lambda v)_A = (\lambda v)_0,$$

demnach auch für den Grenzzustand bei v_k

$$(\varrho v)_k \text{ bzw. } \lambda v_k = (\lambda v)_0.$$

Der weitere, gekrümmte Teil der Linie gehört dem Fliefszustande mit wirbelnden oder gedrehten Flüssigkeitsfäden, also dem Zustande oberhalb v_k an. Diese hyperbelförmige Linie entspricht mit den Angaben in der Abb. 138, wenn α, β, $(\lambda v)_0$ u. $(\lambda v)_k$ von v unabhängige Werte bedeuten, zunächst der Beziehung

$(\varrho v)_A$ oder $(\lambda v)_A = \alpha v_B + \beta \sqrt{v_B} + (\lambda v)_k$, worin $v_B = v_A - v_k$, also für $v_{B=1}$ wird $\lambda v_A = \alpha + \beta + (\lambda v)_k$.

Hieraus entwickeln sich für das durch B gelegte Koordinatensystem, also $(\lambda v)_k = 0$ gesetzt, die Beziehungen

$$(\varrho v)_B \text{ bzw. } (\lambda v)_B = \alpha v_B + \beta \sqrt{v_B}, \text{ oder}$$

$$(\varrho \sqrt{v})_B \text{ bzw. } (\lambda \sqrt{v})_B = \alpha \sqrt{v_B} + \beta;$$

dies ist die Gleichung einer geraden Linie, wenn die durch B gelegte Abszissenachse gleichmäfsig nach $\sqrt{v_B}$ geteilt wird. Ist der Mafsstab für die Teilung dieser Achse gleich für $\sqrt{v_B}$ und v_B, so wird die gerade Linie parallel zur Geraden für αv_B, befindet sich im Abstande β von derselben und schneidet die Kurve $(\lambda v)_B$ im Abstande $v_B = 1$ m.

Mit Hülfe dieser Geraden ist es möglich, mittels gegebener Werte für nur zwei verschiedene v einer Leitung die verschiedenen ϱ bzw. λ für alle übrigen v dieser Leitung zu bestimmen. Nimmt z. B. die Ordinate für $v_B = 1{,}0$ die Gröfse O_1 und diejenige für $v_B = 4{,}0$ die Gröfse O_4 an, so ist $\alpha = 0{,}5\,(O_4 - O_1)$ und $\beta = O_1 - \alpha$; somit ist dann die Lage der Geraden für $(\lambda \sqrt{v})_B$ bestimmt.

Bedeutet noch

a eine dem Rauhigkeitsgrade der inneren Wandung entsprechende Teilzahl von $v^2 : 2g$,

η die vom Wärmegrad t^0 C der Flüssigkeit abhängige Zähigkeitszahl (vgl. S. 261)

$$\eta = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}033\,t + 0{,}000244\,t^2} \text{ in Dynen} \cdot \text{sk/cm}^2,$$

M $(= \eta : 10\,\gamma)$ den Zähigkeitsmodul der Flüssigkeit in m²/sk, wenn γ das spez. Gew. in kg/cbm,

Digitized by Google

so ist zu setzen:

$$\alpha = 0{,}009 + \frac{a}{\sqrt{d}} \text{ (Werte } a \text{ s. S. 296)},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi M}{4 F : u}}, \text{ bzw.} = \sqrt{\frac{\pi M}{d}} \text{ für den Kreisquerschnitt, in } \sqrt{\text{m/sk}},$$

$$(\lambda v)_0 = (\lambda v)_k = \frac{64 M \text{ in m}^2/\text{sk}}{d \text{ in m}} \text{ (Gesetz für reibungslose Flüssigkeit von Hagen-Poiseuille)},$$

$(\lambda v)_k = 0{,}0314\, v_k$ in m/sk, also $\lambda_k = 0{,}0314$, $d v_k = 2040\, M$.

Werte η, γ, M, $64\,M$ und $\sqrt{\pi M}$.

für t^0	0	5	10	15	20	40	60	80	100	
$10^3\,\eta$	17,75	15,44	13,10	11,4	10,1	6,54	4,59	3,41	2,63	in D · sk/cm²
γ	999,8	1000	999,7	999	998	992	983	972	958	in kg/cbm
$10^7\,M$	17,75	15,15	13,10	11,4	10,1	6,59	4,67	3,51	2,74	in m²/sk
$10^5\,64\,M$	11,36	9,69	8,38	7,33	6,46	4,22	2,99	2,25	1,76	in m²/sk
$10^3\sqrt{\pi M}$	2,36	2,18	2,02	1,89	1,78	1,44	1,21	1,05	0,93	in m $\sqrt{\text{sk}}$

Hiernach gilt für den Kreisquerschnitt, wenn v **unterhalb der kritischen Geschwindigkeit v_k**, wobei also jede Störung geradfädigen Fliefsens vermieden bleibt, und wenn λ und w das Beizeichen u erhalten:

$$\lambda_u = \frac{64\,M}{d\,v_A}; \qquad w_u = \lambda_u \frac{l}{d}\frac{v_A^2}{2g} = \frac{64\,M}{d}\frac{l}{d}\frac{v_A}{2g};$$

λ_u und w_u sind also unabhängig von dem Rauhigkeitswert α, da sich die Schicht an der Wandung in Ruhe befindet.

v **oberhalb der kritischen Geschwindigkeit v_k**, wenn λ und w das Beizeichen o erhalten:

$$\lambda_o = \alpha\frac{v_B}{v_A} + \sqrt{\frac{\pi M}{d}}\frac{\sqrt{v_B}}{v_A} + \frac{\gamma_k}{v_A}, \quad \lambda_k = \frac{(\lambda v)_k}{v_k} = 0{,}0314,$$

$$w_o = \lambda_o \frac{l}{d}\frac{v_A^2}{2g} = \left(\alpha + \sqrt{\frac{\pi M}{d\,v_B}} + \frac{(\lambda v)_k}{v_B}\right)\frac{l}{d}\frac{v_A v_B}{2g};$$

wenn $d \gtrless 0{,}05$ m, kann für die Praxis genau genug gesetzt werden:
$(\lambda v)_k = 0$, $v_k = 0$ und $v_B = v_A$,

$$\lambda = \alpha + \sqrt{\frac{\pi M}{d\,v_A}}; \quad w = \left(\alpha + \sqrt{\frac{\pi M}{d\,v_A}}\right)\frac{l}{d}\frac{v_A^2}{2g};$$

$$\lambda\sqrt{v_A} = \alpha\sqrt{v_A} + \sqrt{\frac{\pi M}{d}}; \quad \frac{1}{\sqrt{d\,v_A}} = 0{,}886\sqrt{\frac{d}{Q}}.$$

Digitized by Google

Da $\sqrt{\pi M}$ im allgemeinen nur etwa 0,002 ist, so wird bei wesentlich gröfserem $\sqrt{vd}$ der Wert λ fast gleichbleibend a.

Werte $\sqrt{\frac{\pi M}{dv}}$, wenn $\sqrt{\pi M} = 0{,}0018$, $t = 15^0$.

	$v = 0{,}10$	0,25	0,50	1,0	4,0 m/sk
$d = 0{,}05$	0,026	0,016	0,011	0,008	0,004
0,10	0,018	0,011	0,008	0,006	0,003
0,20	0,013	0,008	0,006	0,004	0,002
0,30	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002
0,40	0,009	0,006	0,004	0,003	0,001
0,50	0,008	0,005	0,004	0,002	0,001
1,00	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001
2,00	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000

In die Abb. 138 S. 292 sind einige zu gleichem v_A gehörige Werte der beiden Linien λv_B und $\lambda\sqrt{v_B}$ mit kleinen Kreisen bezeichnet, aus deren Lagen zu ersehen ist, dafs in der Nähe von $v_B \sim 0$ die Werte $\lambda\sqrt{v_B}$ viel längere Abszissen besitzen als die zugehörigen Punkte $(\lambda v)_B$, so dafs mittels dieser Geraden die Werte nahe v_k sehr genau bestimmt werden können. (Die Versuche Langs mit gleichem Leitungsdurchmesser von v_k bis $v_A = 53$ m bestätigen die Gerade für $\lambda\sqrt{v_B}$.)

Abweichungen von den Linienzügen der Abb. 138 S. 292 entstehen sowohl durch Wirbelverzug über v_k hinaus, als auch durch aufserordentlichen Widerstand $\varepsilon v^2/2g$ an irgend einer Stelle der in Betracht gezogenen Strecke.

Im letzteren Fall wird für die Strecke die Widerstandszahl $\zeta = \lambda l/d + \varepsilon = (\lambda + \varepsilon d/l)\, l/d$, so dafs $\lambda_u v_A = (\lambda v)_o + \varepsilon v_A d/l$, und dafs sich $(\lambda v)_A$ um $\varepsilon v_A d/l$ vergröfsert. Dem entspricht eine über A von der Ordinate $(\lambda v)_o$ aus ansteigende gerade Linie für $\lambda_u v_A$ und eine um $\varepsilon v_A d/l$ gehobene $(\lambda v)_A$-Kurve. Der in solchem Falle entstehende Schnittpunkt (Knickpunkt) beider Linien sei B_ε benannt. Ist die Steigung der $\lambda_u v_A$-Linie grofs genug, so verschwindet B_ε.

Bei Wirbelverzug, der durch lange, glatte, der Beobachtungsstrecke vorangehende Beruhigungsstrecke begünstigt wird, zeigt sich statt des Knickpunktes B bei v_k ein Knickpunkt B_x in der Verlängerung der $\lambda_u v_A$-Linie bei $v_x > v_k$. Alle durch Wirbelung herbeigeführten Zustände sind labil, so dafs durch Störung der gleichmäfsigen Strömung die $(\lambda v)_A$-Kurve zur Geltung kommt; auch Zwischenlagen treten auf. Ueber v_x hinaus wird die $(\lambda v)_A$-Kurve nicht unmittelbar, sondern mittels Uebergangskurve erreicht.

Digitized by Google

Bei gleichzeitig neben Wirbelverzug auftretendem Widerstand $\varepsilon v^2/2g$ liegt der dann mit $B_{x\varepsilon}$ bezeichnete Knickpunkt in der Verlängerung der geraden, aufwärts nach B_ε gerichteten $\lambda_u v_A$-Linie.

Ansteigende $\lambda_u v_A$-Linie entsteht auch bei allmählich mit v_A abnehmender Wärme der Flüssigkeit.

Werte der Zahl a von der Reibungszahl α:

a) Neues Rohr mit ganz glatter Innenfläche ohne erkennbare Naht (Kupfer, Messing, Blei, Zink, Zinn, Glas von ganz gleichem Durchmesser, asphaltiertes glattes Schmiedeisen): $a = 0{,}0004$;

b) Neues, besonders glattes, nicht asphaltiertes schmiedeisernes Rohr ohne erkennbare Naht oder Verbindungsstelle: $a = 0{,}0007$;

c) Neues gewöhnliches schmiedeisernes Rohr und neues gufseisernes Flanschenrohr: $a = 0{,}0009$;

d) Neues glattes gufseisernes Muffenrohr und genietetes schmiedeisernes Rohr: $a = 0{,}0026$;

e) Gereinigtes gufseisernes und glattes verzinktes schmiedeisernes Rohr: $a = 0{,}005$;

f) Rohre mit dünner Ansatzschicht und rauhes verzinktes schmiedeisernes Rohr: a bis 0,012;

g) Rohre mit starker Verkrustung (S. 297): a unbegrenzt;

h) Für Rohre nach einigem Betriebe oder neue Rohre mit ersichtlichen Unebenheiten: Bedeutet

d den Solldurchmesser des von Ablagerungen und Unebenheiten befreit gedachten Rohres mit entsprechendem λ und v,

d_1 den Durchmesser des von den Wirbeln an Ablagerungen oder Unebenheiten noch freibleibenden Nutzquerschnitts, für den λ_1, unter Benutzung der Werte a_2, wie unter a) bis h) angegeben, einzusetzen ist, so ist $\lambda = \lambda_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^5$.

Werte $(d : d_1)^5$

$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$	$d_1 : d$	$\left(\frac{d}{d_1}\right)^5$
0,10	100 000	0,35	226	0,60	12,9	0,85	2,27
0,15	13 150	0,40	97,6	0,65	8,62	0,90	1,69
0,20	3 125	0,45	54,2	0,70	5,95	0,93	1,44
0,25	1 024	0,50	32,0	0,75	4,21	0,95	1,29
0,30	411	0,55	19,9	0,80	3,06	0,98	1,18

(Für die Durchflufsmengen gilt die Beziehung $Q^2 : Q_1^2 = d^5 : d_1^5$.)

Für die Mittelwerte $\alpha = 0{,}02$ und $\sqrt{\pi M} = 0{,}002$ erhält man den für Berechnungen bequemen Ausdruck für die Widerstandshöhe w in m, wenn d in cm, l und v in m eingesetzt wird,

$$w = \left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{\sqrt{v\,d}}\right) \frac{l}{d}\, v^2.$$

Digitized by Google

Für die Annahme von d_1 ist zu beachten:

Bei neuen Rohren:

Gufseiserne Rohre von kleinerem Durchmesser besitzen kleine Baulänge und vergröfsern damit den Widerstand an den Verbindungsstellen für die Längeneinheit. Schmiedeiserne Rohre sind in Ansehung des sehr empfindlichen Wertes λ als nicht von gleichem Durchmesser anzusehen, sie zeigen oft nach innen zu aufgedrückte Schweifsnähte; verzinkte Rohre sind häufig im Inneren besonders rauh. Bei hölzernen Rohren quillt die Wandfläche im Betriebe auf, wird auch stark schwammig.

Bei Rohren im Betriebe:

Nach wenigen Betriebstagen hat das Wasser eine Schleimschicht an die Wandung abgesetzt, die den Nutzdurchmesser um 2 bis 3 mm verringert. Anrostungen (Korrosionen) der inneren Wandung eiserner Rohre treten bei Luftmangel, und bei absorbiert bleibender Luft nicht auf, soweit nicht saure oder salzige Beschaffenheit des Wassers das Eisen löst. An allen Stellen mit vermindertem Seitendruck (Saugleitung, Heberscheitel, Erweiterung, eingebaute Drosselvorrichtung) werden die im Wasser aufgenommen gewesenen Gase (Luft, Kohlensäure usw.) frei und beschleunigen den Angriff ungeschützter Wandflächen. Dagegen kommen bei unfiltriertem Wasser oft bis 60 mm starke Krustenbildungen vor, die auf Ablagerungen aus dem Wasser zurückzuführen sind. Die Ablagerungsmengen entsprechen der durchgeflossenen Wassermenge; Sackrohre bleiben rein; vergröfserte Durchflufsgeschwindigkeit und Asphaltieren der Rohrwandung hindert die Ablagerung nicht. Oeftere Entleerungen der Leitung vermehren die Rostbildung und färben das Wasser stark bei erneuter Füllung.

Die Ablagerungen aus unfiltriertem, von Eisen nicht befreitem Wasser bestehen bei gufseisernen Leitungen zuerst aus unregelmäfsig auftretenden Knollen, die sich schliefslich zu höckeriger Auskleidung der Wandung vereinigen und stellenweise faltenartige Gebilde zeigen. Die Masse besteht aus Brauneisenstein — je nach Herkunft des Wassers vermengt mit Kalk und Muscheln. Das einzige Mittel gegen diese Ablagerungen besteht in der Enteisenung des Wassers mit nachfolgender Filtrierung vor dem Einlassen in die Leitung. Grundwasser mit freier Kohlensäure greift Gufseisen und Zement an, wobei schwammiger Graphit bzw. Kieselsäure zurückbleibt; solche freie Kohlensäure kann mittels Durchlaufens eines Kalksteinfilters beseitigt werden (Deutsche Bauz. 1908 S. 153). Bisweilen zeigt unfiltriertes Grundwasser starke Algenbildung, und unfiltriertes Flufswasser Ansammlungen von Tieren (namentlich Aalbrut), die besonders die Wassermesser stören. Bei schmiedeisernen Rohren wachsen auch dünne Aestchen nach der Rohrmitte zu. Blei nimmt selbst nach vielen Jahren nur einen ganz dünnen, gleichmäfsigen Ueberzug an.

Vorgefundene Ablagerungsmengen bei gufseisernen Rohren unter Verwendung unfiltrierten Flufswassers, in vH des Sollquerschnitts:

d in m	0,076	0,076	0,102	0,152	0,152	0,204	0,381
Betriebsjahre . .	20	32	22	10	20	24	40
Ablagerung . . .	35	75	54	20	33	36	28 %

Digitized by Google

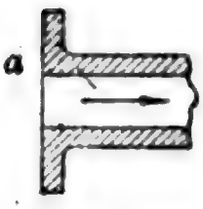
Zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit einer Leitung sind Reinigungs- oder Streifkasten in 50 bis 60 m Abstand erforderlich. Erste Reinigung nach fertiger Verlegung, wiederholte Reinigung nach je 2 bis 3 Jahren notwendig. Ueber Ablagerungen und Reinigungsweisen vgl. Iben, Journ. Gasb.-Wasserv. 1887 und Fleischmann, dsgl. 1908 Heft 44.*)

Die zeitweise Feststellung von Veränderungen des Rohrinneren einer Leitung ist bequem durch zwei in geringer Entfernung l dauernd angebrachte Standrohre (Piezometer) zu erreichen. (Verbinde die Standrohre über ihren Spiegeln und regle im Verbindungsrohr mittels Schlauchhahns die Luftverdünnung bzw. -verdichtung derart, dafs beide Standrohrspiegel in eine zur Ablesung bequeme Höhe gelangen.) Der Unterschied beider Spiegel ist die Widerstandshöhe w für die Strecke l. Ist bei allen Beobachtungen die Durchflufsmenge Q gleich, so ist aus dem Anwachsen von w die Wirtschaftlichkeit für eine vorzunehmende Reinigung oder für die Auswechslung der Leitung zu ermessen.

β) Rohrstücke mit Kreisquerschnitt zur Einleitung oder Aenderung der Stromrichtung.

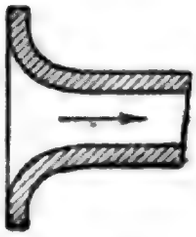
1. **Einlaufstücke** (Abb. 139 bis 142).

Abb. 139.



Einlaufkante a scharfkantig $\zeta = 0{,}50$, Kante gebrochen $\zeta = 0{,}25$.

Abb. 140.

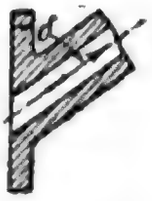


Je nach Glätte der Wandung $\zeta = 0{,}06$ bis $0{,}01$.

Abb. 141.

Winkel an der Einlaufkante stumpf (90^0) $\zeta = 0{,}56$, messerscharf (b zur Spitze ausgezogen) $\zeta = 1{,}30$, stärkste erreichbare Einschnürung.

Abb. 142.



Einlaufkante scharf $\zeta = 0{,}5 + 0{,}3 \sin \vartheta + 0{,}2 \sin^2 \vartheta$.

2. **Knie und Bogenstücke** (Abb. 143 u. 144, Angaben nach Weisbach). Diese Formstücke verhindern den Fliefszustand unterhalb der kritischen Geschwindigkeit (Eustice, The Engineer 1910 S. 23).

Knie: Querschnitt kreisförmig, $d = 30$ mm; $\zeta = \sin^2 1/2\,\vartheta + 2 \sin^4 1/2\,\vartheta$ oder für

$\vartheta =$	20^0	40^0	60^0	80^0	90^0	100^0	120^0	140^0	160^0	(180^0)
$\zeta =$	0,03	0,14	0,37	0,75	1,00	1,27	1,87	2,43	2,85	(3,00)

($\vartheta = 180^0$ ist nicht mehr ausführbar. Wenn d kleiner, wird ζ gröfser.)

Bogenstück: Querschnitt kreisförmig;

$$\zeta = 0{,}13 + 0{,}16 \left(\frac{d}{r}\right)^{3{,}5}.$$

*) Röhrenreinigung mittels Druckwasser-Turbinen führt die Gesellschaft für Röhrenreinigung, Berlin-Schöneberg, aus.

Digitized by Google

Dieser Wert entspricht allein der einseitigen Zusammenziehung des Strahles, die durch die Richtungsänderung am Beginn der Krümmung hervorgerufen wird; ζ ist unabhängig von der Länge des Bogenstückes, solange r unverändert bleibt.

Es folgt für

$d:r=$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\zeta=$	0,14	0,16	0,20	0,30	0,44	0,66	1,0	1,4	2,0

Querschnitt rechteckig: $\zeta = 0{,}124 + 0{,}274 \left(\frac{d}{r}\right)^{3{,}5}$.

Es folgt für

$d:r=$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\zeta=$	0,13	0,18	0,25	0,40	0,64	1,01	1,55	2,27	3,23

Rohrwindungen ohne Aenderung des Krümmungshalbmessers und der Krümmungsrichtung ergeben ein ζ wie gerade Leitungen; Wechsel in der Krümmungsrichtung verdoppelt ζ.

Abb. 143.

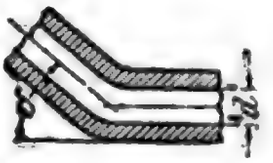
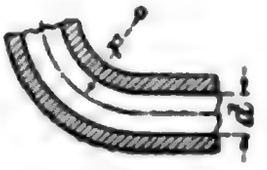


Abb. 144.



γ) Rohrstücke mit zentraler Querschnittsänderung.

1. Plötzliche zentrale Erweiterung (Abb. 145 u. 146).

Wenn das weitere Rohr ausreichend lang ist im Verhältnis zur Wassergeschwindigkeit im engeren Rohrstrange, so tritt der in Abb. 145

Abb. 145.

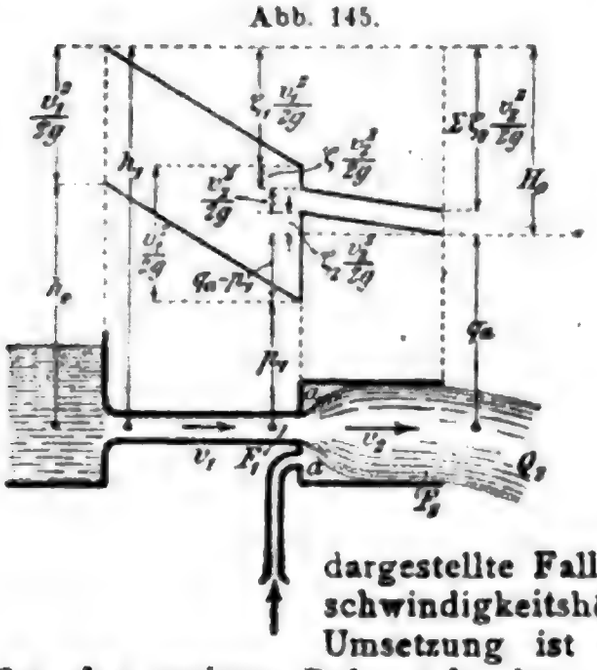
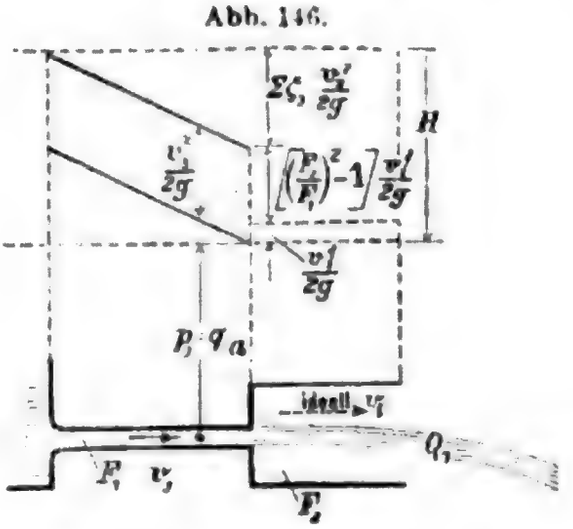


Abb. 146.



dargestellte Fall der teilweisen Umsetzung von Geschwindigkeitshöhe in Druckhöhe ein. Mit dieser Umsetzung ist ein Verlust an Energie verbunden. Ist das weitere Rohr sehr kurz im Verhältnis zu seiner Weite, so füllt der Strahl, wie in Abb. 146, das weitere Rohr nicht aus.

Da die Umsetzung unabhängig von den Längen der anschliefsenden Flüssigkeitsfäden, also unabhängig von den bewegten Massen erfolgt, so kommt für die Umsetzung die Stofstheorie der Massen nicht in Frage.

Es bedeutet

F_1 und F_2 den Querschnitt in qm im engeren bzw. im weiteren Rohr,

n die Verhältniszahl $F_2 : F_1$.

Digitized by Google

H_0 die treibende Druckhöhe in m der Flüfsigkeitsäule,
Q_3 die Ausflufsmenge in cbm/sk bei gefülltem F_2,
Q_2 die Ausflufsmenge in cbm/sk bei nicht gefülltem F_2,
w die bei gefülltem F_2 entstehende Widerstandshöhe in m Fl.-S.,
v_1 und v_2 die Geschwindigkeit in m/sk im engeren bzw. im weiteren Rohr für den Fall in Abb. 145,
v_3 die Geschwindigkeit in m/sk im engeren Rohr
v_i die ideelle mittlere Geschwindigkeit im weiteren Rohr, wenn F_2 mittels Q_3 ausgefüllt gedacht und $v_i = Q_3 : F_2$ gesetzt wird } für den Fall in Abb. 146,
p_1 und p_2 den absoluten hydraulischen Druck an der Uebergangsstelle zum weiteren Rohr, ersteren bei gefülltem, letzteren bei ungefülltem F_2 in m W.-S.,
q_a den absoluten Gegendruck auf den ausfliefsenden Strahl in m Fl.-S.,
ζ die allein der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl der Geschwindigkeitshöhe $v_2^2 : 2g$,
ζ_1 die allen Widerständen vor der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl von $v_1^2 : 2g$,
ζ_2 die allen Widerständen nach der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl von $v_2^2 : 2g$.

Wird vorläufig von der Reibung im weiteren Rohr abgesehen, also $\zeta_2 = 0$ gesetzt, so ist nach Abb. 145

$$\frac{v_1^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} + (q_a - p_1).$$

Hierin ist $(q_a - p_1)$ der von $v_1^2 : 2g$ als Druckhöhe wiedergewonnene Teil infolge des Druckes des schneller fliefsenden Stromes in F_1 auf den langsamer fliefsenden in F_2. Diese Druckhöhe ermittelt sich nach Abschn. G, S. 319, aus der Leistung L für das Flüssigkeitsgewicht $Q\gamma$ und für den Ablenkungswinkel $\alpha = 90^0$ zu

$$(q_a - p_1) = \frac{L}{Q\gamma} = 2\,\frac{(v_1 - v_2)\,v_2}{2g} = 2\,(n-1)\,\frac{v_2^2}{2g}.$$

Dies, in vorstehende Gleichung eingesetzt, ergibt die Widerstandshöhe

$$w = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \qquad \zeta = (n-1)^2 \quad \text{oder}$$

$$= \frac{\zeta}{n^2}\,\frac{v_1^2}{2g}, \qquad \text{worin} \quad \frac{\zeta}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Die Versuche Weisbachs und Fliegners (Civiling. 1875 S. 98) bestätigen diese von Borda aufgestellte Beziehung. Nach den Versuchen ist p an der Stelle a eher noch etwas kleiner als am Endquerschnitt des engeren Rohres.

Ist der Widerstand der an F_2 anschliefsenden Leitung so klein, dafs $\zeta_2 < 2\,(n-1)$ ist, so tritt bei a ein Unterdruck (Vakuum) auf, der nach der Formel im zweiten Absatz unter 3 (S. 284) sich schreibt:

Digitized by Google

$$\text{Unterdruck } (q_a - p_1) = [n^2 - (1 + \zeta + \zeta_2)]\, v_2^2 : 2g$$
$$= [2(n-1) - \zeta_2]\, \frac{v_2^2}{2g} = (2\sqrt{\zeta} - \zeta_2)\, \frac{v_2^2}{2g}$$
$$\text{oder} \quad = \frac{[n^2 - (1 + \zeta + \zeta_2)]\, H_0}{\zeta_1 n^2 + (1 + \zeta + \zeta_2)}.$$

Für gegebenes n wird also der Unterdruck am gröfsten, wenn ζ_1 klein ist, wenn also auch das engere Rohr möglichst kurz gehalten wird; immerhin ist der Wert 0,02 für ζ_1 als Mindestwert zu erachten, für ζ_2 ist etwa 0,20 der Mindestwert. Werden ζ_1 und ζ_2 ganz vernachlässigt, so wird, ohne Rücksicht auf Reibung, der Unterdruck $(q_a - p_1) = \frac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta} H_0$, mit dem Höchstwert $= 1{,}0\, H_0$ für $F_2 : F_1 = 2$. Auch Schieber mit anschliefsendem kurzen Rohrstück zeigen dieselbe Erscheinung, obgleich hierbei keine zentrale Verengung stattfindet. (Andere Werte s. Tafel S. 302.) Praktisch ist für $F_2 : F_1 = 2$ der Wert 0,7 bis 0,8 H_0 erreichbar, der nur durch Einleitung drehenden Zuflusses zu F_2 etwas erhöht werden kann.

Sobald v_2 bzw. H_0 so grofs wird, dafs $p_1 \lesseqgtr$ Dampfdruck des Wassers, so tritt der Fall in Abb. 149 S. 304 ein, der Unterdruck verschwindet plötzlich, und p_1 wächst an auf p_2 ($= q_a$ bei ungefülltem F_2; bei lotrecht steigendem Strahl bleibt zwar F_2 von zurückfallendem Wasser gefüllt, jedoch kennzeichnet sich der Zustand der Abb. 149 S. 304 durch Sprudelberge am Ausflufs).

Wenn im Fall der Abb. 146 S. 299 w_i die ideelle Widerstandshöhe für den dennoch ausgefüllt gedachten und mit mittlerem v_i durchflossenen Querschnitt F_2 bedeutet, und wenn ζ_i die zugehörige Widerstandszahl von $v_i^2 : 2g$ darstellt, so ist

$$w_i = \frac{v_2^2 - v_i^2}{2g} = \zeta_i \frac{v_i^2}{2g}, \quad \zeta_i = n^2 - 1, \quad \frac{\zeta}{\zeta_i} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Das Verhältnis der Ausflufsmengen in den beiden Fliefszuständen ist bei gleichem H_0 gemäfs v_a der S. 282

$$\frac{F_2 v_2}{F_1 v_3} = \frac{Q_2}{Q_3} = n \sqrt{\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_2}}.$$

Bezeichnen L_2 und L_3 die Leistungen $Q_2 \gamma v_2^2 : 2g$ bzw. $Q_3 \gamma v_3^2 : 2g$ in den verschiedenen Fliefszuständen, so wird

$$\frac{L_2}{L_3} = n \left(\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_2} \right)^{3/2}.$$

Als Wirkungsgrad η sei das Verhältnis der in F_2 durch Umwandlung der Geschwindigkeitshöhe $v_1^2 : 2g$ wieder erhaltenen Druckhöhe zur theoretisch verfügbaren Geschwindigkeitshöhe $(v_1^2 - v_2^2) : 2g$ bezeichnet. Dann ist

$$\eta = 1 - \frac{\zeta v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} = 1 - \frac{\zeta}{\zeta_i} = \frac{2}{n+1}.$$

Ohne Rücksicht auf die Reibung an den Rohrwänden (ζ_1 und $\zeta_2 = 0$) ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

Digitized by Google

Für $F_2 : F_1 =$	1,3	1,5	2,0	3	4	5	10	50
$\zeta =$	0,09	0,25	1,0	4	9	16	81	2401
$\zeta_i =$	0,69	1,25	3,0	8	15	24	99	2499
$(q_a - p_1) : H_0 \sim$	0,55	0,80	1,0	0,8	0,6	0,47	0,22	0,04
$Q_2 : Q_3 \sim$	1,25	1,34	1,41	1,34	1,26	1,20	1,04	1,02
$L_2 : L_3 \sim$	1,14	1,07	0,71	0,27	0,13	0,07	0,01	0,00
$\eta \sim$	0,87	0,80	0,66	0,50	0,40	0,33	0,18	0,04
$\zeta : n^2 =$	0,05	0,11	0,25	0,44	0,56	0,64	0,81	0,96

Die Versuche Fliegners stehen mit den Angaben für den Unterdruck in gutem Einklange. Der Unterdruck $q_a - p_1$ läfst sich ohne Reibung auch noch setzen $= H_0 (\zeta_i - \zeta) : (1 + \zeta)$.

Auch bei Absperrschiebern in Rohrleitungen, bei denen die Erweiterung nicht zentral zum Drosselquerschnitt F_1 gelegen ist, erfolgt ein Unterdruck mit dem max bei $F_1 = 0{,}5\, F_2$.

Ueber Versuche mit plötzlichen Erweiterungen in spaltförmigen Kanälen, vgl. Dissertation von Just, 1910, „Ueber Labyrinthdichtungen für Wasser", Verlag R. Dietze, Berlin.

2. Allmähliche zentrale Erweiterung (Abb. 147 u. 148).

Bedeutung der Zeichen wie unter 1.; aufserdem sei

ζ_k die Widerstandszahl von $v_2^2 : 2g$ für den konischen Teil,

λ die Reibungszahl (S. 294) für einen Querschnitt dieses Teiles, der F_1 ganz nahe liegt, da nur dieser Teil für die Reibungshöhe von Bedeutung ist,

δ der Winkel des konischen Zwischenstückes.

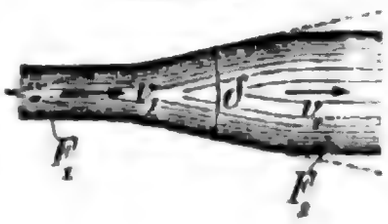
Aus Versuchen von Fliegner*) findet sich angenähert für δ bis 45^0:

$$w = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \sin \delta = \zeta \frac{v_2^2}{2g}; \qquad \zeta = (n-1)^2 \sin \delta.$$

Wenn $\delta \gtrless 90^0$, treten die Verhältnisse wie bei plötzlicher Erweiterung ein.

Abb. 147.

Abb. 148.



Auch hier tritt unter gleichen Leitungsverhältnissen, wie unter 1. angegeben, Unterdruck ein, dessen Wert

$$q_a - p_1 = [n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)] \frac{v_2^2}{2g} \text{ oder}$$

$$= \frac{n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)}{\zeta_1 n^2 + (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)} H_0, \text{ worin}$$

$$\zeta_k = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\delta}{2}} (n^2 - 1)$$

mit einem Mindestwert $\lambda \sim 0{,}01$ bei polierter Wandung zu setzen ist.

Bei langem, konischem Zwischenstück mit $F_2 \gtrless 10\, F_1$ überwiegt der Einfluss der mit n^2 verknüpften Glieder, so dafs dann einfacher zu schreiben ist:

*) Civiling. 1875 S. 96.

Digitized by Google

$$q_a - p_1 = n^2 (1 - \sin\delta - k) \frac{v_2^2}{2g} \text{ oder}$$

$$= \frac{1 - \sin\delta - k}{\zeta_1 + \sin\delta + k} H_0, \text{ worin } k = \frac{\lambda}{8 \sin\frac{\delta}{2}}.$$

Bei kleinem Winkel δ wird hiernach bei der allmählichen Erweiterung schon mit viel kleinerem v_2 bzw. H_0 als bei plötzlicher Erweiterung ein wesentlicher Unterdruck erreicht, weshalb sich für Strahlpumpen besonders die allmähliche Erweiterung eignet (Dampfinjektor, Wasserstrahl- und Quecksilberstrahl-Luftpumpe, Wassertrommelgebläse).

Die hiernach berechneten Werte für den Unterdruck stimmen mit den meisten Versuchsergebnissen von Fliegner gut überein.

Gegenüber dem Verlauf bei plötzlicher Erweiterung nimmt der Unterdruck mit wachsendem H_0 schneller zu, bis das minim. $p_1 = s$ erreicht ist (S. 281); dann tritt aber nicht plötzlicher Abfall des Unterdruckes wie bei Abb. 146 S. 299 ein, sondern der Unterdruck erhält sich, während ζ allmählich bis zum Werte ζ_i ansteigt und diesen selbst noch überschreitet; schliefslich vermindert sich auch der Unterdruck allmählich.

Nach Versuchen von Andres*) mit 22 verschiedenen Erweiterungen wird der Vorgang der Umwandlung von Geschwindigkeitshöhe $v_1^2 : 2g$ in Druckhöhe im Querschnitt F_2 begünstigt durch runden Querschnitt, durch rein konische Erweiterung, durch Einleitung von schraubenförmiger oder wirbelnder Bewegung in der Erweiterung, durch glatten und abgerundeten Uebergang zur Erweiterung, wie in Abb. 148, sowie durch besondere Glätte der benetzten Wandung. (Letztere läfst sich bei eiserner Wandung auf die Dauer nicht erhalten.)

Auch hier ist $\zeta_i = n^2 - 1$, und ähnlich den Werten für plötzliche Erweiterung:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = n \sqrt{\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2}},$$

$$\frac{L_2}{L_1} = n \left(\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\eta = 1 - \frac{\zeta + \zeta_k}{v_1^2 - v_2^2} v_2^2 = 1 - \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta_i}$$

$$= 1 - \sin\delta + \frac{2 \sin\delta}{n+1} - \frac{\lambda}{8 \sin\frac{\delta}{2}}.$$

Der Wert η ändert sich demnach bei kleinem δ nur unbedeutend mit wachsendem n, entsprechend der Verlängerung der allmählichen Erweiterung (Z. d. V. d. I. 1910 S. 1640).

*) Forschungsarbeit Nr. 76 des V. d. I. 1909, auch Z. d. V. d. I. 1910 S. 1585. Ueber Versuche mit allmählich erweitertem Rohr von rechteckigem Querschnitt vgl. Hochschild, Forschungsarbeit Heft 114 des V. d. I. 1910.

Digitized by Google

Für sin $\delta = 0{,}1$ entspr. $\delta \sim 5^0 45'$ stellen sich, ohne Rücksicht auf Reibung an den Wandungen der Anschlufsrohre (also $\zeta_1 = \zeta_3 = 0$), die Werte gegenüber ($\lambda = 0{,}02$ in den Wert von ζ_k gesetzt):

Für $n = F_2 : F_1 =$	1,5	2	5	10	50
$\zeta =$	0,025	0,10	1,6	8,1	240
$\zeta_i =$	1,25	3,0	24	99	2499
$(q_a - p_1) : H_0 =$	0,97	1,86	4,0	4,3	4,1
$Q_2 : Q_1 =$	1,4	1,7	2,2	2,3	2,3
$L_2 : L_1 =$	1,2	1,2	0,4	0,1	0,04
$\eta =$	0,88	0,87	0,83	0,82	0,81.

Die Werte $(q_a - p_1) : H_0$ sind mit dem Werte λ sehr veränderlich.

Für den Venturi-Wassermesser*) ist in der Regel $F_2 : F_1 = 9$, $\delta = 4^0 40'$; nach Versuchen: $\zeta + \zeta_k = 5{,}1 + 5{,}2 = 10{,}3$, $Q_2 = 2{,}7\, Q_1$, $v_{2\,max}$ etwa 1,7 m bei $p_1 \sim 0$, wenn $\zeta_2 = 0$ (Erweiterung am Ende der Leitung).

Der geringe Widerstand der allmählichen Erweiterung gestattet bei sehr weiten Leitungen, Absperrvorrichtungen von kleinerem Durchmesser, also billigere und handlichere Verschlüsse einzubauen.

3. Plötzliche zentrale Verengung.

Hierbei entsteht ein Geschwindigkeitsverlust an der scharfwinkligen Durchflufskante von 2 %, dessen $\zeta = (1/0{,}98)^2 - 1 = 0{,}04$ ist, — und ein Druckhöhenverlust infolge Wiederausbreitung des eingeschnürten Strahles gemäß Angabe unter 1. für plötzliche zentrale Erweiterung.

α sei das Verhältnis des Querschnitts des eingeschnürten Strahles zu dem der Durchlafsöffnung (Kontraktionszahl).

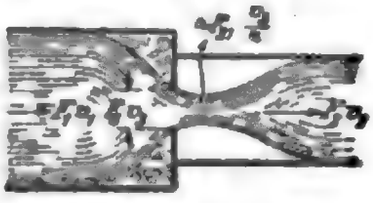
Werte α:

Wenn die Durchflufsöffnung $\lessgtr 0{,}1\, F_1$, so setze

$\alpha = 0{,}62$ bis 0,64 bei scharfer Durchflufskante,
$= 0{,}7$ bis 0,8 bei ganz schwacher Kantenbrechung,
$= 0{,}9$ bei wenig abgerundeter Kante.

Abb. 149.

Abb. 150.



Wenn die Durchfluß-öffnung $> 0{,}1\, F_1$, so vergröfsert sich α infolge der wesentlichen Zufluſsgeschwindigkeit zur Verengung; Aenderung von α ist durch Versuche nur für scharfe Durchflufskante bisher ausreichend ermittelt (Weisbach 1843).

Es gilt

für Abb. 149: $w = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$, worin $\zeta_2 = 0{,}04 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$;

bei scharfer Durchflufskante wird

für $F_2 : F_1$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ζ_2	0,50	0,46	0,42	0,33	0,23	0,13	0,00
α	0,60	0,61	0,62	0,65	0,70	0,77	1,00

*) Zentralbl. Bauv. 1898 S. 138.

Digitized by Google

(Bei $F_2 : F_1 = 1{,}0$ fällt der erste Summand von ζ_2 fort, weil alsdann keine Geschwindigkeitsänderung mehr, somit kein Geschwindigkeitsverlust vorhanden ist.)

für Abb. 150: $$w = \frac{0{,}04\, v_2^2 + \left(\frac{v_3}{\alpha} - v_2\right)^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g};$$

$$\zeta_2 = 0{,}04 \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F_3} - 1\right)^2,\quad \zeta_3 = 0{,}04 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{F_3}{F_2}\right)^2,\quad \zeta_2 = \zeta_3 \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2.$$

Wenn $F_3 < 0{,}1\, F_1$, α unveränderlich 0,63 gesetzt, wird für

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_2	2,3	2,0	1,8	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,6	0,5
oder ζ_2	232	51	20	9,6	5,2	3,1	1,9	1,2	0,7	0,5.

Wenn $F_3 \geqq 0{,}1\, F_1$, setze folgende Werte für α:

$F_3 : F_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α	0,63	0,64	0,65	0,67	0,69	0,72	0,77	0,85	0,92	1,00;

dies ergibt für $F_1 = F_2$ bei

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_3	2,26	1,91	1,60	1,24	0,94	0,65	0,39	0,19	0,05	0,00
oder ζ_2	226	47,8	17,5	7,80	3,76	1,79	0,80	0,29	0,09	0,00.

4. Allmähliche zentrale Verengung. (Abb. 147 u. 148 S. 302, aber mit entgegengesetzter Stromrichtung.)

Gilt v_1 als Nutzgeschwindigkeit, so wird $w = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$, und ζ entspricht dann allein der Reibung in dem sich verengernden Teile. Angenähert ist $$\zeta = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\delta}{2}} \left[1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2\right],$$

wenn die Widerstandszahl λ einem Querschnitt nahe dem engeren F_1 entspricht. Da für Verengungen mit den Enddurchmessern d_1 und d_2 für $d_1 : d_2 \lessapprox 0{,}5$ der Wert $(F_1 : F_2)^2 \lessapprox 0{,}06$ wird, so ist der weitere Teil mit $d_2 > 2\, d_1$ ohne Bedeutung für ζ. Dann wird bei mittlerem Werte $\lambda = 0{,}02$ für glattes Rohr, wenn $\delta \gtrsim 3^0$, ζ bereits $\lessapprox 0{,}1$.

Bei Uebergängen zu engeren Rohrweiten in der Stromrichtung ist daher die allmähliche Verengung ohne Bedeutung für die Ersparnis an Reibungswiderständen, wenn nur die Einlaufkante am engen Rohr nach Abb. 140 abgerundet wird. Dasselbe gilt für das Mundstück beim Ausfluſs freier Wasserstrahlen.

δ) Absperrvorrichtungen und Abdichtungen.

1. Absperrvorrichtungen (Ventile, Hähne, Klappen, Schieber).

(Nach Versuchen von Weisbach, C. Bach und H. Lang.)

Im folgenden bedeutet

F den freien Querschnitt des Ventilsitzes, Schieberkanals oder Rohres, der durch die Vorrichtung verengt wird, in qm,

F_1 den mittels der Vorrichtung jeweilig eingestellten kleinsten Durchflufsquerschnitt winkelrecht zur Stromrichtung in qm,

Digitized by Google

v die Geschwindigkeit im Querschnitt F in m/sk,
v_1 die Geschwindigkeit im Querschnitt F_1 in m/sk,
ζ die zu $v^2 : 2g$ gehörige Widerstandszahl,
ζ_1 die zu $v_1^2 : 2g$ gehörige Widerstandszahl;

dann ist $$\zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}; \qquad \zeta = \zeta_1 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2.$$

a) Einschliefslich des Einflusses der Gehäuseform üblicher Bauart, bei vollständiger Oeffnung.

1) Kugelförmiges Ventilgehäuse, schlanke Form, 25 mm Dmr. { Strom gegen die Unterfläche des Kegels: $\zeta = 5{,}3$; „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta = 4{,}4$
2) Dgl., aber sehr kurz, Tellerventil, 34 mm Dmr. { Strom gegen die Unterfläche des Tellers: $\zeta = 16{,}6$; „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta = 12{,}5$
3) Eckventilgehäuse, Stromablenkung = 90°, 32 u 22 mm Dmr. { Strom gegen die Unterfläche des Kegels: $\zeta = 2{,}1$; „ „ „ Oberfläche „ „ : $\zeta = 2{,}6$
4) Schieber winkelrecht zur Rohrachse verschoben, den vollen Rohrquerschnitt freigebend, 34 mm Dmr. . . . . $\zeta = 0{,}3$

Anmerkung: Im Falle 1) und 3) waren die Dichtungsflächen des Ventils mit kugeliger Unterfläche nur 1 mm breit, im Falle 3) konnte der Kegel nur um das 0,25-fache des Sitzdurchmessers vom Sitze abgehoben werden.

b) Ohne Rücksicht auf den Einfluss des Gehäuses.

Absperrvorrichtung	$F_1 : F =$ 0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
	Mittlere Werte von ζ_1				
Tellerventil mit oberer Führung und beliebiger Unterfläche (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0
Tellerventil mit Rippenführung im Sitze (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	2,3	2,8	3,5	4,3	5,2
Kegelventil mit oberer Führung, Unterfläche eben (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	0,00	—0,14	0,20	0,65	1,16
Dgl., kugelig (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	0,00	—0,04	0,18	0,48	0,82
Dgl., kegelförmig (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	—0,04	0,29	0,52	0,56	0,73
Kugelventil Dichtungskante nur 1 mm breit (Strom gegen die Unterfläche gerichtet)	1,9	2,2	2,5	3,6	5,0
Kugelventil, Strom gegen die Oberfläche gerichtet	1,6	1,8	2,2	3,2	4,4
Sehr schlankes Kegelventil, sogen. Nadelventil, Strom gegen die Unterfläche gerichtet	0,2	0,4	.	.	.
Dünner Schieber in rechteckigem Rohre	0,69	0,45	0,06	—0,10	0,00
„ „ „ rundem „	1,00	0,60	0,17	—0,05	0,00
Gewöhnliche Wasserschieber in rundem Rohre, 0,61 m Durchm. Versuch Knichling, ζ_1 max = 1,1 bei $F_1 : F = 0{,}3$	0,80	1,04	0,52	0,00	0,00
Hahn, gerade und rechteckige Durchgangsöffnung	2,35	1,65	0,75	—0,02	0,00
Drosselklappe, rechteckig, Schluss nach Drehung um 90°	0,50	0,32	0,15	—0,04	0,00
„ rund, Schluss nach Drehung um 90°	0,88	0,45	0,06	—0,03	0,00
Einfache Klappe, rechteckig, Schluss nach Drehung um 90° mit dem Strom	0,78	0,28	0,06	—0,04	0,00
Dgl. gegen den Strom	0,41	0,60	0,23	0,03	0,00
Muschelschieber mit scharfen Durchflusskanten und eckiger Muschel	Einlafsöffnung: 1,0	1,6	1,8	2,0	2,2
	Auslafsöffnung: 3,0	2,0	2,8	2,7	2,6
Muschelschieber mit etwas gebrochenen Durchflusskanten	Einlafsöffnung: 0,11	0,18	0,21	0,23	0,24
	eckige Muschel; Auslafsöffnung: 0,24	0,13	0,35	0,61	1,04
	runde „ „ : 0,04	0,11	0,23	0,35	0,49

Drucksteigerung in der Leitung bei schnellem Schliefsen einer Absperrvorrichtung am Ende einer Leitung, deren $\Sigma_e^a w$ sehr klein gegen $v_a^2 : 2g$ ist, und wenn sich F_a angenähert proportional der Zeit ändert:

Digitized by Google

(Nach Versuchen von Michaud; Z. d. V. d. I. 1909 S. 1233.) Vgl. auch III. Bd. Abschn. Wasserversorgung.

Es bedeute

H den statischen Druck an der Absperrvorrichtung in m W.-S.,
H_s die dort im Augenblick vollständigen Abschlusses erreichte Drucksteigerung in m W.-S.,
T die Dauer der absperrenden Bewegung der Vorrichtung in sk,
v die Durchflufsgeschwindigkeit des Beharrungszustandes auf einer Strecke der Leitung, die gleiche Weite besitzt — vor Bewegung der Absperrvorrichtung —, in m/sk,
l die Länge dieser Strecke mit der Geschwindigkeit v in m,
$\Sigma(lv)$ die Summe der Produkte lv für die einzelnen Strecken der Leitung von verschiedener Weite,
k die zulässige Beanspruchung des Leitungsbaustoffes in kg/qmm,
m einen Beiwert von k, $m = 1$ für Schmiedeisen, $m = 2$ für Gufseisen.

Dann ist $H_s = \dfrac{2\,\Sigma(lv)}{g\,T}$, wenn $T > 0{,}01\sqrt{\dfrac{l^2(mk + 0{,}025\,H)}{H}}$

und $H_{s\,max} = 38\,v\sqrt{\dfrac{H}{mk + 0{,}025\,H}}$, wenn $T \sim 0$.

Befindet sich die Absperrvorrichtung nicht ganz am Ende der Leitung, so tritt während des Schliefsens auf der Abflufsseite und an der Fläche der Absperrvorrichtung, die parallel zum Abflufsstrom gerichtet ist, ein Druckabfall ein, der bei kurzem Abflufsrohr zum Unterdrucke wird; derselbe ist dem für plötzliche zentrale Erweiterung fast gleich, wird also zum Höchstwert bei $F_1 = 0{,}5\,F_2$ und der einseitige Ueberdruck erschwert die Bewegung der Absperrvorrichtung (vgl. Zentralbl. Bauv. 1909 S. 671).

Bei der üblichen Bauart kreisförmiger Wasserschieber ist der Querschnitt der sichelförmigen Oeffnung proportional dem Hub vom Beginn der wirklichen Eröffnung an bis zum 0,65fachen des Rohrquerschnitts; bei weiterer Oeffnung bleibt die Zunahme des Durchflufsquerschnitts dem Hub gegenüber in wachsendem Mafse zurück. Der Durchflufsquerschnitt wird gleich dem halben Rohrquerschnitt nach einem Nettohub $= 0{,}42\,d$, bei welchem der oben erwähnte Druckabfall den Höchstwert erreicht.

2. Abdichtungen.

Vollkommene Abdichtung gegen Durchflufs wird auch ohne besonderes Dichtungsmittel mittels dicht aneinanderliegender Metallflächen erreicht, wenn zwischen Zulauf- und Ablaufseite wenigstens eine geschlossene Linie vorhanden ist, auf welcher die Spannung zwischen den dichtenden Flächenteilen gröfser ist als der hydrostatische Druck auf die Flächeneinheit an der Zulaufseite. Eine solche Linie wird z. B. an Dampfkesseln durch das Verstemmen der Blechkanten erzeugt.

Bei Ventilen und anderen Absperrvorrichtungen mit breiter Dichtungsfläche ohne elastisches Zwischenmittel ist es mit kleinem Handrad oft nicht möglich, die für vollkommene Abdichtung

Digitized by Google

nötige Pressung auf einer geschlossenen Ringlinie zu erreichen; es hilft dann nur Verkleinerung der Dichtungsfläche oder Vergrößerung der Uebersetzung für die Schließkraft (größeres Handrad), oder Einsetzen eines weniger festen Baustoffes für Ventilkegel oder Sitz.

Bei Absperrvorrichtungen darf die Dichtungsfläche nur so schmal hergestellt werden, daß die Elastizitätsgrenze der Abdichtungsmittel noch nicht überschritten wird; dagegen darf bei nur einmalig verlangter Abdichtung, wie sie z. B. beim Verlegen von Rohrleitungen verlangt wird, die Elastizitätsgrenze der Abdichtungsmittel überschritten und daher die Dichtungsfläche scharfkantig ausgebildet werden.

Unvollkommene Abdichtung. Wird eine geschlossene Linie mit größerer Flächenpressung zwischen den Dichtungsflächen als derjenigen auf der Zulaufseite nicht erreicht, so tritt geringer Durchfluß unter Ueberwindung hydraulischer Widerstände ein, die trotz der sehr kleinen Durchflußquerschnitte nach dem allgemeinen Gesetz für die Durchflußwiderstände (S. 287) zu berechnen sind. Auch bei diesem Durchfluß treten Fließzustände unterhalb und oberhalb der kritischen Geschwindigkeit auf.

Die Durchflußmenge ist somit proportional der Zeit und proportional den Werten $\sqrt{2g\,H_0}$ und $\sqrt{1:l}$, worin l die Weglänge zwischen ungehindertem Zu- und Ablauf bedeutet. Daher ist bei Kesseldruckproben die Dichtigkeit der Kessel ebensogut bei dem Betriebsdrucke H_b wie bei dem höheren Probedrucke H_p zu beurteilen, wenn nur die Dauer des Druckes im Verhältnis $\sqrt{H_p : H_b}$ steht; bei älteren Kesseln kann längere Zeit andauernder Probedruck schädlich wirken. Die Formänderung eines Kessels unter Probedruck würde den Zeiger des Manometers nicht zum Stillstehen bringen. Stillstehen des Zeigers schließt Formänderung aus.

Metallische Kolben- oder Stopfbuchsdichtung erzeugt sehr enge, ringförmige Durchflußkanäle mit polierten Gleitflächen. Der Querschnitt wird aber bei liegenden Kolben oder Stangen selten an allen Stellen der Strecke gleich groß und von gleicher Form sein. Immerhin werden Annäherungsrechnungen für die Durchflußmenge mit Hülfe der Angaben auf S. 287 u. 294 auch hierfür brauchbare Ergebnisse liefern (Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133 und Just, Dissertation 1911).

Geflochtene Faser- oder Lederpackung wirkt nur so lange brauchbar, wie bei ihr noch Ausdehnungs- und Quellfähigkeit (Elastizität) erhalten ist. Je mehr Fasern übereinander liegen, um so länger sind die feinen Durchflußkanäle und demgemäß um so größer die hydraulischen Widerstände, so daß andererseits bei gleicher Durchflußmenge, aber höherer Packung an gegenseitiger Pressung der Fasern gespart werden kann. Also wird durch hohe Stopfbüchse das Packungsmittel geschont und die Reibung an den hindurchgleitenden Teilen verringert. Hohe Packung fordert aber lange Grundbuchse, da diese bei höherer Spannung im Zylinder als in der Stopfbuchse kolbenartig in die Buchse eintritt und dort die Packung selbsttätig zusammenpreßt.

Digitized by Google

Ledermanschette besitzt keine Poren, die als feine Durchlafskanäle zu erachten wären. Die Manschette ist eine selbsttätige, aufserordentlich gute und wirtschaftliche Abdichtung für Flüssigkeiten unter 60° Wärme, wenn die an ihr vorbeigleitenden Flächen ganz glatt bleiben und die Elastizitätsgrenze des Leders (bei der Herstellung oder beim Einsetzen des Kolbens) nicht überschritten worden ist. Denn oft wird das Manschettenmaterial dicker gewählt, als es der Spielraum an der Manschettenkammer freiwillig zuläfst, so dafs das Material schon beim Einsetzen des Kolbens mit Gewalt zusammengepreſst wird. Ob dies geschehen ist, läfst sich mittels des Manometers feststellen, denn bei gut erhaltenem Material ist die Reibung (halbe Differenz der Pressung bei Hin- und Hergang des Kolbens und bei gleichbleibender Nutzlast) bei allen Pressungen im Zylinder denselben proportional; bei zusammengepreſstem Material dagegen tritt diese Proportionalität erst bei höherem Flüssigkeitsdrucke auf, und die Reibung bleibt unterhalb dieses Druckes unverändert. Eine gut eingesetzte Manschette macht den Preſszylinder bei sehr glattem Kolben zu einer sehr guten Wägevorrichtung. Rauhe oder gar riefige Reibfläche, wie sie hartes oder eisenhaltiges, vor allem kohlensäurehaltiges Wasser leicht erzeugt, zerstört die Ledermanschette. Manschetten von Guttapercha leiden noch stärker bei rauher Reibfläche und bieten nicht die schlüpfrige Oberfläche wie nasses oder fettiges Leder. Destilliertes, etwas alkalisch wirkendes Wasser eignet sich am besten zur Erhaltung der Manschetten.

Labyrinthdichtung mit plötzlichen Erweiterungen (Nuten) in engem Durchfluſsspalt mit kammartigem oder treppenförmigem Ineinandergreifen der Spaltflächen vergröſsert den Durchfluſswiderstand, vermindert also die Durchfluſsmenge gegenüber dem Spalt von gleichem Querschnitt (Dissertation von Just, 1910, „Ueber Labyrinthdichtungen für Wasser“, Verlag R. Dietze, Berlin und Versuche von Becker, Z. d. V. d. I. 1907, S. 1133).

Bedeutet δ die Spaltweite in mm, so ergeben die üblichen Spalttiefen von 5 bis 8 mm, bei angenähert quadratischem Querschnitt der Nuten und scharfen Durchfluſskanten, statt der theoretischen Widerstandszahl $\zeta = [1 - (F_1 - F_2)]^2 + 0{,}5$ (Abb. 139 S. 298 u. 145 S. 299) mit ihrem Höchstwert 1,5, nur ein $\zeta \sim 0{,}4$ bzw. 0,1 bei $\delta \sim 1{,}0$ bzw. 2,6 mm. Längliche Nuten, abgerundete Durchfluſskanten und dichte Nutenfolge ziehen das ζ der einzelnen Nuten noch mehr herab.

Doppelseitige Nut wirkt etwas besser und, vor allem bei wechselndem v_1, regelmäſsiger als einseitige Nut.

Für $v_1 <$ kritische Geschwindigkeit wird $\zeta \sim 0$.

Kammartige oder treppenförmige Versetzung mit seitlicher Spaltweite $\delta_s > \delta$ ergibt $\zeta \sim 2$; $\delta_s < \delta$ steigert ζ schneller infolge zweimaliger Vernichtung einer gröſseren Geschwindigkeitshöhe, als sie der kleineren Geschwindigkeit im geraden Spalt entspricht. Versetzung mit geringster seitlicher Verschiebbarkeit ergibt daher den gröſsten Durchfluſswiderstand.

Bei Relativbewegung der Spaltflächen winkelrecht zur Durchfluſsrichtung vergröſsert sich der Widerstand infolge Ablenkung der Durchfluſsrichtung.

Digitized by Google

D. Fliefsen in nicht gefüllten Rohrleitungen, in Flüssen und Kanälen.

1. Gleichförmige Bewegung

(Querprofil unveränderlich, Gefälle des Grundes = Reibungsgefälle $w : l$).

Es bedeutet für eine Strecke von gleichbleibender Beschaffenheit:
F den Durchflufsquerschnitt (Querprofil) des Wasserkörpers in qm,
Q die durch F abfliefsende Wassermenge in cbm/sk,
v die mittlere Profilgeschwindigkeit, d. h. die mittlere Geschwindigkeit in F, in m/sk (Werte anderer Profilgeschwindigkeiten vgl. S. 313),
u den benetzten Teil des Umfanges des Leitungsquerschnitts in m,
l die Länge der in Betracht gezogenen Strecke der Leitung mit gleichem Querprofil in m,
w die Senkung des Wasserspiegels für die Länge l in m,
$i = w : l$ das Gefälle des Wasserspiegels (Reibungsgefälle),
ϱ die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit,
$g = 9{,}81$ m/sk².

Wie bei dem Durchfliefsen von gefüllten Rohrleitungen (S. 287) ist

$$w = \varrho l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}; \qquad v = \sqrt{\frac{2g}{\varrho}} \sqrt{\frac{iF}{u}}; \qquad Q = Fv.$$

Der Wert $F : u$ wird vielfach hydraulischer Radius genannt und mit R bezeichnet. Vorteilhafte Querschnitte mit grofsem $F : u$ (S. 312).

α) Nach Weisbach setze für Flüsse und Kanäle mit rauhem Flufsbett:

$$\varrho = 0{,}0074 + \frac{0{,}000433}{v}.$$

(Dies entspricht für gefüllte Rohrleitungen einem $\lambda = 4\varrho = 0{,}029 + 0{,}0017 : v$; vgl. S. 296.)

Im Mittel wird für rauhes Flufsbett $\varrho = 0{,}0075$, oder $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = 51$.

β) Nach Bazin:*)

ältere Formel (1865) $$\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{a + bu : F}},$$

neuere Formel (1897) $$\sqrt{\frac{2g}{\varrho}} = \frac{87}{1 + c\sqrt{u : F}},$$

worin bedeutet:

Fall I.	für gehobeltes Holz oder Zement . . .	$a = 0{,}00015$,	$b = 0{,}0000045$	$c = 0{,}06$
„ II.	„ Quader und nicht gehobeltes Holz .	$a = 0{,}00019$,	$b = 0{,}0000133$	$c = 0{,}16$
„ III.	„ Mauerwerk aus Bruchsteinen . . .	$a = 0{,}00024$,	$b = 0{,}00006$	$c = 0{,}47$
„ IV.	„ Erde, Querschnitt regelmäfsig u. rein	$a = 0{,}00028$,	$b = 0{,}00035$	$c = 1{,}30$
„ V.	„ Gerölle (nach Kutter)	$a = 0{,}00040$,	$b = 0{,}00070$	$c = 1{,}75$

Werte $\sqrt{\frac{2g}{\varrho}}$ aus der älteren Formel:

*) Vgl. Biel, Forschungsheft 44 d. V. d. I.

Digitized by Google

$F:u=$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1.00	2,00	3,00	6,00 m
Fall I.	71,6	76,1	77,9	78,8	79,3	79,7	80,2	80,4	81,0	81,2	81,4
„ II.	55,6	62,4	65,3	66,9	67,9	68,7	69,6	70,1	71,3	71,7	72,1
„ III.	34,5	43,0	47,7	50,6	52,7	54,2	56,3	57,7	60,9	62,0	63,2
„ IV.	16,3	22,2	26,3	29,4	31,9	34,0	37,3	39,8	46,9	50,2	54,1
„ V.	11,6	16,0	19,1	21,6	23,6	25,3	28,0	30,2	36,5	39,7	44,0

(Beide Formeln würden bei Anwendung der Reibungswerte auf gefüllte Rohrleitung vom Durchmesser = 1 m und Fall I die Werte $\lambda = 0{,}012$ bzw. 0,013 ergeben; vgl. S. 296.)

Bei Flüssen nimmt im allgemeinen die Rauhigkeitszahl ρ vom Quellgebiete nach der Mündung hin ab.

Nach Messungen in der preufsischen Elbe fand sich, dafs v von der Wassertiefe t nach folgender Beziehung abhängt: $v = 46{,}91 \sqrt[3]{i}\sqrt{t}$ (nur für die Elbe gültig), wobei Wassermengen Q von 90 bis 430 cbm/sk, Gefälle i von 0,00007 bis 0,00023 und mittlere Tiefen t von 1 bis 3 m vorausgesetzt sind.*)

2. Ungleichförmige Bewegung (Querprofil veränderlich, Gefälle des Grundes vom Reibungsgefälle $w:l$ verschieden).

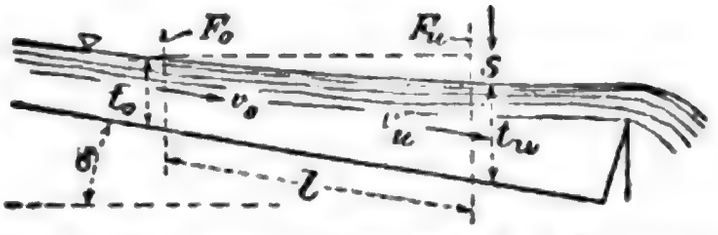
Ungleichförmige Bewegung entsteht infolge wechselnder Breite oder Tiefe des Wasserlaufes, auch infolge von Aufstau durch Hochwasser, durch Wehre, Schützen oder eingebaute Pfeiler.

Teile die ganze Strecke in einzelne Abschnitte, für welche die Zunahme der Querschnitte und damit auch die Abnahme der Geschwindigkeit als proportional ihrem Abstande angesehen werden kann.

Bedeutet nach Abb. 151 in einem dieser Abschnitte:

F_o den oberhalb gelegenen Querschnitt in qm,
F_u „ unterhalb „ „ „ „ „,
l den Abstand beider in m,
v_o und v_u die durchschnittlichen Geschwindigkeiten in F_o und F_u in m/sk,
t_o und t_u die Wassertiefen bei F_o und F_u in m,
s die Fallhöhe des Wasserspiegels auf der Strecke l in m,
u_m den mittleren benetzten Umfang des Durchflufsquerschnitts auf der Strecke l in m,
Q die abfliefsende Wassermenge in cbm/sk,
δ den Neigungswinkel des Flufsbettes,
ϱ die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit, die der mittleren Geschwindigkeit auf der Strecke l entspricht,
$v_m^2 : 2g$ die mittlere Geschwindigkeitshöhe von $v_o^2 : 2g$ und $v_u^2 : 2g$ in einem Querschnitt F_m,

Abb. 151.



so ist
$$\frac{v_0^2}{2g} + s = \frac{v_u^2}{2g} + \frac{\varrho v_m^2 u_m l}{2g F_m},$$

worin
$$v_m = \frac{v_o + v_u}{2} \quad \text{und} \quad F_m = \frac{F_o + F_u}{2};$$

*) Siedek, Z. d. ö. I. u. A. V. 1901 S. 397, Plenkner, Oesterr. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 1906. Heft 40 und Biel, s. Fufsnote S. 292.

Digitized by Google

da aufserdem $Q = F_o v_o = F_u v_u$, so wird

$$s = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_u^2} - \frac{1}{F_o^2} + \varrho l u_m \frac{F_o + F_u}{2 F_o^2 F_u^2}\right) = l \sin\vartheta + t_o - t_u.$$

Ist die Staukurve eine stetige Linie, so ist $t_u - t_o$ erst Null für $l = \infty$.

Die Staukurve ist nicht stetig, und es entsteht ein **Wassersprung** (Wasserschwelle) von der Höhe $t_u - t_o = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{v_u^2}{2g}$ $\left(\text{also } \frac{v_o^2}{2g} = \frac{t_u}{1 + (t_o : t_u)}\right)$ an der Stelle, wo bei parallel bleibenden Ufern das Gefälle des Grundes plötzlich gröfser als das Reibungsgefälle ist.

Ueber Wanderwellen in steilen Gerinnen vgl. Forchheimer, Sitzungsbericht der Akad. d. Wissenschaften in Wien, Dez. 1903.

8. Vorteilhafteste Querschnitte von Kanälen.

Von den Querprofilen verschiedener Form, aber gleicher Gröfse F in qm, ergibt dasjenige mit gröfserem $F : u$ den kleineren Reibungsverlust (S. 287).

Weisbach vergleicht die Formen unter sich nach dem Werte von $m = u : \sqrt{F}$, der mit zunehmender Güte der Querschnittsform abnimmt.

Frank*) vergleicht die Formen mittels eines Wertes $f = 4F : u^2$ (also $f = 4 : m^2$), der mit der Güte der Querschnittsform wächst.

a) **Geradlinig begrenzte Querschnitte (Rechteck und Trapez).**

Bedeutet t die Wassertiefe in m,
b die Sohlenbreite in m,
ϑ den Böschungswinkel, so wird

f am gröfsten, wenn $t = \sqrt{\frac{F \sin\vartheta}{2 - \cos\vartheta}}$; daraus folgt

$$\frac{b}{t} = 2\frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{u}{F} = \frac{2}{t}, \qquad f_{max} = \frac{4\sin\vartheta(2 - \cos\vartheta)}{\left(2 + \frac{b}{t}\sin\vartheta\right)^2}.$$

Hiermit entsteht folgende Tafel:

ϑ	tg ϑ	$b : t$	f_{max}	Ueblicher Baustoff der Böschung
90^0	1 : 0,0	2,0	0,50	Holz
$63^0\,20'$	1 : 0,5	1,23	0,58	Mauerwerk
45^0	1 : 1	0,83	0,55	feste Erde mit Uferbefestigung
$33^0\,40'$	1 : 1,5	0,61	0,48	„ „ ohne „
$26^0\,30'$	1 : 2	0,47	0,40	lockere Erde, Sand u. dgl.
$18^0\,20'$	1 : 3	0,32	0,30	lockere Erde, Sand u. dgl.

b) **Krummlinig begrenzte Querschnitte.**

Kreisform (Vollkreis, Halbkreis, Kreissohle): Bei der Anfüllung des Querschnitts nimmt f rasch zu bis $f_{max} = 0{,}637$ bei Erreichung des

*) A. Frank. Ber. d. Kanäle und Rohrl. nach einem neuen einheitl. System 1886, München, R. Oldenbourg.

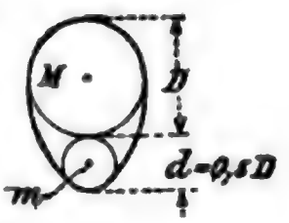
Digitized by Google

Kreismittelpunktes. Bei weiterer Füllung nimmt f wieder ab bis zu $f = 0{,}318$ bei Erreichung des Scheitels.

Eiform mit spitzem Ende unten (Abb. 152): Günstigste Form für stark wechselnde Füllung.

f wird in Höhe des Mittelpunktes des kleinen Kreises $= 0{,}613$, bei Füllung bis zu dem des grofsen Kreises $= 0{,}528$, bei Erreichung des Scheitels $= 0{,}292$.

Abb. 152.



Eiform mit spitzem Ende oben: Ungünstiger als Kreis und Eiform mit Spitze unten; verwendet für Wassersammelleitungen ohne stärkere Schwankung in der Füllung.

Ellipsenform, stehend (Zwei eingeschriebene, sich berührende Kreise von gleichem Durchmesser d, der kleinere Durchmesser der Ellipse $= {}^4/_3\, d$):

Bei halber Füllung $f_{max} = 0{,}627$, bei Erreichung des Scheitels $f = 0.298$.

Ellipsenform, liegend: Mafsverhältnisse wie oben; bei mangelnder Höhe anzuwenden. Bei halber Füllung $f_{max} = 0{,}615$, bei Erreichung des Scheitels $f = 0{,}298$.

4. Uebliche Geschwindigkeiten und Gefälle bei Kanälen.

Soll die Kanalsohle durch das Wasser nicht angegriffen werden, so sind folgende Geschwindigkeiten (in m/sk) nicht zu überschreiten, wenn v_o die mittlere Geschwindigkeit an der Oberfläche,

v_u „ „ „ „ „ Sohle,

$v_m' = \sqrt{{}^1/_2\,(v_o^2 + v_u^2)}$ (entsprechend der mittleren Geschwindigkeitshöhe), die mittlere Profilgeschwindigkeit bedeutet:

Beschaffenheit des Bettes	v_o	v_u	v_m	Beschaffenheit des Bettes	v_o	v_u	v_m
Schlammige Erde und brauner Töpferton . .	0,15	0,08	0,12	Kiesiger Boden	1,22	0,70	1,00
Feiner Sand	0,20	0,10	0,16	Grobsteiniger Boden . .	1,52	0,94	1,25
Lehm und fetter Ton (abgelagert)	0,30	0,16	0,25	Gemisch v. Schieferstücken	2,22	1,49	1,80
Fetter Flufssand	0,60	0,31	0,50	Lagerhafte Gebirgsarten .	2,75	1,82	2,30
				Harte, ungeschichtete Felsarten	4,27	3,14	3,50

Sollen sich in einem Kanal keine Sinkstoffe niederschlagen, so mufs die mittlere Geschwindigkeit mindestens betragen:

wenn das Wasser leichten Schlamm mit sich führt, $v = 0{,}25$ m/sk.
wenn das Absetzen von Sand zu befürchten ist, $v = 0{,}50$ m/sk,

Für **Fabrikkanäle** wähle man $v = 0.4$ bis $0{,}8$ m/sk; dabei erhalten die Zuleitungskanäle ein Gefälle $= 0{,}0005$ bis $0{,}0004$, die Unterkanäle $= 0{,}002$ bis $0{,}001$.

Sollen **Schiffahrtkanäle** zu Reinigungszwecken abgelassen werden können, als Entwässerungskanäle dienen, Wasser zur Bewässerung oder zur Speisung tiefer gelegener Haltungen abgeben, so erhalten sie ein Gefälle $= 0{,}000005$ bis $0{,}000040$. Sonst ist bei (1,5 bis 75 km langen) Kanalhaltungen das Gefälle $= 0$. Die stärksten, für Schiffahrt möglichen Gefälle sind $1:600$ bis $1:500$; schon Gefälle über $1:5000$ werden zu vermeiden gesucht.

Digitized by Google

E. Fliefsen des Wassers durch Erdreich.

a. Querschnitt von Zu- oder Abflufs klein gegen den Durchflufsquerschnitt.

Fliefsen nach einer Richtung hin wird eingeleitet durch Spannungsabfall (Druckhöhenunterschied) des Grundwassers in dieser Richtung. An beiden Endpunkten der Bahn befinden sich Zu- bzw. Ablauf. Alle Wasserschichten mit gleichem Abstande von denselben besitzen gleiche Spannung, die mit der Entfernung vom Zulauf abnimmt.

Die Strömung beginnt in der Richtung nach dem Ablauf zu, radial auseinandergehend, auf einem Bogen von 180°; die Stromfäden werden stetig in der Richtung des Spannungsabfalls abgelenkt, bis sie sich am Ablauf wieder radial vereinigt haben. Die Stromlinien ähneln daher den auf die Ebene projizierten Meridianlinien einer Kugel, deren Pole durch Zu- bzw. Ablauf gebildet werden. Die Flächen gleicher Spannung sind Kugelflächen, wenn Zu- und Ablauf Punkte im Erdreich darstellen; sie sind Zylinderflächen, wenn Zu- und Ablauf Stollen oder Kanäle darstellen. Die Spannungsflächen werden nach oben zu durch den Grundwasserstand begrenzt; nach unten zu werden Verdrückungen der Linien durch wasserdichte Erdschichten herbeigeführt.

Hiernach findet auch unterhalb der Gefällelinie zwischen den Sohlen von Zu- und Ablauf eine Strömung zum Ablauf hin statt, wenn die Sohlen beider nicht bis zur wasserdichten Erdschicht reichen; die Wasserspannungen unter der Sohle des Zulaufs nehmen mit der Tiefe ab; umgekehrt ist es unter der Sohle des Ablaufs. Vgl. Versuche von Pennink, Journ. Gasb.-Wasserv. 1907 S. 68.*)

b. Querschnitt von Zu- und Abflufs gleich dem Durchflufsquerschnitt, dieser unveränderlich; Filter.**)

Unter der Voraussetzung, dafs das Korn der Bodenart genaue Kugelform vom Durchmesser d besitzt, folgt, wenn l die Dicke und F den Querschnitt der durchflossenen Bodenschicht bedeutet:

Anzahl der Kugeln im Querschnitt F: $1{,}15\,F/d^2$,
kleinster, für den Durchfluss freibleibender Flächenanteil: $0{,}1\,F$,
Anzahl der Kugeln im Raume Fl: $1{,}41\,Fl/d^3$,
Anzahl der Kugellagen auf der Strecke l: $l\sqrt{3}/d\sqrt{2}$,
Oberfläche aller Kugeln im Raume Fl: $4.44\,Fl/d$,
Summe der Hohlräume im Raume Fl je nach Lagerung 0,26 bis 0,47 Fl.

(Die Hohlräume zwischen den Körnern sorgfältig gesiebten und gereinigten Sandes von $d = 0{,}54$ bis 3,8 mm fand Kröber zu 0,39 bis 0,41 Fl; bei gewöhnlichem Sande mit Körnern von $d = 0{,}1$ bis 0,8 mm fand H. Lang 0,36 Fl.)

---

*) P. Forchheimer, Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen, Z. d. V. d. I. 1899 S. 209 und Z. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1898 S. 629.

**) P. Forchheimer, Z. d. V. d. I. 1901 S. 1736 u. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, Abschnitt Hydraulik S. 449.

Digitized by Google

Es bedeute

Q die durchfliefsende Wassermenge für 1 qm Bodenfläche, je nach näherer Angabe in l oder cbm in der Stunde,

d den mittleren Korndurchmesser in mm,

l die Dicke der Bodenschicht, im Sinne der Wasserbewegung gemessen, in m,

H die für den Durchfluſs beanspruchte Druckhöhe in m; bei lotrechtem Durchfluſs und gleichartigem Boden ist l ein Teil von H,

m den Anteil vom Rauminhalt des Bodens, den die Hohlräume einnehmen,

k oder k_1 den Wert der Durchlässigkeit.

Nach Slichter gilt für ganz reinen Sand von gleichmäfsigem Korn, bei 10° C:

$$Q = k\,d^2\,H : l \text{ in cbm/st, worin}$$

für $m =$	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,47
„ $k =$	3,32	4,25	5,33	6,60	8,07	9,73	11,6	13,8	15,2	18,9	21,8	23,7.

Bei Grobsanden, Kies und Schotter gilt dieses einfache Gesetz nicht mehr, sondern ein ähnliches Gesetz wie für den Durchfluſs durch enge Röhrchen (S. 294); hierbei nimmt also k mit wachsendem $H : l$ ab.

Nach Versuchen der Königl. Kanal-Kommission in Münster 1892:

Fluſs-Sand, weder gesiebt noch gewaschen, Filteroberfläche = 1 qm,

H bis 5 m, $l_{max} = 1$ m.

Q in l/st $= k_1\,H : l$, worin für

Sand, 0,1 bis 0,8 mm Korn . .	$k_1 = 32$,
Sand, 0,1 „ 0,3 „ „ . .	„ $= 9$,
Sand mit Spuren von Lehm . .	„ $= 3$,
Mergel, feucht eingestampft . .	„ $= 0{,}0035$,
Lehm „ „ . .	„ $= 0{,}0020$.

Gewaschener Filtersand des Wasserwerks in Hamburg:

Q wie oben mit $k_1 = 28$.

Nach Versuchen von Welitschkowsky:

Kies und Sand gesiebt und gewaschen; Filteroberfläche = 20 qcm,

H bis 2,0 m, l bis 1,0 m.

Q in cbm/st, worin für

Mittelkies, 4,0 bis 7,0 mm Korn . .	$k_1 = 126$,
Feinkies, 2,0 „ 4,0 „ „ . .	„ $= 108$,
Grobsand, 1,0 „ 2,0 „ „ . .	„ $= 19$,
Mittelsand, 0,3 „ 1,0 „ „ . .	„ $= 1{,}8$.

Bei übereinanderliegenden Schichten von verschiedenem Korn ist die mit kleinstem Korn für Q maſsgebend, selbst wenn diese Schicht nur wenige cm hoch ist.

Bei Mischungen von verschiedenem Korn wird die gröfste Dichtigkeit erreicht, wenn sich das kleinere Korn in die Zwischenräume des gröfseren einzulegen vermag; dann ist für Q angenähert das kleinere Korn maſsgebend.

Die Durchlässigkeit von Bodenarten wird besonders durch quellende Zwischenschichten, z. B. Lehm, Eisenoxyd, Humus usw.

Digitized by Google

wirkungsvoll vermindert; diese Zwischenschichten erreichen ihre gröfste Wirkung schon bei wenigen mm Stärke; doch ist gewöhnlich in Rücksicht auf Ausspülungen, ungleichmäfsige Bodensenkungen oder Erdgänge von Tieren an Stärke zuzugeben.

Ausgetrockneter Ton quillt im Wasser um etwa das 2,5 fache seines Rauminhaltes auf. Daher ist es bedenklich, Ton zur Hinterfüllung von Futtermauern zu verwenden (Schotter empfehlenswerter); zum Abdichten von durchlässigem Boden ist Lehm wasserarm aufzustampfen und gegen späteres Abschwemmen mit Sandschüttung zu belasten. Die Durchlässigkeit von aufgeschlämmtem Lehm ist etwa 1000 mal gröfser als die von feucht aufgestampftem Lehm.

F. Steighöhe und Sprungweite freier Wasserstrahlen.

Es bedeutet

H die nutzbare Druckhöhe an der Mündung in m (praktisch an einer Stelle vor der Mündung von wesentlich gröfserem Querschnitt zu ermitteln, als ihn die Mündung besitzt),

S die lotrechte Steighöhe des Strahles in m,

W die Sprungweite des geneigten Strahles in m,

d den Durchmesser der Ausflufsmündung in mm.

Infolge des Luftwiderstandes wird die theoretische Steighöhe H nicht erreicht. Das Verhältnis $S : H$ vermindert sich mit der Windstärke und ist vom Winkel zwischen Wind- und Strahlrichtung abhängig. Einem gröfseren d entspricht auch ein gröfseres S und W.

Freemans*) Versuche mit Feuerschlauch-Mundstücken von $d = 19$ bis 35 mm Durchmesser ergeben auszugsweise folgende Werte S und W (letztere bei 32^0 Neigung des Mundstückes):

Steighöhen und Sprungweiten in m		Druckhöhe (dicht vor dem Mundstücke) H in m = 5	10	15	20	30	40	50	60	70	d in mm
S	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	3,7	7,3	11,0	14,4	16,2	21,6	23,6	24,4	25,4	19
		4,0	7,9	11,6	15,2	18,3	24,6	27,7	29,6	32,0	35
	der äufsersten Tropfen bei Windstille	4,3	8,8	13,1	17,7	25,3	31,0	36,0	39,0	41,0	19
		4,6	9,5	14,0	18,3	27,8	36,0	43,0	48,0	50,0	35
W	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	4,3	7,0	9,5	11,0	14,0	15,8	17,7	19,5	20,8	19
		5,5	9,5	13,1	15,8	20,4	23,0	25,0	27,0	28,7	35
	der äufsersten Tropfen bei Windstille	7,8	15,5	23,2	28,6	35,8	42,0	45,0	48,5	51,0	19
		8,8	17,4	26,6	34,2	47,0	55,0	62,0	67,0	72,0	35

Ein gutes Mundstück mufs im engsten Teile sehr glatte Wandung und eine besonders glatte Ausflufskante ohne die kleinste Gratbildung oder allmähliche Erweiterung (Abrundung) besitzen, da sonst ein Versprühen des Strahlumfangs eintritt. Eine Düsenlänge von 0,5 bis 1,0 d, wie bei Abb. 133 S. 276, ist ausreichend. Durch schwache Verjüngung

*) Freeman, Verhandlungen der American Society of Civil Engineers, New York, Nov. 1890; auch Journ. Gasb.-Wasserv. 1890 Nr. 32 bis 34.

Digitized by Google

der Mündung von nur 5° bis höchstens 13° wird der Strahl besser zusammengehalten, als durch genau zylindrische Form oder durch Ausfluss aus scharfkantiger Oeffnung mit Strahleinschnürung.

Die Güte einer Düse wird nach der Strahllänge beurteilt, auf der der Strahl ohne seitlich absprühende Tropfen verbleibt und als blanker Strahl zusammenhält.

Ueber Reibung im kegelförmigen Rohr S. 305, über Reibung in der Zuleitung S. 287 ff.

Zum Feuerlöschen verwendet man besser einen gröfseren Strahlquerschnitt als zwei kleinere, da ersterer eine gröfsere Sprungweite besitzt und ein rascheres Löschen des Feuers durch „Auspeitschen" ermöglicht. Die Anordnung von Abzweigungen an den Standrohren der Hydranten zum gleichzeitigen Anschluss von zwei oder mehr Löschschläuchen ist daher verfehlt.

Die Düsenweite eines Schlauches sollte nie gröfser sein als das 0,25 fache der Schlauchweite, um an Verlust von Sprungweite und Steighöhe angemessen zu sparen.

G. Hydraulischer Druck und Arbeitsvermögen frei ausfliefsender Strahlen.

a. Druck gegen Flächen und Flüssigkeiten, die von einzelnen Strahlen getroffen werden (Aktion).*)

1. Erklärungen und Bezeichnungen.

Gut zusammengehaltene Strahlen aller Flüssigkeiten (auch von Quecksilber) lösen sich auf der vom Strahl getroffenen Fläche, ohne Bildung einer wesentlichen Hohlkehle, radial auseinanderfließend auf, unabhängig von der Neigung des Strahles, vom Auffallwinkel oder von der Entfernung der Ausflufsmündung von der Fläche. (Dabei ist vorausgesetzt, dafs rückfallende Flüssigkeit die Ausbreitung nicht hindert.) Die strahlenförmige Ausbreitung wächst mit der Strahlstärke, der Ausflufsgeschwindigkeit und mit der Glätte der getroffenen Fläche. Nur die vom Strahl abgetrennten Tropfen bewegen sich nach dem Anprall nach dem Reflexionsgesetz.

Das radiale Abfliefsen auf der Fläche beginnt an der Auffallstelle mit scheinbar unverminderter relativer Strahlgeschwindigkeit und vermindert sich nur allmählich unter dem Einfluss von Schwere und Reibung.

(Die Abflufsgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse des getroffenen Körpers, also auch unabhängig von der Stofstheorie fester Körper.)**)

Bei ungehinderter Ausbreitung auf der Fläche wird die Dicke der Flüssigkeitsschicht schliefslich äufserst gering. Gewölbte Flächen vermögen mittels Adhäsion die Strahlausbreitung wesentlich von der Tangentialebene an der Auffallstelle abzulenken; bei Hohlflächen folgt die Ausbreitung der Fläche ganz, soweit es Schwere und Reibung der

*) Neuerdings auch „Verzögerungsdruck" genannt.
**) Bánki, Z. d. V. d. I. 1909 S. 1490.

Digitized by Google

Flüssigkeit zulassen; Flüssigkeiten in Gefäfsen nehmen den hydraulischen Druck hineinspritzender Strahlen wie winkelrecht getroffene Ebenen auf und übertragen ihn auf die Gefäfswand mit einer Mittelkraft, die die Richtung des Strahles annimmt. Es bezeichne

P den hydraulischen Druck eines Flüssigkeitsstrahles in seiner Strahlrichtung gegen eine Fläche in kg,

α den Winkel, um den der Strahl an der Ablaufstelle abgelenkt wird,

N den Normaldruck auf die Fläche in kg (N ist Mittelkraft von P und der zu P senkrechten Seitenkraft),

F den Querschnitt des Strahles in qm,

v die absolute Ausflufsgeschwindigkeit des Strahles in m/sk,

v_1 die relative Abflufsgeschwindigkeit von der Fläche in m/sk,

$h = v^2 : 2g$ die dem v entsprechende Geschwindigkeitshöhe in m,

$\pm c$ die Geschwindigkeitskomponente, mit der sich die getroffene Fläche in der Strahlrichtung fortbewegt, $+c$ bei gleichgerichteter, $-c$ bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung zu der des Strahles in m/sk,

z die absolute Abflufsgeschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit die getroffene Fläche verläfst, in m/sk,

L die vom Strahl auf die Fläche übertragene Leistung (Arbeitsvermögen, Energie) von P; $L = Pc$ in m sk,

ζ die Widerstandszahl für die Reibung der Flüssigkeit an der Fläche, bezogen auf die Geschwindigkeitshöhe $v_1^2 : 2g$.

ϱ die Reibung in kg für 1 qm getroffene Fläche und für $v^2 : 2g = 1$ ($\varrho = \lambda/4$; S. 292).

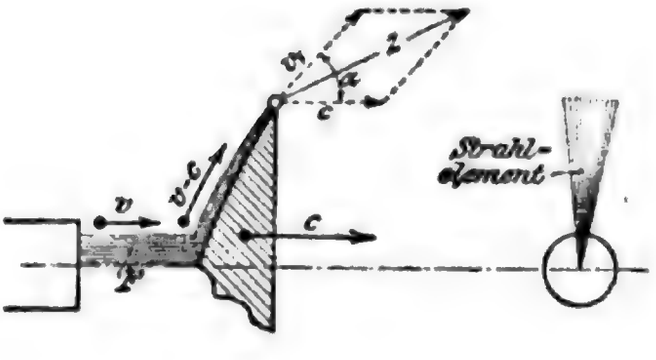
γ das Gewicht eines cbm Flüssigkeit in kg, $g = 9{,}81$ m/sk^2,

Q die Wassermenge, die die Fläche trifft, in cbm/sk; es ist $Q = (v - c)F$, wenn immer dieselbe Fläche vom nachfolgenden Strahl getroffen wird (also die Fläche mit der Mündung fest verbunden ist), dagegen $Q = vF$, wenn (wie bei Wasserrädern) die Ausflufsmündung stillsteht und je eine neue Fläche, d. i. eine unterbrochene Reihe gleicher Flächen, sich dem Strahl entgegenstellt.

2. Allgemeiner Fall, Strahlelement, beliebige Fläche.

Jedes Element des Strahles F bildet ein Strahlsegment. Abb. 153 stelle ein solches dar, und seine Gröfse werde hier ebenfalls mit F bezeichnet. Dann gilt mit Rücksicht auf die Reibung an der getroffenen Fläche

Abb. 153.



$$L = Pc = \frac{Q\gamma}{2g}(v^2 - z^2 - \zeta v_1^2),$$

worin

$$z^2 = v_1^2 + c^2 + 2 v_1 c \cos\alpha.$$

Für die Auffallstelle gilt

$$(v - c)^2 : 2g = (1 + \zeta) v_1^2 : 2g,$$

also ist am Rande der Fläche

$$v_1 = (v - c) : \sqrt{1 + \zeta}.$$

Digitized by Google

Es folgt $L = \frac{Q\gamma}{g}(v-c)\,c\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\zeta}}\right)$,

$$P = L : c = \frac{Q\gamma}{g}(v-c)\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\zeta}}\right).$$

Für $\zeta = 0$ wird $P = \frac{2\,Q\gamma}{g}(v-c)\,\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $N = P : \sin\alpha$.

Bei kreisförmiger Ebene mit dem Halbm. r ist mit der Grundzahl e

$$v_1 = (v-c) : e^{\rho r^3 \pi/\beta}, \quad \text{also } \sqrt{1+\zeta} = e^{\rho r^3 \pi/\beta}.$$

Ist die Scheibe so grofs und v so klein, dafs die Strahlausbreitung den Rand der Fläche nicht erreicht, sondern auf einer Kreislinie der Fläche eine Brandungswelle bildet, so ist $v_1 = 0$, $\zeta = \infty$, der Einfluſs von $\alpha = 0$, L und P so grofs wie für $\alpha = 90^0$.

Die Reibung vermehrt L und P bei positivem α und vermindert sie bei negativem α.

Ohne Berücksichtigung der Reibung wird die Höchstleistung durch den Flüssigkeitsdruck,

wenn $Q = Fv$ (Wasserräder): $L = \max$ für $c = 0{,}5\,v$, also

$$L_{max} = 0{,}5\,Q\,h\,\gamma\,(1-\cos\alpha) = 0{,}5\,Fh\,\gamma v\,(1-\cos\alpha);$$

wenn $Q = F(v-c)$ (Fläche mit Mündung fest verbunden):

$$L = \max \text{ für } c = \frac{v}{3}, \text{ also}$$

$$L_{max} = 0{,}296\,Fh\gamma v\,(1-\cos\alpha).$$

3. Besondere Flächen.

1. Achsial getroffene Umdrehungsfläche.

Für die ganze Fläche gelten dieselben Formeln, wie unter **2.** für das Strahlelement angegeben, wenn unter F der volle Strahlquerschnitt verstanden wird. Die Kräfte ∂P der einzelnen Elemente vereinigen sich zur Mittelkraft P.

a) Winkelrecht getroffene Tellerscheibe (Ebene), $\alpha = 90^0$:

α) Scheibengröfse $\gtrless 9\,F$: $P = \frac{Q\gamma}{g}(v-c)$; $\quad L = \frac{Q\gamma}{g}(v-c)\,c$.

Wenn $Q = Fv$: $P = \frac{F\gamma}{g}(v-c)\,v$; $\quad L_{max} = 0{,}5\,Fh\gamma v$;

wenn $Q = F(v-c)$: $P = \frac{F\gamma}{g}(v-c)^2$; $\quad L_{max} = 0{,}296\,Fh\gamma v$;

wenn $c = 0$, Q beliebig: $P = \frac{F\gamma}{g}v^2 = 2\,Fh\gamma$; $\quad L = 0$.

β) Scheibengröfse $= 2\,F$: Der Strahl wird nur um $\alpha \sim 75^0$ abgelenkt, daher $\cos\alpha \sim 0{,}25$ einzusetzen.

γ) Scheibengröfse $= F$: $\alpha \sim 60^0$, $\cos\alpha \sim 0{,}5$.*)

*) Bei der Mefsröhre von Pitot ist die Mündung nicht als Scheibe von der Gröfse des Strahles anzusehen; der Strahlquerschnitt ist nämlich im allgemeinen viel gröfser, so dafs seitliche Strahlteile die von der Mündung abfliefsenden ebenso beeinflussen wie bei bewegten Körpern im breiten Strom. Für die Pitotröhre gilt daher der Stromwiderstand S. 326 für $\alpha = 150$ bis 180^0.

Digitized by Google

b) Halbkugelige Hohlfläche, $\alpha = 180^0$, $\cos\alpha = -1$:

$$P = \frac{Q\gamma}{g} 2\,(v - c); \qquad L = \frac{Q\gamma}{g} 2\,(v - c)\,c, \text{ wenn } \zeta = 0.$$

Für die bei der Tellerscheibe angegebenen besonderen Fälle werden P und L_{max} für die Hohlfläche doppelt so grofs wie dort. Dieselbe Wirkung wie bei der Hohlfläche wird durch leistenartige Umrahmung einer Tellerscheibe erreicht.

2. Unbegrenzte, schief getroffene Ebene. Trotzdem ein Teil des Strahles die Ebene in spitzem Winkel trifft, findet dennoch eine strahlenförmige Ausbreitung des Strahles nach allen Richtungen hin statt; nur ist die Länge der Strahlen an der Seite des spitzen Winkels geringer.

Weisbach findet mittels gedachter Zerlegung des Strahles in vier Segmente, von denen im Mittel für zwei $\alpha = 90^0$, für das dritte α = kleinster Spitzwinkel α_{min}, für das vierte $\alpha = 180 - \alpha_{min}$ gesetzt werden kann ($\zeta = 0$ gesetzt)

$$P \sim \frac{Q\gamma}{g}(v - c)\frac{2\sin^2\alpha_{min}}{1 + \sin^2\alpha_{min}}; \qquad L = Pc.$$

3. Kanalartig begrenzte Ebene (benetzter Kanalquerschnitt F):

Abflufs nach einer Richtung (Abb. 154):

P, N und L wie unter **1.** S. 318 angegeben.

Abflufs nach zwei entgegengesetzten Richtungen (Abb. 161):

Abb. 154.

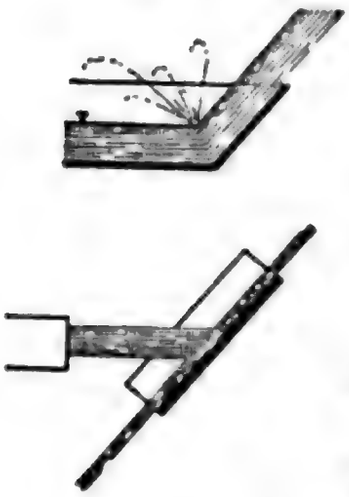
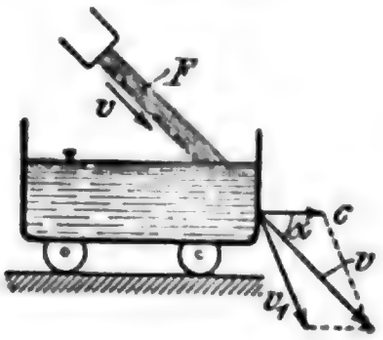


Abb. 155.

Abb. 156.



$$P = \frac{Q\gamma}{g}(v - c)\sin^2\alpha;$$

$$L = Pc \ (\zeta = 0 \text{ gesetzt});$$

$$N = P : \sin\alpha.$$

4. Vom Strahl getroffene Flüssigkeit im Gefäfs.

Die Flüssigkeit befindet sich in einem Gefäfs, das sich durch den Druck des Strahles mit der gleichmäfsigen Geschwindigkeit c fortbewegt (Abb. 156).

Hier gelten nicht mehr die unter **2.** S. 318 angegebenen Beziehungen für das Strahlelement.

$$L = \frac{Q\gamma}{2g}(v^2 - v_1^2 - c^2) = \frac{Q\gamma}{g}c\,(v\cos\alpha - c)$$

$$L = \max \text{ für } c = 0{,}5\,v\cos\alpha,$$

somit $$L_{max} = 0{,}5\,Qh\gamma\cos^2\alpha; \qquad P = \frac{L}{c} = \frac{Q\gamma}{g}(v\cos\alpha - c).$$

Wenn $Q = Fv$ (stillstehende Mündung, ununterbrochene Folge von gefüllten Gefäfsen):

$$P = \frac{F\gamma}{g}v\,(v\cos\alpha - c); \qquad L = Pc; \qquad L_{max} = 0{,}5\,Fh\gamma\,v\cos^2\alpha.$$

Digitized by Google

Ist zugleich $\alpha = 0$ (der Strahl fliefst unter Wasser parallel zu c aus), so wird wie für **3.** 1. *a*) $P = \frac{F\gamma}{g} v\,(v - c)$; $L_{max} = 0{,}5\,Fh\gamma v$; ist aufserdem $c = 0$, so wird $P = 2\,Fh\gamma$; $L = 0$; dies sind dieselben Werte wie bei der tellerförmigen Scheibe für $\alpha = 90^0$.

Hiernach drückt der über oder unter Wasser ausfliefsende, auf Wasser aufschlagende Strahl in seiner Ausflufsrichtung mit derselben Kraft wie auf eine winkelrecht zu ihm stehende Tellerscheibe.

b. Rückdruck gegen das Ausflufsgefäfs (Reaktion).*)

Vor Beginn des Ausflusses wird der Rückdruck durch den Druck auf die verschlossene Ausflufsöffnung im Gleichgewicht gehalten. Während des Ausflusses tritt der Rückdruck als frei gewordene Kraft auf. Die Achse des ausfliefsenden Strahles gibt rückwärts gerichtet Lage und Richtung des Rückdruckes an.

Die Gröfse des Rückdruckes ermittelt sich am einfachsten als Mittelkraft aus seiner wagerechten und seiner lotrechten Komponente.

Abb. 157.

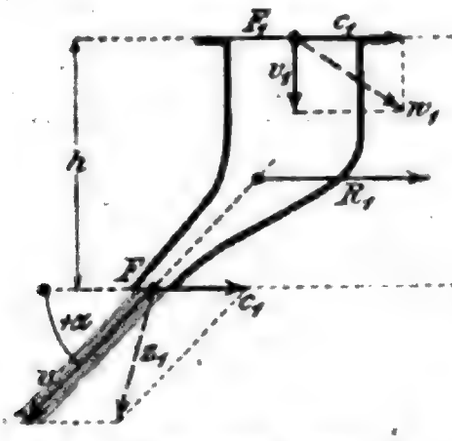
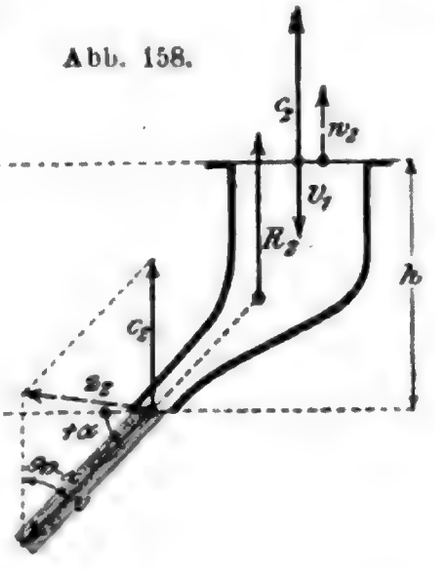


Abb. 158.



Es bedeute (vgl. Abb. 157 u. 158)
R die Gröfse des Rückdruckes in kg,
R_1 dessen wagerechte Komponente,
R_2 dessen lotrechte Komponente,
F den Querschnitt des ausfliefsenden Strahles in qm,
v die relative Ausflufsgeschwindigkeit desselben in m/sk,
α den Winkel des Strahles mit der Wagerechten,
F_1 den Einlaufquerschnitt des Gefäfses in qm,
v_1 die relative Einlaufgeschwindigkeit daselbst in m/sk,
Q die Ausflufsmenge in cbm/sk,
γ das Einheitsgewicht der Flüssigkeit in kg/cbm,
h den lotrechten Abstand der Querschnitte F_1 und F_2 in m,
g die Beschleunigung durch die Schwere (= 9,81 m/sk²),
c_1 bzw. c_2 die Komponenten der zugelassenen rückläufigen Geschwindigkeit des Gefäfses in m/sk,

*) Neuerdings auch „Beschleunigungsrückdruck" genannt.

Digitized by Google

w_1 bzw. w_2 die Komponenten der absoluten Einlaufgeschwindigkeit bei F_1 in m/sk,

z_1 bzw. z_2 die Komponenten der absoluten Auslaufgeschwindigkeit bei F in m/sk,

L_1 bzw. L_2 die von R_1 bzw. R_2 abgegebenen Leistungen in mkg/sk, wobei

Index „1" für wagerechte Rückwärtsbewegung des Gefäfses infolge Wirkung von R_1 (Abb. 157),

Index „2" für lotrechte Aufwärtsbewegung infolge Wirkung von R_2 (Abb. 158) gültig ist.

Für Abb. 157 gilt

$$L_1 = Q\gamma\left(\frac{w_1^2}{2g} + h - \frac{z_1^2}{2g}\right) = Q\gamma\left(\frac{v_1^2 - v^2 + 2c_1 v\cos\alpha}{2g} + h\right);$$

da $w_1^2 = v_1^2 + c_1^2$, $z_1^2 = v^2 + c_1^2 - 2c_1 v\cos\alpha$,

$$Q = Fv, \quad Fv = F_1 v_1, \quad \frac{v^2}{2g} = h + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{h}{1-(F:F_1)^2},$$

so ist

$$L_1 = \frac{Q\gamma}{g} c_1 v\cos\alpha; \qquad R_1 = \frac{L_1}{c_1} = \frac{Q\gamma}{g}\cdot v\cos\alpha = 2F\gamma\cdot\frac{v^2}{2g}\cos\alpha.$$

Für Abb. 158 gilt

$$L_2 = Q\gamma\left(\frac{w_2^2}{2g} + h - \frac{z_2^2}{2g}\right) = Q\gamma\left(\frac{v_1^2 - 2v_1 c_2 - v^2 + 2c_2 v\sin\alpha}{2g} + h\right);$$

da $w_2 = c_2 - v_1$, $z_2^2 = v^2 + c_2^2 - 2c_2 v\sin\alpha$,

$$Q = Fv, \quad Fv = F_1 v_1, \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1-(F:F_1)^2},$$

so ist

$$L_2 = \frac{Q\gamma}{g} c_2 (v\sin\alpha - v_1);$$

$$R_2 = \frac{L_2}{c_2} = \frac{Q\gamma}{g}(v\sin\alpha - v_1) = 2F\gamma\frac{v^2}{2g}\left(\sin\alpha - \frac{F}{F_1}\right).$$

Schliefslich

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 2F\gamma\frac{v^2}{2g}\sqrt{\cos^2\alpha + \left(\sin\alpha - \frac{F}{F_1}\right)^2}.$$

Besondere Fälle:

F klein gegen F_1, also $v^2 : 2g = h$:

$R_1 = 2F\gamma h\cos\alpha$; $\quad R_2 = 2F\gamma h\sin\alpha$; $\quad R = 2F\gamma h$.

$\alpha = +90^0$, Ausfluſs lotrecht abwärts:

$$R_1 = 0; \qquad R_2 = 2F\gamma\frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{F}{F_1}\right); \qquad R = R_2.$$

$\alpha = 0^0$, Ausfluſs wagerecht:

$$R_1 = 2F\gamma\frac{v^2}{2g} = 2Fh\gamma; \qquad R_2 = 0; \qquad R = R_1.$$

Digitized by Google

$\alpha = -90^0$, Ausfluſs lotrecht aufwärts:

$$R_1 = 0; \qquad R_2 = -2 F \gamma \frac{v^2}{2g}\left(1 + \frac{F}{F_1}\right); \qquad R = R_2,$$

und ist zugleich $F = F_1$, so wird R_2 ein Maximum $= -4 F \gamma \frac{v^2}{2g}$.

II. Widerstand von Flüssigkeiten gegen umströmte Flächen und Körper; Stromwiderstand.

Es bezeichnet

f die Projektion der benetzten Flächen des Körpers auf eine Ebene winkelrecht zur Fahrrichtung in qm,

O die gesamte benetzte Fläche des Körpers in qm,

l die Länge dieser Fläche am Wasserspiegel in m,

t die gröfste Tauchtiefe des Körpers in m,

F den Querschnitt des Fahrwassers in qm, winkelrecht zur Fahrrichtung gemessen,

K die Fläche des Fahrwasserbettes in qm, die von der vorn vom Schiff verdrängten und nach dem Hinterschiff rückströmenden Flüssigkeit bestrichen wird,

T die Tiefe des Fahrwassers in m,

n das Verhältnis $F : f$,

v die relative Fahrgeschwindigkeit des Körpers in m/sk gegenüber der Stromgeschwindigkeit des Fahrwassers, letztere so weit vor dem Körper gemessen, als eine Beeinflussung der Stromgeschwindigkeit durch den Körper ausgeschlossen erscheint (Schlepper erzeugen im allgemeinen Stromgeschwindigkeit für das geschleppte Schiff),

v_k eine kritische Geschwindigkeit in m/sk, bei der ein Wellenwiderstand seinen Höchstwert erreicht,

α_1 den Winkel am Vorderteil des Körpers zwischen Fahrrichtung und Vorderfläche (halber Keilwinkel),

α_2 den dem Winkel α_1 entsprechenden Winkel an der Rückenfläche des Körpers,

(α) die Zahl, welche angibt, um wieviel der Verdrängungswiderstand für den spitzen Winkel α_1 bzw. α_2 kleiner ist als für α_1 oder $\alpha_2 = 90^0$,

W den Gesamtwiderstand in kg, den die Flüssigkeit der Bewegung des eingetauchten oder untergetauchten Körpers in der Fahrtrichtung entgegensetzt,

W_1 den Verdrängungswiderstand in kg,

W_2 den Reibungswiderstand an der benetzten Körperfläche in kg,

W_3 den Reibungswiderstand am Bett des Fahrwassers, an dem die vom Körper verdrängte Flüssigkeit rückwärts gleitet, in kg,

W_4 den Wellenwiderstand in kg,

φ_1 die Widerstandszahl der Geschwindigkeitshöhe, die dem Verdrängungswiderstand W_1 entspricht,

ϱ_2 die Reibungszahl der Geschwindigkeitshöhe, die dem Reibungswiderstand W_2 an den benetzten Flächen des Körpers entspricht.

Digitized by Google

ϱ_2 die Reibungszahl der Geschwindigkeitshöhe, die dem Reibungswiderstand W_3 am Bett des Fahrwassers entspricht,
γ und g das Einheitsgewicht der Flüssigkeit in kg/cbm bzw. die Beschleunigung durch die Schwere ($= 9{,}81$ m/sk^2).

1. Gesamtwiderstand.

Der Gesamtwiderstand bei der Bewegung des Körpers ist

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$
$$= \left[(\varphi_1 f + \varrho_2 O) \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \varrho_3 K \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 \right] \frac{\gamma}{2g} v^2 + W_4,$$

worin **für unbegrenztes Fahrwasser**

$$1 : (n-1)^2 \sim 0, \qquad n^2 : (n-1)^2 \sim 1$$

zu setzen ist, oder in anderen Schreibweisen

$$W = kf \left(\frac{nv}{n-1} \right)^2 \text{ oder } = W_{v=1} \cdot v^m,$$

worin k oft irrtümlich als Unveränderliche für alle v vorausgesetzt wird.

2. Einzelwerte in der Gleichung für den Gesamtwiderstand.

Werte φ_1.

a) **Winkel $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$.** Ueber ältere Versuche vgl. Weisbachs Mechanik, über neuere Versuche von Engels u. Gebers, Schiffbau 1908 S. 201, und Matthias, Schiffbau 1912, Hefte 7 bis 10.

Versuche mit Tafeln.

$$\varphi_1 = 1 + \frac{0{,}21}{\sqrt{\frac{nv}{n-1}}}.$$

Der Druckmittelpunkt der Tafeln wandert von 0,33 ihrer Höhe bei $v = 0$ (vgl. Statik S. 262) bis auf 0,55 der Höhe bei $v \gtreqless 2$ m.

Versuche mit parallelepipedischen, scharfkantigen Körpern.

Der von der Vorderfläche (mit $\alpha_1 = 90^0$) abgleitende Strom wird bogenförmig zum Boden und zur Seitenwand (mit $\alpha = 0^0$) abgelenkt und erreicht dieselben erst in einem Abstande von der Stirnfläche $= 2$ bis $3\,b$. Ist die Schiffslänge l mit diesem Abstande gleich, so wird der Druck des Umlaufstromes auf die Hinterfläche ein Höchstwert und die Relativgeschwindigkeit v an der Seitenwand und am Boden so gering, dafs bei dieser Länge φ_1 um etwa 0,27 kleiner ausfällt als bei $l = 0$; erst bei $l = 5\,b$ bis $15\,b$, je nach der Geschwindigkeit, wird — nach den Versuchen von Engels und Gebers (mit ganz untergetauchten Körpern) durch Vermehrung der Reibung an der gröfseren Oberfläche — der Widerstand der Tafel mit $l = 0$ wieder erreicht.

Das Fehlen paralleler Strömung an den Seitenwänden bei kurzen Körpern von $l \lesseqgtr 2^1/_2\,b$ beeinträchtigt die Steuerfähigkeit; geringfügige Abrundung der Kanten verbessert die Steuerfähigkeit.

Digitized by Google

b) **Winkel α_1 und α_2 von 90° verschieden,** Flächen eben und scharfkantig. Vgl. Versuche von Fink mit kleinen Tafeln und scharfkantigen Körpern aus Zinkblech oder Holz bei $v \sim 0{,}3$ bis 1,0 m; Civiling. 1892, 1893, 1894. Reibungswiderstand W_2 ist in Abzug gebracht. Es ist nur das Verhältnis des Widerstandswertes φ_1 bei beliebigem Winkel zu dem bei α_1 bzw. $\alpha_2 = 90°$ ermittelt; letzterer ist im folgenden mit $\varphi_{90°}$ bezeichnet.

1. Untergetauchte rechteckige Tafel, lotrecht und isoliert stehend, Projektion auf die Fahrrichtung $= f$, also Gröfse der Tafel $f : \sin \alpha_1$; $\alpha_1 = \alpha_2$:

$\alpha_1 = 0°$ bis $30°$, $\varphi_1 = 1{,}8 \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$;*) der Strom legt sich auch an die Rückwand in parallelen Schichten zur Tafelfläche an;

$\alpha_1 = 50°$ bis $90°$, $\varphi_1 = \sqrt{\sin \alpha_1}\, \varphi_{90°}$; an der Rückenfläche treten Wirbel auf;

$\alpha_1 = 30°$ bis $50°$, φ_1 zeigt bei Aufzeichnung seiner Werte $\sim$förmige Uebergangslinie zwischen 30° und 50°.

Nach Versuchen von Matthias (Schiffbau 1912), wenn $\varphi_1 = (\alpha)\, \varphi_{90°}$:

	$\alpha =$	15°	30°	45°	60°	75°
Tafeln quadratisch	$(\alpha) =$	0,905	0,955	1,005	1,01	1,010
Tafel 100 mm hoch, 400 mm breit	$(\alpha) =$	0,777	0,858	0,949	1,002	1,010
„ 400 „ „ 100 „ „	$(\alpha) =$	0,703	0,781	0,886	0,976	1,002

2. Untergetauchte Keilfläche, aus nur zwei lotrechten, gleich grofsen und rechteckigen Tafeln bestehend:

$\alpha_1 = 0°$ bis $90°$, $\varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$; zwischen den beiden Rückenflächen verbleibt ein ruhender Wasserkörper;

$\alpha_1 = 150°$ bis $180°$, $\varphi_1 \sim \varphi_{90°}$; der Wasserkörper zwischen den Vorderflächen wirkt wie eine Ebene mit $\alpha_1 = 90°$;

$\alpha_1 = 90°$ bis $150°$, φ_1 zeigt bei Aufzeichnung seiner Werte eine höckerförmige Uebergangslinie mit dem Höchstwert $\sim 1{,}2\, \varphi_{90°}$ bei 120 bis 130°; hierbei wirksamste Ausnutzung der Breite von Wasserschaufeln zu erwarten.

3. Untergetauchter Keilkörper, Boden und Decke wagerecht, Schneide und Rückenebene lotrecht, letztere winkelrecht zur Fahrrichtung: $\alpha_1 = 0°$ bis $90°$, $\varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$.

4. Eingetauchter Keilkörper, mit Parallelepipedon als Hinterkörper, dessen Länge = vierfacher Breite, Keilschneide lotrecht:

$\alpha_1 = 0°$ bis $53°$, $\varphi_1 \sim 0{,}8 \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$

$\alpha_1 = 53°$ „ $90°$, $\varphi_1 \sim \sin^2 \alpha_1 \varphi_{90°}$.

5. Eingetauchter Keilkörper mit schlankem, keilförmigem Hinterkörper mit $\alpha_2 = 6°$, beide Schneiden lotrecht:

$\alpha_1 = 0°$ bis $60°$, $\varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$

$\alpha_1 = 75°$ „ $90°$, $\varphi_1 = \sin^2 \alpha_1 \varphi_{90°}$

$\alpha_1 = 60°$ „ $75°$, φ_1 ergibt bei Aufzeichnung eine wenig geschwungene Uebergangslinie zwischen 60° und 75°.

*) Versuche Eiffels mit in der Luft fallenden Tafeln ergaben $\varphi_1 = 2{,}0 \sin \alpha_1 \varphi_{90°}$.

Digitized by Google

Der schlanke Hinterkörper vergrößert hiernach unerwartet den Verdrängungswiderstand bei $\alpha_1 = 0^0$ bis 60^0 gegenüber dem unter 4. bezeichneten stumpfen Hinterkörper; bei diesem ist somit ein nutzbarer Rückstoß gegen die Rückenfläche anzunehmen.

6. Eingetauchter Keilkörper, Schneide wagerecht über dem Wasserspiegel, mit Parallelepipedon als Hinterkörper:

$$\alpha_1 = 0^0 \text{ bis } 90^0, \quad \varphi_1 = (1 - \cos\alpha)\,\varphi_{90^0};$$

dies ist derselbe Wert wie für den hydraulischen Druck von frei ausfließenden Strahlen. (Vgl. S. 319, $\zeta = 0$ gesetzt.)

7. Eingetauchtes Parallelepipedon als Vorderkörper ($l = 4\,b$) mit keilförmigem Hinterkörper, dessen lotrechte Schneide den Winkel α_2 besitzt: (Der Wert φ_1 schließt den Wert W_2 mit ein.)

$\alpha_2 =$	6^0	12^0	18^0	24^0	30^0	36^0	42^0	54^0	90^0
$\varphi_1 \sim$	0,83	0,83	0,85	0,88	0,92	1,00	1,02	1,04	1,0 φ_{90^0}

Ist auch der Vorderkörper zugeschärft, so ist vorstehendes φ_1 mit dem des Vorderkörpers unter 5. zu vervielfältigen.

8. Eingetauchtes Parallelepipedon als Vorderkörper mit keilförmigem Hinterkörper, dessen wagerechte Schneide über dem Wasserspiegel liegt und den Winkel α_2 besitzt: (Der Wert φ_1 schließt W_2 mit ein.)

$\alpha_2 =$	12^0	18^0	30^0	42^0	54 bis 90^0
$\varphi_1 \sim$	0,84	0,86	0,91	0,98	1,0 φ_{90^0}

Uebliche Winkel bei Fahrzeugen als mittlere Eintritts- und Austrittswinkel sind:

$\alpha_1 \sim 6^0$ bis 9^0 bei Schnelldampfern,
$\sim 9^0$ „ 11^0 „ gewöhnlichen Passagierdampfern,
$\sim 11^0$ „ 15^0 „ Frachtdampfern,
$\sim 12^0$ „ 15^0 „ scharfgebauten Kanalkähnen,
$\alpha_2 \sim 6^0$ „ 15^0, im gleichen Verhältnis wie α_1.

Werte ϱ_2 und ϱ_3.

Nach heutigem Stande der Ermittlungen von ϱ für gefüllte Rohrleitungen und offene Wasserläufe, unter besonderer Berücksichtigung der Formeln von Froude, Weisbach, Bazin, Biel, Lang, läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit als angemessen setzen:

$$\varrho_2 \frac{\gamma}{2g} \text{ bzw. } \varrho_3 \frac{\gamma}{2g} = a_1 + \frac{0{,}013}{\sqrt{\frac{n}{n-1}R}} \text{ bzw. } a_1 + \frac{0{,}013}{\sqrt{\frac{v}{n-1}R}},$$

worin bedeutet

$a_1 = 0{,}115 + a_2/\sqrt{R}$,
a_2 eine von der Rauhigkeit der benetzten Wandung abhängige Zahl,
R den hydraulischen Radius desjenigen Wasserquerschnitts, an dem sich die benetzte Fläche befindet. (R = Durchflußquerschnitt: Gesamtumfang der festen Reibungsflächen dieses Querschnitts, S. 310 ff.) R ist bei begrenztem Fahrwasser verschieden für die Fahrwasserteile neben dem Schiff und für die unter dem Schiffsboden.

Bei Seitenraddampfern vergrößert sich v am Hinterschiff durch den vom Rade ausgehenden Rücklaufstrom.

Digitized by Google

Werte a_2:

Neue glatte, mit Lackfarbe gestrichene Blech- oder Holzwand, noch ohne Schlammansatz . . . . . $\sim 0{,}005$

Mit gewöhnlicher Oelfarbe gestrichene Blechwand ohne vorstehende Nietung, gehobelte und gestrichene Holzwand, beide erst wenige Tage unter Wasser . $\sim 0{,}01$

Benetzte Wand, wie vorstehend, seit längerer Zeit unter Wasser, mit Schlamm- und Algenansatz bedeckt . $\sim 0{,}04$

Rauhe Eisenwand, ungehobelte Bretter, nicht geglätteter Beton . . . . . $\sim 0{,}06$

Neue Kanäle, kanalisierte Flüsse, ohne Wasserpflanzen und ohne Uferbepflanzung, mit Uferbefestigung . . $\sim 0{,}30$

Kanäle und regelmäfsige Flufsläufe mit Sandbett, ohne Wasserpflanzen . . . . . $\sim 0{,}50$

Wasserläufe mit Wasserpflanzen, mit Uferbepflanzung, am Bett grobes Geschiebe . . . . . $\sim 0{,}8$ bis $1{,}0$

(Noch gröfsere Werte ergeben das Donau- und Rheinbett mit Felssprengung am Eisernen Tor bzw. bei Bingen, auch die mit Muscheln bewachsene Aufsenhaut der Ozeanschiffe.)

Werte R.

Für begrenztes Fahrwasser:

Für wagerechten Schiffsboden und für den unter ihm liegenden Teil des Fahrwasserbettes wird $R = 0{,}5\,(T - t)$; für die übrigen benetzten Flächen am Schiff und am Bett des Fahrwassers, wenn noch c in m die Abweichung der Schiffsachse von der Mittelachse des Fahrwassers bedeutet, ist bei rechteckigem Querschnitt des Kanals und des Schiffes $R = \dfrac{F - T(b \pm 2c)}{U + 2t - (b \pm 2c)}$.

Mit zunehmender Geschwindigkeit ändert sich meist die Trimlage des Schiffes derart, dafs das Vorderschiff gehoben wird, das Hinterschiff sich senkt, also sich auch R ändert.

Für unbegrenztes Fahrwasser, $n\,(n-1) = 1$, $W_3 = 0$ (S. 324):

Soll die Verschiedenheit des Fahrwassers keinen erkennbaren Einfluss auf den Widerstand ausüben, so mufs ϱ_2 für alle Tiefen angenähert gleich grofs und der Wert $0{,}013 : \sqrt{vR}$ verschwindend klein gegen a_1 werden; dies geschieht im allgemeinen bei gröfserer Geschwindigkeit, je nach dem Werte a_1, wenn $\sqrt{R} \sim 8$ bis 16 m oder wenn $T - t \sim 120$ bis 500 m (letzterer Wert für das gröfsere a_1 geltend), wobei der Wellenwiderstand W_4 im allgemeinen unberücksichtigt bleiben kann. Bei kleineren Tiefen sind die Angaben für begrenztes Fahrwasser zu berücksichtigen.

Werte n.

Neuere Kanäle für Kähne zeigen bei kleinstem Tiefgang der Schiffe $n \sim 5{,}0$, bei gröfstem Tiefgang $n \sim 3{,}3$. In älteren Kanälen kommt ausnahmsweise $n \sim 2$ vor.

Noch kleinere Werte n finden sich in den Schleusen, an den Schleusentoren, zwischen Brückenpfeilern.

Digitized by Google

Durch Verschiebung der Schiffsachse um c in m aus der Achse des Fahrwassers wird auf der schmäleren Seite die Verhältniszahl n der Halbquerschnitte auf den Wert n_1 verkleinert, entsprechend der Beziehung

$$n_1 = n - \frac{2cT}{f}.$$

Wellenwiderstand W_4.

Der Wellenwiderstand entsteht aus der gegenseitigen Einwirkung (Durchdringung) von zwei Wellen, von denen die eine am Bug bei der Verdrängung des Vorderwassers, die andere durch irgendwelche Erregung des Fahrwassers entsteht.

Die Geschwindigkeit der Bugwelle gegenüber der Stromgeschwindigkeit im Fahrwasser ist gleich der relativen Fahrgeschwindigkeit v.

Die Geschwindigkeit v_k der dem Fahrwasser eigenen Welle — gegenüber der Stromgeschwindigkeit — ist

bei sonst ruhigem, erst durch die Bugwelle bewegtem Fahrwasser: $v_k = \sqrt{gT} = 3{,}12\sqrt{T}$, und

bei bewegtem Fahrwasser, dessen bereits vorhandene Wellen die Länge l_w besitzen: $v_k = \sqrt{g l_w} : 2\pi = 1{,}25\sqrt{l_w}$.

Der Wellenwiderstand W_4 wird am gröfsten, wenn die relative Fahrgeschwindigkeit $v = v_k$ wird, also

bei T in m =	0,3	0.6	1	2	2,5	3	5	10	15	25	40,
wenn v in m ∼	1,7	2,4	3 1	4,4	4,95	5,4	7,0	9,8	12	15	20.

(Geschwindigkeit in Seemeilen/st = 1,944 v in m/sk.)

Die Versuche*) ergeben etwas kleinere Werte von v.

Die Gröfse des Höchstwertes ist noch nicht ausreichend erforscht; sie erhöht in der Formel $W = v^m W_{v=1}$ den Exponenten m etwa bis auf folgende Werte:

Wenn $l : T =$	10	8	6	4	2	1
$m_{max} \sim$	4,0	3,7	3,3	2,9	2,6	2,2.

Die Praxis erstrebt zur Ausschaltung des Wellenwiderstandes bei Probefahrten $T > l$.

Die gegenseitige Einwirkung der beiden oben erwähnten Wellen läfst W_4 negativ werden mit einem gröfsten Einflufs bei $v \sim 1{,}5\, v_k$; sonach kann bei gleicher Geschwindigkeit der Gesamtwiderstand kleiner auf der kleineren Wassertiefe ausfallen, sobald für diese v_k überschritten ist.

Der Einflufs des Wellenwiderstandes bleibt unmerklich, also ist $W_4 \sim 0$ zu setzen, wenn die folgenden relativen Fahrgeschwindigkeiten nicht überschritten werden:

bei T in m =	0,5	1,0	2	3	4	5	7	10	15	20	25	30
v in m ≦	1,0	2,0	3,3	4,3	5,0	6,0	6,5	7,5	8,5	9,2	10,5	12
v in Seem. ≦	1,9	3,9	6,4	8,4	9,7	11,7	12,6	14,6	16,5	17,9	20,4	23,3

Ueber anderweitige Berechnung des Wellenwiderstandes s. Lorenz, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1824.

*) Paulus, Z. d. V. d. I. 1904 S. 1872.

Digitized by Google

Werte des Exponenten m.

Der Gesamtwiderstand W setzt sich ohne Rücksicht auf W_4 nunmehr aus folgenden, nach Potenzen von v geordneten Gliedern zusammen, wenn $\varphi_1 = (\alpha)\, \varphi_{90°}$ gesetzt wird:

Für begrenztes Fahrwasser:

$$W \frac{2g}{\gamma} = \left(\frac{v}{n-1}\right)^2 [n^2 (\alpha) f + n^2 a_1 O + a_1 K] + \left(\frac{v}{n-1}\right)^{3/2} \left[\frac{0{,}013}{\sqrt{R}} (n^{3/2} O + K) + 0{,}21\, n^{3/2} (\alpha) f\right].$$

Für unbegrenztes Fahrwasser:

$$W \frac{2g}{\gamma} = v^2 [(\alpha) f + a_1 O] + 0{,}21\, v^{3/2} (\alpha) f.$$

Hieraus folgt für unbegrenztes Wasser, dafs sich der Widerstand W mit wachsendem v immer mehr proportional v^2, die Widerstandsleistung N (ohne Widerstände des Treibapparates gedacht) sich immer mehr proportional v^3 ändert, — und dafs diese Proportionalität um so schneller erreicht wird, je gröfser $\alpha_1 O$ gegenüber $(\alpha) f$ ist.

Im begrenzten Fahrwasser mit sehr kleinem R und v wird der Einfluſs des Gliedes mit $v^{3/2}$ am gröfsten. Wächst der Exponent m über 2 hinaus, so ist Wellenwiderstand vorauszusetzen.

Dies bestätigen die Versuchsergebnisse.

Die Berechnung von m aus Versuchsergebnissen wird unsicher, wenn nicht auch der Wert $W_{v=1}$ bzw. $N_{v=1}$ durch Versuch ermittelt worden ist. Für diese Berechnung sind mittels Schaulinie für die Ergebnisse zwei benachbarte Versuchswerte auszuwählen, die an gleichmäfsiger Linienführung liegen und voraussichtlich einen sehr wenig verschiedenen Exponenten ergeben werden, so dafs dann für beide Werte gesetzt werden kann

$$\log (W_1 : W_2) = m \log (v_1 : v_2) \quad \text{bzw.}$$
$$\log (N_1 : N_2) = m \log (v_1 : v_2).$$

3. Newtons Aehnlichkeitsgesetz (Modellregel).

Für zwei geometrisch ähnliche Körper mit dem Längenverhältnis α, deren Zeichen je den Index x bzw. y führen, und deren verdrängte Flüssigkeitsräume in cbm mit D_x bzw. D_y bezeichnet werden, gilt, wenn für beide Körper $W_4 = 0$, wenn gleiche γ, φ_1, ϱ_2, ϱ_3 und wenn ähnliche Fahrwasserverhältnisse vorausgesetzt werden können:

$$\frac{W_x}{W_y} = \alpha^3 \left(\frac{v_x}{v_y}\right)^2; \qquad v_x : v_y = \sqrt{\alpha}, \qquad \frac{W_x}{W_y} = \alpha^3 = \left(\frac{l_x}{l_y}\right)^3.$$

Bezeichnen in letztem Falle N_x und N_y die Arbeitsleistungen für beide Körper, so ist noch

$$\frac{N_x}{N_y} \alpha^3 = \frac{v_x}{v_y} = \alpha^{3{,}5} = \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\frac{l_x}{l_y}}.$$

Da aber weder φ_1 noch ϱ_2 und ϱ_3 für alle Geschwindigkeiten und absoluten Gröfsen unveränderlich bleiben, so ergeben obige Beziehungen

Digitized by Google

im allgemeinen nur brauchbare Werte für $\alpha \sim 1$. Engels findet bei Beachtung der Verschiedenheit für ϱ_2, und bei Erhaltung der Aehnlichkeit auch für das Fahrwasser, noch gut übereinstimmende Werte für $\alpha = 16$; vgl. Z. f. B. 1898 S. 655. Auch bei lotrecht zur Stromrichtung stehenden Tafeln findet Engels und Gebers das Gesetz bestätigt, wenn die Aehnlichkeit noch auf die Tauchungsverhältnisse ausgedehnt wird; vgl. Schiffbau 1908 S. 201.

Ueber Flüssigkeitsmessungen s. II. Bd. 2. Abschn. Meſskunde.

C. Mechanik luftförmiger Körper.

I. Allgemeine Eigenschaften.

Alle luftförmigen Körper lassen sich durch Abkühlung bzw. Druckerhöhung verflüssigen. In merklicher Nähe des Taupunktes nennt man sie Dämpfe, in hochüberhitztem Zustande Gase.

Luftförmige Körper sind im Gegensatz zu den tropfbaren Flüssigkeiten stark zusammendrückbar.

Druck- und Dichtigkeitsänderungen sind im allgemeinen mit Temperatur- und Energieänderungen verbunden. Vorgänge, bei denen Energieänderungen von wesentlicher Bedeutung sind, werden unter „Thermodynamik der Gase und Dämpfe" im 3. Abschn. Wärme behandelt.

Dehnungsgesetze.

Es bedeutet:

P = absoluter Druck oder Spannung in kg/qm,

v = Einheitsraum (Rauminhalt der Gewichtseinheit) in cbm/kg,

$\gamma = \frac{1}{v}$ = Einheitsgewicht (Gewicht der Raumeinheit) in kg/cbm.

Der Nullpunkt des absoluten Druckes ist die (im geschlossenen Schenkel eines Quecksilberbarometers vorhandene) vollkommene Leere. (Vergleich der gebräuchlichen Einheiten des Druckes S. 392 u. 393).

Bei gleichbleibender Temperatur ist das Einheitsgewicht eines Gases proportional dem absoluten Druck (Gesetz von Mariotte)

$$P \cdot v = \frac{P}{\gamma} = \text{konst}; \qquad v_2 = v_1 \frac{P_1}{P_2}.$$

Bei gleichbleibendem Druck ist der Einheitsraum eines Gases proportional der absoluten Temperatur (Gesetz von Gay-Lussac).

Bedeutet t die Temperatur nach Celsius, so ist $T = 273 + t$ die absolute Temperatur.

Erwärmt man eine Gasmenge bei gleichbleibendem Druck von 0^0 auf 1^0 C, so dehnt sie sich um $\alpha = {}^1/_{273} = 0{,}00367$ ihres Raumes aus. Bei Erwärmung von t_1 (T_1) auf t_2 (T_2) wächst der Rauminhalt V_1 auf

$$V_2 = V_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = V_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Digitized by Google

Zustandsgleichung für Gase

$$Pv = \frac{P}{\gamma} = RT.$$

Sie faßt die beiden obigen Gesetze zusammen und gilt für beliebige Zustandsänderungen. R heißt die Gaskonstante (Werte S. 396). Berechnung von R für Gasmischungen S. 401. Tafel für feuchte Luft S. 403.

Zur Umrechnung des Einheitsgewichtes eines Gases von einem Zustand $(P_1 T_1 \gamma_1)$ auf einen anderen $(P_2 T_2 \gamma_2)$ hat man nach der Zustandsgleichung

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2}.$$

II. Statik luftförmiger Flüssigkeiten.

1. Luftdruck im offenen Luftraum. Höhenformel.

In Höhe des Meeresspiegels beträgt der Luftdruck (Barometerstand) im Mittel 760 mm Q.-S. = 10 333 kg/qm. Er schwankt nach meteorologischen Einflüssen zwischen etwa 720 und 800 mm Q.-S., also um etwa $\pm$ 5¼ vH.

Höhenformel. Unter Vernachlässigung der praktisch meist nicht bestimmbaren Unterschiede der Luftfeuchtigkeit in den verschiedenen Höhen gilt für mittlere geographische Breite

$$H_2 - H_1 = (18\,400 + 70\,t_m) \log \frac{P_1}{P_2},$$

wenn bedeutet

$H_2 - H_1$ den Höhenunterschied zweier Orte in m,
P_2 und P_1 die entsprechenden Luftdrücke,
t_m die mittlere Temperatur der dazwischen befindlichen Luftsäule.

Lufterwärmung um 1° erhöht demnach den einem beobachteten Druckverhältnis entsprechenden Höhenunterschied um rd. 4 vT.

Höhenunterschiede $H_2 - H_1$ in m, bei $t_m = 0°$.

$\frac{P_1}{P_2}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	—	79	158	236	313	390	466	541	615	689	762
1,1	762	834	906	977	1047	1117	1186	1255	1323	1390	1457
1,2	1457	1524	1590	1654	1718	1782	1846	1910	1973	2035	2097
1,3	2097	2158	2219	2279	2338	2397	2456	2515	2573	2631	2688
1,4	2688	2745	2802	2858	2913	2969	3025	3080	3134	3187	3240
1,5	3240	3293	3346	3398	3450	3502	3553	3604	3655	3705	3755
1,6	3755	3805	3854	3903	3952	4001	4049	4098	4146	4193	4239
1,7	4239	4286	4333	4379	4425	4471	4517	4563	4608	4653	4698
1,8	4698	4742	4786	4829	4872	4916	4959	5002	5045	5088	5130
1,9	5130	5172	5213	5255	5296	5337	5378	5419	5459	5499	5539

Digitized by Google

Die **Luftdrücke in verschiedenen Höhen über dem Meeresspiegel** bei mittlerem Atmosphärenzustande und $t_m = 0^0$ gibt folgende Tafel:

Seehöhe m	Luftdruck mm Q.-S.	Seehöhe m	Luftdruck mm Q.-S.	Seehöhe m	Luftdruck mm Q.-S.
0	760	2000	598	10 000	229
100	751	3000	530	15 000	124
200	742	4000	470	20 000	68
300	733	5000	417	30 000	20
400	724	6000	370	40 000	6
500	716	7000	328	50 000	1
1000	674	8000	291		
1500	635	9000	258		

Größte von Menschen erreichte Höhe 10 800 m (A. Berson und R. Süring, 31. Juli 1901, Ballon „Preußen", 8400 cbm Wasserstoff).

2. In umschlossenen Räumen

kann die Aenderung der Dichtigkeit nach der Höhe vernachlässigt werden.

Wandungsdruck in einem Gasbehälter.

Bedeutet

γ' das Einheitsgewicht des Füllgases,

γ „ „ der umgebenden Luft,

$\pm q$ den inneren $\frac{\text{Ueber-}}{\text{Minder-}}$druck in einer bestimmten Höhe des Behälters in kg/qm,

so wirkt auf ein um $+h$ oder $-h$ höher oder tiefer liegendes Wandungsstück der innere Ueberdruck

$$q_1 = \pm q \pm h(\gamma - \gamma').$$

Bei Ballonen mit unten offenem Füllansatz ist an dessen Unterrand $q = 0$.

3. Auftrieb, Tragkraft und Gleichgewicht von Gasballonen.

a) Der **Auftrieb**, d. i. die gesamte, der Schwere entgegenwirkende Kraft, ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luftmenge; die **Tragkraft** ist gleich dem Auftrieb, vermindert um das Gewicht des Füllgases. Der Rauminhalt fester Teile ist zu vernachlässigen. Bedeutet

V den Gasrauminhalt in cbm,

$a = \gamma - \gamma'$ die Einheitstragkraft des Gases in kg/cbm,

$A = V \cdot a$ die Tragkraft in kg,

G das Gesamtgewicht des Ballones in kg,

$(A - G$ den Tragkraftüberschuß),

$s = \frac{\gamma'}{\gamma}$ die auf Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur bezogene Dichtigkeit des Gases,

$a_0 = \gamma_0 - \gamma_0' = \gamma_0(1 - s)$ den Grundwert der Einheitstragkraft bei dem bestimmten, gleichen Gas- und Luftzustand P_0 und T_0 in kg/cbm,

Digitized by Google

so ergibt sich a für beliebigen Gaszustand (γ', P', T') und Luftzustand (γ, P, T) mit Hülfe der Zustandsgleichung zu

$$a = \gamma\left(1 - s\frac{P'T}{PT'}\right) = a_0\frac{P}{P_0}\frac{T_0}{1-s}\left(\frac{1}{T} - \frac{sP'}{T'P}\right).$$

Es ist bei $P_0 = 760$ mm Q.-S. und $T_0 = 273^0$ ($t_0 = 0^0$) in trockener Luft ($\gamma_0 = 1{,}293$ kg/cbm)

für	γ_0' kg/cbm	s	a_0 kg/cbm
Leuchtgas	0,67 bis 0,45	0,52 bis 0,35	0,62 bis 0,84
Wasserstoff, rein . .	0,0896	0,0692	1,203
dsgl. gew. Reinheit .	0,15	0,12	1,1

Heifse Luft als Traggas gibt eine Tragkraft, die bei 370° dem Leuchtgas, bei rd. 1000° dem Wasserstoff entspricht.

P' ist praktisch immer gleich P anzunehmen, weil die Ballonhüllen nur Pressungsunterschiede von wenigen cm W.-S., also wenigen Tausendsteln des absoluten Druckes zulassen.

T' ist infolge von Sonnenbestrahlung oft erheblich (50 und mehr Grad) höher als T.

b) Gleichgewichtshöhe. Es ist $A = V \cdot a = G$.

Man berechnet die „Normalhöhe" oder „Prallhöhe" H_n unter Annahme von $t' = t = t_0 = 0^0$. Dann ist

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{P_n}{P_0} = \frac{G}{a_0 V}$$

und nach der Höhenformel (mit $H_0 = 0$)

$$H_n = 18\,400 \log\frac{P_0}{P_n} = 18\,400 \log\frac{a_0 V}{G}.$$

Danach ist die Normalhöhe unmittelbar aus der Tafel S. 331 zu entnehmen.

Ist der Gasraum V unveränderlich, so ergibt eine Gewichtsverminderung um g kg einen Zuwachs der Normalhöhe um

$$\Delta H = 18\,400 \log\left(1 - \frac{g}{G}\right)$$

oder angenähert für $g \leqq 0{,}1\,G$

$$\Delta H = 8000\,\frac{g}{G},^*)$$

also in jeder Höhe gleichmäfsig 80 m Steigung auf eine Gewichtsverminderung von 1 vH.

Sind T' und T ungleich und von 0^0 verschieden, so ist angenähert die Gleichgewichtshöhe

$$H = H_n - 29{,}3t + 8000\,\frac{s}{1-s}\,\frac{T'-T}{T'}.$$

*) Dr. K. Emden, Deutsche Zeitschr. f. Luftschiffahrt 1901 S. 81.

Digitized by Google

Eine Aenderung der Lufttemperatur (t, T) ändert also die Steighöhe in gleichem Sinne und stets um rund 30 m auf je 1^0 bzw. die Tragkraft um 3,67 $\sqrt{T}$ auf 1^0. Ein Temperaturüberschufs des Gases ($T' - T$) ändert die Steighöhe (wenn T' zu 300^0 angenommen wird) bei

Leuchtgas (mit $s = 0{,}435$) um 20,5 m auf 1^0,
reinem Wasserstoff . . . „ 2,0 „ „ 1^0,
unreinem „ . . . „ 3,3 „ „ 1^0.

c) Offener Gasballon (gewöhnlicher Freiballon mit offenem Füllansatz).

Es ist $V_{max} = \text{konst.}$ Steigt der prall gefüllte Ballon, so strömt der Ueberschufs des sich ausdehnenden Gases ins Freie, A nimmt proportional dem Luftdruck ab, bis die Gleichgewichtshöhe ($A = G$) erreicht ist. Steigt der schlaffe Ballon ($V < V_{max}$), so wächst V mit abnehmendem Luftdruck, bis er prall ist; so lange bleibt A (von Temperaturunterschieden abgesehen) unverändert. Beim Sinken vermindern sich V und A proportional dem zunehmenden Luftdruck. Gleichgewicht ist also nach unten nicht erreichbar. Geringes Uebersteigen der Gleichgewichtshöhe (z. B. durch Trägheitswirkung) hat also sogleich dauerndes Sinken zur Folge, falls G nicht vermindert wird. Beim Sinken wird der Ballon schlaff, oder es tritt Luft ein, die sich allmählich mit dem Gase mischt, jedoch längere Zeit ziemlich getrennt unten stehen bleibt und bei nachfolgendem Steigen wieder hinausgedrängt werden kann.

d) Geschlossene Ballone. In der Gashülle sind besondere Luftsäcke (Ballonets) abgeteilt, die vor dem Aufstieg mit Luft aufgeblasen werden, sich beim Steigen entleeren und beim Sinken gefüllt werden. Bei nicht starren Luftschiffen geschieht das durch ein Gebläse, das den zum Prallhalten des Ballonkörpers nötigen Ueberdruck erzeugt. Solche Luftschiffe steigen (von dynamischem Auftrieb abgesehen) mit gleichbleibendem Werte A, bis die Luftsäcke entleert sind. Zu weiterem Steigen müfste Gas ausgelassen werden (Sicherheitsventile gegen unzulässigen Ueberdruck). Dann kann aber beim Sinken die Form zuletzt nicht mehr prall gehalten werden.

Erforderlicher Luftsackinhalt für eine verlangte Steighöhe H in m. Es sei

V der ganze Balloninhalt in cbm,
$V' = mV$ der Luftsackinhalt in cbm,
P_0 der Luftdruck am Aufstiegsort,
P der Luftdruck in der verlangten Höhe.

Dann gilt bei gleichbleibender Gas- und Lufttemperatur, da die Gasmenge unverändert bleiben soll:

$$\frac{P_0}{P} = \frac{V}{V - V'} = \frac{1}{1 - m}.$$

Daher nach der Höhenformel, mit $H_0 = 0$

$$H = 18\,400 \log\left(\frac{1}{1-m}\right) = -\,8000 \log \text{nat}\,(1 - m)$$

$$= 8000\left(m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \ldots\right)$$

Digitized by Google

und angenähert (Fehler bis $m = 0{,}3$ kleiner als 3 vH)

$$H = 4000\,(2m + m^2); \qquad m = \sqrt{1 + \frac{H}{4000}} - 1.$$

Für	$H =$	500	1000	1500	2000	2500	3000 m
muſs demnach sein	$m = \frac{V'}{V} =$	0,06	0,12	0,17	0,22	0,27	0,31.

e) **Geschlossene Ballone ohne Luftsack** mit leicht dehnbarer Hülle dienen meteorologisch, um Meſsinstrumente in groſse Höhen zu tragen („Ballon-Sonden"). Bei annähernd vollständigem Druck- und Temperaturausgleich mit der Luft wächst V proportional mit abnehmendem P. Sie steigen daher mit unverändertem Auftrieb immer weiter, bis die Hülle platzt. Erreichte Höhe etwa 30 000 m mit Kautschuk-Ballonen von $V_0 \leqq 4$ cbm.

4. Statische Stabilität von Gasballonen.

Stabiles Gleichgewicht ist nur vorhanden, wenn der Körper-Schwerpunkt senkrecht unter dem Schwerpunkt der verdrängten Luftmasse (bzw. des Gasinhalts) liegt. Der Begriff des Metazentrums im Sinne des Schiffes entfällt, weil keine äuſsere Oberfläche des tragenden Mittels vorkommt.

In der Ballonhülle bildet aber das Gas mit der eingedrungenen oder in (teilweise gefüllten) Luftsäcken enthaltenen Luft eine Art innerer Oberfläche. Die Luft sucht bei Schwankungen die tiefste Lage auf und drängt das Gas nach der höherstehenden Seite, so daſs der Auftrieb dem aufrichtenden Moment der Schwerkraft entgegenwirkt. Bei langen Luftschiffen mit einfachem Luftsack längs des Bodens kann dadurch die Stabilität gefährdet werden.

III. Dynamik luftförmiger Flüssigkeiten.

A. Allgemeines.

Wegen der Zusammendrückbarkeit gasförmiger Flüssigkeiten sind Bewegungen im allgemeinen auch mit Dichtigkeits- und Wärme- bzw. Energieänderungen verknüpft (thermodynamische Vorgänge). Erhebliche Bedeutung haben solche jedoch nur bei Vorgängen, die an geschlossene Räume gebunden sind (Kompression, Expansion, Ausströmung) (S. 405 ff.). Im offenen Luftraum erlangen sie Bedeutung nur bei den thermodynamischen Schwingungen (Schallwellen) und wenn Geschwindigkeiten auftreten, die denen des Schalles nahekommen (333 m/sk für atmosphärische Luft).

Geschwindigkeiten solcher Gröſse kommen beim Fluge von Geschossen*) vor; anderweit mechanisch erzeugte Bewegungen und auch die natürlichen Luftströmungen (Wind) bleiben meist so weit unter dieser Grenze, daſs die thermodynamischen Wirkungen vernachlässigt werden können.**) Die Vorgänge können dann wie solche in tropfbaren Flüssigkeiten behandelt werden.

*) Der Luftwiderstand fliegender Geschosse erreicht bei Ueberschreiten der Schallgeschwindigkeit ein Maximum und nähert sich dann asymptotisch einem Grenzwert. C. Crantz, „Aeuſsere Ballistik", Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. IV.

**) Bei Geschwindigkeiten . . . . . bis 45 100 m/sk
sind die Dichtigkeitsänderungen in atmosphärischer Luft kleiner als 1 5 vH.

Digitized by Google

B. Grundbegriffe und einige Sätze der Strömungslehre (theoretische Hydrodynamik).*)

1. Bewegungen der „vollkommenen Flüssigkeit".

Zur vereinfachten Behandlung wird eine „ideale" oder reibungsfreie Flüssigkeit gedacht, d. h. sie haftet nicht, oder sie hat die Zähigkeit = Null. Der Druck steht deshalb an jeder Stelle immer senkrecht zu jedem beliebig geführten Schnitt; tangential gerichtete Druckkomponenten (Schubspannungen, die bei wirklichen Flüssigkeiten in der Bewegung auftreten) sind ausgeschlossen.

An einem beliebig herausgeschnittenen Elementarteil gehen die Druckkräfte, ebenso wie die äußeren (Massen-) Kräfte (z. B. die Schwerkraft), immer nur durch den Schwerpunkt. Infolgedessen können Drehungen von Flüssigkeitsteilen, also Wirbel, durch solche Kräfte (die sich von einem Potential ableiten lassen) nicht erzeugt oder, wenn sie vorhanden sind, nicht gehemmt werden. Die ideale Flüssigkeit bleibt also immer drehungsfrei, wenn sie es zu Anfang war. Beim Fortfall aller Reibung kann sie ferner keine Arbeit vernichten bzw. in Wärme verwandeln und deshalb einer in ihr vorgehenden Bewegung keinen arbeitverzehrenden Widerstand entgegensetzen. Die leichte Wirbelbildung in wirklichen Flüssigkeiten und ihre Strömungswiderstände sind daher nur eine Folge ihrer Zähigkeit. Durch das gegenseitige Anhaften benachbarter Teilchen werden alle Bewegungen um so stärker gehemmt, je größere Geschwindigkeitsunterschiede zwischen ihnen bestehen. Bei wirbelfreier Strömung sind diese Unterschiede sehr klein; bei Wirbelbewegung dagegen haben benachbarte Teilchen in den Berührungsflächen endliche Geschwindigkeitsunterschiede; daher starke Umsetzung von Arbeitsmengen in Reibungswärme.

2. Kennzeichen drehungsfreier Bewegung.

Ist in einem Flüssigkeitsraum Drehbewegung vorhanden, so sind darin Bewegungsbahnen zu finden, die in sich zurücklaufen oder, bei gleichzeitiger Fortschreitung, doch zykloidisch gewunden sind. Bei solchen Bahnen hat das Linienintegral $\int \mathfrak{w}\, ds$ aus den in der Bahnrichtung genommenen Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{w}$ und den Bahnelementen ds, auch wenn es über eine geschlossene Bahn erstreckt wird, einen von Null verschiedenen Wert, weil die Geschwindigkeit mit der Bahn überall gleichgerichtet ist oder doch eine bestimmte Drehrichtung in ihr überwiegt. Die Bedingung drehungs- oder wirbelfreier Bewegung ist daher

$$\int_o^o \mathfrak{w}\, ds = 0,$$

die über jede beliebige geschlossene Linie erfüllt sein muß.

3. Das Geschwindigkeitspotential.

Bei wirbelfreier Bewegung läßt sich zu jedem Punkte des Raumes eine richtungslose Größe („Geschwindigkeitspotential") angeben, aus

*) vgl. u. a. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV.

Digitized by Google

der die Geschwindigkeitskomponente nach irgend einer Richtung durch Differentiation in dieser Richtung abgeleitet werden kann. Wo Drehungen vorhanden sind, ist das nicht mehr der Fall.

Das Geschwindigkeitspotential Φ ist also definiert durch

$$w_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad w_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

wenn x, y, z die Raumkoordinaten eines Punktes und w_1, w_2, w_3 die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten nach den Achsrichtungen bedeuten.

Wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll, muſs sein

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

(andere Form der obigen Bedingung für drehungsfreie Bewegung).

4. Eigenschaften der Wirbel.*)

Die geometrische Summe der vorstehenden 3 Ausdrücke gibt, wenn sie von Null verschieden sind, das Maſs für die Stärke und Richtung des Wirbels (Wirbelvektor oder „Quirl" = $\mathfrak{W}$), oder der „Zirkulation", wenn der Raum von einer inneren Wand durchteilt ist, um welche die Flüssigkeit kreist (vgl. 8 S. 341). Die Richtung von $\mathfrak{W}$ gibt die Richtung der Wirbelachse bzw. der „Wirbellinien" und „Wirbelfäden" an (Linien bzw. Elementarröhren, die überall senkrecht zu den Schmiegungsebenen der Drehbewegung stehen).

Werden in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel angenommen, so gelten u. a. folgende Sätze (von H. v. Helmholtz aus den Eulerschen Grundgleichungen [S. 264] abgeleitet):

1. Ein Wirbelfaden kann innerhalb der Flüssigkeit nicht aufhören, sondern muſs entweder eine in sich zurückkehrende Kurve bilden (Wirbelring) oder sich bis an die Grenzen fortsetzen.

2. Das Produkt aus Querschnittsgröſse dF eines Wirbelfadens und dem zugehörigen Quirl $\mathfrak{W}$ heiſst die Stärke des Wirbelfadens. $\mathfrak{W}\,dF$ ist über die ganze Länge eines Wirbels unveränderlich und ferner auch der Zeit nach unveränderlich (wie auch die Stärke des ganzen Wirbels).

3. Jeder Wirbelfaden besteht immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen, die ihn zu Anfang gebildet haben. Die Teilchen kreisen nicht einfach um eine Wirbelachse, sondern vollführen eigene gleichläufige Drehungen. Auch der ganze Wirbel besteht immer aus derselben Flüssigkeitsmasse (daher z. B. das Zusammenhalten von Rauchringen.)

5. Kontinuitätsbedingung und Druckgleichung.

Für die vollkommene und nicht zusammendrückbare Flüssigkeit wird die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

*) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I S. 101 u. f.

Digitized by Google

Ist die Strömung drehungsfrei und ferner stationär, d. h. der Zeit nach nicht veränderlich, so folgt durch Integration aus den Eulerschen Grundgleichungen die allgemeine Druckgleichung

$$\frac{\gamma}{2g} \cdot \mathfrak{w}^2 + V + P = \text{konst} = P_0,$$

die für alle Punkte eines zusammenhängenden Flüssigkeitsraumes erfüllt sein muſs. Darin ist $\gamma \frac{\mathfrak{w}^2}{2g}$ die kinetische Energie der Raumeinheit an dem betreffenden Punkte $\left(\frac{\mathfrak{w}^2}{2g}\right.$ heifst die „Geschwindigkeitshöhe"$\left.\right)$; P ist der dort herrschende hydrostatische Druck und V das Potential der äufseren Kräfte oder die potentielle Energie (so daſs die auf die Raumeinheit bezogenen Kraftkomponenten, z. B. nach der x-, y-, z-Richtung, $X = \frac{\partial V}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$ usw.$\left.\right)$. Gewöhnlich kommt als äußere Kraft nur die Schwere in Betracht. Dann ist $V = H \cdot \gamma$ zu setzen, worin H die Höhe über einem Niveau bedeutet, in dem man $V = 0$ setzen will und in dem bei ruhender Flüssigkeit der unveränderliche Druck P_0 herrscht.

Bedeutet noch

h den Höhenunterschied zweier Punkte,

$\mu = \frac{\gamma}{g}$ die Einheitsmasse der Flüssigkeit,

so ist auch

$$\frac{\mu}{2}(\mathfrak{w}_2^2 - \mathfrak{w}_1^2) = P_1 - P_2 + h\gamma$$

(Zeiger 1 für den höher-, 2 für den tiefergelegenen Punkt). Das Glied $h\gamma$ kann bei luftförmigen Flüssigkeiten für technische Vorgänge aber fast immer vernachlässigt werden.

6. Räumliche (dreidimensionale) Strömung.

Nur für besondere Fälle einfacher Körperformen sind Lösungen bekannt.

Beispiel: **Strömung um eine Kugel,** die in unbegrenztem Flüssigkeitsstrome schwebt. Der Radius sei ϱ. An einem beliebigen Punkte im Abstand $\mathfrak{r}$ (nach Gröfse und Richtung) von der Kugelmitte ist

$$\varphi = a \cdot z \cdot \left(\frac{\varrho^3}{2\mathfrak{r}^3} + 1\right) \text{ (Dirichlet)},$$

a = Strömungsgeschwindigkeit in unendlicher Entfernung von der Kugel,

z = Abszissenlänge in der Strömungsrichtung, von der Kugelmitte aus gerechnet.

Die Gleichung erfüllt die Kontinuitätsbedingung und die Grenzbedingungen: $w = a$ für $\mathfrak{r} = \infty$ und $w \perp \mathfrak{r}$ für $\mathfrak{r} = \varrho$. Sie gibt die einzig stabile wirbel- und zirkulationsfreie Strömungsart für die vollkommene Flüssigkeit (Abb. 159). Die Druckgleichung gibt dazu die an beliebigen Punkten herrschenden Drücke. In den Endpunkten des in die Stromrichtung fallenden Kugeldurchmessers, wo sich die Flüssig-

Digitized by Google

keit teilt bzw. wieder vereinigt **(Spaltungspunkte)**, ist der Druck am gröfsten

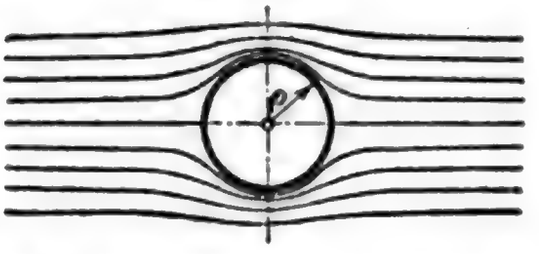
$$P_{max} = P_0 + \mu \frac{a^2}{2} \qquad \text{bei } w = 0.$$

Am Aequator herrscht bei gröfster Geschwindigkeit der kleinste Druck

$$P_{min} = P_0 - \frac{5}{8} \mu a^2 \quad \text{bei} \quad w_{max} = \frac{3}{2} a.$$

Da P nicht negativ werden kann, so mufs $P_0 > \frac{5}{8} \mu a^2$ sein, damit keine Hohlraumbildung („Cavitation") entsteht. Die Drücke sind an entsprechenden Punkten beiderseits der Aequatorebene, also auf Vorder- und Rückseite der Kugel gleich. Ihre Wirkung hebt sich also auf, und der Strömungswiderstand ist Null.

Abb. 159.



Schweben zwei Kugeln in einem quer zur Strömung gerichteten Abstand nebeneinander, so wirkt auf sie, gleichfalls ohne Druck in der Stromrichtung, eine quergerichtete Kraft, die sie zueinander hindrängt. Eine einzelne Kugel nahe einer der Strömung parallelen Begrenzungswand erleidet einen senkrecht zur Wand gerichteten Druck. Ursache ist die erhöhte Strömungsgeschwindigkeit innerhalb der entstandenen Verengung und dementsprechend hier verminderter Druck, dem aufsen bei geringeren Geschwindigkeiten höhere Drücke gegenüberstehen.

An einer freien Oberfläche erzeugen die Druckunterschiede Oberflächenwellen, die Energie verzehren, indem sie sie in das Unendliche zerstreuen. In diesem Falle ergeben sich daher auch in idealer Flüssigkeit einseitig überwiegende Druckkräfte in der Stromrichtung.

Für beliebige achsensymmetrische Körper läfst sich durch Annahme linienförmiger Quellen und Senken (wo dauernd Flüssigkeit hervorgeht oder verschwindet) die wirbelfreie Strömung berechnen.

Allgemein gilt dabei, dafs, auch bei beliebig geformtem Körper, in drehungsfreier Strömung die Drucksumme in der Stromrichtung = 0 ist (wie schon aus der Definition der vollkommenen Flüssigkeit folgt) und dafs in den Spaltungspunkten die Geschwindigkeit = 0 ist, der Ueberdruck also, wie bei der Kugel, der vollen Geschwindigkeitshöhe entspricht. (Bei wirklichen Flüssigkeiten trifft das nur für den vorderen Spaltungspunkt allgemein zu.)

7. Ebene (zweidimensionale) Strömungen

finden statt, wenn Geschwindigkeitskomponenten in der dritten Dimension ausgeschlossen werden. Sie liegen annähernd vor, wenn ein zylindrischer Körper von so grofser Länge, dafs der Einflufs der Endflächen vernachlässigt werden kann, quer in unbegrenzten Flüssigkeitsstrom gestellt wird (oder wenn seine Endflächen bis an parallele Begrenzungswände des Flüssigkeitsstromes reichen). Dann ist die Strömung in allen Querschnittsebenen gleich und ihre analytische Behandlung erheblich vereinfacht.

Digitized by Google

Die Kontinuitätsbedingung verlangt jetzt bei unelastischer Flüssigkeit, dafs in ein von einer geschlossenen Kurve umgrenztes Feld jederzeit die gleiche Flüssigkeitsmenge ein- wie ausströmt oder, was daraus folgt, dafs je zwei beliebig gezogene Verbindungslinien zwischen zwei festen Punkten von der gleichen Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit überströmt werden. Darauf beruht der Begriff der „Stromfunktion".

Die Stromfunktion Ψ eines Punktes A im durchströmten Felde ist die Flüssigkeitsmenge, die bei stationärer, wirbelfreier Strömung in der Zeiteinheit eine beliebige, von A nach dem Koordinatenursprung O gezogene Linie überschreitet. Die Wahl der Linie ist nach obigem gleichgültig. Wird statt O ein anderer Punkt O' zum Ursprung gewählt, so werden alle Ψ doch nur um den festen Betrag Ψ' verändert, der die Stromfunktion von O' in bezug auf O darstellt, also die Flüssigkeitsmenge, die eine von O nach O' gezogene Linie in der Zeiteinheit überschreitet. Ist kein bestimmter Ursprung angegeben, so ist Ψ demnach doch bis auf eine Konstante bestimmt.

Stromlinien sind Linien, welche überall die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit enthalten, für welche also die übertretende Flüssigkeitsmenge Null und Ψ demnach für alle Punkte gleich ist. Stromlinien sind überall senkrecht zu den Linien gleichen Potentials.

Das Stromliniensystem gibt die anschaulichste Abbildung einer Strömung (Abb. 159 ff.). Es wird für gleiche Aenderung von Ψ von jeder Stromlinie zur nächsten gezeichnet. Man kann es auch als ein Bündel von „Stromröhren" auffassen, deren jede von der gleichen Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit durchflossen wird. Der Stromlinienabstand entspricht dem Querschnitt der Stromröhren, ist also umgekehrt proportional der Strömungsgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle. Im ungestörten, wirbelfreien Felde sind die Stromlinien parallele Geraden von gleichem Abstande („homogene Strömung").

Erweiterung des Stromlinienabstandes bedeutet der verminderten Geschwindigkeit entsprechend erhöhten Druck und umgekehrt. An Krümmungen der Stromlinien wirken Zentrifugalkräfte, denen als Zentripetalkräfte Zunahme des Druckes und somit des Stromlinienabstandes in Richtung des Krümmungshalbmessers entgegenstehen mufs. Diese Gesichtspunkte sind bei der Abschätzung von Strömungsvorgängen nützlich.

Rechnungsgang. Man erhält zusammengehörige Ausdrücke für Φ und Ψ, indem man setzt

$$u = \text{Funkt}\,(z) = \Phi + i\Psi,$$

worin u eine beliebige Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ bedeutet, deren reeller Anteil x als Abszisse in Richtung der Strömung und deren imaginärer Teil y als Ordinate senkrecht dazu aufgefafst wird. Dann wird nämlich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

und ferner

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Digitized by Google

Demnach erfüllt sowohl Φ als Ψ die Kontinuitätsbedingung, und man kann für jede beliebige Form der Funktion u zunächst ihren reellen Anteil als das Geschwindigkeitspotential irgend einer Strömung ansehen. Ist $\mathfrak{w}$ nach Gröfse und Richtung die daraus abgeleitete Geschwindigkeit, so wird ferner für jedes beliebige Element $\mathfrak{w}\,dt$ des Flüssigkeitsweges $d\Psi = 0$, also Ψ konstant. Der imaginäre Anteil Ψ von u stellt somit richtig die Stromfunktion derselben Strömung dar. Auch bei Vertauschung von Φ und Ψ, also Vertauschung von Aequipotential- und Stromlinien, ergibt sich hiernach eine kinematisch mögliche Strömung.

Man kann also, von beliebigen Formen der Funktion u ausgehend, die entsprechende Strömung berechnen. Jede Stromlinie kann dann auch durch eine feste Wand ersetzt bzw. ihre Gleichung als Grenzbedingung angesehen werden.

Beispiel. Strömung an einem Kreiszylinder vom Radius ϱ und von unendlicher Länge quer zur Strömung. Die Gleichung

$$u = a\left(z + \frac{\varrho^2}{z}\right)$$

führt auf die einzig mögliche stabile Strömung ohne Wirbel. Sie ergibt mit $r^2 = x^2 + y^2$ (Modul der komplexen Veränderlichen z)

$$\Phi = a\,x\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right); \qquad \Psi = a\,y\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right)$$

und erfüllt die Grenzbedingungen $\mathfrak{w} = a$ für $z = \infty$ und $\mathfrak{w} \perp r$ für $r = \varrho$. Die Geschwindigkeit ist am gröfsten ($\mathfrak{w}_{max} = 2\,a$) an den Endpunkten des Durchmessers quer zur Strömung. Das Strömungsbild ähnelt dem der Kugel (Abb. 159 S. 339).

Hydrodynamisch möglich sind auch unsymmetrische Strömungen mit Komponenten, die einer um den Zylinder kreisenden Bewegung (s. unten) entsprechen. Sie sind nicht stabil, werden aber durch sehr geringe Ungleichförmigkeiten der Bewegung leicht hervorgerufen. (Flackernde Bewegungen um den symmetrischen Strömungszustand.)

8. Zirkulation und dynamischer Auftrieb bei ebenen Strömungen.

In einem Raum, der nicht „einfach zusammenhängend", sondern von einer inneren Wand (oder von mehreren) durchteilt, also „doppelt (mehrfach) zusammenhängend" ist, sind Kreisströmungen um innere Wände herum ohne Wirbel möglich (**„Zirkulation"**), vgl. zu **4**, S. 337. Bei wirbelfreier Bewegung mufs dann die obige Bedingung für alle nicht um eine innere Wand herumlaufenden Bahnen erfüllt sein. (Im Querschnitt des ebenen Feldes erscheinen die inneren Wände als Inseln, die auch zu einfachen Linien zusammengezogen sein können.)

Wird ein durchteilter Raum von einem Flüssigkeitsstrom derart durchflossen, dafs die Strömung angesehen werden kann als eine sich zu der fortschreitenden Bewegung überlagernde Kreisströmung um den inneren Körper herum („Zirkulationsströmung"), so erleidet dieser einen senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichteten Druck nach der Seite hin, wo sich die Geschwindigkeit der Kreisbewegung zu der fortschreitenden addiert. Denn auf dieser Seite herrscht der erhöhten Geschwindigkeit entsprechend niedriger Druck, wie aus der Druck-

Digitized by Google

gleichung folgt; auf der anderen Seite umgekehrt. (Allgemeine Ableitung s. H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, S. 88; deutsch von Friedel, Leipzig 1908.)

Bei unsymmetrischen Körpern mit geeignetem flügelförmigen Querschnitt kann solche Strömung stabil und drehungsfrei sein. Dann würden also (bei unendlicher Länge des Körpers) Druckkräfte entstehen, die keine Widerstandskomponente in der Bewegungsrichtung haben. (Aehnliche Wirkung schon im einfach zusammenhängenden Raume bei den unsymmetrisch umströmten Kugeln.) (Vgl. zu 6, S. 339.)

9. Flügeltheorie; Kuttasche Strömung.

Das Fliegen der Drachen (Flugdrachen, Aeroplane) vollzieht sich vermöge derartiger Zirkulationsströmungen*) bei verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand.

Fliegen heißt, im Gegensatz zum Schwimmen, das Schweben eines Körpers im Luftraum vermöge Auftriebs durch Luftströmungskräfte. Flügel sind zum Fliegen dienende Körperteile, die dynamischen Auftrieb erzeugen.

Dynamischer Auftrieb im allgemeinen entsteht, wenn von dem Körper eine abwärts gerichtete Strömung von Luft- (oder auch anderen) Massen ausgeht, deren Rückdruck den Körper hebt. Ist das eine gleichförmige und gleichgerichtete Abwärtsströmung (Strahlbewegung), so ist der größtmögliche Rückdruck bei gegebenem Arbeitsverbrauch proportional der in der Zeiteinheit beschleunigten Masse und umgekehrt proportional der Strömungsgeschwindigkeit. (Näheres s. unter 10 S. 345.) Derartige Auftriebserzeugung ist also bei nicht sehr niedrigen Reaktionsgeschwindigkeiten unvorteilhaft.

Dem niedergehenden Luftstrom muß an anderen Stellen des kontinuierlich erfüllten Raumes eine Aufwärtsbewegung entsprechen. Bei einfacher Strahlbewegung (Hubschrauben u. dgl.) vollzieht diese sich außerhalb des Bereiches des Flugkörpers; dann wird das Arbeitsvermögen des niedergehenden Luftstromes durch Reibung und Wirbel zerstreut und muß immer ganz von neuem aufgewendet werden.

Die niedergehende Strömung kann aber so geleitet werden, daß die entsprechende Aufwärtsbewegung (wenigstens teilweise) dem geradlinig fortschreitenden Körper entgegenkommt und zur Hebewirkung beiträgt.

Flügel mit leicht nach oben gewölbtem Profil rufen bei gleichförmig fortschreitender Relativbewegung zur Luft einen solchen Strömungsvorgang hervor. Das ideale Strömungsbild (Abb. 161, schematisch) gleicht einer einzelnen Welle, die den Flügel trägt. Die Strömung ist eine Zirkulationsströmung, und nach obigem Satze ist (wenigstens bei unendlicher Spannweite des Flügels, der dann den unbegrenzten

*) Bei der Kreisbewegung sind es nicht die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die den Körper umkreisen, sondern die Hüllkurven der Richtungslinien derjenigen Geschwindigkeitskomponenten, die zu der geraden Fortschreitungsgeschwindigkeit hinzugefügt sind. Die Bahnen der Teilchen sind, wenn man den Körper fortschreitend und die umgebende Flüssigkeit ruhend denkt, kleine geschlossene Bahnen, die den Körper nicht umkreisen. Ihre Bewegung ist ähnlich der in den Wasserwellen stattfindenden.

Digitized by Google

Luftraum zu einem doppelt zusammenhängenden macht) die auf ihn wirkende Kraft senkrecht zur Strömung gerichtet, also der Widerstand in der Bewegungsrichtung Null und keine Arbeitsleistung nötig zum Erhalten der Bewegung („vollkommener Flügel"). Die Einheitsbelastung der Flügelfläche kann dabei eine endliche Größe haben. (Bei Hubschrauben u. dgl. wird dagegen der theoretische Arbeitsbedarf nur bei unendlich kleiner Flächenbelastung gleich Null; s. unten.)

Ebene Flügel, unter einem „Anstellwinkel" (α) schräg gegen die Bewegungsrichtung gestellt, erzeugen unvollkommene Strömungen dieser Art. Das theoretische Strömungsbild (Abb. 160, nach Lamb) zeigt bereits die Aufwärtsbewegung vor der eintretenden Kante. Die Strömung ist so nicht physikalisch möglich, weil die Kanten der

Abb. 160.

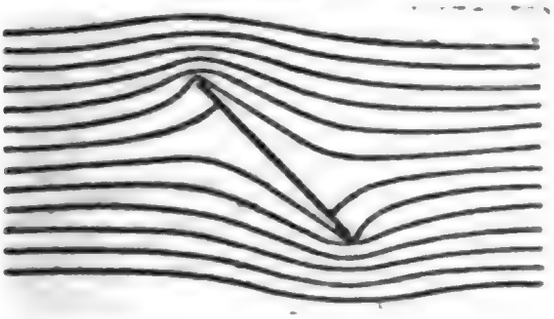
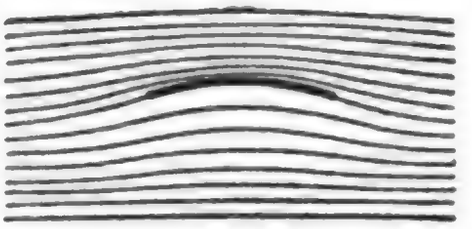


Abb. 161.



Platte von den beiden Zweigen des mittleren Stromfadens, der sich in von den Kanten entfernten Spaltungspunkten teilt bzw. wieder vereinigt, mit unendlicher Geschwindigkeit umflossen werden müfsten. (Negativ unendliche Drücke.) Deshalb setzen an diesen Kanten Wirbel an (vgl. das wirkliche Strömungsbild, Abb. 166 S. 353).

Um die unendlichen Geschwindigkeiten zu vermeiden („stofsfreien Eintritt" zu erzielen), genügt es nicht, die Eintrittstangente der Platte in die Bewegungsrichtung abzubiegen. Erst wenn die Eintrittstangente in bedingtem Mafse abwärts geneigt ist, können die Spaltungspunkte an die Kanten rücken und die Geschwindigkeiten an beiden endlich werden.

Gewölbte Flügel. Den Anstellwinkel α rechnet man zwischen Wölbungssehne und Bewegungsrichtung. Als Wölbungsmafs dient gewöhnlich das Verhältnis der Sehnenlänge zur gröfsten Pfeilhöhe des Bogens.

Bei $\alpha = 0$ entsteht bereits eine beträchtliche Auftriebskraft infolge der Geschwindigkeitsunterschiede unten und oben (Abb. 161).

Zur Berechnung solcher Strömungen hat Kutta (auf Anregungen von Finsterwalder) ein wichtiges Verfahren ausgearbeitet. Aus der allgemeinen Strömung an einem Kreiszylinder (s. oben) leitete er durch das Verfahren der winkeltreuen (konformen) Abbildung die (zweidimensionale) Strömung an zylindrischen, unendlich breiten Schalen ab, deren Querschnitt ein Kreisbogen vom Zentriwinkel 2φ ist, und zwar zunächst (1902) für die Stellung $\alpha = 0$,*) später auch

*) Deutsche Zeitschr. f. Luftschiff. 1902 S. 133.

Digitized by Google

für beliebige α.*) Als Sonderfall mit $r = \infty$, $\alpha = 0$ kommt darin auch die ebene Schrägplatte vor.

In der allgemeinen Lösung erscheint die Zirkulation als eine willkürliche Konstante. Im beliebigen Falle sind die Geschwindigkeiten an beiden Kanten unendlich. Durch passende Wahl der Konstanten werden aber im Falle $\alpha = 0$ die Geschwindigkeiten an beiden Kanten endlich. Bei $\alpha \gtrless 0$ können nur an einer Kante unendliche Geschwindigkeiten vermieden werden. Diese wird wegen vermutlich gröfserer Stabilität der Strömung als Hinterkante gewählt. Vorn mufs sich der Spaltungspunkt von der Kante entfernen ($q_s < q$); die Strömung verläuft nach Abb. 162 (schätzungsweise gezeichnet).

Durch leichte Verdickung und Abrundung der Vorderkante kann man aber unendliche Geschwindigkeiten bzw. negative Drücke trotzdem vermeiden, ohne die Strömung im ganzen wesentlich zu verändern, falls nur die Hinterkante so dünn bleibt, dafs gleichförmiges Abfliefsen möglich. Scharfe Vorderkanten sind dann nicht nur nutzlos, sondern schädlich.

Abb. 162.

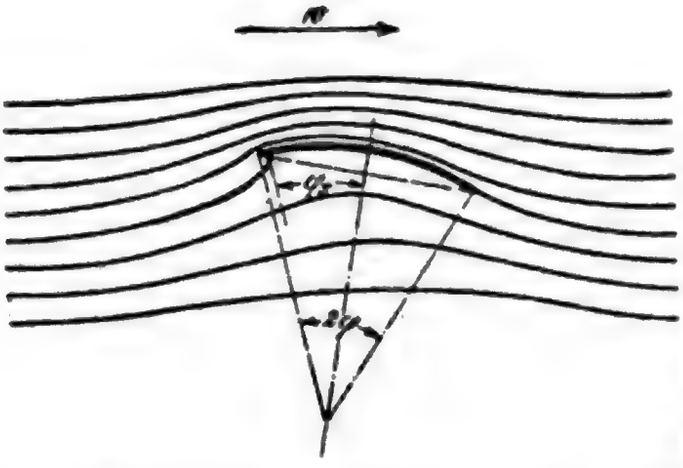


Abb. 163.

Die niedrigen Drücke an der Vorderkante bedingen eine vorteilhafte Saugwirkung (Zugkraft) in Richtung der Eintrittstangente, mit der zusammen der Gesamtdruck auf die Schale senkrecht zur Bewegung steht. Um sie zu erhalten, müssen auch zu hohe Beschleunigungen nahe der Kante vermieden werden. Daraus folgert Kutta das zweckmäfsige Mafs der Verdickung. Sie ist dem Verlauf der Stromlinie in dieser Gegend gemäfs parabelförmig abzurunden (Abb. 163).

Die hydrodynamische Theorie führt also auf Flügelprofile, wie sie die Vögel tatsächlich haben. Wegen Ausschaltung des Einflusses der Seitenränder bzw. Flügelspitzen, wo Widerstand erzeugende Wirbel wahrscheinlich unvermeidlich sind, ist sie noch unvollständig.

Das Zahlenbeispiel einer Kreisbogenschale vom Wölbungsverhältnis 1 : 12 liefert jedoch schon bezüglich der Auftriebskräfte befriedigende und in manchen Punkten ausgezeichnete Uebereinstimmung mit den entsprechenden Versuchen von Lilienthal (s. unten S. 865).

*) W. M. Kutta, „Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung“ u. „Ueber ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen“. Sitzungsbericht d. Bayer. Akad. d. Wiss. München 1910 u. 1911.

Digitized by Google

10. Strahlbewegung.

Bedeutet

F den Strahlquerschitt am Punkte stärkster Einschnürung in qm,

w die (gleichförmig angenommene) Geschwindigkeit in F in m/sk,

$Q = F \cdot w$ das sekundlich strömende Flüssigkeitsvolumen in cbm/sk,

$\mu = \frac{\gamma}{g}$ die Masse eines cbm der Flüssigkeit,

so ist

der Rückdruck des Strahles gegen seine Ursprungsfläche

$$S = \mu Q w = \mu F \cdot w^2 \text{ in kg},$$

die Arbeitsleistung des Strahles (die zu seiner Erzeugung verbraucht und bei drehungsfreier Strömung rückgewinnbar ist)

$$L = \mu Q \frac{w^2}{2} = \mu F \cdot \frac{w^3}{2}.$$

Demnach wird der Strahldruck

$$S = 2 \frac{L}{w}.$$

Bei gleichem Arbeitsverbrauch steht der Rückdruck in umgekehrtem Verhältnis mit der Geschwindigkeit.

α) Ausflufsstrahl.

Bedeutet noch

F_1 den Querschnitt der Ausflufsmündung in qm,

p den hydrostatischen Druckunterschied an der Mündung in kg/qm,

so ist, wenn die Reibung sehr klein ist,

$$w = \sqrt{2 \frac{p}{\mu}}.$$

Ist die Zuflufsgeschwindigkeit an der Wandung des ruhenden Ausflufsgefäfses verschwindend klein, so mufs der Rückdruck S gleich dem hydrostatischen Druck $F_1 \cdot p$ auf die Mündungsfläche im Zustande der Ruhe sein; also

$$S = F_1 p = \mu F w^2 = 2 F p.$$

Daher $F = \frac{F_1}{2}$ oder die Einschnürungszahl (S. 275 u. 304)

$$\alpha = \frac{F}{F_1} = 0{,}5 \text{ („vollständige" Einschnürung).}$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die Mündung gebildet ist durch ein inneres (einspringendes) zylindrisches Ansatzrohr von verschwindend kleiner Wanddicke und solcher Länge, dafs die Zuflufsgeschwindigkeit an der Gefäfswandung verschwindend klein ist (Abb. 132 S. 276, mit $\delta = 0^0$).*)

Ist die Wand des einspringenden Rohransatzes gegen die Richtung von w geneigt ($\delta > 0$) oder dessen Länge nicht ausreichend, so wird die Einschnürung unvollständig und α gröfser. Ist die Wand eine wagerechte Ebene, in der F_1 einen kreisrunden Ausschnitt bildet ($\delta = 90^0$), und das Gefäfs als unendlich weit anzusehen, so ergibt die

*) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, I. Bd. S. 435.

Digitized by Google

hydrodynamische Berechnung der Strömung mit Berücksichtigung des Wirbels in der Mantelfläche des Strahles

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}61 \quad \text{(G. Kirchhoff)},$$

übereinstimmend mit der Beobachtung an Wasserstrahlen.

β) Schraubenstrahl.*)

Ein im flüssigkeitserfüllten Raume umlaufendes Flügelrad mit schraubenartig gestellten Flügeln erzeugt in seiner Drehungsfläche einen Druckunterschied mit wesentlich gleicher Wirkung wie der Druckunterschied an einer Ausflufsöffnung.

Es bedeute, dem obigen entsprechend,

F den Querschnitt des eingeschnürten Strahles in qm,
F_1 die von den Flügeln bestrichene Kreisfläche in qm,
w die Strömungsgeschwindigkeit in F in m/sk,
V die fortschreitende Geschwindigkeit der Schraube in Richtung ihrer Drehachse in m/sk,

} bezogen auf die nicht beeinflufste Flüssigkeit in gröfserer Entfernung,

Q die sekundlich strömende Flüssigkeitsmenge in cbm/sk,
p den in F_1 erzeugten Druckunterschied in kg/qm,
S den wirklich erzielten, S' den theoretisch möglichen Rückdruck des Strahles auf die Schraube (Schraubendruck) in kg,
L die Antriebsleistung an der Schraubenachse in mkg/sk.

Bei einer „idealen" Schraube sei w rein achsial gerichtet, was bei einem gleichachsig gegenläufigen Schraubenpaar theoretisch möglich ist, wenn die beiderseitigen Drehmomente gleich sind. Solches Schraubenpaar werde als eine ideale Schraube betrachtet. Dabei sei ferner w über F unveränderlich.

[Bei einfachen Schrauben ist die Strahlbewegung schraubenförmig gewunden; die tangentialen Komponenten von w_1, die als Reaktion gegen das Drehmoment der Schraube entstehen müssen, sind jedoch selbst bei wenig günstiger Form nicht grofs genug, um beträchtliche Fliehkraftwirkungen und erhebliche Verminderung der Einschnürung („Abschleudern" der Flüssigkeit nach aufsen) hervorzubringen. Die zahlreichen Erfindungen, die die „Fliehkraft ausnutzen" wollen, haben also, wie bei Wasserschrauben längst erwiesen, auch bei Luftschrauben keinen Zweck.]

1. Schraube am Festpunkt; $V = 0$.

Es ist $$Q = F \cdot w$$

und $$S' = \mu\, Q w = \mu F \cdot w^2 = F_1 p,$$

woraus mit $$p = \mu \frac{w^2}{2}$$

die Einschnürung $$F = 0{,}5\, F_1,$$

wie bei dem Ausflufsstrahl mit vollständiger Einschnürung.

*) Nach Ansätzen von S. Finsterwalder und L. Prandtl. Bendemann, Luftschrauben-Untersuchungen. Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiff. 1910 S. 177.

Digitized by Google

Mit $$L = \mu Q \frac{w^2}{2} = \mu F \frac{w^3}{2}$$

wird ferner durch Elimination von w der gröfstmögliche Schraubendruck bei gegebener Gröfse und Antriebsleistung

$$S' = \sqrt[3]{4 \mu F L^2} = \sqrt[3]{2 \mu F_1 L^2}$$

und die theoretische Antriebsleistung für gegebenen Schraubendruck

$$L' = S \sqrt{\frac{S}{2 \mu F_1}} = S \sqrt{\frac{p}{2 \mu}} = S . \frac{w}{2}.$$

Die benötigte Antriebsleistung wächst quadratisch mit dem Einheitsdruck auf die Schraubenkreisfläche.

Bei Schrauben am Festpunkt ist wegen $V = 0$ der Wirkungsgrad (vgl. unten) gleich Null. Zum Vergleich kann das Verhältnis $\zeta = S : S'$ des wirklich erzielten zum theoretisch möglichen Schraubendruck bei gleichem F_1 und L dienen („Gütegrad").

Bei einer Schar geometrisch ähnlicher Schrauben verschiedener Gröfse gilt, wenn u die Umfangsgeschwindigkeit der Flügelspitzen und C eine Konstante bedeutet

$$S = L \frac{C}{u}.$$

Bei gleicher Antriebsleistung ist also der Schraubendruck gleich, wenn sie mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit gedreht werden; er sinkt proportional mit wachsendem u.

C kann für flachgängige Schrauben sehr grofs werden, doch wird $\frac{S}{F_1}$ dann entsprechend kleiner.

2. Treibschraube; $V > 0$.

Da auch der Strahl mit V fortschreitet, ist die sekundliche Flüssigkeitsmenge $$Q = F(V + w).$$

Der Druckunterschied an der Schraube ergibt sich aus dem Zuwachs an lebendiger Kraft

$$p = \frac{\mu}{2} [(V + w)^2 - V^2].$$

Damit ergibt sich für die Einschnürung aus $S = \mu Q w = F_1 p$

$$F = F_1 \frac{2V + w}{2(V + w)}.$$

Die Einschnürung wird um so schwächer, je mehr sich w dem Wert Null nähert, bei dem auch der Schraubendruck aufhört.

Für die ideale Treibschraube ist ferner die theoretische Antriebsleistung

$$L' = S . V + \mu Q \frac{w^2}{2}$$

(= Nutzarbeit + lebendige Kraft des Strahles); mit $S = \mu Q w$ folgt daraus der höchstmögliche Wirkungsgrad

$$\eta' = \frac{SV}{L'} = \frac{2V}{2V + w} = \frac{2}{1 + \sqrt{2\varphi + 1}},$$

wenn zur Abkürzung $\frac{S}{\mu F_1 V^2} = \varphi$ gesetzt wird.

Digitized by Google

Ist $\eta = \frac{SV}{L}$ der wirkliche Wirkungsgrad einer Schraube, so wird der Gütegrad

$$\zeta = \frac{\eta}{\dot{\eta}} = \frac{\eta}{2}\left(1 + \sqrt{2\varphi + 1}\right).$$

Der Schraubendruck nimmt, wenn die Umlaufzahl gleich bleibt, mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit V (annähernd proportional) ab, bis er bei $V = \frac{H \cdot n}{60}$ verschwindet, worin

H die nutzbare Steigung (Ganghöhe) der Schraube in m und
n die minutliche Drehzahl bedeutet.

H ist jedoch nicht einfach gleich der Steigung der Druckseite, auch wenn diese nach einer reinen Schraubenfläche geformt ist, sondern wesentlich auch von der Wölbung der Rückseite (Saugseite) abhängig. Eine zuverlässige allgemeine Berechnungsvorschrift für die günstigste Formgebung ist bisher nicht bekannt.*)

C. Bewegungen der unvollkommenen (wirklichen) Flüssigkeiten.

1. Zähigkeit und innere Reibung (s. S. 260 u. 261).

Zähigkeitsmodul $\eta : \mu$ in cm^2/sk (s. S. 261),
η die Zähigkeitszahl im physikalischen Maßsystem in Dynen . sk/cm^2,
μ die Dichte der Flüssigkeit in Massen-g/cm^3

bei °C	Wasserdampf	Luft	Wasserstoff
	bei $p = 1$ kg/qcm		
0	—	0,137	1,07
10	—	0,146	—
20	0,135	0,161	1,21
30	—	0,165	—
100	—	0,23	1,7
1200	—	2,36	18,8

Für Gase und Dämpfe (s. unter Abschn. Wärme) ist die Zähigkeit bei der absoluten Temperatur T

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{T}{273}}$$

gültig von -180 bis $+1200$ °C

Luft	$\eta_0 = 0{,}000166$	$C = 114$
Kohlensäure . .	0,000137	260

*) Vgl. u. a. H. Lorenz, Theorie u. Ber. d. Schiffspropeller, Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 1906; auch Dr. A. Pröll, ebenda 1910; ferner Eberhardt, Theorie u. Ber. d. Luftschrauben, Berlin 1910, und H. Reissner, Studien z. Ber. usw. der Luftschrauben. Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiff. 1910, 1911, 1912.

Digitized by Google

Sauerstoff . . .	$\eta_0 = 0{,}000180$	$C = 128$
Stickstoff	0,000160	110
Wasserstoff . . .	0,000083	74
Wasserdampf . .	0,000087	—

Der Einfluß der Zähigkeit ist bei der wirklichen Flüssigkeit klein, soweit in einem Strömungsfelde nur stetige Geschwindigkeitsänderungen (geringe Beschleunigungen, unendlich kleine Geschwindigkeitsunterschiede) zwischen benachbarten Stromfäden vorkommen. Daher die Bedeutung der Theorie der vollkommenen Flüssigkeit.

In wirklichen Flüssigkeiten entstehen an Stellen, an welchen der Strömung ein Hindernis entgegentritt, Wirbel, welche aber im Gegensatz zur Theorie der vollkommenen Flüssigkeiten infolge der inneren Reibung der Flüssigkeit nach einiger Zeit wieder verschwinden können.

2. Unstetigkeitsflächen (Diskontinuitätsflächen)

sind Trennungsflächen, in denen ein endlicher **Geschwindigkeitssprung** auftritt, z. B. die Mantelflächen von Flüssigkeitsstrahlen im erfüllten Raume und die Oberflächen von Körpern, an denen die Flüssigkeit entlangströmt. Durch beiderseitiges Haften werden in solchen Flächen Teilchen in Drehung versetzt, also kleine Wirbel erzeugt. Nach Helmholtz' Theorie der Diskontinuitätsflächen*) kann die Wirkung in manchen Fällen berechnet werden.

An ruhenden Körperoberflächen nähert sich die unmittelbar angrenzende Flüssigkeitsschicht der Geschwindigkeit Null, da sie an der Fläche haftet und endlicher Geschwindigkeit unverhältnismäfsig grofsen Widerstand entgegensetzt. Die folgenden Schichten unterliegen meist einer unstetigen, wirbelnden Geschwindigkeitszunahme. Bei sehr geringer Geschwindigkeit in ausgefüllten engen Leitungen ist die Zunahme stetig und die Strömung theoretisch berechenbar.

3. Strömung in Flüssigkeitsleitungen.

a) Wirbelfreie Strömung (Parallelströmung) in engen, kreisrunden, sehr glatten Röhren:

Für den Druckhöhenverlust h (in cm Flüssigkeitssäule) oder den Leitungswiderstand p (in Dynen/qcm) in einem geraden Stück gilt das von Hagenbach abgeleitete, von Poiseuille vorher durch Versuche gefundene Gesetz

$$981\,h \cdot \mu = p = 8\,\eta \frac{l \cdot w}{r^2},$$

worin

r der gleichbleibende Rohrhalbmesser in cm,
l die Länge des Leitungsstückes in cm,
w die mittlere Durchflufsgeschwindigkeit in cm/sk.

Bedeutet ferner

w_x die Geschwindigkeit auf einem beliebigen Halbmesser x $(< r)$,

*) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I S. 146.

Digitized by Google

so gilt für die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt

$$w_x = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{l \cdot \eta} (r^2 - x^2).$$

Die Geschwindigkeit in der Rohrachse ($x = 0$) ist demnach doppelt so grofs als die mittlere Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt. Unmittelbar an der Wandung ist $w = 0$. Die Geschwindigkeitsverteilung wird dargestellt durch ein Umdrehungsparaboloid, dessen Scheitel auf der Achse liegt.

b) Grenzgeschwindigkeiten. Bei gröfserer Geschwindigkeit wird die parallele Strömung labil, daher praktisch unmöglich. Es tritt eine wirbelnde („turbulente") Strömung ein, die theoretisch nicht näher bekannt ist. (Der aus einem Schornstein quellende Rauch gibt eine Vorstellung.) Die Geschwindigkeitsabnahme ist von der Achse aus zunächst viel geringer als nach der Parabel. Erst nahe der Wandung sinkt w rasch bis auf Null. Der Leitungswiderstand ist nicht mehr der ersten, sondern wird mit wachsender mittlerer Geschwindigkeit allmählich der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Technisch ist fast nur dieser Fall von Bedeutung.

Untere Grenzgeschwindigkeit w_{g1} heifst diejenige, bis zu welcher das obige lineare Widerstandsgesetz, obere Grenzgeschwindigkeit w_{g2} diejenige, von welcher ab das quadratische Gesetz gilt. Nach Versuchen ist allgemein für alle Flüssigkeiten und Gase:

$$w_{g2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{\eta}{\mu}.$$

λ hängt von der Rauhigkeit der Rohrwand ab (Dimension: $l_1 - 1/2$). Einige Werte von w_{g2} zeigt folgende Tafel:

Obere Grenzgeschwindigkeit w_{g2} in m/sk

für Wasser und Luft bei 20° in glattem Glas- oder Blechrohr ohne Fugen.

	$\frac{\eta}{\mu}$	Rohrdurchmesser in mm				
		25	50	100	250	500
Wasser	0,0101	0,72	0,51	0,36	0,23	0,16
Luft von $p = 0{,}2$ kg/qcm	0,805	57	40	29	18	13
1,0 „	0,161	11,4	8,1	5,7	3,6	2,5
10,0 „	0,0161	1,1	0,8	0,6	0,4	0,25

w_{g1} ist 50- bis 100fach kleiner als w_{g2}.

c) Wirbelnde Strömung in Leitungen im praktisch wichtigeren Bereich oberhalb w_{g2} (cm/sk).

Man setzt den Leitungswiderstand p (Dynen/qcm)

$$p = k \cdot \mu \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2},$$

Digitized by Google

worin bedeutet

l = Länge des Rohres in cm,
d = Durchmesser des Rohres in cm,
w = mittlere Geschwindigkeit im Rohre in cm/sk,
k = Koëffizient, welcher eine Funktion von $\frac{w \cdot d}{\eta/\mu}$ ist und

welcher für einen bestimmten Versuchskörper experimentell bestimmt werden mufs.

Nach Blasius*) kann für **glatte** Rohre (gezogene Messing-, Kupfer-, Blei- und Glasrohre) gesetzt werden

$$k = 0{,}3164 \sqrt{\frac{\eta/\mu}{w \cdot d}}$$

4. Offene Strömung an eingetauchten Körpern (Strömungswiderstand).

a. Reibungs- oder Oberflächenwiderstand W_r.

Unter Bedingungen, die noch nicht näher bekannt sind, bleiben die an der Oberfläche entstehenden Wirbel auf eine dünne „Grenzschicht" beschränkt. In dieser wirken tangentiale Reibungskräfte auf die Fläche. Bei umströmten Körpern bildet die in Richtung der Strömung genommene Summe der tangentialen Kräfte den „Oberflächen-" oder „Reibungswiderstand". Seine Gröfse ist nach Prandtl zu setzen

$$W_r = k \,.\, b \,.\, l^n \,.\, w^{n+1},$$

worin

b die Breite der bestrichenen Fläche,
l deren Länge in der Strömungsrichtung,
w die Strömungsgeschwindigkeit,
k eine von der Zähigkeit der Flüssigkeit und vom Rauhigkeitsgrad der Fläche abhängige Zahl,
n ein Exponent, der auch von der Rauhigkeit und von der etwa schon vorhandenen Unruhe in der Strömung abhängt.

n ist für die vollkommen glatte (theoretische) Fläche = 0,5, für sehr rauhe Flächen bis zu 1, für praktisch glatte Flächen etwa = 0,8 bis 0,85.

Nach Versuchen von Froude mit einer sehr ebenen, gefirnifsten Holztafel, 15,2 m lang, 0,5 m breit, 5 mm dick, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten (w in m/sk) durch ruhendes Wasser geschleppt wurde, ist W_r, bezogen auf 1 qm einseitiger Oberfläche

$$W_r = 0{,}115\, w^2 + 0{,}04\, w \cong 0{,}158\, w^{1{,}83}.$$

Versuche von Frank u. a mit Luft S. 371.

b. Formwiderstand W_f.

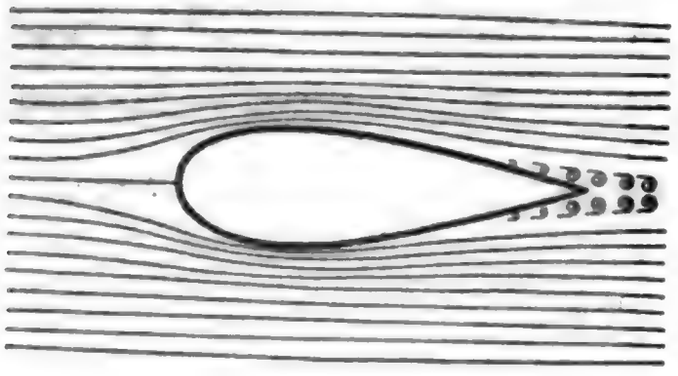
Meist pflanzen sich die Wirbel aus der Grenzschicht weithin mit der Strömung fort und machen diese „unruhig" (turbulent). Dann

*) Mitt. Forschungsarb. d. V. d. I., Nr. 131.

Digitized by Google

folgen die Stromlinien nicht mehr der Oberfläche, sondern lösen sich ab und umfassen eine „Wirbelschleppe", die ihren Zusammenschluſs nach dem hinteren „Spaltungspunkt" hindert (Abb. 164). Hier bestehen erhöhte Geschwindigkeiten, also niedere Drücke; der Druckausgleich, wie bei der drehungsfreien Strömung, kommt nicht zustande; die Ueberdrücke vorn überwiegen. Der entsprechende, wesentlich von der Körperform abhängige „Formwiderstand" ist die in Richtung der Strömung genommene Summe der senkrecht zur Oberfläche wirkenden Druckkräfte. Er ist nach Erfahrungen immer proportional der Einheitsmasse $\left(\mu = \frac{\gamma}{g}\right)$ der Flüssigkeit, dem Flächenmaſs (F) des Körpers und dem Quadrat der (relativen) Strömungsgeschwindigkeit. Man setzt z. B.

Abb. 164.



$$W_f = \psi \mu F w^2 \text{ usw. (S. 361, 364).}$$

Ablösung tritt nicht ein, soweit sich die Flüssigkeit längs der Oberfläche beschleunigt, der Druck also abnimmt, wie an der Spitze bzw. vorderen Abrundung umströmter Körper. Hinter dem Punkt gröſster Geschwindigkeit (die aber im allgemeinen nicht erst, wie bei der Kugel, mit dem gröſsten Körperquerschnitt erreicht wird) tritt Ablösung um so leichter ein, je stärker sich bei drehungsfreier Strömung die Flüssigkeit längs der Fläche unter Druckzunahme verzögern müſste.

Bei Körpern geringsten Formwiderstandes wird die Ablösung durch sehr schlanke und glatte Verjüngung bis zu scharfer hinterer Schneide oder Spitze ganz oder doch nahezu verhindert (Fischform, Form des fallenden Tropfens).

Seitliche Kanten am Körper, besonders hinter dem gröſsten Querschnitt, begünstigen die Ablösung. Bei stumpfer oder quer abgeschnittener Hinterform bildet die Schleppe groſse Wirbelringe. Innen flieſst die Flüssigkeit mit erhöhter Geschwindigkeit der Strömung entgegen („Vorstrom" oder „Sog" bei Schiffen), prallt auf die Rückenfläche und erzeugt durch erneute Ablenkung eine sekundäre Stauung, wodurch ein Teil der im Wirbel aufgenommenen Energie wieder abgegeben wird. Die an Kanten einer Fläche entstehenden Wirbel lösen sich in bestimmten Zeiträumen ab. An Photographien von Strömungsvorgängen wurde gezeigt, daſs diese sich folgenden Wirbel ein der Höhe des Hindernisses entsprechend hohes Band bilden, das sich zwischen die Stromfäden der nicht gestörten Flüssigkeit legt.

Nach v. Kármán ist für ein solches Wirbelband dann ein stabiler Zustand vorhanden, wenn es aus zwei Wirbelreihen besteht, deren Einzelwirbel mit ihrem gegenseitigen Abstand und ihrer Teilung in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen*)

*) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse 1911.

Digitized by Google

Die Gestalt der Wirbel, die sich hinter einem Hindernis bilden, hat größte Bedeutung für den Widerstand desselben.

Beispiel: Strömung an einer quergestellten Kreisplatte, Abb. 165 (schematisch nach photographischen Aufnahmen von Ahlborn).*) Der mittlere Wirbelfaden ist ein Kreis.

In den schraffierten Stauungsgebieten ist die Geschwindigkeit nicht Null, wie nach der verbreiteten v. Lößlschen Annahme („Staukegel"), sondern nur so klein, daß man sie vernachlässigen will.

Abb. 165.

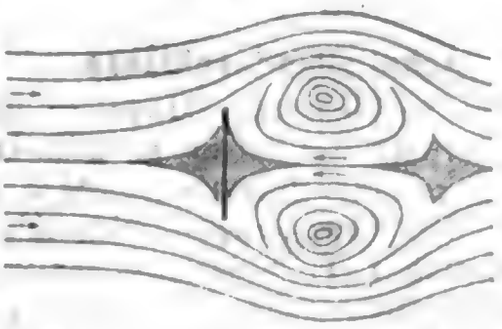
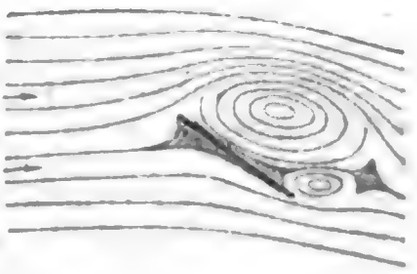


Abb. 166.



Bei einer quergestellten Rechteckplatte ist der Wirbelring räumlich verbogen.

Wird eine Rechteckplatte schräg unter dem Winkel α gegen die Stromrichtung gestellt (Abb. 166), so wächst der Querschnitt des Wirbelringes am vorausgehenden (oberen) Rande und wird unten dünner. Bei einem kritischen Anstellwinkel α_k (etwa 30 bis 40°) bricht er unten auf und verläuft seitlich in „Wirbelzöpfen", die von den Rändern aus („pflügende Bewegung") mit der Strömung fortziehen. Der Formwiderstand vermindert sich deshalb nicht stetig von $\alpha = 90^0$ bis $\alpha = 0^0$, sondern folgt unter- und oberhalb α_k verschiedenen Gesetzen. Nahe α_k sind verschiedene Bewegungsformen und Widerstandswerte im Beharrungszustand möglich, je nachdem der Zustand, von größerem oder kleinerem α herkommend, eingestellt wurde. Nach Versuchen von Dines, Eiffel, Prandtl u. a. ist in der Nähe von α_k der Widerstand senkrecht zur Platte erheblich größer als bei $\alpha = 90^0$ (vgl. Abb. 168 S. 365). Ursache: Fortfall der sekundären Stauung im Rücken nach dem Aufbrechen des Wirbelringes.

Die älteren Widerstandsformeln für schräge Platten, die ein stetiges Gesetz voraussetzten, sind sämtlich unhaltbar bzw. nur für ein begrenztes Gebiet annähernd brauchbar (s. unten). Auch die Kuttaschen Strömungsberechnungen an Zylinderschalen (S. 343 f.) werden wesentlich unzutreffend, sobald sich größere Wirbel ablösen.

c. Der Strömungswiderstand im ganzen

hängt somit durchaus von der Gesamtform des umströmten Körpers ab, und besonders von der Form der Rückseite. Er kann nicht aus den Widerständen seiner Oberflächenteile zusammengesetzt werden.**)

Auch benachbarte Körper können die Strömung und den Widerstand erheblich beeinflussen.

---

*) F. Ahlborn, Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. Hamburg 1902.

**) Die noch manchmal angewandte Berechnung auf Grund der Newtonschen Theorie durch Summierung der Widerstände der einzelnen Flächenelemente auf der angeströmten Seite ist, da sie die Kontinuität der Raumerfüllung außer acht ließ, unhaltbar geworden und durch viele Versuche widerlegt. Auch das Newtonsche Elementargesetz für den Widerstand schräg angeströmter Flächen (Proportionalität mit dem $\sin^2$ des Angriffswinkels) ist ungültig.

Digitized by Google

Der Formwiderstand überwiegt meist so erheblich, daſs die Oberflächenreibung in der Summe nur einen verschwindenden Beitrag liefert. Nur bei „Körpern geringsten Widerstandes" (Schiffskörper u. dgl.) wird der Reibungswiderstand von erheblicher Bedeutung.

Bei Wasserschiffen kommt noch ein von den Oberflächenwellen herrührender Widerstand hinzu (S. 328).

d. Aehnlichkeitsschlüsse.

Um aus Versuchen an verkleinerten Modellen usw. auf die Kraftwirkungen an groſsen Körpern schlieſsen zu können, muſs nicht nur die geometrische Aehnlichkeit der Körper, sondern auch die mechanische Aehnlichkeit der Bewegungen hinreichend gewahrt sein. Das ergibt verschiedene, sich z. T. widersprechende Bedingungen.

Bedeutet λ das Verhältnis entsprechender Längen l_1 und l_2 zweier geometrisch ähnlicher Körper, τ das Verhältnis der Zeiten entsprechender Bewegungen, so stehen die Beschleunigungen im Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau^2}$. Spielt die Beschleunigung der Schwere eine Rolle, wie bei Schiffsmodellversuchen wegen der Oberflächenwellen, so müssen, da diese Beschleunigung immer gleich ist, zu mechanischer Aehnlichkeit alle Beschleunigungen entsprechend gleich, ihr Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau^2}$ also $= 1$ genommen werden, oder $\tau = \sqrt{\lambda}$; hierzu müssen die Geschwindigkeiten (w_1 und w_2), da ihr Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$ werden muſs, so gewählt werden, daſs $w_1 : w_2 = \sqrt{l_1 : l_2}$. Ist ferner

$\varkappa$ das Verhältnis entsprechender Kräfte,

μ das Verhältnis entsprechender Massen,

so ist bei gleichen Beschleunigungen $\varkappa = \mu$ und ferner, wenn beide Versuche mit gleicher Flüssigkeit gemacht werden, $\mu = \lambda^3$, da sich die Massen dann wie die Räume verhalten. Für Versuche über den Fahrwiderstand von Schiffen sind diese Gesichtspunkte ausreichend (Modellregel von Froude).

Bei Luftwiderstandsmessungen an ruhend aufgehängten Modellen im rings umgebenden Luftstrom ist die Schwere ausgeschaltet. Obige Regel braucht also nicht beachtet zu werden; die Kräfte verhalten sich wie die Flächen; $\varkappa = \lambda^2$. Das bedeutet, daſs Reibungs- und Beschleunigungsdrücke einander proportional sein müssen, oder daſs $\frac{w \cdot l \cdot \mu}{\eta}$ konstant, also bei gegebenem Zähigkeitsmodul $\frac{\eta}{\mu}$ (vgl. S. 348) $w_1 : w_2 = l_2 : l_1$ oder $\tau = \lambda^2$ sein muſs (Modellregel von Reynolds). Hiernach ist es möglich, Widerstandsmessungen, welche z. B. in Wasser vorgenommen wurden, auf die Verhältnisse in einer anderen Flüssigkeit, z. B. Luft, zu übertragen.*)

Bei Versuchen mit fliegenden Modellen sind auſser der Schwere noch die Flächendrücke bzw. die Gewichte auf die Flächeneinheit von Wichtigkeit. Es müſste gewählt werden $\tau = \sqrt{\lambda}$ und $\mu = \varkappa = \lambda^3$,

*) Vgl. Blasius, Mitt. Forschungsarb. d. V. d. I., Nr. 131.

Digitized by Google

was nur ausführbar wäre, wenn man, bei ungeändertem η, die Einheitsgewichte der Baustoffe (γ_1 und γ_2) beider Körper und auch die Dichten der beteiligten Flüssigkeiten im umgekehrten Verhältnis der Längen wählen könnte. Da das praktisch nicht zu verwirklichen, kann man von dem dynamischen Verhalten fliegender Modelle (Stabilität) nicht unmittelbar auf gleiches Verhalten großer Körper schliefsen.

e. Vertauschbarkeit der Bewegungen.

Man kann, weil gleiche Relativbewegungen stets gleiche Kräfte erzeugen, bei Bewegung eines Körpers durch ruhende Flüssigkeit stets auch den Körper fest und die Flüssigkeit umgekehrt bewegt denken, was oft die Vorstellung erleichtert (Stromlinienbild). Beim praktischen Vergleich einer solchen Umkehrung (durch ruhendes Wasser geschleppte und in gleich schnellem Strom verankerte Schiffe) haben sich oft scheinbare Widersprüche daraus ergeben, dafs der Flüssigkeitsstrom nicht homogen, sondern durchwirbelt war. Dadurch kann der Strömungswiderstand stark vergröfsert werden, weil er dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist und das mittlere Quadrat ungleicher Geschwindigkeiten gröfser ist als das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit.

D. Erfahrungsangaben über Luftbewegungen und Luftwiderstand.

1. Der Wind.

Der Wind, wie auch die natürlichen Wasserströmungen, ist nicht als homogene Strömung anzusehen, sondern er ist immer von Wirbeln durchsetzt, besonders an der Erdoberfläche. Periodische Schwellungen und unregelmäfsige Windstöfse, Böen, bilden die **Unruhe des Windes.** Nicht nur die Stärke, sondern auch Höhen- und Seitenrichtung der Bewegung ist erheblich wechselnd.

Nach O. Lilienthals sorgfältigen Versuchen auf sehr verschiedenartigem Gelände wirken die Windwellen auf Windfahnen mit wagerechter Drehachse in Höhen bis 10 m über dem Erdboden immer so, als wenn die Strömung im Mittel um 3,5° aufwärts gerichtet wäre. Daraus ist, da die Kontinuitätsbedingung gewahrt bleiben mufs, auf einen unsymmetrischen Schwingungsvorgang zu schliefsen. Das erklärt auch die von O. Lilienthal gefundene, mehrfach bestätigte Tatsache, dafs Drachenflügel u. dgl. im Winde einen erheblich (bis 50 vH) gröfseren Auftrieb erfahren, als wenn sie mit gleicher Geschwindigkeit durch ruhende Luft bewegt werden.

Die **Geschwindigkeit des Windes** nimmt vom Erdboden aus rasch und unregelmäfsig nach oben zu, Messungen sind daher sehr von der Aufstellung des Instrumentes beeinflufst und meist nur von relativem Wert. Man begnügt sich deshalb oft mit Schätzungen nach gewissen Anzeichen.*)

Winde von mehr als 20 m/sk sind selten. Vereinzelt werden aber im Inlande bis 40 m/sk nahe dem Erdboden und an den Küsten Windstöfse bis über 50 m/sk beobachtet. Bei Wirbelstürmen, die Wasserhosen u. dgl. bilden, kommen Geschwindigkeiten von aufserordentlicher Gröfse vor.

Häufigkeit der Windstärken nach Höhenstufen usw. s. umseitige Tafel.

*) Beaufortsche Windskala s. II. Bd. 4. Abschn., I. Schiffbau, unter E. Stabilität.

Digitized by Google

Häufigkeit der Windstärken nach Höhenstufen und Jahreszeiten.*)

Mittelwerte aus 5jährigen, fortlaufenden Beobachtungen des Kgl. preuſs. Aeronautischen Observatoriums in Lindenberg (bei Beeskow).
(Die Zahlen geben die Wahrscheinlichkeit in vH.)

Seehöhen m	Windgeschwindigkeiten in m/sk					Mittlere Geschwindigkeit m/sk
	0 bis 2	2 bis 5	5 bis 10	10 bis 15	über 15	
Winter (Dezember bis Februar).						
Erdoberfläche**)	18,8	42,0	35,2	3,7	0,3	4,9
500	6,1	12,5	33,6	24,1	23,7	11,4
1000	7,3	11,4	29,0	28,0	24,3	11,3
1500	8,7	7,6	27,6	30,6	25,5	11,6
2000	4,6	4,7	25,3	40,5	24,9	12,7
Frühjahr (März bis Mai).						
Erdoberfläche	20,1	42,2	32,7	4,5	0,5	4,9
500	13,9	21,5	38,8	17,3	8,5	7,8
1000	13,4	20,5	34,0	20,5	11,6	8,5
1500	15,3	18,9	27,5	26,4	11,9	8,4
2000	14,6	14,6	27,9	28,6	14,3	9,5
Sommer (Juni bis August).						
Erdoberfläche	23,2	46,2	30,1	0,5	—	4,4
500	15,9	25,1	38,8	14,4	6,0	7,0
1000	13,6	23,8	35,5	18,2	8,9	7,7
1500	13,7	23,7	26,8	26,3	9,5	8,4
2000	14,6	14,5	25,1	30,9	14,9	10,2
Herbst (September bis November).						
Erdoberfläche	24,2	45,3	28,1	1,8	0,6	4,5
500	9,7	19,3	36,5	19,7	14,8	9,5
1000	11,7	17,3	34,5	22,5	14,0	9,4
1500	11,5	16,4	31,2	26,5	14,4	9,4
2000	12,0	12,8	27,7	29,5	18,0	10,5
Jahr.						
Erdoberfläche	21,4	44,2	31,6	2,6	0,2	4,7
500	11,7	19,4	37,0	18,7	13,2	8,9
1000	11,0	18,3	33,6	22,5	14,6	9,2
1500	12,6	16,8	28,4	27,4	14,8	9,4
2000	11,8	12,1	26,5	32,0	17,6	10,5
2500	11,2	9,4	20,4	34,3	24,6	12,1
3000	10,4	8,3	18,0	30,9	32,4	13,0
3500	9,6	7,2	14,1	26,8	42,3	15,1

Die starke Zunahme in der untersten Stufe (bis 500 m) vollzieht sich vorwiegend schon nahe (bis etwa 100 m) über dem Erdboden.

*) Auszug nach R. Assmann, „Die Winde in Deutschland“ (Braunschweig 1910).
**) 40 bis 120 m Seehöhe.

Digitized by Google

Sturmtage, an denen der Wind ein oder mehrmals die Stärke 8 der Beaufort-Skala ($\sim$ 15 m/sk) übersteigt, wurden gezählt z. B. in Berlin 4, Frankfurt a. M. 8, Aachen 19, Hamburg 37, Borkum 58 Tage im Jahre.

Die Windrichtungen verlaufen auf der nördlichen Erdhalbkugel immer so, daſs sie barometrische Tiefdruckgebiete linksdrehend („Zyklone"), Hochdruckgebiete rechtsdrehend (Antizyklone) umkreisen. Südliche Halbkugel umgekehrt. (Ursache: Erddrehung.) In der Mitte eines Tiefdruckgebietes steigt die Luft langsam empor, im Hochdruckgebiet abwärts.

Oertlich begrenzte Zyklone entstehen besonders in den mittleren Breiten und in der warmen Jahreszeit, ebenso Wirbel mit wagerechter Achsenrichtung (Gewitterböen, die oft mit senkrechten Strömungen beträchtlicher Stärke, bis mehrere m/sk verbunden sind).

Winddruck auf Bauwerke. Bei Abschätzung der zu gewärtigenden Höchstdrücke ist auf etwa besonders ungeschützte Lage Rücksicht zu nehmen.

Zuverlässige Berechnung ist unmöglich. Der Druck auf einzelne Wände, Dächer usw. hängt von der Form des Ganzen und auch etwaiger benachbarter Gebäude ab. Er kann bei gleicher Aufsenform und Windrichtung sehr verschieden sein, je nachdem wie das Innere mit der umgebenden Luft in Verbindung steht. Auf Dachflächen können starke, nach oben gerichtete Saugwirkungen vorkommen, welche die amtlichen Vorschriften bisher nicht berücksichtigen.

Amtliche Bestimmungen über die anzunehmende Gröſse des Winddruckes für statische Berechnungen:

Es bedeutet

p den Druck auf senkrechte Wände in kg/qm,
p_1 den Druck auf schräge Wände oder Dächer in kg/qm,
α deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte.

1. **Preuſs. Akademie des Bauwesens.** Nach dem Gutachten vom 18. Juli 1889 und 17. April 1899*) genügt es für deutsche Windverhältnisse, bei der Berechnung der Standfestigkeit hoher Bauwerke $p = 125$ kg/qm und $p_1 = p \sin^2 \alpha$ zu setzen (entsprechend der Newtonschen Annahme über den Winddruck auf geneigte, ebene Flächen, vgl. Fuſsnote S. 353). Rücksicht auf besondere örtliche Lage ist indes nicht ausgeschlossen. (Für Leuchttürme ist man bis $p = 330$ kg/qm gegangen.)

2. **Bauabteilung des Preuſs. Ministeriums der öffentl. Arbeiten.** Nach Vorschrift vom 16. Mai 1890 ist $p \geqq 125$ kg/qm, bei freistehenden Gebäuden nötigenfalls p bis 250 kg/qm anzunehmen. Die Windrichtung ist dabei wagerecht zu wählen und die Formel $p_1 = p \sin \alpha$ anzuwenden (v. Lösesche Luftwiderstandsformel, vgl. S. 364).

3. **Preuſs. Ministerium der öffentl. Arbeiten;** Vorschrift für Brücken (vom September 1895). Bei belasteter Brücke ist $p = 150$ kg/qm, bei unbelasteter Brücke, falls dies für die Standsicherheit zu berücksichtigen ist, $p = 250$ kg/qm anzunehmen.

4. **Erlaſs des Preuſs. Ministers der öffentl. Arbeiten und des Ministers für Handel und Gewerbe für die Berechnung der Standfestigkeit von Schornsteinen.****) In der Regel $p = 125$ kg/qm (einschl. der Saugwirkung auf der Leeseite). Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des lotrechten Schnittes der Säule. Ist der Flächeninhalt dieses Schnittes F, bei eckigen Schornsteinen rechtwinklig zu zwei gegenüberliegenden Flächen gemessen, so ist die Gröſse des Winddrucks: bei runden Schornsteinen $0{,}67\, p F$, bei achteckigen Schornsteinen $0{,}71\, p F$, und bei rechteckigen Schornsteinen $1{,}0\, p F$.

---

*) Zentralbl. Bauv. 1889 S. 279 u. 1899 S. 257.

**) Erlaſs vom 30. April 1902, Z. d. V. d. I. 1900 S. 842 und 1902 S. 1171.

Digitized by Google

2. Erfahrungszahlen für den Luftwiderstand umströmter Körper.

(Ueber den Widerstand von Schiffskörpern in Wasser s. II. Bd. 4. Abschn., I. Schiffbau, unter P. Geschwindigkeit u. Maschinenkraft.)

Es bedeutet

$\mu = \frac{\gamma}{g}$ die Masse eines cbm Luft in $kgm^{-4} sk^2$ (üblicher Durchschnittswert $\mu = 1/8$, entspr. $\gamma = 1{,}226$),

w die Geschwindigkeit des ungestörten Luftstroms bzw. die Fortschreitungsgeschwindigkeit des Körpers durch ruhende Luft in m/sk,

O gesamte Oberfläche des Körpers in qm.

a. Reibungswiderstand

(Oberflächenwiderstand oder Hautreibung).

Frank ermittelte*) aus Pendelversuchen mit mehreren (16) im Abstand von 12 mm nebeneinander befestigten, glatten, dünnen Blechplatten (80 cm breit, 50 cm lang, $^9/_{16}$ mm dick)

$$W_r = 0{,}00244\, \mu O w^2.$$

Danach wäre $\chi = 0{,}00244$ die Reibungszahl.

Lanchester**) fand bei glatten Platten von 5 bis 15 qdm an der Windwage im Wind von 6 bis 9 m/sk durch Vergleich mit einer quergestellten Platte die entsprechende Reibungszahl $\chi = 0{,}009$ bis 0,015.

Nach neueren Versuchen (s. unter b) ist die Reibung aber erheblich kleiner.

Die quadratische Form in w ist überhaupt ungenau, bzw. χ mit w abnehmend (vgl. S. 351).

(Froudes Versuche über Hautreibung in Wasser s. S. 351.)

b. Körper geringsten Widerstandes.

Luftschiffkörper sind bisher meist achsensymmetrisch in bezug auf die „gerade" Fahrtrichtung.

1. Gerade Bewegung. Der Widerstand liegt in der Symmetrieachse. Da der Formwiderstand sehr gering ist, hat die Hautreibung beträchtlichen Einfluss. Getrennte Bestimmung des Formwiderstandes ist von Prandtl***) dadurch ermöglicht worden, dass die senkrecht zur Oberfläche wirkenden Luftdrücke durch feine Bohrungen in das abgeschlossene Innere des Modells und von da zu einem Manometer geleitet wurden. Die Komponentensumme in der Stromrichtung ergab W_f. Der Gesamtwiderstand W wurde durch Wägung bestimmt.

Abb. 167 zeigt die beobachtete Druckverteilung an einem Modell (I). Ueberdrücke sind nach oben, Minderdrücke nach unten aufgetragen. Die gestrichelte Vergleichslinie ist berechnet unter Annahme wirbel-

*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 1522.

**) Lanchester, Aerodynamik. Deutsch von C. und A. Runge Bd. I. S. 187.

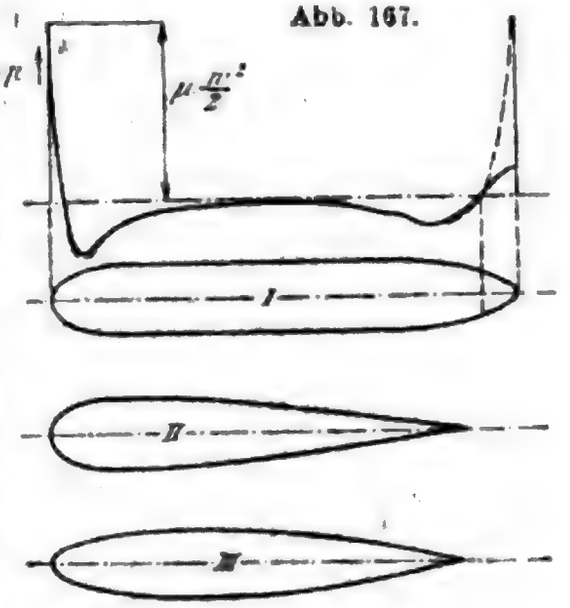
***) Versuche der Göttinger Anstalt, die unter Leitung von Prof. Prandtl steht, werden im folgenden mehrfach erwähnt. Veröffentlichungen sämtlich in der „Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff." (R. Oldenbourg) 1910 u. ff.

Digitized by Google

freier Strömung (vgl. S. 338 ff., Abb. 159). Bis zur Ablösungsstelle, wo die „Schleppe" ansetzt (vgl. Abb. 164 S. 352), stimmen Rechnung und Versuch gut überein.

Folgende Tafel gibt die beobachteten Widerstandszahlen: ψ auf den Hauptspantquerschnitt $\otimes$, und zwar ψ_r für den Anteil der Hautreibung, ψ_f für den Formwiderstand gültig; χ bezieht die Hautreibung auf die Oberflächengröfse O; ξ den Gesamtwiderstand auf den Rauminhalt V, also auf gleiches Tragvermögen des Ballones, was praktisch besonders wichtig ist. Diese Zahl wird für geometrisch ähnliche Schiffskörper gleichbleibend, wenn man sie auf $V^{2/3}$ (die Seitenfläche eines Würfels vom Inhalt V) bezieht.

Abb. 167.



Von den untersuchten Modellen sind folgende die wichtigsten (vgl. Abb. 167):

		Modell		
		I	II	III
Länge L	cm	130	112,5	114,5
Gröfster Durchmesser D	„	20	19,4	18,8
Gröfster Querschnitt $\otimes$	qcm	314	296	278
Gesamtoberfläche O	„	7 450	4 790	4 790
Rauminhalt V	ccm	33 900	18 200	18 200

Es ergab sich für $w = 10$ m/sk, bei 15°:

	in der Formel		Modell		
			I	II	III
für den Reibungswiderstand	$W_r = \chi \mu O w^2$	χ =	0,00122	0,00084	0,00065
oder	$W_r = \psi_r \mu \otimes w^2$	ψ_r =	0,0289	0,0136	0,0112
für den Formwiderstand . .	$W_f = \psi_f \mu \otimes w^2$	ψ_f =	0,0308	0,0199	0,0171
für den Gesamtwiderstand .	$W = \psi \mu \otimes w^2$	ψ =	0,0597	0,0335	0,0283
oder	$W = \xi \mu V^{2/3} w^2$	ξ =	0,0179	0,0143	0,0114

Bei dem günstigsten Modell III beträgt der Widerstand nur etwa $^1/_{18}$ desjenigen einer kreisförmigen Platte von gleichem Durchmesser.

Die obigen Widerstandszahlen nehmen mit wachsendem w ab, weil die Hautreibung langsamer als mit der zweiten Potenz von w zunimmt. Setzt man $W_r = a w^\beta$, so wird

bei Modell	I	II	III
	$\beta = 1{,}81$	1,71	1,55.

Der Gesamtwiderstand nähert sich einem Grenzwert, der bei $w = 10$ m/sk, besonders für Modell II und III, noch nicht erreicht ist.

Digitized by Google

Durch Auslaufversuche*) mit dem Zeppelin-Luftschiff L. Z. 10 wurde bestimmt $\xi = 0{,}0326$.

Die Gestalt des L. Z. 10 ähnelte in grofsen Zügen dem obigen Modell Nr. I. In dem am Luftschiff bestimmten Koeffizienten ist der Widerstand der Steuerung und Takelung mit inbegriffen.

Ch. Renard hatte für sein Luftschiff „La France" (1884) von $L = 50{,}4$ m, $D = 8{,}4$ m nach Modellversuchen für den Körper allein angenommen:

$$W = 0{,}00223\, D^2 w^2, \text{ entsprechend } \psi = 0{,}0225.$$

Aus Fahrtversuchen mit Gondel, Takelung usw. fand er später

$$W = 0{,}01685\, D^2 w^2, \text{ entsprechend } \psi = 0{,}169.$$

Der Widerstand des nackten Schiffskörpers wird durch die Takelung immer derartig um ein Vielfaches erhöht.

2. Schräge Bewegung. Die Winkelabweichung zwischen Symmetrieachse und Fahrtrichtung betrage α^0. Dann weicht die Widerstandsmittelkraft R schnell um erheblich gröfsere Winkel nach der entgegengesetzten Seite ab.

Nach den Göttinger Versuchen (mit denselben Modellen wie oben) erreicht die senkrechte Komponente schon bei etwa $\alpha = 6^0$ die Gröfse des wagerechten W bei gerader Fahrt, ohne dafs W selbst bis dahin wesentlich wächst. Durch Schrägstellung erzielt man daher eine wirksame „dynamische" Höhensteuerung.

3. Stabilität der Bewegung. R schneidet die Symmetrieachse weit vor dem Volumen-Schwerpunkt, sogar vor der Spitze des Körpers. Der Körper sucht sich deshalb bei kleinen Winkelabweichungen sogleich quer zu stellen. Durch steif abstehende Flossen am Heck ruft man beim Luftschiff stabilisierende Zusatzkräfte hervor, welche die Gesamtmittelkraft bis hinter den Schwerpunkt rücken, so dafs das Schiff bei Winkelabweichungen von selbst wieder der geraden Stellung zustrebt.

c. Körper mit Symmetrieachse in der Bewegungsrichtung.

Die Widerstandszahlen gelten, falls nichts anderes bemerkt, für homogene Strömung. In unruhiger Luft (Wind usw.) können sie bis etwa 1,6 fach gröfser werden.

Wegen einiger Widersprüche bei Versuchen verschiedener Art sind die Messungsverfahren mit angegeben. Es bedeutet:

- S Schlepp- oder Fallversuche; ruhende Luft (Eiffel, Paris: Fallhöhe 95 m, w bis 40 m/sk),
- T Versuche im Windtunnel bei guter Gleichförmigkeit des Luftstromes (Göttinger Anstalt, Tunnel 2×2 m, w bis 10 m/sk, Eiffels Laboratorium, Luftstrahl 1,5 m Dmr., $w = 10$ m/sk),
- P Pendelversuche in geschlossenem Raum (A. Frank, Hannover, Pendellänge 13 m),**)
- R Versuche an Rundlaufvorrichtung,
  - r = Halbmesser des Drehармes,
  - r_i und r_a Drehkreishalbmesser des inneren und äufseren Randes des Versuchskörpers,
- W Versuche im freien Winde oder in unruhigem Luftstrom.

*) Zeitschr. für Flugtechn. u. Motorluftschiff., Jahrg. 1911 S. 235.
**) Z. d. V. d. I. 1906 S. 600.

Digitized by Google

Es ist

$$W = \psi \mu F w^2 \text{ in kg},$$

wenn F = Projektion des Körpers in der Stromrichtung in qm,
μ und w wie früher in $kg \cdot m^{-4} sk^2$ bzw. m/sk,
d = Durchmesser, l = Länge } in m, falls nicht anders vermerkt.

Körper		F qm	ψ	Versuch	Beobachter
I. Dünne Platten, senkrecht zur Fläche angeblasen.					
Quadratplatte		1,000	0,631	S	Eiffel.
		0,500	0,618	„	
		0,250	0,597	„	
		0,125	0,573	„	
		0,0625	0,536	T	
		0,0225	0,528	„	
		0,0100	0,520	„	
		0,0144	0,555	„	Gött. Anst.
dsgl. an Rundlaufvorrichtungen, senkrecht zur Drehungsebene stehend. Zusammenstellung der zahlreichen Versuche ergibt (nach Knoller) ψ um so größer, je kleiner der Dreharm im Verhältnis zur Platte, für					
Mittel aus verschiedenen Versuchen	$r_i : r_a = 0{,}9$		0,73	R	versch.
	0,8		0,86	„	
	0,7		0,95	„	
	0,57 und weniger		1,0	„	
dsgl. verschiedene Versuche im Winde			0,95	W	
Rechteckplatte					
Verhältnis $\frac{\text{kleinere Seite}}{\text{größere Seite}}$	$\lambda = 1{,}000$	0,0049	0,555	T	Gött. Anst.
		0,0100	0,582	P	Frank.
		0,0225	0,528	T	Eiffel.
	$= 0{,}667$	0,0074	0,560	„	Gött. Anst.
		0,0225	0,548	„	Eiffel.
		0,0337	0,544	„	„
	$= 0{,}500$	0,0098	0,575	„	Gött. Anst.
		0,0450	0,560	„	Eiffel.
	$= 0{,}333$	0,0147	0,600	„	Gött. Anst.
		0,0225	0,564	„	Eiffel.
		0,0675	0,568	„	„
	$= 0{,}250$	0,0100	0,575	P	Frank.
		0,0201	0,622	T	Gött. Anst.
	$= 0{,}100$	0,0225	0,604	„	Eiffel.
		0,0491	0,670	„	Gött. Anst.

Für ebene, senkrecht vom Luftstrom getroffene Platten von $\lambda = 1{,}000$ bis $\lambda = 0{,}100$ gibt Föppl die Formel

$$\psi = 0{,}72 - \frac{3}{7 + 5{,}5\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}$$

Digitized by Google

Körper	F qm	ψ	Versuch	Beobachter
Durchbrochene Rechteckplatten (35,3 × 70,7 cm), volle Fläche 0,25 qm, davon ausgeschnitten 0,10 qm = 40 vH (4 gleichseitige Dreiecke, so daſs Ränder und Diagonalen von rd. 5 cm Breite stehen bleiben) ψ bezogen auf die verbliebenen 0,15 qm	0,15	0,70	S	Eiffel.
Kreisplatte.	0,500	0,616	„	Eiffel.
	0,250	0,593	„	„
	0,125	0,570	„	„
	0,0707	0,540	T	„
	0,0625	0,546	S	„
	0,0300	0,550	T	Gött. Anst.
	0,0177	0,585	„	„ „
	0,0177	0,528	„	Eiffel.
II. Umdrehungskörper, in Richtung der Achse angeblasen.				
2 gleiche Kreisplatten im Abstande l hintereinander je $\frac{l}{d} = 0{,}00$	0,0707	0,540	T	Eiffel.
0,50		0,528	„	„
1,00		0,456	„	„
1,50		0,392	„	„
2,00		0,520	„	„
2,50		0,648	„	„
3,00		0,760	„	„
ψ ist der Koeffizient des Gesamtwiderstandes, bezogen auf die Fläche einer Platte. Der Gesamtwiderstand wird erst kleiner infolge der Störung des Wirbelringes hinter der vorderen Platte. Es wird bei wachsendem l ein Minimum erreicht, nach welchem dann der Gesamtwiderstand wieder zunimmt.				
Kreiszylinder, mit ebenen Endflächen senkrecht zur Achse				
$d = 0{,}1$ m $l = d$ bis $2d$		0,56	P	Frank.
$d = 0{,}3$ „ $l = 0{,}5\,d$		0,544	T	Eiffel.
$1{,}0\,d$		0,440	„	„
$2{,}0\,d$		0,400	„	„
$d = 0{,}2$ m $l = \sim 0$		0,55	„	Gött. Anst.
$0{,}5\,d$		0,59	„	„ „
$1{,}0\,d$		0,55	„	„ „
$1{,}5\,d$		0,305	„	„ „

Körper	ψ	Versuch	Beobachter
Kreiszylinder mit Kegelspitzen auf beiden Endflächen (l = Länge des zylindrischen Teils)			
$d = 0{,}115$ Spitzenwinkel $2\alpha = 90^0$	0,37	P	Frank.
$l = 0{,}17$ $= 60^0$	0,35	„	„
(Uebergangskanten abgerundet) $= 20^0$	0,20	„	„
Luftschiffkörper Modell I	0,0597	T	Gött. Anst.
(Abb. 167 „ II	0,0335	„	„ „
S. 359) „ III	0,0283	„	„ „
Kugel*) für $dw < 3{,}5$ m²/sk	0,24	T	„ „
dsgl. „ $dw > 4{,}3$ „	0,11	„	„ „
Kugelballon $W = 0{,}0256\, d^2 w^2$; entspr.	0,26	W	Ch. Renard.
Halbkugelschale; Bewegung senkrecht zur Schnittfläche			
konvex angeblasen	$\sim 0{,}3$	R	v. Lössl.
	0,168	T	Eiffel.
konkav „	0,664	„	„
Kreiskegelmantel, von der Spitze angeblasen (Grundfläche geschlossen)			
$d = 0{,}4$ m Spitzenwinkel $2\alpha = 60^0$	0,256	T	Eiffel.
$= 30^0$	0,168	„	„
III. Prismatische Körper, quer angeblasen.			
Kreiszylinder mit senkrechten Endflächen, senkrecht zur Achse angeblasen.			
$d = 0{,}1$ $l = d$ bis $2d$	0,37	P	Frank.
l groß im Verhältnis zu d	0,57	W	Irminger (Kopenhagen)
Runde Drähte und Stangen			
für $dw > 0{,}015$	0,45	T	Gött. Anst.
„ $dw < 0{,}015$, aber $> 0{,}001$ gilt $\psi = 0{,}66 - 14\, w\, d$**) ($d$ und w in m bzw. m/sk)			
	d mm		
Draht- und Hanfseile			
Drahtseile aus 6 Litzen . .	3.2	0,54	T Gött. Anst.
„ „ „ „ . .	7,5	0,55	„ „ „
Ueberflochtenes Hanfseil . .	7.0	0,60	„ „ „
„ „	10,1	0,57	„ „ „
Hanfseil aus 4 Litzen . . .	16,0	0,53	„ „ „
dasselbe, Fasern abgebrannt . . .		0,50	„ „ „
Polierter Strick	4,3	0,45	„ „ „
Quadratisches Prisma			
senkrecht zur Seitenfläche angeblasen		0,95	W Irminger.
diagonal angeblasen		0,56	„ „
dsgl. ψ' auf Seitenfläche bezogen $= 0{,}79$.			

*) Wieselsberger, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1914, Heft 9.
**) In Uebereinstimmung mit der Reynoldsschen Regel (S. 354).

Digitized by Google

Stauungsdrücke an Kreisscheiben geringer Dicke. Nach Versuchen von Recknagel u. a. ist der Stauüberdruck p_1 vor und der Minderdruck p_2 hinter einer quer in einen Luftstrom gestellten Kreisscheibe (beides im Mittelpunkt durch feine Bohrungen usw. gemessen)

$$p_1 = \mu \frac{w^2}{2}, \qquad p_2 = 0{,}37\,\mu \frac{w^2}{2}.$$

Dasselbe p_1 wirkt (auf wenige vH genau) auf die Mündung eines parallel gegen den Strom gestellten Meßrohres (Pitot-Darcysche Röhre) Die Zuschärfung der Kante hat dabei wenig Einfluß.

d. Körper mit einfacher Symmetrie.

Symmetrieebene in der Bewegungsrichtung.

Die Resultierende der Luftkräfte liegt in der Symmetrieebene.

(Ist keine Symmetrie vorhanden, so gehören zu vollständiger Bestimmung 6 Angaben, z. B. Größe, 2 Richtungswinkel und die 3 Koordinaten eines Punktes der Wirkungslinie.)

Es bezeichne

F die größte Projektion des Körpers,

α den „Anstellwinkel" zwischen Ebene der größten Projektion und Bewegungsrichtung,

$R = \zeta \mu F w^2$ die Resultierende der Luftkräfte,

$A = \zeta_a \mu F w^2$ deren Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung (Auftriebskomponente),

$W = \zeta_w \mu F w^2$ die Komponente in der Bewegungsrichtung (Widerstandskomponente),

i den Winkel zwischen R und der Senkrechten zur Bewegungsrichtung, so daß $A = R \cos i$, $W = R \sin i$,

$\varphi = i - \alpha$ die Abweichung von R gegen die Flächennormale.

Ebene Platten in Schrägstellung.

1. Quadratische und rechteckige Platten.

a) Größe des resultierenden Luftdruckes. Früher sehr gebräuchlich, und noch in amtlichen Vorschriften für Berechnung von Gebäuden auf Winddruck enthalten, ist die Formel von v. Lössl:

$$R = \psi \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin\alpha; \quad \text{also } \zeta = \psi \sin\alpha,$$

worin ψ = Widerstandszahl der Platte $\alpha = 90^0$ (S. 359). Diese und ähnliche Formeln (Renard, Duchemin u. a.) sind nur für kleine α einigermaßen richtig und dafür wenig verschieden. Anwendung auf einzelne Flächen eines Körpers ist unzulässig (vgl. Winddruck auf Bauwerke S. 357).

Bei größeren Winkeln wird infolge Umschwunges des Strömungssystems die stetige Zunahme von R mit α unterbrochen. (Kritischer Anstellwinkel α_k, S. 353).

Abb. 168.*) Quadratische Platte, Aenderung von ζ mit α zwischen 0^0 und 90^0 (nach Prandtl). Zwischen 38^0 und 42^0 sind ver-

*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910 S. 75.

Digitized by Google

schiedene Zustände, entsprechend den beiden Kurvenzweigen, möglich. R kann also hier über 50 vH größer sein als in Querstellung.

Rechteckige Platten. Der Luftwiderstand wächst bei gleichem Winkel mit zunehmendem Breitenverhältnis $\frac{1}{\lambda} = b : l$, wobei b = Breite

Abb. 168.

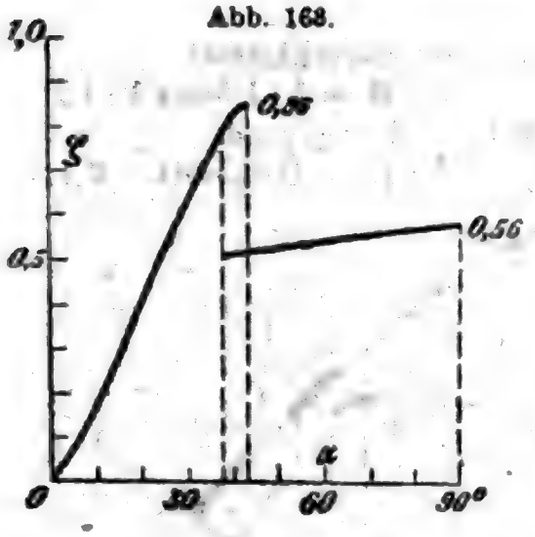
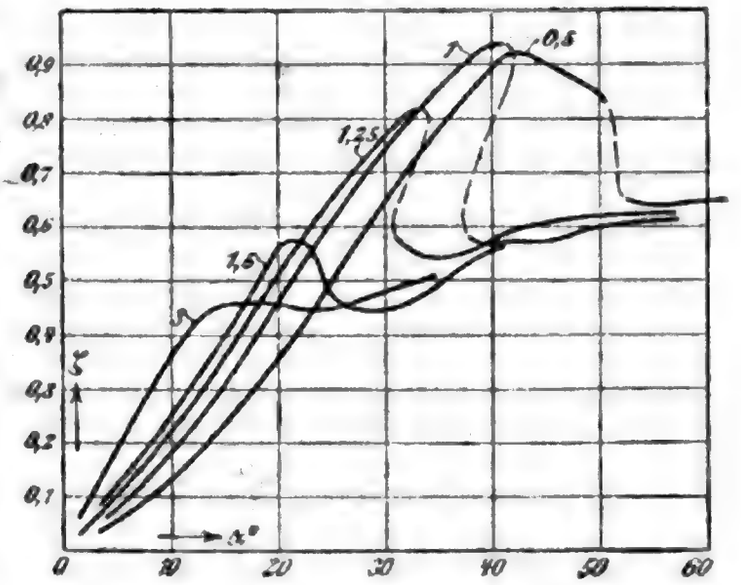


Abb. 169.



quer zur Stromrichtung, l = Länge der Platte.

Abb. 169. Versuche der Gött. Anst.*) Platten gleicher Länge l = 35 cm; $b : l$ ist angeschrieben. Angeblasene Seite (Druckseite) ganz eben, Rückseite vorn und hinten durch 2,5 cm lange Abschrägungen zugeschärft, also auf 30 cm eben. Dicke d = 0,4 cm. Die gestrichelten Verbindungskurven stellen keine wirklich herstellbaren Zustände dar.

Näherungsformel von Föppl nach diesen Versuchen, gültig für α von -3^0 bis $+8^0$.

$$\zeta_a = \frac{\alpha}{16 + 54\lambda}; \quad \zeta_w = 0{,}004 + 0{,}3\,\frac{d}{l} + \zeta_a \sin\alpha$$

b) Richtung von R ziemlich genau senkrecht zur Fläche ($i \sim \alpha$).

c) Lage von R. Der Schnittpunkt der Wirkungslinie mit der Fläche („Druckpunkt") wandert mit von 90^0 an abnehmendem α aus der Flächenmitte zum vorderen Rande (Avanzinisches Gesetz). Erfahrungsformeln hierfür wenig zuverlässig. Oft benutzt ist die Formel von Joëssel $s = 0{,}3\,L\,(1 - \sin\alpha)$**).

s = Abstand des Druckpunktes von Flächenmitte.

2. Flügel.

Leicht gewölbte Platten liefern, wie O. Lilienthal***) durch Versuche fand (1874 bis 1896), weit günstigere Drachenwirkung als ebene. Mangels brauchbaren Formeln werden Versuche meist graphisch dargestellt nach Art der Lilienthalschen Flugcharakteristik: Die Auftriebszahl ζ_a wird als Ordinate, die Widerstandszahl ζ_w als Abscisse gezeichnet, der Anstellwinkel beigeschrieben. Der Fahrstrahl vom

*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910 S. 87.

**) Zusammenstellung der bisherigen Veröffentlichungen hierüber von Reissner, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910 S. 149.

***) Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. II. Aufl. R. Oldenbourg 1910.

Digitized by Google

Koordinatenursprung zeigt: 1. die Größe, 2. die Richtung der resultierenden Widerstandszahl ζ gegen die Bewegungsrichtung. Die Tangente durch den Ursprung zeigt den Höchstwert von Auftrieb : Widerstand.

Der Anstellwinkel α wird allgemein zwischen Wölbungssehne und Bewegungsrichtung gemessen.

Systematisch untersucht sind (Gött. Anst.) rechteckige Kreisbogenschalen (Querschnitt s. Abb. 170),

im Breitenverhältnis
$\lambda = L : B = 1 : 1{,}5$ bis $1 : 15$
mit Wölbungsgrad
$\gamma = T : L = 0{,}015$ bis $0{,}1$.

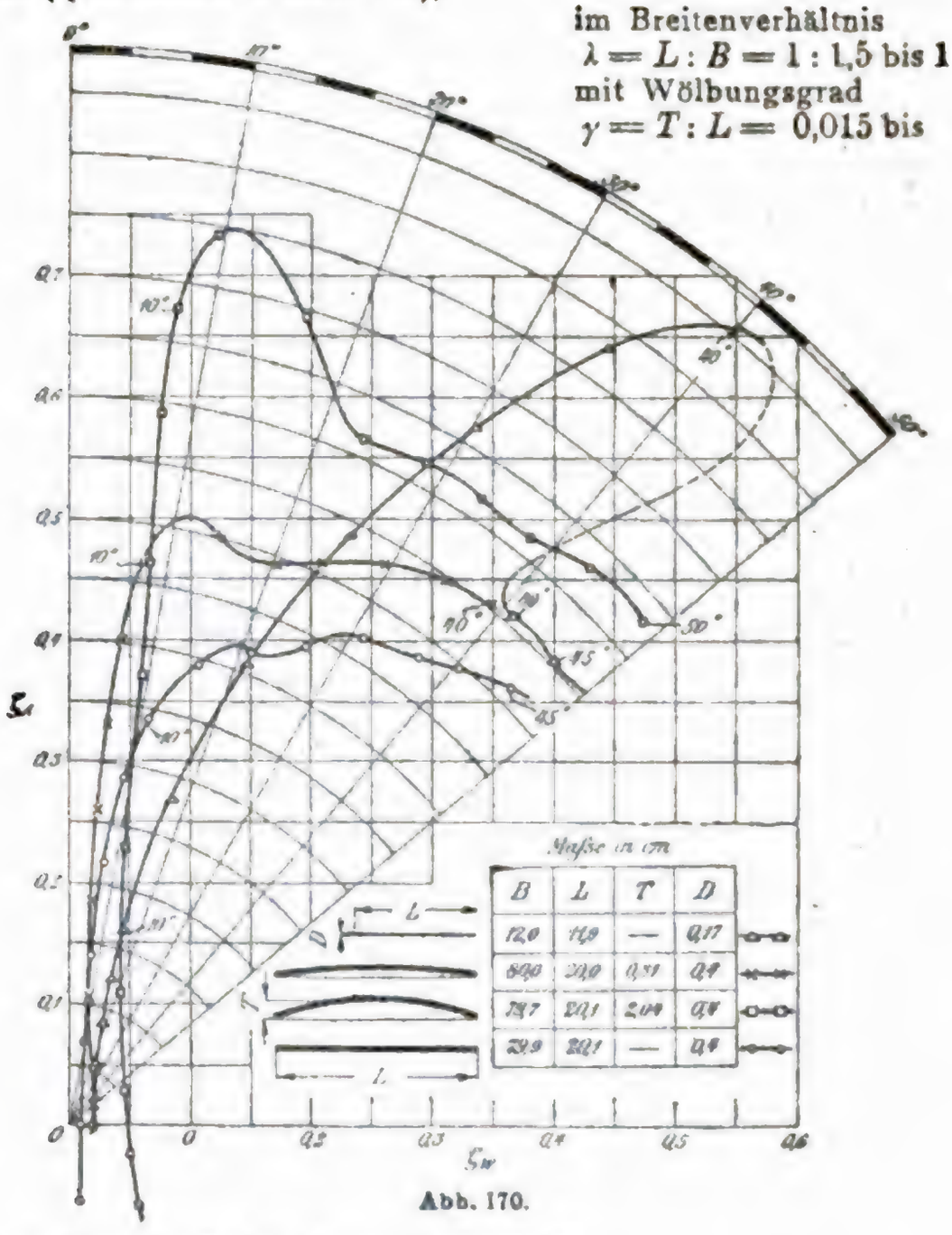


Abb. 170.

Nach Föppl gilt in diesen Grenzen:*)

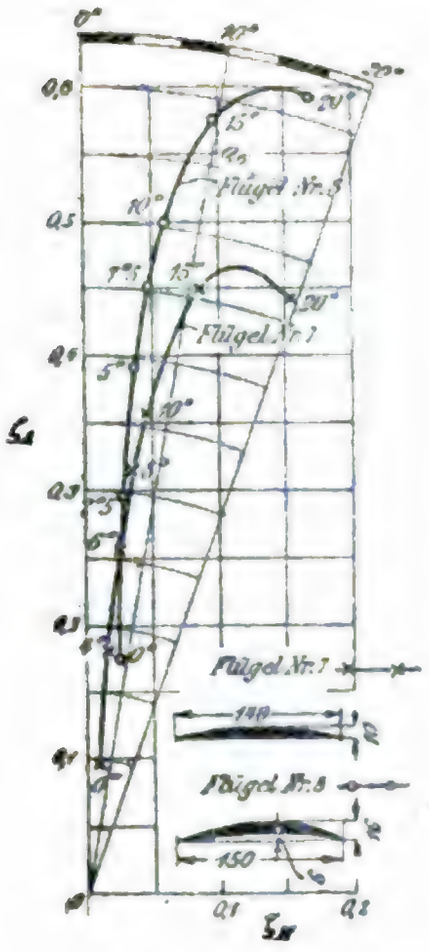
$$\zeta_a = \left(0{,}32\,\gamma + \frac{1}{18 + 95\,\lambda}\right) \cdot (\alpha + 3^0)$$

$$\zeta_w = 0{,}3\,\frac{D}{L} + 0{,}4\,\gamma + \frac{0{,}01}{100\,\gamma + 1} - 0{,}006 + 0{,}0005\,\alpha^2$$

mit Fehlern von höchstens 12 %.

*) Föppl, Windkräfte. Dissertation. Julius Springer 1911.

Abb. 171.



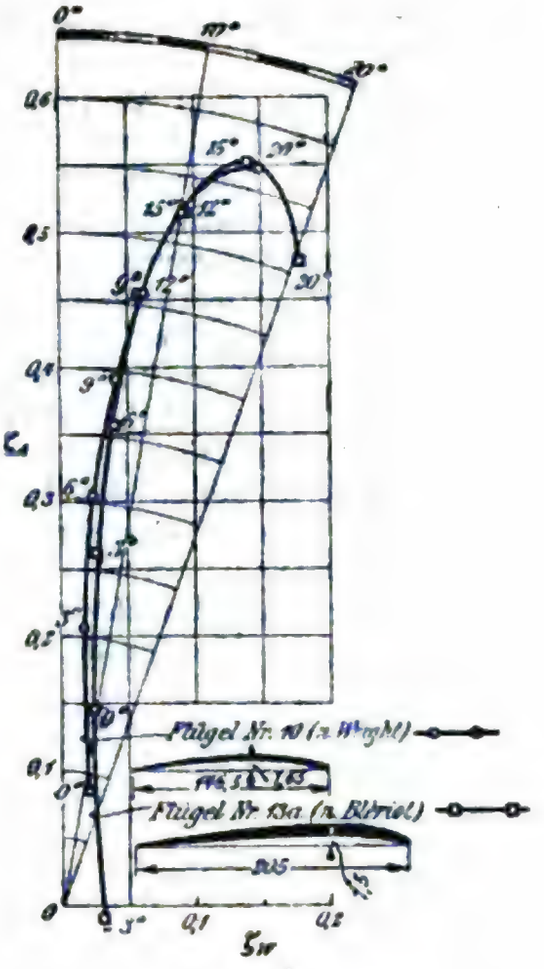


Abb. 172.

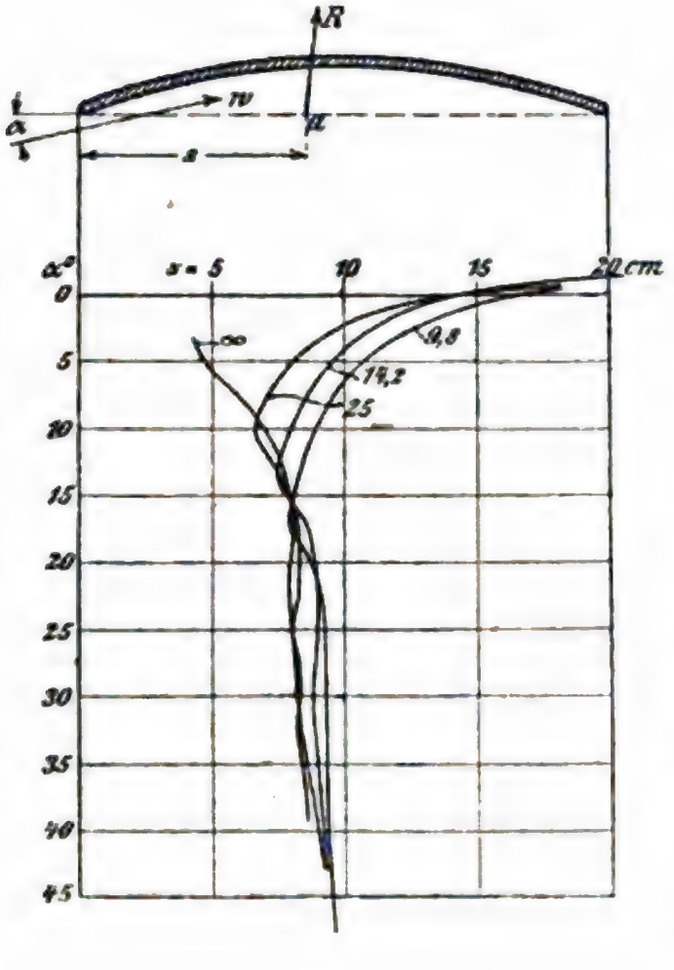
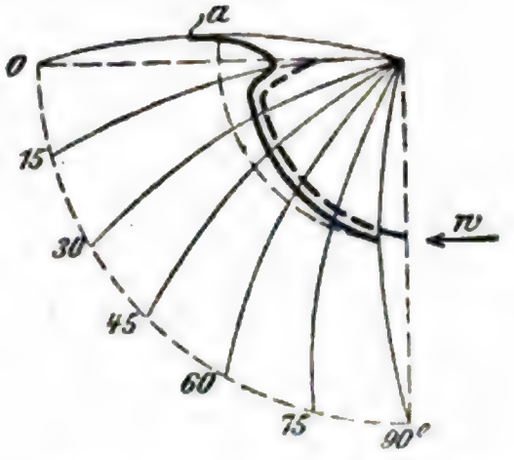


Abb. 173.



Faſst man die für eine gewählte Flügelform unveränderlichen Glieder zusammen, so hat man die für Rechnungen über die Stabilität von Flugzeugen usw. von Reissner*) aufgestellten Ausdrücke

$$A = c_1 (\varkappa + \iota) F . w^2;$$
$$W = (c_2 + c_3 \alpha^2) F . w^2.$$

*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910.

Abb. 170 S. 367 stellt zwei gewölbte Platten (1 : 10 und 1 : 25) mit einer ebenen von gleicher Umrifsform und mit einer Quadratplatte in Vergleich.

Abb. 171 S. 367 zeigt Modellversuche im Windtunnel von Eiffel*) mit gebräuchlichen Flügelprofilformen.

Abb. 172 S. 367. Lage der Wirkungslinie R des Luftdruckes bzw. des sog. Druckpunktes (Schnitt mit der Wölbungssehne) bei verändertem Anstellwinkel nach Messungen der Gött. Anst. an Kreisbogenschalen. s = Abstand des Druckpunktes a von der Vorderkante. Für den Wölbungsgrad ist $1 : \gamma$ beigeschrieben.

Abb. 173 S. 367. Gleicher Versuch von Eiffel mit einer Kreisbogenschale von 15×90 cm mit Wölbungsgrad 1 : 13,5. Andere Darstellungsweise: Die Schnittpunkte a der Kraft mit dem Kreisbogen sind für die verschiedenen α, in denen das Profil dargestellt ist, durch eine Kurve verbunden. Die gestrichelte Kurve gibt zum Vergleich die Lage des R einer ebenen Platte.

Ueber Mengen- und Geschwindigkeitsmessungen luftförmiger Körper s. II. Bd. 2. Abschn., Mefskunde.

---

*) G. Eiffel, La résistance de l'air. Deutsch von L. Huth.

Digitized by Google

3 ABSCHNITT.

Wärme.*)

(Einschliefslich der Thermodynamik der Gase und Dämpfe.)**)

I. Allgemeine Wärmeeigenschaften der Körper.

A. Temperatur.

Bezeichnen C, R und F die einer bestimmten Temperatur entsprechenden Grade nach Celsius, Réaumur und Fahrenheit, so ist

$$C = {}^5/_4 R = {}^5/_9 (F - 32^0), \qquad R = {}^4/_5 C = {}^4/_9 (F - 32^0),$$
$$F = 32^0 + {}^9/_5 C = 32^0 + {}^9/_4 R.$$

Hiernach ergibt sich die Tafel (S. 370).

B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Unter der **Längenausdehnungszahl** $\beta = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$ eines festen Körpers versteht man die Zunahme der Längeneinheit des Körpers bei 1^0 Temperaturerhöhung.

Unter der **Raumausdehnungszahl** $\alpha = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ eines festen, tropfbar flüssigen oder gasförmigen Körpers versteht man die Vergrößerung der Raumeinheit bei 1^0 Temperaturerhöhung.

Für homogene feste Körper ist $\alpha = 3\beta$, die **Flächenausdehnungszahl** $= 2\beta$.

Ausdehnungszahlen für feste und flüssige Körper.

Längenausdehnung $1000\,\beta$ zwischen 0^0 und 100^0.

Aluminium	0,024	Platin	0,009
Blei	0,029	Silber	0,019
Bronze	0,018	Zink	0,017
Eisen und Stahl	0,011	Zinn	0,027
Gold	0,015	Zement (Beton)	0,014
Konstantan	0,015	Glas	0,006 bis 0,009
Kupfer	0,016	Hartgummi	0,080
Magnesium	0,026	Holz, längs der Faser	0,003 bis 0,009
Messing	0,019	Kalkstein	0,008
Nickel	0,013	Porzellan	0,003

*) Für das Taschenbuch verfafst von Prof. Dr. R. Mollier, Dresden.
**) S. a. Mechanik luftförmiger Körper.

Digitized by Google

Vergleichung der Thermometergrade.

(Näheres S. 369.)

C	R	F	C	R	F	C	R	F	C	R	F
— 20	— 16	— 4,0	+ 35	+ 28,0	+ 95,0	+ 90	+ 72,0	+ 194,0	+ 145	+ 116,0	+ 293,0
— 19	— 15,2	— 2,2	36	28,8	96,8	91	72,8	195,8	146	116,8	294,8
— 18	— 14,4	— 0,4	37	29,6	98,6	92	73,6	197,6	147	117,6	296,6
— 17	— 13,6	+ 1,4	38	30,4	100,4	93	74,4	199,4	148	118,4	298,4
— 16	— 12,8	3,2	39	31,2	102,2	94	75,2	201,2	149	119,2	300,2
— 15	— 12,0	5,0	40	32,0	104,0	95	76,0	203,0	150	120,0	302,0
— 14	— 11,2	6,8	41	32,8	105,8	96	76,8	204,8	151	120,8	303,8
— 13	— 10,4	8,6	42	33,6	107,6	97	77,6	206,6	152	121,6	305,6
— 12	— 9,6	10,4	43	34,4	109,4	98	78,4	208,4	153	122,4	307,4
— 11	— 8,8	12,2	44	35,2	111,2	99	79,2	210,2	154	123,2	309,2
— 10	— 8,0	14,0	45	36,0	113,0	100	80,0	212,0	155	124,0	311,0
— 9	— 7,2	15,8	46	36,8	114,8	101	80,8	213,8	156	124,8	312,8
— 8	— 6,4	17,6	47	37,6	116,6	102	81,6	215,6	157	125,6	314,6
— 7	— 5,6	19,4	48	38,4	118,4	103	82,4	217,4	158	126,4	316,4
— 6	— 4,8	21,2	49	39,2	120,2	104	83,2	219,2	159	127,2	318,2
— 5	— 4,0	23,0	50	40,0	122,0	105	84,0	221,0	160	128,0	320,0
— 4	— 3,2	24,8	51	40,8	123,8	106	84,8	222,8	161	128,8	321,8
— 3	— 2,4	26,6	52	41,6	125,6	107	85,6	224,6	162	129,6	323,6
— 2	— 1,6	28,4	53	42,4	127,4	108	86,4	226,4	163	130,4	325,4
— 1	— 0,8	30,2	54	43,2	129,2	109	87,2	228,2	164	131,2	327,2
0	0	32,0	55	44,0	131,0	110	88,0	230,0	165	132,0	329,0
+ 1	+ 0,8	33,8	56	44,8	132,8	111	88,8	231,8	166	132,8	330,8
2	1,6	35,6	57	45,6	134,6	112	89,6	233,6	167	133,6	332,6
3	2,4	37,4	58	46,4	136,4	113	90,4	235,4	168	134,4	334,4
4	3,2	39,2	59	47,2	138,2	114	91,2	237,2	169	135,2	336,2
5	4,0	41,0	60	48,0	140,0	115	92,0	239,0	170	136,0	338,0
6	4,8	42,8	61	48,8	141,8	116	92,8	240,8	171	136,8	339,8
7	5,6	44,6	62	49,6	143,6	117	93,6	242,6	172	137,6	341,6
8	6,4	46,4	63	50,4	145,4	118	94,4	244,4	173	138,4	343,4
9	7,2	48,2	64	51,2	147,2	119	95,2	246,2	174	139,2	345,2
10	8,0	50,0	65	52,0	149,0	120	96,0	248,0	175	140,0	347,0
11	8,8	51,8	66	52,8	150,8	121	96,8	249,8	176	140,8	348,8
12	9,6	53,6	67	53,6	152,6	122	97,6	251,6	177	141,6	350,6
13	10,4	55,4	68	54,4	154,4	123	98,4	253,4	178	142,4	352,4
14	11,2	57,2	69	55,2	156,2	124	99,2	255,2	179	143,2	354,2
15	12,0	59,0	70	56,0	158,0	125	100,0	257,0	180	144,0	356,0
16	12,8	60,8	71	56,8	159,8	126	100,8	258,8	181	144,8	357,8
17	13,6	62,6	72	57,6	161,6	127	101,6	260,6	182	145,6	359,6
18	14,4	64,4	73	58,4	163,4	128	102,4	262,4	183	146,4	361,4
19	15,2	66,2	74	59,2	165,2	129	103,2	264,2	184	147,2	363,2
20	16,0	68,0	75	60,0	167,0	130	104,0	266,0	185	148,0	365,0
21	16,8	69,8	76	60,8	168,8	131	104,8	267,8	186	148,8	366,8
22	17,6	71,6	77	61,6	170,6	132	105,6	269,6	187	149,6	368,6
23	18,4	73,4	78	62,4	172,4	133	106,4	271,4	188	150,4	370,4
24	19,2	75,2	79	63,2	174,2	134	107,2	273,2	189	151,2	372,2
25	20,0	77,0	80	64,0	176,0	135	108,0	275,0	190	152,0	374,0
26	20,8	78,8	81	64,8	177,8	136	108,8	276,8	191	152,8	375,8
27	21,6	80,6	82	65,6	179,6	137	109,6	278,6	192	153,6	377,6
28	22,4	82,4	83	66,4	181,4	138	110,4	280,4	193	154,4	379,4
29	23,2	84,2	84	67,2	183,2	139	111,2	282,2	194	155,2	381,2
30	24,0	86,0	85	68,0	185,0	140	112,0	284,0	195	156,0	383,0
31	24,8	87,8	86	68,8	186,8	141	112,8	285,8	196	156,8	384,8
32	25,6	89,6	87	69,6	188,6	142	113,6	287,6	197	157,6	386,6
33	26,4	91,4	88	70,4	190,4	143	114,4	289,4	198	158,4	388,4
34	27,2	93,2	89	71,2	192,2	144	115,2	291,2	199	159,2	390,2

Digitized by Google

Raumausdehnung 1000 α bei Zimmertemperatur.

Aether	1,60	Quecksilber	0,181
Alkohol	1,10	Rüböl	0,90
Benzol	1,25	Schwefelsäure	0,55
Glyzerin	0,50	Terpentinöl	1,00
Olivenöl	0,72	Wasser	0,18
Petroleum	1,00 bis 0,92		

Für Eisen und Stahl kann bei höheren Temperaturen gesetzt werden

$$1000\,\beta = 0{,}011 + 0{,}000008\,t.$$

Die Ausdehnungszahlen sind im allgemeinen von der Temperatur abhängig; wählt man für sie unveränderliche Mittelwerte und als Längen-, Flächen- und Raumeinheit die bei 0° C, so ist

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1+\beta t_1}{1+\beta t_2}, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{1+2\beta t_1}{1+2\beta t_2}, \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2},$$

worin l_1, F_1, V_1 Länge, Fläche und Inhalt eines Körpers bei der Temperatur t_1; l_2, F_2, V_2 bei der Temperatur t_2 sind.

Da für feste und flüssige Körper die Ausdehnung stets sehr klein ist, kann für diese gesetzt werden

$$l_2 - l_1 = l_1\beta(t_2 - t_1), \qquad F_2 - F_1 = F_1\,2\beta(t_2 - t_1),$$
$$V_2 - V_1 = V_1\alpha(t_2 - t_1).$$

Die Veränderlichkeit der Ausdehnungszahl mit der Temperatur ist in der folgenden Formel und Zahlentafel (nach Holborn & Day und Dittenberger) berücksichtigt:

Ist l_0 die Länge bei 0° C, so ist bei t^0 die Länge:

$$l = l_0(1 + at + bt^2)$$

	a	b	Temperaturbereich
Aluminium	0,000 023 536	0,000 000 007 07	0 bis 610
Gufseisen	0,000 009 794	0,000 000 005 66	0 „ 625
Flufseisen	0,000 011 475	0,000 000 005 3	0 „ 750
Schmiedeisen	0,000 011 705	0,000 000 005 254	0 „ 500
Flufsstahl	0,000 011 181	0,000 000 005 26	0 „ 750
Kupfer	0,000 016 7	0,000 000 004 03	0 „ 625
Nickel	0,000 013 46	0,000 000 003 315	0 „ 1000

Die **Ausdehnungs-** oder **Zusammenziehungskraft** eines prismatischen Stabes bei einer Temperaturänderung von t^0 ist $P = \beta E t F$, wenn E den Elastizitätsmodul und F den Querschnitt des Stabes bezeichnet.

Längen-Schwindmafs einiger Metalle,

d. i. die Verkleinerung der Längenabmessungen eines Gufsstückes während des Erstarrens und Erkaltens.

Blei	1 : 92	Flufsstahl	1 : 64
Bronze	1 : 63	Glockenmetall	1 : 65
Feinkorneisen	1 : 72	Gufseisen	1 : 96

Digitized by Google

Kanonenmetall	1 : 134	Wismut	1 : 265
Messing	1 : 65	Zink, gegossen	1 : 62
Puddelstahl	1 : 72	Zinn	1 : 128
Stabeisen, gewalzt . . .	1 : 55	100 G.-T. Kupfer, 12,5 „ Zinn . .	1 : 134
Stahlguſs	1 : 50		

In Stahl-Walzwerken rechnet man das Schwinden zu rd. 12 mm/m.

Dichte und Volumen des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

(Nach Thiesen, Scheel, Diesselhorst, Hirn, Ramsay & Young u. a.)

Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen
0°	0,99987	1,00013	38	0,99299	1,00706	160	0,9076	1,1018
2	0,99997	1,00003	40	0,9922	1,0078	170	0,8973	1,1145
4	**1,00000**	**1,00000**	45	0,9903	1,0099	180	0,8866	1,1279
6	0,99997	1,00003	50	0,9881	1,0121	190	0,8750	1,1429
8	0,99988	1,00012	55	0,9857	1,0145	200	0,8628	1,1590
10	0,99973	1,00027	60	0,9832	1,0171	210	0,850	1,177
12	0,99953	1,00048	65	0,9806	1,0198	220	0,837	1,195
14	0,99927	1,00073	70	0,9778	1,0227	230	0,823	1,215
16	0,99897	1,00103	75	0,9749	1,0258	240	0,809	1,236
18	0,99862	1,00138	80	0,9718	1,0290	250	0,794	1,259
20	0,99823	1,00177	85	0,9687	1,0324	260	0,779	1,283
22	0,99780	1,00221	90	0,9653	1,0359	270	0,765	1,308
24	0,99732	1,00268	95	0,9619	1,0396	280	0,75	1,34
26	0,99681	1,00320	100	0,9584	1,0434	290	0,72	1,38
28	0,99626	1,00375	110	0,9510	1,0515	300	0,70	1,42
30	0,99567	1,00435	120	0,9435	1,0600	310	0,68	1,46
32	0,99505	1,00497	130	0,9351	1,0694	320	0,66	1,51
34	0,99440	1,00563	140	0,9263	1,0795			
36	0,99372	1,00632	150	0,9172	1,0903			

Dichte und Volumen verflüssigter Gase bei verschiedenen Temperaturen unter Sättigungsdruck.

	Temperatur	Dichte kg/l	Volumen l/kg
Wasserstoff (Dewar 1904)	— 258	0,0754	13,27
	— 252,5	0,0700	14,30
Argon (Baly u. Donnan 1902)	— 185	1,40	0,715
Sauerstoff (Mathias u. Kamerling-Onnes 1911)	— 210	1,275	0,785
	— 182	1,142	0,875
	— 155	0,975	1,025
Stickstoff (Baly u. Donnan 1902)	— 205	0,854	1,17
	— 196	0,813	1,23
	— 185	0,762	1,31

Digitized by Google

	Temperatur	Dichte kg/l	Volumen l/kg
Kohlenoxyd (Baly u. Donnan 1902)	— 205	0,855	1,17
	— 190	0,793	1,26
	— 185	0,772	1,295
Aethylen (Cailletet u. Mathias 1886)	— 21	0,414	2,42
	+ 6	0,310	3,22
Azetylen (Mathias 1909)	— 24	0,519	1,93
	+ 20	0,400	2,50
Chlor (Lange 1900)	— 33	1,555	0,79
	0	1,469	0,88
Kohlensäure (Behn 1900)	— 79 (fest)	1,53	0,654
	— 60	1,191	0,840
	— 30	1,075	0,930
	0	0,925	1,080
	+ 20	0,772	1,295
Ammoniak (Lange 1898, Dieterici 1904)	— 30	0,672	1,49
	0	0,638	1,57
	+ 30	0,597	1,68
	+ 100	0,465	2,15
Schweflige Säure (Lange 1899)	— 30	1,509	0,662
	0	1,435	0,697
	+ 30	1,356	0,737
	+ 100	1,110	0,901

Ausdehnung gasförmiger Körper.

Für die Ausdehnung unter gleichbleibendem Drucke haben alle Gase dieselbe Ausdehnungszahl $\alpha = \frac{1}{273}$, bezogen auf das Volumen bei 0^0 C, also

$$V_2 - V_1 = V_0 \frac{t_2 - t_1}{273} = V_1 \frac{t_2 - t_1}{273 + t_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}.$$

Näheres S. 396 ff.

C. Spezifische Wärme.

Die **Wärmeeinheit** ist die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg Wasser um 1^0 zu erhöhen.

Da diese Wärmemenge für verschiedene Wassertemperaturen etwas verschieden ist, so muß eine bestimmte Temperatur angegeben werden. Gegenwärtig ist man bestrebt,

Digitized by Google

als Normaltemperatur 15° und als normale Wärmeeinheit die Wärmemenge festzulegen, welche 1 kg Wasser von 14,5° auf 15,5° erwärmt. **15°-Kalorie bzw. WE.**

Neben der 15°-WE ist noch die „mittlere WE", d. h. der 100. Teil der Wärme, welche 1 kg Wasser von 0° auf 100° bringt, von Wichtigkeit, da sich viele kalorimetrische Untersuchungen (Eiskalorimeter) auf diese beziehen. Sie ist nach den neuesten Bestimmungen (Behn) der 15°-WE nahezu gleich.

[1 BTU (British Thermal Unit) ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 lbs (Pfd.) Wasser um 1° Fahrenheit zu erwärmen. 1 BTU = 0,252 WE.]

Spezifische Wärme c des Wassers nach Barnes.

t	c	t	c	t	c
0	1,0091	35	0,9971	70	1,0001
5	1,0050	40	0,9971	75	1,0007
10	1,0020	45	0,9973	80	1,0014
15	1,0000	50	0,9977	85	1,0021
20	0,9987	55	0,9982	90	1,0028
25	0,9978	60	0,9988	95	1,0034
30	0,9973	65	0,9994	100	1,0043

Mittlere spez. Wärme c_m des Wassers zwischen 0° und t° nach Dieterici.

t	c_m	t	c_m	t	c_m
20	1,0010	120	1,0020	220	1,0203
40	0,9973	140	1,0046	240	1,0256
60	0,9976	160	1,0077	260	1,0315
80	0,9985	180	1,0113	280	1,0380
100	1,0000	200	1,0155	300	1,0449

$$c_m = 0{,}9983 - 0{,}005184\,\frac{t}{100} + 0{,}006912\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Spezifische Wärme c eines Körpers ist die Wärmemenge in WE, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg des Körpers um 1° zu erhöhen. Sie ist im allgemeinen abhängig von der Temperatur des Körpers.

G kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c erfordern demnach zu einer Temperaturerhöhung von t_1 auf t_2 eine Wärmemenge

$Q = G\,c\,(t_2 - t_1)$ in WE, wenn c unveränderlich ist, oder

$Q = G\int_{t_1}^{t_2} c\,dt$ in WE, wenn c veränderlich ist.

Ist z. B. $c = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \ldots,$

so wird $Q = G\left[\alpha\,(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}\,(t_2^2 - t_1^2) + \frac{\gamma}{3}\,(t_2^3 - t_1^3) \ldots .\right].$

Der Ausdruck $c_m = \frac{1}{t}\int_0^t c\,dt = \alpha + \frac{\beta}{2}\,t + \frac{\gamma}{3}\,t^2 \ldots .$

heißt die mittlere spezifische Wärme zwischen 0° und t°.

Digitized by Google

Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen.

(Nach Gröber.)

a) Für 1 kg:

Salzgehalt in 100 G.-T. der Lösung	− 20°	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°
0			1,006	1,002	0,999	0,998	0,999	1,001	1,003
2			0,966	0,969	0,973	0,977	0,980	0,983	0,986
4			0,944	0,947	0,951	0,955	0,958	0,961	0,964
6			0,923	0,927	0,930	0,933	0,936	0,939	0,942
8			0,904	0,907	0,910	0,913	0,916	0,919	0,922
10			0,885	0,889	0,892	0,895	0,898	0,901	0,903
12			0,869	0,872	0,875	0,878	0,880	0,883	0,885
14		0,851	0,854	0,857	0,860	0,862	0,864	0,867	0,870
16		0,838	0,840	0,843	0,845	0,848	0,850	0,853	0,855
18		0,825	0,827	0,830	0,832	0,834	0,836	0,839	0,841
20		0,812	0,814	0,816	0,818	0,821	0,823	0,824	0,827
22	0,795	0,798	0,801	0,804	0,806	0,808	0,810	0,812	0,814
24		0,787	0,789	0,791	0,793	0,795	0,797	0,799	0,801
26		0,776	0,778	0,780	0,781	0,783	0,785	0,787	0,788

b) Für 1 l:

Salzgehalt in 100 G.-T. der Lösung	− 20°	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°
0			1,006	1,002	0,997	0,993	0,991	0,989	0,986
2			0,981	0,983	0,985	0,986	0,986	0,985	0,983
4			0,973	0,974	0,976	0,977	0,977	0,976	0,974
6			0,966	0,967	0,968	0,968	0,968	0,967	0,965
8			0,960	0,961	0,961	0,961	0,960	0,959	0,957
10			0,954	0,955	0,956	0,955	0,954	0,952	0,950
12			0,950	0,950	0,951	0,949	0,948	0,946	0,944
14		0,946	0,946	0,946	0,947	0,945	0,943	0,942	0,940
16		0,944	0,944	0,944	0,944	0,942	0,940	0,938	0,937
18		0,942	0,942	0,942	0,942	0,940	0,938	0,936	0,934
20		0,941	0,941	0,940	0,939	0,938	0,936	0,934	0,931
22	0,940	0,940	0,940	0,939	0,938	0,936	0,934	0,932	0,929
24		0,939	0,939	0,938	0,936	0,934	0,932	0,930	0,927
26		0,939	0,938	0,937	0,934	0,933	0,931	0,928	0,925

Spezifische Wärme von Gasen und Dämpfen. S. 397 ff.

Digitized by Google

Mittlere spez. Wärme fester und tropfbar flüssiger Körper zwischen 0° und 100°.

Aluminium . .	0,21	Asche	0,20	Aether	0,54
Antimon . . .	0,05	Basalt	0,20	Alkohol . . .	0,58
Blei	0,031	Beton	0,27	Ammoniak . .	1,00
Gold	0,031	Eis	0,50	Anilin	0,49
Konstantan .	0,098	Gips	0,20	Benzol	0,40
Kupfer	0,094	Glas	0,20	Chloroform . .	0,23
Magnesium . .	0,25	Granit	0,20	Essigsäure . .	0,51
Messing . . .	0,092	Graphit	0,20	Glyzerin . . .	0,58
Nickel	0,11	Holz (Eiche) . .	0,57	Maschinenöl .	0,40
Platin	0,032	„ (Fichte) .	0,65	Naphtalin . .	0,31
Quecksilber .	0,033	Holzkohle . .	0,20	Olivenöl . . .	0,40
Eisen u. Stahl	0,115	Koks	0,20	Petroleum . .	0,50
Silber	0,056	Marmor, Kalk-		Schwefelsäure	0,33
Tantal	0,036	stein . . .	0,21	Schweflige	
Zink	0,094	Sandstein . . .	0,22	Säure	0,32
Zinn	0,056	Schlacke . . .	0,18	Terpentinöl .	0,42
		Schwefel . . .	0,18	Sauerstoff	
		Steinkohle . .	0,31	(flüssig) . .	0,347
		Ziegelsteine .	0,22	Stickstoff	
				(flüssig) . .	0,430

Mittlere spez. Wärme des Eisens c_0^t zwischen 0 und t^0 und Wärmemenge Q_0^t zur Erwärmung von 1 kg Eisen von 0 auf t^0 nach Oberhoffer.

t	c_0^t	Q_0^t	t	c_0^t	Q_0^t
300	0,126	37,7	800	0,170	136
400	0,131	52,2	900	0,170	153
500	0,137	68,3	1000	0,168	168
600	0,142	85,0	1200	0,167	200
700	0,159	111,6	1400	0,167	233

D. Temperatur von Mischungen.

Richmannsche Regel: $G + G_1$ kg einer Mischung, entstanden aus G kg eines Körpers von t^0 und der spezifischen Wärme c und aus G_1 kg eines Körpers von t_1^0 und der spezifischen Wärme c_1, haben eine Temperatur von

$$t_m = \frac{cGt + c_1 G_1 t_1}{cG + c_1 G_1}; \quad \text{allgemein } t_m = \frac{\Sigma cGt}{\Sigma cG}.$$

Um G kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c und der Temperatur t^0 auf die Temperatur t_m^0 zu bringen, sind G_1 kg eines Körpers von der spezifischen Wärme c_1 und t_1^0 erforderlich, wobei

$$G_1 = \frac{c}{c_1} G \frac{t_m - t}{t_1 - t_m}.$$

Digitized by Google

Werden bei unveränderlichem Drucke G kg eines Gases (entsprechend V cbm) von t^0 mit G_1 kg desselben (entsprechend V_1 cbm) von $t_1{}^0$ gemischt, so ist die Mischungstemperatur

$$t_m \frac{Gt + G_1 t_1}{G + G_1} = \frac{V + V_1}{V : T + V_1 : T_1} - 273,$$

worin T und T_1 die absoluten Temperaturen sind.

Kältemischungen.

Die niedrigste Temperatur, die eine Kältemischung hervorbringen kann, ist der **Gefrierpunkt** der entstehenden Lösung.

Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt von °	auf °	Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt von °	auf °
Natriumphosphat	9			Natriumsulfat	8		
Salmiak	6	12,5	−6	Salpeter	5	10	−15
verd.Salpetersäure	4			Salmiak	5		
				Wasser	16		
Natriumsulfat	6						
Ammoniumnitrat	5	10	−25	Natriumsulfat	5		
verd.Salpetersäure	4			verd. Schwefelsäure	4	10	−16
Salmiak	5						
Salpeter	5	10	−12	Chlornatrium	1	0	−18
Wasser	16			Schnee	1		
Natriumkarbonat	1			Ammoniumnitrat	1		
Ammoniumnitrat	1	10	−14	Wasser	1	10	−16
Wasser	1						
Natriumsulfat	3			Natriumphosphat	9		
verd.Salpetersäure	2	10	−19	verd.Salpetersäure	4	15	−9
Natriumsulfat	6			Kalihydrat	4		
Salmiak	4			Schnee	3	0	−37
Salpeter	2	10	−23				
verd.Salpetersäure	4			verd. Schwefelsäure	1		
				verd.Salpetersäure	1	−19	−40
Chlornatrium	1			Schnee	2		
Schnee	3	0	−17,7				
				verd. Schwefelsäure	1		
Salpeter	1			Schnee	1	−5	−41
Salmiak	1	8	−24				
Wasser	1						
				Chlorcalcium	3		
verd.Salpetersäure	1			Schnee	2	0	−33
Schnee	1	−14	−35				
				Chlorcalcium	2		
Natriumsulfat	8			Schnee	1	0	−42
Salzsäure	5	10	−18				

Digitized by Google

E. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme.

1. Schmelz- oder Gefrierpunkt verschiedener Stoffe unter dem Drucke von 760 mm Q.-S.

	Grad		Grad
Wolfram	etwa 3000	Schwefel	113
Tantal	„ 2900	Natrium	97,5
Iridium	„ 2300	Naphtalin	80
Rhodium	„ 2000	Wachs	64
Platin	1750	Kalium	62
Palladium	1550	Paraffin	54
Berliner Porzellan	1550	Stearin	50
Eisen, rein	1510	Walrat	49
Nickel	1450	Phosphor	44
Flufseisen	1350÷1450	Benzol	5,6
Stahl	1300÷1400	Wasser	0
Eisenhochofenschlacke	1300÷1430	Seewasser	— 2,5
Mangan	1245	Rüböl	— 3,5
Gufseisen, graues	1200	Anilin	— 6
„ weifses	1130	Terpentinöl	— 10
Kupfer	1083	Kochsalzlösung, gesätt.	— 18
Gold	1064	Leinöl	— 20
Silber	961	Glyzerin (S. 379)	— 20
Schmelzfarben (Emailfarben)	960	Quecksilber	— 39
Delta-Metall	950	Chlorcalciumlösung, gesätt.	— 40
Messing	etwa 900	Chloroform	— 64
Bronze	„ 900	schweflige Säure	— 76
Aluminium	657	Ammoniak	— 78
Antimon	630	Kohlensäure	— 79
Zink	419	Toluol	— 92
Blei	327	Chlor	— 102
Cadmium	321	Schwefelkohlenstoff	— 113
Wismut	269	Aether	— 118
Zinn	232	Alkohol (S. 379)	— 118
Weichlote	135÷210	Stickstoff	— 210
Wismutlote	94÷128	Sauerstoff	— 227
Kautschuk	125		

Digitized by Google

Gefrierpunkte

von wässerigem Glyzerin (nach Bolley)			von wässerigem Alkohol (nach F. Beilstein)			
Gewichtprozent Glyzerin	Spezifisches Gewicht	Gefrierpunkt Grad	Gewichtprozent Alkohol	Gefrierpunkt Grad	Gewichtprozent Alkohol	Gefrierpunkt Grad
10	1,0245	— 1,0	2,58	— 1	21,7	— 12
20	1,0498	— 2,5	5,22	— 2	23,8	— 14
30	1,0771	— 6,2	7,36	— 3	26,0	— 16
40	1,1045	— 17,2	9,58	— 4	28,0	— 18
45	1,1183	— 26,2	11,50	— 5	30,0	— 20
50	1,1320	— 32,0	13,27	— 6	33,5	— 24
60	1,1582	unter — 35,0	16,53	— 8	37,3	— 28
			19,09	— 10	41,2	— 32

2. Siedepunkte.

Siedepunkt verschiedener Stoffe unter dem Drucke von 760 mm Q.-S. (S. 413 u. 477.)

	Grad		Grad
Zink	915	Chloroform	61
Schwefel	445	Schwefelkohlenstoff	46
Quecksilber	357	Aether	35
Leinöl	316	schweflige Säure	— 10
Paraffin	300	Chlormethyl	— 24
Glyzerin	290	Ammoniak	— 33
Phosphor	290	Chlor	— 34
Naphthalin	218	Kohlensäure	— 78
Anilin	184	Azetylen	— 84
Chlorcalciumlösung, ges.	180	Aethylen	— 104
Terpentinöl	160	Sauerstoff	— 183
Toluol	110	Argon	— 186
Kochsalzlösung, gesätt.	108	Kohlenoxyd	— 190
Wasser	100	Stickstoff	— 196
Benzol	80	Wasserstoff	— 253
Alkohol (S. 477), absoluter	78,5	Helium	— 268

Siedepunkt t des Wassers bei verschiedenen Barometerständen b in mm Q.-S. (Nach Wiebe.)

b	t	b	t	b	t	b	t
680	96,92	715	98,30	745	99,44	775	100,55
685	97,12	720	98,49	750	99,63	780	100,73
690	97,32	725	98,69	755	99,82	785	100,91
695	97,52	730	98,88	760	100,00	790	101,09
700	97,71	735	99,07	765	100,18	795	101,26
705	97,91	740	99,26	770	100,37	800	101,44
710	98,11						

Digitized by Google

c. Schmelzwärme.

Die **Schmelzwärme** eines festen Körpers ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg des Körpers aus der festen in die flüssige Form ohne Erhöhung der Temperatur überzuführen. Dieselbe Wärmemenge wird beim Erstarren des flüssigen Körpers frei.

Schmelzwärme verschiedener Körper.

Aluminium . . .	77	Hochofenschlacke	(50)	Quecksilber .	2,8
Benzol	30	Kupfer	43	Schwefel . .	9
Blei	6	Naphthalin . . .	36	Silber . . .	21
Cadmium . . .	14	Paraffin	35	Wismut . . .	13
Eis (Wasser) . .	80,0	Phosphor . . .	5	Zink	28
Eisen	(30)	Platin	27	Zinn . . .	14

d. Verdampfungswärme.

Die **Verdampfungswärme** r einer Flüssigkeit ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg der Flüssigkeit bei unveränderlichem äußeren Drucke in Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln. Dieselbe Wärmemenge wird frei, wenn der Dampf kondensiert.

Die Verdampfungswärme ist abhängig von der Temperatur, bei der die Verdampfung stattfindet.

Tafeln der Werte von r für Wasserdampf S. 417 ff.

Verdampfungswärme bei der Siedetemperatur.

Aether	90	Chloroform	58	Schweflige	
Alkohol	210	Kohlensäure (bei 0°)	56	Säure (bei 0°)	91
Ammoniak (bei 0°)	300	Quecksilber	68	Stickstoff .	48
Anilin	110	Sauerstoff	51	Terpentinöl	70
Benzol	94	Schwefel	362	Toluol . . .	85
Chlor	62	Schwefelkohlenstoff .	85	Wasser . .	539
Chlormetyl (bei 0°)	97	Schweflige Säure . .	95	Wasserstoff .	123

Formeln für die Verdampfungswärme:

Benzol: $r = 107{,}05 - 0{,}158\ t$ (Griffith & Marshall)

Sauerstoff: $r = 60{,}67 - 0{,}208\ T$ (Alt)
Stickstoff: $r = 68{,}85 - 0{,}2736\ T$ „ } $(T = t + 273)$

F. Lösung von Gasen in Wasser.

1 cbm Wasser kann bei einem Drucke von 760 mm Q.-S. und verschiedenen Temperaturen die folgenden Gasmengen in cbm von 0° und 760 mm lösen.

$t =$	0°	20°	100°	$t =$	0°	20°	100°
Luft	0,032	0,020	0,012	Chlor	5,0	2,5	0,00
Stickstoff .	0,026	0,017	0,0105	Chlorwasserstoff . .	560	480	—
Sauerstoff .	0,053	0,034	0,0185	Kohlenoxyd	0,039	0,025	—
Wasserstoff	0,023	0,020	0,018	Schwefelwasserstoff	5,0	2,8	0,87
Kohlensäure	1,87	0,96	0,26	Schweflige Säure .	87	43	—
Azetylen . .	1,89	1,12	—	Ammoniak	1250	700	—

Digitized by Google

Lösung von Ammoniak in Wasser. (Nach H. Molller.)

1 kg Wasser löst bei den angegebenen Drücken und Temperaturen die folgenden Mengen Ammoniak in kg.

at abs.	0°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
$p=0{,}1$	0,22	0,085	0,043	0,012											
0,2	0,35	0,172	0,109	0,060	0,0235										
0,5	0,57	0,337	0,247	0,173	0,111	0,065									
1,0	0,88	0,515	0,400	0,304	0,224	0,158	0,104	0,061	0,026						
1,5	1,23	0,661	0,521	0,404	0,311	0,232	0,167	0,111	0,067	0,031	0,007				
2,0	1,62	0,812	0,632	0,497	0,389	0,299	0,224	0,159	0,106	0,064	0,020				
2,5	2,01	0,953	0,735	0,580	0,459	0,357	0,274	0,222	0,142	0,093	0,053	0,020			
3,0	2,40		0,839	0,659	0,524	0,414	0,324	0,245	0,179	0,124	0,075	0,040	0,0077		
4,0			1,044	0,808	0,639	0,512	0,406	0,318	0,241	0,177	0,123	0,078	0,040	0,008	
5,0				0,961	0,758	0,605	0,482	0,383	0,300	0,228	0,166	0,114	0,071	0,0345	0,003
6,0					0,873	0,694	0,556	0,447	0,353	0,274	0,208	0,140	0,101	0,060	0,025
7,0					0,989	0,780	0,629	0,506	0,405	0,318	0,247	0,185	0,131	0,086	0,047
8,0						0,877	0,699	0,562	0,453	0,362	0,283	0,217	0,159	0,117	0,068
9,0						0,972	0,776	0,624	0,502	0,404	0,318	0,247	0,186	0,134	0,089
10,0						1,072	0,855	0,686	0,553	0,444	0,352	0,276	0,211	0,155	0,108

II. Wärmeübergang.

A. Wärmeübergang durch Wärmeleitung.

1. Wärmeübergang zwischen einer Körperoberfläche (Wandfläche) und einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit.

Bedeutet

F die Gröfse der Fläche in qm,
ϑ die Temperatur der Fläche in Grad,
t die Temperatur der Flüssigkeit in Grad,
z die Zeitdauer des Wärmeüberganges in st,
Q die übergehende Wärmemenge in WE,

so ist $$Q = \alpha F z (t - \vartheta).$$

Die **Wärme-Uebergangszahl** α, d. i. die stündlich auf 1 qm Fläche und 1 Grad Temperaturunterschied übergehende Wärmemenge, ist hauptsächlich von der Art der Flüssigkeit und ihrem Bewegungszustande abhängig; für α kann i. M. etwa gesetzt werden:

1) für **siedendes Wasser:** $\alpha = 2000$ bis 6000, α steigt mit der Temperatur und dem Temperaturunterschiede, guter Umlauf der Flüssigkeit erhöht, mangelhafter erniedrigt diesen Wert;

2) für **kondensierenden Wasserdampf** α bis zu 10 000, Luftfreiheit und rasche Entfernung des kondensierten Wassers begünstigen den Wärmeübergang;

3) für **nicht siedendes Wasser,** wenn ruhend, α etwa $= 500$ (es können sich höhere oder kleinere Werte ergeben, je nachdem die Form der Wandfläche die in der Flüssigkeit entstehenden inneren Strömungen begünstigt oder beschränkt); α steigt mit der Temperatur und dem Temperaturunterschiede bis 3000;

wenn die Flüssigkeit durch eine Mischvorrichtung (Rührwerk) bewegt ist, $\alpha = 2000$ bis 4000, je nach Wirksamkeit des Rührwerkes;

Digitized by Google

4) ruhende Luft.

Ist Δ der Temperaturunterschied zwischen der Oberflächentemperatur und der mittleren Temperatur der Raumluft, so ist für **senkrechte ebene Flächen** nach Nusselt $\alpha = 3{,}0 + 0{,}08\,\Delta$ für $\Delta < 10^0$

$$\alpha = 2{,}2\sqrt[4]{\Delta} \quad \text{für } \Delta > 10^0.$$

Diese Formeln liefern für

$\Delta =$	0	5	10	25	50	100	200	300	400
$\alpha =$	3,0	3,4	3,8	4,9	5,9	7,0	8,3	9,1	9,8.

Außerdem ist α proportional der Quadratwurzel aus der Dichte der Luft, also proportional der Wurzel aus dem Barometerstande und umgekehrt proportional der aus der absoluten Lufttemperatur.

Der Wärmeübergang von einem **wagerechten Rohre** an ruhende Luft ist (berechnet von Nusselt nach Versuchen von Wamsler und Hinlein)

$$\alpha = 1{,}02\sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}}.$$

d ist der Rohrdurchmesser in m.

Zahlentafel 1 ist nach dieser Formel berechnet.

Tafel 1.

$\Delta =$	10° C	50° C	100° C	200° C	300° C	400° C
$d =$ 0,01	5,74	8,58	10,2	12,1	13,4	14,4
0,05	3,84	5,74	6,82	8,11	8,97	9,64
0,10	3,23	4,82	5,74	6,82	7,55	8,11
0,20	2,71	4,06	4,82	5,74	6,35	6,82
0,30	2,45	3,66	4,36	5,18	5,74	6,16
0,40	2,28	3,41	4,06	4,82	5,34	5,74
0,50	2,16	3,23	3,84	4,56	4,95	5,43

Der Wärmeübergang in **senkrechten Luftschichten.** Die durch Strahlung ausgetauschte Wärme wird nach den unter B angegebenen Formeln berechnet; die übergeleitete Wärme ist nach Nusselt

$$Q = \frac{\lambda' \cdot \Delta}{d} z \cdot F.$$

Ist d die Stärke der Luftschicht, so ist der Beiwert λ':

$d =$	0,04 bis 0,14	0,015	0,01 m
$\lambda' =$	0,070	0,035	0,020 WE/m . st . °C.

5) Der **Wärmeübergang in Röhren.**

Bei Wirbel-Strömung ist (nach Nusselt):

α) Gase und überhitzte Dämpfe.

$$\alpha = \frac{18{,}86\ \lambda_{Wand}}{d^{0{,}16}\,\mathfrak{L}^{0{,}054}}\left(\frac{w\,C}{\lambda}\right)^{0{,}786}\frac{\text{WE}}{\text{m}^3 \cdot \text{st} \cdot {}^0\text{C}}.$$

Hierin ist

$\mathfrak{L}$ die Rohrlänge in m,

λ_{Wand} die Wärmeleitzahl des Gases bei der Temperatur der Rohrwand in WE/st . m . °C,

λ die Wärmeleitzahl des Gases bei der mittleren Temperatur im Rohre in WE/st . m . °C,

Digitized by Google

w die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in m/sk,
C die spezifische Wärme des Gases für 1 cbm bei unveränderlichem Drucke und dem Zustande des Gases im Rohre,
d der Rohrdurchmesser in m für ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt; für eine andere Querschnittsform ist $d = \frac{4F}{S}$ zu setzen, wenn F der vom Gas durchflossene Querschnitt und S der Teil seines Umfanges ist, durch den die Wärme strömt.

Die Gleichung ist abgeleitet aus Versuchen an einem Messingrohre von 0,022 m Durchm. mit Druckluft (1 bis 16 at), Kohlensäure und Leuchtgas.

Führt man das Gewicht G der in der Sekunde durch das Rohr strömenden Gasmenge ein, so geht die Gleichung über in

$$\alpha = \frac{22{,}8\,\lambda_{\text{Wand}}}{\varrho^{0{,}054}\,d^{1{,}732}} \left(\frac{G \cdot c_p}{\lambda}\right)^{0{,}786}.$$

Zur Auswertung der Formeln dienen Taf. 2, 3 und 4.

Tafel 2.

$\varrho =$	0,25	0,5	1	1,5	2
$\frac{1}{\varrho^{0{,}054}} =$	1,078	1,038	1	0,978	0,963

Tafel 3.

d	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,100
$\frac{1}{d^{0{,}16}}$	2,334	2,089	1,870	1,753	1,674	1,615	1,445
$\frac{1}{d^{1{,}732}}$	9450	2910	876	434	264	179	54

Tafel 4. $(a \cdot b)^{0{,}786}$.

$a =$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00
$b = 0{,}1$	0,164	0,205	0,225	0,254	0,282	0,337	0,388	0,438	0,487	0,534	0,580	0,669	0,756	0,840	0,921
1,0	1,000	1,027	1,375	1,552	1,724	2,06	2,37	2,68	2,97	3,26	3,54	4,09	4,62	5,13	5,62
10	6,11	7,28	8,40	9,48	10,50	12,55	14,5	16,3	18,2	19,9	21,6	25,0	28,2	31,3	34,4
100	37,3	44,5	51,3	58,0	64,3	76,7	88,5	99,9	111	122	132	153	172	191	210
1000	228	272	314	354	393	469	540	610	678	744	808	932	1050	1170	1280
10 000	1390	1660	1920	2160	2400	2860	3300	3730	4140	4540	4940	5700	6430	7140	7840

Beispiel: Durch ein Rohr von 25 mm l. W. und 0,5 m Länge ströme überhitzter Wasserdampf von 8 at Druck und 400° C mit 20 m Geschwindigkeit. Die Temperatur der Rohrwand sei 300° C. Wie grofs ist die Wärmeübergangszahl?

Nach Tafel 8 ist $\lambda_{\text{wand}} = 0{,}0296$, $\lambda = 0{,}0348$.

Da ferner

$$C = \frac{c_p}{v} = \frac{0{,}52}{0{,}3928} = 1{,}325,$$

wird

$$\alpha = 18{,}86 \cdot 0{,}0296 \cdot 1{,}84 \cdot 1{,}038 \left(\frac{1{,}325 \cdot 20}{0{,}0348}\right)^{0{,}786}$$
$$= 1{,}067\,(762)^{0{,}786} = 1{,}067\,(762 \cdot 100)^{0{,}786}$$
$$= 1{,}067\,(a \cdot b)^{0{,}786} = 1{,}067 \cdot 184 = 196 \text{ WE/st} \cdot \text{m}^2.$$

Digitized by Google

β) **Wasser.**

Nach Versuchen von Sonnecken

1) glatte Oberfläche (Messingrohr)

$$\alpha = 2020 \frac{w^{0,9}}{d^{0,1}} (1 + 0{,}014\, t_i) \frac{\text{WE}}{\text{st} \cdot \text{m}^2 \cdot {}^0\text{C}}.$$

2) rauhe Oberfläche (Gasrohr)

$$\alpha = 735 \frac{w^{0,7}}{d^{0,3}} (1 + 0{,}014\, t_i) \frac{\text{WE}}{\text{st} \cdot \text{m}^2 \cdot {}^0\text{C}}.$$

Hierin ist
w die mittlere Wassergeschwindigkeit in m/sk,
d der innere Rohrdurchmesser in m,
t_i die innere Rohrwandtemperatur in °C.

Zur Vereinfachung der Rechnung dienen die Tafeln:

Tafel 5.

t_i	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$(1 + 0{,}014\, t_i$	1,0	1,14	1,28	1,42	1,56	1,70	1,84	1,98	2,12	2,26	2,40

Tafel 6.

w	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1,0
$w^{0,9}$	0,1259	0,2349	0,3384	0,4384	0,5359	0,7254	1,0
$w^{0,7}$	0,1995	0,3241	0,4305	0,5265	0,6156	0,7791	1,0

w	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
$w^{0,9}$	1,440	1,866	2,281	2,688	3,088	3,482	4,257
$w^{0,7}$	1,328	1,625	1,899	2,158	2,404	2,639	3,085

Tafel 7.

d	0,005	0,01	0,015	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10
$\frac{1}{d^{0,1}}$	1,702	1,585	1,522	1,479	1,420	1,380	1,349	1,259
$\frac{1}{d^{0,3}}$	0,4931	0,3981	0,3525	0,3234	0,2863	0,2627	0,2456	0,1995

6) Wärmeabgabe der Mantelfläche eines um eine wagerechte Achse **umlaufenden Zylinders** an Luft (nach Versuchen von Hinlein an einer Trommel von 0,5 m Durchm.). (Dynamos, Schwungräder usw.)

1. Glatte Oberfläche (Blankkupfer).

$w =$	0	5	10	15	20	25	30	m/sk
$\alpha =$	2,20	8,80	12,40	14,70	15,45	16,10	16,40	WE/qm . st . °C.

2. Rauhe Oberfläche (schwarzer Mattlack).

$w =$	0	5	10	15	20	25	30	m/sk
$\alpha =$	2,20	10,96	15,03	17,58	19,93	22,15	24,53	WE/qm . st . °C.

Digitized by Google

2. Wärmedurchgang durch eine ebene Wand von gleichförmiger Dicke, die zwei Flüssigkeiten trennt.

Bedeutet

t_1 die Temperatur der heifsen Flüssigkeit in ^{0}C,
t_2 die Temperatur der kalten Flüssigkeit in ^{0}C,
ϑ_1 und ϑ_2 die Temperaturen der Wandoberflächen in ^{0}C,
F die Gröfse der Wand in qm,
α_1 und α_2 die Wärmeübergangszahlen der beiden Flüssigkeiten,
δ die Dicke der Wand in m,
λ die Wärme-Leitzahl der Wand (Q und z S. 381),

so ist $$Q = k F z (t_1 - t_2).$$

Die **Wärme-Durchgangszahl** k berechnet sich aus

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}}.$$

Die Wandtemperaturen sind

$$\vartheta_1 = t_1 - \frac{k}{\alpha_1}(t_1 - t_2), \qquad \vartheta_2 = t_2 + \frac{k}{\alpha_2}(t_1 - t_2).$$

Wärmeleitzahl λ für verschiedene Stoffe

[in WE : (m . st . ^{0}C)],*)

d. i. die stündlich durch 1 qm Fläche des Stoffes zu einer anderen im Abstande von 1 m übertretende Wärmemenge bei 1 Grad Temperaturunterschied beider Flächen

Alkohol	0,18	Kalkstein	0,80
Aluminium	175	Kautschuk	1,7 bis 0,3
Asbestschiefer	0,19	Kesselstein	2
Asphalt	0,60	Kiefernholz, ⊥ zur Faser	0,13
Beton 1 : 4	0,65	„ ∥ „	0,30
„ 1 : 12	0,70	Kies	0,32
Blei	30	Konstantan	200
Bruchsteinmauerwerk	1,3 bis 2,1	Kreide	0,8
Eichenholz, ⊥ zur Faser	0,18	Kupfer	320
„ ∥ „	0,31	Linoleum	0,16
Eis	1,5	Marmor	2,5
Eisen	56	Maschinenöl	0,1
Flufssand, normal	0,97	Messing	50 bis 100
„ ganz trocken	0,28	Nickel	50
Gips	0,37	Olivenöl	0,15
Glas, Jenaer XVI u. 39	0,8	Petroleum	0,13
Glyzerin	0,25	Platin	60
Gold	250	Porzellan	0,9
Hohlziegelmauerwerk	0,28	Quecksilber	6,5

*) Landolt & Börnstein, Phys.-Chem. Tab.; Kohlrausch, Prakt. Physik; Gröber und Poensgen.

Digitized by Google

Sandstein	1,44	Wasserstoff	0,14
Schamotte bei 50° C	0,50	Zement	0,78
„ „ 565° C	1,32	Ziegel (Maschinenziegel)	0,45
Silber	360	Ziegelmauerwerk	0,35
Steinkohle	0,12	Zink	95
Verputz	0,68	Zinn	54
Wasser	0,5		

$$\lambda_{Luft} = 0{,}01894\ (1 + 0{,}00228\ t)$$

$$\lambda_{Wasserdampf} = 0{,}01405\ (1 + 0{,}00369\ t).$$

Tafel 8.

$t =$	0	50	100	150	200	250	300	350	400° C
$\lambda_{Luft} =$	0,0189	0,0211	0,0233	0,0254	0,0276	0,0297	0,0319	0,0341	0,0362
$\lambda_{Wasserdampf} =$	0,0141	0,0166	0,0192	0,0218	0,0244	0,0270	0,0296	0,0322	0,0348

Wärmeleitzahlen für Isolierstoffe.

(Nach Nusselt.)

Stoff	Gewicht von 1 cbm kg	Wärmeleitzahl bei einer Temperatur von 0°	50°	100°	150°	200°	300°	400°	500°
Asbest	576	0,130	0,153	0,167	0,175	0,180	0,186	0,192	0,198
Gebrannte Kieselgurformsteine für Heifsdampfleitungen	200	0,064	0,071	0,078	0,085	0,092	0,106	0,120	
Isolierkomposition (lose)	405	0,060	0,070	0,076	0,079	0,081			
dieselbe mit Wasser angerührt und getrocknet	690	—	—	—	0,100	0,120 (bei 220°)			
Kieselgur (lose)	350	0,052	0,060	0,066	0,070	0,074	0,078		
dieselbe mit Wasser angerührt und getrocknet	580	—	—	—	0,083	—	0,123 (bei 350°)		
Baumwolle	81	0,047	0,054	0,059					
Seidenzopf	147	0,039	0,047	0,052					
Seide	101	0,038	0,045	0,051					
Schafwolle	136	0,033	0,042	0,050					
Korkmehl	161	0,031	0,041	0,048	0,052	0,055			

Digitized by Google

Stoff	Gewicht v. 1 cbm kg	Temperaturbereich	Wärmeleitzahl
Rheinischer Bimskies . . .	292	20— 65	0,20
Hochofenschaumschlacke . .	360	25—128	0,095
Torfmull II	195	23— 36	0,070
Torfmull I	160	20— 40	0,055
Korkstein (asphaltiert) . . .	200	10— 57	0,061
Sägemehl	215	20—136	0,055
Blätterholzkohle	190	20— 80	0,056

Wärmeleitzahlen für Isolierstoffe bei tiefen Temperaturen.

(Nach Gröber.)

Stoff	Gewicht v. 1 cbm kg	Wärmeleitzahl bei der Temperatur				
		0^0	-50^0	-100^0	-150^0	-200^0
Asbest . .	702	0,201	0,196	0,190	0,183	0,134
„ . .	470	0,133	0,127	0,117	0,100	0,071
Baumwolle .	81	0,0484	0,0432	0,0380	0,0328	0,0276
Seide . . .	100	0,0432	0,0377	0,0323	0,0269	0,0215

Einige besondere Fälle des Wärmedurchganges durch ebene Metallwände von gleichförmiger Dicke.

Setzt man $\frac{1}{k_0} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$, so wird $k = \frac{k_0}{1 + k_0 \frac{\delta}{\lambda}}$.

Von Dampf an siedendes Wasser . . . . . $k_0 = 3000$ bis 5000
Von Dampf an nicht siedendes Wasser:
Flüssigkeit ruhend . . . . . $k_0 = 300$ bis 600
Flüssigkeit strömend . . $k_0 = 1700 \sqrt[3]{w}$ ($w = 0{,}05$ bis 2 m/sk)
Flüssigkeit durch Rührwerk bewegt . . . . $k_0 = 1500$ bis 2500.

Bemerkung. Für dünne Wände, besonders für solche aus Kupfer oder Messing, kann $k = k_0$ gesetzt werden.

Bei Wärmedurchgang durch eine ebene Metallwand zwischen Luft (Gas) und Wasser (siedend und nicht siedend) oder gesättigtem Wasserdampfe kann in der Regel gesetzt werden

$k = \alpha$ (Luft)

$\vartheta_1 = \vartheta_2$ gleich der Temperatur des Wassers bzw. Dampfes.

Von Luft an Luft $k = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Digitized by Google

Wärmedurchgang bei veränderlichen Flüssigkeitstemperaturen.

Wenn sich die Temperaturen der Flüssigkeiten infolge des Wärmedurchganges ändern zwischen den Werten t_1' und t_1'' bzw. t_2' und t_2'', so ist

$$Q = k F z \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2'')}{\ln \frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''}},$$

und wenn G_1 und G_2 die Mengen (in kg) und c_1 und c_2 die spezifischen Wärmen der beiden Flüssigkeiten (S. 374) sind:

$$Q = c_1 G_1 (t_1' - t_1'') \quad \text{bzw.} \quad Q = c_2 G_2 (t_2'' - t_2').$$

Dieselben Formeln haben auch Gültigkeit, wenn die Flüssigkeiten längs der Heizfläche strömen (Abb. 1 u. 2).

Abb. 1.

Gleichstrom.

Abb. 2.

Gegenstrom.

Angenähert ist in allen Fällen

$$Q = k F z \left(\frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2} \right).$$

Die Genauigkeit dieser Formel zeigt folgende Tafel, die auch zur Verbesserung der angenäherten Rechnung benutzt werden kann.

$\frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''} = \begin{cases} \\ \end{cases}$	1	1,5 $^2/_3$	2 $^1/_2$	3 $^1/_3$	4 $^1/_4$	5 $^1/_5$	10 $^1/_{10}$	100 $^1/_{100}$
$\frac{Q \text{ (angenähert)}}{Q \text{ (genau)}} =$	1	1,014	1,038	1,099	1,154	1,210	1,410	2,35

Ist nur die Temperatur einer der beiden Flüssigkeiten veränderlich, so gelten nach Einführung von $t_1' = t_1''$ bzw. $t_2' = t_2''$ dieselben Formeln sowie auch die Fehlertafel.

Wärmeübergang von Dampf an Kühlwasser.

Wenn der Dampf kondensiert und das Kondensat abgekühlt wird, ist die Kühlfläche für beide Teile des Vorganges gesondert zu berechnen.

Wärmedurchgang durch eine zusammengesetzte Wand.

Besteht eine Wand aus mehreren fest aneinander liegenden Schichten von den Dicken δ, δ', δ'' . . . mit den Wärmeleitzahlen λ, λ', λ'' . . ., so ist $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta'}{\lambda'} + \frac{\delta''}{\lambda''} + \cdots\cdots$

Digitized by Google

Ist eine Heizfläche (δ, λ) durch eine Schicht (δ', λ') verunreinigt, so ist der Wärmedurchgang im Verhältnis zu dem der reinen Wand

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{k'}{k} = \frac{1}{1 + \frac{\delta'}{\lambda'} k}.$$

Es sei z. B. eine Verdampferheizfläche, für die im reinen Zustande $k = 3000$ betrage, mit einem Kalkniederschlage bedeckt, $\delta' = 0{,}001$ m, $\lambda' = 1$, dann ist $Q' : Q = 1/4$. Dieselbe Schicht in einem Dampfkessel mit $k = 20$ ergibt $Q' : Q = 0{,}98$.

3. Wärmedurchgang durch zylindrische Rohrwände.

Ist aufser den früheren Bezeichnungen d_a der äufsere, d_i der innere Rohrdurchmesser in m, l die Länge des Rohres in m, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_a}{d_i}},$$

wenn sich die wärmere Flüssigkeit innen befindet; im umgekehrten Falle sind α_1 und α_2 zu vertauschen.

Besteht die Rohrwand aus zwei Schichten (isoliertes Rohr) vom Leitungsvermögen λ_i und λ_a und ist d_m der Durchmesser der Trennungsfläche, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_m}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_a} \ln \frac{d_a}{d_m}}.$$

Für **einfache Metallrohre** kann mit genügender Genauigkeit von den Formeln für ebene Flächen Gebrauch gemacht werden (S. 385 ff.); jedoch ist folgendes zu beachten:

Wenn α_1 und α_2 nicht sehr voneinander abweichen, so ist die Heizfläche F auf den mittleren Rohrdurchmesser $\frac{1}{2}(d_a + d_i)$ zu beziehen.

Sind α_1 und α_2 sehr verschieden, so ist stets bei Berechnung der Heizfläche der Durchmesser zu wählen, der auf der Seite der Flüssigkeit mit der kleineren Uebergangszahl liegt.

Bei Bestimmung der Kesselheizfläche ist immer für Feuerrohre die innere, für Wasserrohre die äufsere Rohrfläche zugrunde zu legen; für Ueberhitzer die mittlere.

B. Wärmeübergang durch Strahlung.

Stehen sich zwei Körper von verschiedener Temperatur gegenüber, so tauschen sie Wärme durch Strahlung aus, wenn ihr Zwischenraum mit einem für strahlende Wärme durchlässigen Körper ausgefüllt ist. Der Körper 1 strahlt Wärme nach dem Körper 2 aus, und dieser sendet Wärmestrahlen gegen jenen, so dafs sich die vom heifsen zum kalten Körper übergestrahlte Wärme als Unterschied zweier Wärmemengen ergibt.

Das Emissions- oder Strahlungsvermögen eines Körpers ist die in der Zeiteinheit von der Oberflächeneinheit des Körpers ausgestrahlte Wärme.

Das Absorptionsvermögen eines Körpers ist das Verhältnis der von einem Oberflächenteil absorbierten Wärme zu der auf diese Fläche auf-

Digitized by Google

getroffenen Strahlung. Der absolut schwarze Körper absorbiert die gesamte auffallende Strahlung; er hat also das Absorptionsvermögen 1.

Einige **Gesetze der Wärmestrahlung** sind:

a. Das Kirchhoffsche Gesetz.

Das Verhältnis von Emission und Absorption eines Körpers bei einer Temperatur ist für alle Körper gleich der Emission des absolut schwarzen Körpers. Dieses Gesetz gilt streng nur für die Strahlung einer Wellenlänge. Für die bei praktischen Problemen auftretende Gesamtstrahlung gilt es sehr angenähert.

b. Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz.

Das Strahlungsvermögen des absolut schwarzen Körpers ist der 4. Potenz seiner absoluten Temperatur proportional.

Die in z Stunden von der Oberfläche F in qm des schwarzen Körpers von der absoluten Temperatur $T = t + 273$ ausgestrahlte Wärme ist:

$$Q = CFz\ (T/100)^4 \text{ WE.}$$

C ist die Strahlungszahl.

Für andere Körper gilt dieses Gesetz nur angenähert, aber mit einer für viele technische Zwecke genügenden Genauigkeit. Folgende Tafel 9 enthält die für einige Körper bestimmte Strahlungszahl C nach Versuchen von Nusselt, Sigl, Wamsler und Westphal.

Die Strahlungskonstante reiner Metalle nimmt mit zunehmendem Wärmeleitvermögen ab.

Zur Berechnung der zwischen zwei Körpern durch Strahlung ausgetauschten Wärme dient:

c. Das Lambertsche Gesetz.

Die von dem Oberflächenelement eines Körpers in einer Richtung ausgestrahlte Wärme ist dem Cosinus des Winkels proportional, den jene Richtung mit der Winkelrechten zum Flächenelement einschliefst.

Es gilt nur für matte Oberflächen, welche Wärmestrahlen nicht regelmäfsig zurückstrahlen.

Der einfachste und häufigste Fall ist der, dafs ein Körper, dessen Oberfläche F die gleichförmige Temperatur ϑ hat, rings von Flächen umgeben ist, die ebenfalls eine gleichförmige Temperatur t haben (z. B. freie Rohrleitungen, einfache Plattenheizkörper oder Oefen). Hierfür ist nach Nusselt die in z Stunden durch Strahlung an die Umgebung übergehende Wärme

$$Q = \frac{F \cdot z\left[\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4\right]}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C}} \text{ WE.}$$

$\Theta = 273 + \vartheta$ und $T = 273 + t$ sind die absoluten Temperaturen. C_1 ist die Strahlungszahl des Wärme abgebenden Körpers, C_2 ist die der

Digitized by Google

Tafel 9.

Körper	Oberflächenbeschaffenheit	Temperaturbereich des Versuchs °C	C
Absolut schwarzer Körper	Hohlraum gleicher Temperatur mit feiner Oeffnung	— 180 bis + 1262	4,76
Glas	glatt	20	4,4
Messing	matt	50 bis 350	1,03
Lampenrufs	glatt	0 „ 50	4,40
Kupfer	schwach poliert	50 „ 280	0,79
Schmiedeisen	matt, oxydiert	20 „ 360	4,40
„	blank	30 „ 108	1,60
„	hoch poliert	40 „ 250	1,33
Zink	matt	50 „ 290	0,97
Gufseisen	rauh, stark oxydiert	40 „ 250	4,48
Kalkmörtel	rauh, weifs	10 „ 90	4,30
Basalt	glatt geschliffen, doch nicht glänzend	60 „ 200	3,42
Tonschiefer	„	60 „ 200	3,29
Humus	„		3,14
Roter Sandstein	„	60 „ 200	2,86
Italienischer Marmor	„	60 „ 200	2,70
Granit	„	60 „ 200	2,12
Dolomitkalk	„	60 „ 200	1,96
Lehm	„		1,85
Ackererde	„		1,79
Schlämmkreide	„	60 „ 200	1,45
Kies	„	60 „ 200	1,37
Wasser		60	3,20
Eis		0	3,06
Gold, galvanisch niedergeschlagen	glänzend, doch nicht poliert	20	2,35

Umgebung und C diejenige des absolut schwarzen Körpers. Nach dem Vertauschen von t und ϑ gilt die Gleichung auch für den Fall, dafs die Temperatur des Körpers niedriger ist als die Umgebung (Kühlleitungen).

Setzt man

$$\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4 = a\,(\Theta - T) = a\,(\vartheta - t),$$

so wird

$$Q = \frac{F \cdot \varepsilon\, a\,(\vartheta - t)}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C}},$$

a kann der Tafel 10 entnommen werden.

Digitized by Google

Tafel 10. $\dfrac{\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4}{\Theta - T} = a.$

$t =$	−273	−200	−100	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\vartheta =$ −273	0	0,0039	0,0518	0,2034	0,519	1,058	1,882	3,050	4,62	6,66	9,21	12,35	16,14	20,45
−200	0,0039	0,0156	0,0867	0,2764	0,644	1,251	2,155	3,418	5,10	7,24	9,96	13,26	17,21	21,88
−100	0,0518	0,0867	0,2070	0,466	0,923	1,639	2,673	4,08	5,94	8,28	11,19	14,72	18,92	23,87
0	0,2034	0,2764	0,466	0,814	1,380	2,225	3,408	4,99	7,03	9,59	12,72	16,50	20,97	26,21
100	0,519	0,644	0,923	1,380	2,076	3,070	4,422	6,19	8,44	11,30	14,62	18,66	23,42	28,96
200	1,058	1,251	1,639	2,225	3,070	4,233	5,77	7,75	10,23	13,27	16,92	21,26	26,33	32,20
300	1,882	2,155	2,673	3,408	4,422	5,77	7,53	9,73	12,46	15,77	19,71	24,36	29,76	35,98
400	3,050	3,418	4,08	4,99	6,19	7,75	9,73	12,19	15,19	18,79	23,04	28,01	33,76	40,35
500	4,62	5,10	5,94	7,03	8,44	10,23	12,46	15,19	18,48	22,38	26,96	32,29	38,41	45,38
600	6,66	7,24	8,28	9,59	11,30	13,27	15,77	18,79	22,38	26,61	31,55	37,29	43,75	51,1
700	9,21	9,96	11,19	12,72	14,62	16,92	19,71	23,04	26,96	31,55	36,84	42,93	49,85	57,6
800	12,35	13,26	14,72	16,50	18,66	21,26	24,36	28,01	32,29	37,29	42,93	49,5	56,8	65,0
900	16,14	17,21	18,92	20,97	23,42	26,33	29,76	33,76	38,41	43,75	49,85	56,8	64,6	73,3
1000	20,45	21,88	23,87	26,21	28,96	32,20	35,98	40,35	45,38	51,1	57,6	65,0	73,3	82,6

III. Allgemeine Grundsätze der Thermodynamik.

Es bedeute im folgenden

Q eine Wärmemenge in WE,

P den absoluten Druck (Spannung) von Gasen, Dämpfen und Flüssigkeiten in kg/qm,

p denselben Druck in kg/qcm (at),

G das Gewicht des betrachteten Stoffes in kg,

V, v den Rauminhalt in cbm, cbm/kg,

t die Temperatur in °C,

$T = t + 273$ die absolute Temperatur,

U, u die (innere) Energie in WE (S. 393),

S, s die Entropie (S. 394),

J, i den Wärmeinhalt für unveränderlichen Druck in WE,

$A = 1/427$ das mechanische Wärmeäquivalent (S. 393),

c_p, c_v die spezifischen Wärmen bei unveränderlichem Drucke bzw. unveränderlichem Rauminhalte.

Alle jene Gröfsen, die von der Menge des Körpers abhängen, sind bei einer beliebigen Menge mit grofsen Buchstaben V, U, S, J bezeichnet, hingegen mit kleinen Buchstaben v, u, s, i, wenn die Gewichtseinheit vorliegt, so dafs $V = Gv$, $U = Gu$ usw.

Der **Druck** der Gase und Dämpfe wird **gemessen** in Millimeter (oder Meter) Wassersäule (W.-S.), in Millimeter Quecksilbersäule (Q.-S.), in kg/qm, kg/qcm, Pfd/QuZ. und in Atmosphären.

1 metrische (neue) Atmosphäre (at)*) **= 1 kg/qcm** = 735,5 mm Q.-S. von 0° (= 737,4 mm Q.-S. von 15°)
= 28,958 engl. Zoll Q.-S. von 0°
= 10,000 m W.-S. von + 4°
= 14,223 engl. Pfd/QuZ.
= 0,968 alte Atmosphäre.

*) Die Bezeichnung **at** bedeutet im folgenden stets **metrische Atmosphären.**

Digitized by Google

1 alte Atmosphäre . = **760 mm Q.-S.** von 0^0 (= 762 mm Q.-S. von 15^0)
= 29,922 engl. Zoll Q.-S. von 0^0
= 10,333 m W.-S. von $+4^0$
= 14,696 engl. Pfd/Qu Z.
= 1,0333 at.

1 mm W.-S. von $+4^0$ = 1 kg/m² = 0,07355 mm Q.-S. von 0^0.

1 mm Q.-S. = 13,596 mm W.-S. = 0,0013596 at
= 0,0013158 alte Atmosphäre

A. Die beiden Hauptsätze.

1. Der erste Hauptsatz.

1. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besteht in der Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf solche Vorgänge, bei denen Wärmeerscheinungen auftreten; er spricht aus, dafs **Wärme und Arbeit gleichwertig** sind.

$$1 \text{ WE} = 427 \text{ mkg}.$$

Die Zahl $^1/_{427} = A$ wird das **mechanische Wärmeäquivalent** genannt.*) In absolutem Mafs beträgt 1 WE = 4189 Joule.

2. Bezeichnet in mkg E_1 die **Gesamtenergie** eines Körpers im Anfangszustande 1, E_2 dieselbe Gröfse im Endzustande 2, so ist der Ausdruck des ersten Hauptsatzes für die Zustandsänderung 1 bis 2 die Gleichung

$$\frac{Q}{A} - L = E_2 - E_1.$$

Hierin bedeutet Q die während der Zustandsänderung dem Körper zugeführte Wärme in WE, L die vom Körper geleistete mechanische Arbeit.

3. Für die im folgenden allein zu behandelnden tropfbaren Flüssigkeiten, Gase und Dämpfe besteht die äufsere Arbeit L nur in der Ueberwindung des äufseren Oberflächendruckes, der bei stetigen (umkehrbaren) Zustandsänderungen stets gleich dem inneren Drucke (Spannung) der Flüssigkeit ist. In diesem Falle ist dann

$$dL = P\,dV, \qquad L = \int P\,dV.$$

Die Gesamtenergie der genannten Körper besteht aus der **inneren Energie** (U), die nur von dem inneren Zustande der Körper abhängig ist, und der **äufseren kinetischen Energie**; in besonderen Fällen kann neben diesen noch die Energie der Schwere zu berücksichtigen sein. Die kinetische Energie kommt erst bei der später zu behandelnden strömenden Bewegung in Betracht. Ist die kinetische Energie unveränderlich oder = 0, so wird

$$dQ = A\,P\,dV + dU \quad \text{und} \quad Q = \int_{V_1}^{V_2} A\,P\,dV + U_2 - U_1.$$

Durch diese Gleichung ist zugleich der Begriff der inneren Energie U definiert; ihr Zuwachs ist gleich der Summe der von dem Körper aufgenommenen Wärme und Arbeit. Für die Zählung der Energie

*) 427 mkg gilt heute als der wahrscheinlichste Wert der 15^0-WE. Warburg „Referat über die Wärmeeinheit" Leipzig 1900.

Digitized by Google

besteht kein bestimmter Nullpunkt, es kommen nur Aenderungen der Energie in Betracht. Als Maſs der inneren Energie ist im folgenden die Wärmeeinheit angenommen.

2. Der zweite Hauptsatz.

1. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, daſs aus einem Körper oder Körpersystem, dessen Temperatur in allen Teilen dieselbe ist, keine mechanische Arbeit gewonnen werden kann. Vorausgesetzt ist hierbei, daſs das System nicht durch seinen mechanischen oder chemischen Zustand Arbeit leisten kann. Ein derartiges System bezeichnet man als im vollkommenen Gleichgewichte befindlich. Gleichwertig mit diesem ist der von **Clausius** ausgesprochene Satz, daſs Wärme nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann, d. h. ohne daſs bleibende Veränderungen an anderen Körpern eintreten.

Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für umkehrbare Zustandsänderungen, d. h. für stetige oder Gleichgewichtsprozesse

$$dQ = T\,dS.$$

S ist wie P, V, T und U nur vom Zustande des Körpers abhängig und heiſst die **Entropie.** Kennt man für einen Körper die Beziehungen der Gröſsen P, V, T und U, so bestimmt sich die Entropie aus der Gleichung

$$T\,dS = dU + A\,P\,dV.$$

2. Der zweite Hauptsatz liefert eine Erklärung der **Umkehrbarkeit.** Umkehrbare Prozesse sind solche, bei denen die Summe der Entropie der beteiligten Körper unveränderlich bleibt. Bei allen **nichtumkehrbaren** Prozessen, d. h. solchen, welche bei gestörtem Gleichgewichte verlaufen, wächst die Entropiesumme. Die Entropie eines isolierten Systems kann niemals abnehmen.

B. Nutzbare Arbeit.

1. Um aus einem gegebenen System den gröſstmöglichen Betrag von mechanischer Arbeit zu gewinnen, muſs man es auf irgend einem umkehrbaren Wege in den Zustand vollkommenen Gleichgewichts bringen, oder mit anderen Worten: die **nutzbare Arbeit** L_n eines Systems ist der Betrag, um den seine Gesamtenergie bei gleichbleibender Entropie vermindert werden kann.

2. In fast allen technischen Arbeitsprozessen bildet die äuſsere Umgebung, die als ein Behälter von unveränderlichem Drucke und unveränderlicher Temperatur aufzufassen ist, einen Teil der Systeme, die zur Arbeitsleistung benutzt werden. In solchen Fällen lautet der Grundsatz für die günstigsten Arbeitsprozesse: Das gegebene System muſs auf irgend einem umkehrbaren Wege auf den Druck und die Temperatur der Umgebung gebracht werden. Bezeichnet E_1, V_1 und S_1 die Gesamtenergie, den Rauminhalt und die Entropie des Systems (ohne Umgebung) im Anfangszustande und E_2, V_2 und S_2 diese Gröſsen nach umkehrbarem Uebergange im Endzustande, T_0, P_0 die Temperatur und den Druck der Umgebung, so ist die nutzbare Arbeit in WE

$$A\,L_n = (E_1 - E_2) - T_0\,(S_1 - S_2) + A\,P_0\,(V_1 - V_2).$$

Digitized by Google

Jedes der drei Glieder kann positiven oder negativen Wert haben.

3. Der **Arbeitsverlust**, der in solchen Fällen durch einen nicht-umkehrbaren Teil des Prozesses entsteht, ist in WE gemessen gleich dem Produkt aus der absoluten Umgebungstemperatur und der durch den Teilprozefs hervorgerufenen Entropievermehrung.

Ist aus praktischen Gründen (Kühlwassermangel, ungünstige Wärmeübertragungszahl) ein Wärmeaustausch des Systems mit der Umgebung untunlich, so mufs man sich damit begnügen, das System auf umkehrbarem Wege auf den Druck der Umgebung zu bringen.

C. Formeln aus den beiden Hauptsätzen.

1. Bezeichnet man alle Gröfsen für die Gewichtseinheit mit kleinen Buchstaben v, s, u, und die spezifische Wärme bei unveränderlichem Drucke bzw. unveränderlichem Rauminhalte mit c_p und c_v, so folgen aus der Hauptgleichung $Tds = du + APdv$ die Beziehungen

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P, \qquad c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v,$$

$$c_p - c_v = AT\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v,$$

$$ds = -A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dP + c_p\frac{dT}{T} = A\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv + c_v\frac{dT}{T},$$

$$-A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T, \qquad A\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T,$$

$$A\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P, \qquad -A\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v.$$

2. Neben der Energie ist in vielen technischen Anwendungen die Einführung einer ihr ähnlichen Größe $i = u + APv$ von grofsem Vorteil. Diese Gröfse stellt den **Wärmeinhalt bei unveränderlichem Drucke** dar. Durch Einführung von i geht die Hauptgleichung über in

$$dQ = Tds = di - Avdp;$$

weiter gelten

$$\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_P = T, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v = T;$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_s = Av, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -AP;$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_P = c_p, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v;$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_T = -AT^2\left(\frac{\partial \frac{v}{T}}{\partial T}\right)_P = -AT\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + Av,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = AT^2\left(\frac{\partial \frac{P}{T}}{\partial T}\right)_v = AT\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - AP,$$

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -AT\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P, \qquad \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = AT\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_v.$$

Digitized by Google

D. Zeichnerische Darstellungen.

Die zeichnerischen Darstellungen der Thermodynamik bestehen in der Regel darin, daſs man die Zustände des betrachteten Körpers durch Punkte einer Ebene darstellt, indem man von den Gröſsen P, T, V, S, J, U zwei als rechtwinklige Koordinaten wählt.

1. Das **PV-Diagramm, Arbeitsdiagramm, Indikatordiagramm,** die Fläche unter der Zustandslinie stellt die geleistete Arbeit $\int PdV$ dar.

2. Das **TS-Diagramm, Wärmediagramm,** hat die Entropie zu Abszissen und die absolute Temperatur zu Ordinaten. Die Flächen zwischen Zustandslinie, S-Achse und Endordinaten stellen die vom Körper aufgenommene Wärme dar. Die Adiabaten und Isothermen (S. 405) sind den Achsen parallele Geraden.

Das Wärmediagramm ist zur klaren Darstellung der Vorgänge in den Wärmemaschinen besonders geeignet.

3. Das **JS-Diagramm,***) mit dem Wärmeinhalt $J = U + APV$ als Ordinaten und der Entropie als Abszissen. Dieses Diagramm bietet, auf Wärmemaschinen angewendet, den groſsen Vorteil, daſs alle wichtigen Arbeits- und Wärmegröſsen durch Strecken dargestellt sind und daher leicht zahlenmäſsig bestimmt werden können. Von groſsem Wert ist diese Darstellungsart auch bei allen Strömungs- und Drosselungsvorgängen und bei Dampfturbinen.

IV. Vollkommene Gase.

Bezeichnungen S. 392.

A. Allgemeines.

1. Vollkommene Gase sind solche, für welche die Gesetze von **Gay-Lussac (Boyle)** und **Mariotte** Geltung haben. Beide Gesetze sind vereinigt in der **Zustandsgleichung** der vollkommenen Gase

$$pv = RT, \qquad PV = GRT.$$

R heiſst die **Gaskonstante;** sie ist umgekehrt proportional der Dichte oder dem Molekulargewicht μ des Gases; setzt man letzteres für Sauerstoff = **32**, so berechnet sich

$$R = 848 : \mu.$$

Diese Beziehung folgt aus dem Gesetze von **Avogadro,** wonach gleiche Räume bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur für alle Gase dieselbe Anzahl Moleküle enthalten.

Aus der Zustandsgleichung folgt weiter unter Benutzung der Beziehung (S. 395) $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = AT\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) - AP = 0,$

d. h. die Energie der vollkommenen Gase ist nur eine Funktion der Temperatur (Gesetz von **Joule**).

---

*) Mollier, Neue Diagramme zur technischen Wärmelehre, Z. d. V. d. I. 1904 S. 271 u. f.

Digitized by Google

2. Bei Gasen — mit Ausnahme der einatomigen — wachsen die spezifischen Wärmen c_p und c_v mit der Temperatur. Bei mäfsigen Temperaturgrenzen kann jedoch — besonders bei zweiatomigen Gasen — ein unveränderlicher Mittelwert benutzt werden. In der folgenden Tafel (S. 398) sind Mittelwerte zwischen 0 und 200° aufgenommen.

Unabhängig von der Veränderlichkeit der spezifischen Wärme mit der Temperatur gilt immer

$$c_p - c_v = A\,R = \frac{1{,}985}{\mu} \text{ rd. } \frac{2}{\mu}.$$

Das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ hat für die einatomigen Gase den Wert $\varkappa = {}^5/_3$ und für die zweiatomigen bei gewöhnlichen Temperaturen den Wert $\varkappa = 1{,}4$. Für Gase von gröfserer Atomzahl ist $\varkappa$ kleiner und stärker von der Temperatur abhängig.

Weiter gelten noch $c_v = \frac{2}{\mu(\varkappa - 1)}$, $\quad c_p = \frac{2\varkappa}{\mu(\varkappa - 1)}$

und im besonderen für zweiatomige Gase $c_v = \frac{5}{\mu}$, $\quad c_p = \frac{7}{\mu}$.

3. Die Energie ist $u = c_v\,T + C$,

der Wärmeinhalt $i = c_p\,T + C$

und $$dQ = c_v\,dT + A\,P\,dv = c_p\,dT - A\,v\,dP.$$

Die Entropie der vollkommenen Gase ist bestimmt durch

$$s = c_v \ln (P v^{\varkappa}) + C = c_v \ln P + c_p \ln v + C$$

$$s = c_v \ln (T v^{\varkappa - 1}) + C = c_v \ln T + A\,R \ln v + C$$

$$s = c_p \ln \frac{T}{P^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} + C = c_p \ln T - A\,R \ln P + C.$$

4. Bei den Gasen ist es in vielen Fällen bequem, mit der Raumeinheit statt mit der Gewichtseinheit zu rechnen.

Man setzt als Mengeneinheit

a) 1 cbm des Gases von 0° und 760 mm Q.-S.-Druck,

oder b) 1 cbm des Gases von 15° und 1 at Druck,

c) 1 Mol, d. i. die Menge von μ kg. Das Volumen dieser Menge ist = 22,41 cbm von 0° und 760 mm oder 24,42 cbm von 15° und 1 at.

Ist m die Menge in Mol, so ist $G = m \cdot \mu$, und die Zustandsgleichung schreibt sich:

$$P\,V = 848\,m\,T, \qquad A\,P\,V = 1{,}985\,m\,T, \qquad A\,P\,V \text{ rd. } 2\,m\,T.$$

Für 1 Mol wird $P\,v = 848\,T$, $\qquad A\,P\,v$ rd. $2\,T$.

Das Gewicht der Mengeneinheiten unter a) und b) ist

$$G_{0;\,760} = \frac{\mu}{22{,}41}, \qquad G_{15;\,1} = \frac{\mu}{24{,}42}.$$

(Die beiden Mengeneinheiten verhalten sich also wie 1,090 : 1.)

Digitized by Google

Tafel für Gase.

Gas	Zeichen	Atomzahl	Molekulargewicht μ angenähert	Molekulargewicht μ genau $O_2 = 32$	Gewicht in kg von 1 cbm bei 15° u. 1 at	Gewicht in kg von 1 cbm bei 0° u. 760 mm Q.-S.	Dichte, bezogen auf Luft = 1	Gaskonstante R	Spez. Wärme für 1 kg c_p zwischen 0° und 200°	Spez. Wärme für 1 kg c_v zwischen 0° und 200°	Spez. Wärme für 1 cbm v. 15° u. 1 at C_p	Spez. Wärme für 1 cbm v. 15° u. 1 at C_v	$x = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v}$
Helium . . .	He	1	4	3,99	0,163	0,178	0,137	212,5	1,25	0,75	0,203	0,122	1,667
Argon	A	1	40	39,88	1,633	1,780	1,376	21,26	0,124	0,075	0,203	0,122	1,667
Luft	—	—	(29)	(28,95)	1,186	1,293	1	29,27	0,24	0,172	0,286	0,204	1,40
Sauerstoff . .	O_2	2	32	32	1,310	1,429	1,105	26,50	0,218	0,156	0,286	0,204	1,40
Stickstoff . .	N_2	2	28	28,02	1,147	1,251	0,967	30,26	0,249	0,178	0,286	0,204	1,400
Wasserstoff . .	H_2	2	2	2,016	0,0826	0,090	0,0696	420,6	3,405	0,242	0,282	0,200	1,407
Stickoxyd . .	NO	2	30	30,01	1,229	1,340	1,036	28,26	0,231	0,165	0,284	0,203	1,400
Kohlenoxyd . .	CO	2	28	28,00	1,147	1,250	0,967	30,29	0,250	0,179	0,287	0,205	1,398
Chlorwasserstoff	ClH	2	36,5	36,47	1,493	1,628	1,259	23,25	0,191	0,136	0,285	0,204	1,400
Kohlensäure . .	CO_2	3	44	44,00	1,801	1,964	1,518	19,27	0,21	0,165	0,38	0,30	1,28
Wasserdampf .	H_2O	3	18	18,02	0,738	0,804	0,622	47,06	0,50	0,39	0,37	0,28	1,28
Stickoxydul . .	N_2O	3	44	44,02	1,803	1,965	1,520	19,26	0,21	0,17	0,38	0,30	1,27
Schweflige Säure	SO_2	3	64	64,07	2,624	2,860	2,212	13,24	0,154	0,123	0,40	0,32	1,25
Ammoniak . .	NH_3	4	17	17,03	0,697	0,760	0,588	49,79	0,53	0,41	0,37	0,285	1,29
Azetylen . . .	C_2H_2	4	26	26,02	1,066	1,162	0,899	32,59	(0,37)	(0,29)	(0,39)	(0,31)	1,26
Chlormetyl . .	CH_3Cl	5	50,5	50,48	2,067	2,254	1,743	16,80	(0,18)	(0,14)	(0,37)	(0,28)	1,28
Methan . . .	CH_4	5	16	16,03	0,656	0,715	0,553	52,90	0,59	0,46	0,39	0,30	1,28
Aethylen . . .	C_2H_4	6	28	28,03	1,148	1,251	0,968	30,25	0,40	0,32	0,46	0,37	1,25

Digitized by Google

Mit diesen Werten sind die auf die Gewichtseinheit bezogenen Größen zu multiplizieren, um sie auf die obigen Mengeneinheiten bezogen zu erhalten.

Bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmen für die Mengeneinheit für **1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S.**, so ist

$$C_p = \frac{\mu}{22{,}41}\, c_p, \qquad C_v = \frac{\mu}{22{,}41}\, c_v, \qquad C_p - C_v = 0{,}089 \text{ rd. } 0{,}09,$$

und

$$C_p = \frac{0{,}089}{\varkappa - 1}\,\varkappa, \qquad C_v = \frac{0{,}089}{\varkappa - 1}$$

ganz unabhängig von der Art des Gases.

Für zweiatomige Gase gilt

$$C_p = 0{,}311 \text{ rd. } 0{,}31 \qquad C_v = 0{,}222 \text{ rd. } 0{,}22.$$

Bezeichnen C_p und C_v die spezifischen Wärmen für **1 cbm von 15° und 1 at**, so ist

$$C_p = \frac{\mu}{24{,}41}\, c_p, \qquad C_v = \frac{\mu}{24{,}41}\, c_v, \qquad C_p - C_v = 0{,}081 \text{ rd. } 0{,}08,$$

$$C_p = \frac{0{,}081}{\varkappa - 1}\,\varkappa, \qquad C_v = \frac{0{,}081}{\varkappa - 1}$$

und für zweiatomige Gase $C_p = 0{,}284$ rd. 0,28, $C_v = 0{,}203$ rd. 0,20.

Für ein Mol sind die spezifischen Wärmen μc_p und μc_v, und es ist

$$\mu c_p - \mu c_v = 1{,}985 \text{ rd. } 2; \qquad \mu c_p = \frac{1{,}985\,\varkappa}{\varkappa - 1}; \qquad \mu c_v = \frac{1{,}985}{\varkappa - 1}.$$

Für zweiatomige Gase ist

$$\mu c_p = 6{,}95 \text{ rd. } 7, \qquad \mu c_v = 4{,}96 \text{ rd. } 5.$$

Die Entropie für 1 Mol $S = 1{,}985 \left(\frac{1}{\varkappa - 1} \ln P + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \ln v \right)$

$$S = 1{,}985 \left(\frac{1}{\varkappa - 1} \ln T + \ln v \right) = 1{,}985 \left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \ln T - \ln P \right).$$

Für **1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S.** tritt 0,089, für 1 cbm von 15° und 1 at 0,081 an die Stelle von 1,985.

Veränderlichkeit der spezifischen Wärme mit der Temperatur. Aus Versuchen von Holborn und Henning, von Pier und von Bjerrum ergeben sich folgende Werte der mittleren spezifischen Wärme für unveränderlichen Druck, bezogen auf 1 Mol, μc_p. Um die spezifische Wärme c_p für 1 kg zu erhalten, sind die Tafelwerte einfach durch das Molekulargewicht des betr. Gases zu dividieren. Wünscht man die spezifische Wärme für 1 cbm, so sind die Tafelwerte durch 22,41 oder durch 24,42 zu dividieren, je nachdem 0° und 760 mm oder 1 at und 15° zugrunde gelegt ist.

Die Werte der zweiten Reihe (N_2, O_2, CO) können auch auf andere zweiatomige Gase und deren Mischungen angewendet werden.

Digitized by Google

Mittlere spezifische Wärme μc_p zwischen 0° und t^0 bei unveränderlichem Drucke für 1 Mol.

Temp. t^0 C	N_2, O_2, CO	H_2	H_2O	CO_2	Temp. t^0 C	N_2, O_2, CO	H_2	H_2O	CO_2
100	6,96	6,95	8,04	9,08	1600	7,55	7,42	9,61	12,01
200	6,97	6,96	8,09	9,43	1700	7,59	7,45	9,76	12,09
300	7,00	6,97	8,16	9,76	1800	7,63	7,49	9,91	12,16
400	7,04	6,99	8,24	10,08	1900	7,66	7,52	10,08	12,23
500	7,07	7,02	8,32	10,34	2000	7,70	7,56	10,27	12,29
600	7,11	7,04	8,41	10,58	2100	7,73	7,59	10,46	12,35
700	7,16	7,08	8,51	10,80	2200	7,76	7,62	10,67	12,41
800	7,21	7,12	8,61	11,00	2300	7,79	7,65	10,89	12,46
900	7,25	7,15	8,72	11,17	2400	7,81	7,68	11,13	12,51
1000	7,30	7,19	8,83	11,33	2500	7,84	7,70	11,38	12,55
1100	7,34	7,23	8,95	11,47	2600	7,87	7,73	11,65	12,59
1200	7,39	7,27	9,07	11,60	2700	7,89	7,76	11,95	12,63
1300	7,43	7,31	9,19	11,71	2800	7,92	7,78	12,27	12,67
1400	7,48	7,35	9,32	11,82	2900	7,94	7,81	12,61	12,71
1500	7,52	7,38	9,46	11,92	3000	7,96	7,83	12,98	12,74

Ferner wurden von Regnault, E. Wiedemann, Thibaut, Nernst noch folgende Werte der spezifischen Wärme c_p für 1 kg für die beigefügten Temperaturgrenzen gefunden:

Spezifische Wärme c_p bei unveränderlichem Drucke für 1 kg bei verschiedenen Temperaturgrenzen.

Gas (Dampf)	Temperatur	c_p	Beobachter
Azeton C_3H_6O	26 ÷ 110	0,347	E. W.
	27 ÷ 179	0,374	
	129 ÷ 273	0,412	R.
Aethylen C_2H_4	0	0,336	E. W.
	100	0,419	
	200	0,502	
Aether $C_4H_{10}O$	25 ÷ 111	0,428	E. W.
	27 ÷ 189	0,462	
	69 ÷ 224	0,480	R.
	350	0,601	Th.
Alkohol C_2H_6O	108 ÷ 220	0,453	R.
	350	0,613	Th.
Ammoniak NH_3	23 ÷ 100	0,520	E. W.
	27 ÷ 200	0,536	
	365 ÷ 680	0,65	N.

Digitized by Google

Gas (Dampf)	Temperatur	c_p	Beobachter
Benzol C_6H_6	34÷115	0,299	E. W.
	35÷180	0,332	E. W.
	350	0,499	Th.
Chloroform $CHCl_3$	27÷118	0,144	E. W.
	28÷189	0,149	E. W.
	350	0,152	Th.
Stickoxydul N_2O	26÷103	0,213	E. W.
	26÷206	0,224	E. W.

Für die bei der Verbrennung von Gasen wichtigen Stoffe Methan (CH_4) und Aethylen (C_2H_4) kann man angenähert setzen:

$$[\mu c_p]_0^t = 7{,}7 + 0{,}008\, t \text{ für } CH_4,$$
$$[\mu c_p]_0^t = 9{,}4 + 0{,}011\, t \text{ für } C_2H_4.$$

B. Gasmischungen.

1. Allgemeines.

1. Die Mischung bestehe aus einzelnen Gasen von den Gewichtsteilen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ und den Raumteilen $r_1, r_2, r_3 \ldots$, so daſs

$$\Sigma(m_i) = 1, \qquad \Sigma(r_i) = 1.$$

Zur Umrechnung von Gewichts- und Raumteilen gelten

$$m_1 = \frac{r_1 \mu_1}{\Sigma(r_i \mu_i)}, \qquad r_1 = \frac{m_1}{\mu_1} : \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right).$$

Gasmischungen verhalten sich so, wie wenn jedes einzelne Gas den gegebenen Gesamtraum unbehindert von den anderen völlig ausfüllen würde; die sich hieraus ergebenden Teildrücke der einzelnen Gase setzen sich zu dem Gesamtdrucke zusammen. (Gesetz von **Dalton.**) Danach gelten für Mischungen dieselben Gesetze wie für einfache Gase.

Die Teildrücke der einzelnen Gase verhalten sich wie ihre Raumteile $p_1 : p_2 : p_3 \ldots = r_1 : r_2 : r_3 \ldots$,

$$r_1 = \frac{p_1}{p}, \qquad r_2 = \frac{p_2}{p} \ldots$$

2. Die **Gaskonstante** für Mischungen ist

$$R = \Sigma(m_i R_i) = 848\, \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right) = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{r_i}{R_i}\right)} = \frac{848}{\Sigma(r_i \mu_i)}.$$

$\Sigma(r_i \mu_i)$ vertritt für die Mischung die Stelle des Molekulargewichtes (scheinbares Molekulargewicht).

3. Die **spezifische Wärme** von Mischungen ist

$$c_p = \Sigma(m_i c_{pi}), \qquad c_v = \Sigma(m_i c_{vi}),$$
$$C_p = \Sigma(r_i C_{pi}), \qquad C_v = \Sigma(r_i C_{vi}),$$
$$\mu c_p = \Sigma(r_i \mu_i c_{pi}), \qquad \mu c_v = \Sigma(r_i \mu_i c_{vi}).$$

Digitized by Google

Für Mischungen von nur zweiatomigen Gasen ist wieder für 1 cbm von 15^0 und 1 at

$$C_p = 0{,}284, \qquad C_v = 0{,}203,$$
$$\mu c_p = 7, \qquad \mu c_v = 5.$$

2. Mischung von Luft und Wasserdampf.

(Feuchte Luft.)

Nach den Eigenschaften der Dämpfe (S. 412) kann der Teildruck des Wasserdampfes p_D nie einen bestimmten Höchstwert p' überschreiten, der nur von der Temperatur abhängig ist und mit dieser steigt; die Tafel S. 403 gibt in der zweiten Reihe diese Werte in mm Q.-S. (h'); für höhere Temperaturen finden sie sich in den Tafeln S. 418 sowohl in mm Q.-S. wie in at. Natürlich kann aber der Teildruck beliebig kleiner als p' sein. Daraus folgt, dafs 1 cbm Luft von gegebener Temperatur t immer nur ein bestimmtes Höchstgewicht von Dampf = der Dichte γ' des Wasserdampfes bei t und dem zugehörigen Drucke p' enthalten kann. Die Werte von γ' finden sich in der Tafel S. 408 in Gramm für 1 cbm und in der Tafel S. 403 unter der Bezeichnung γ'' in kg/cbm. Im allgemeinen enthält die Luft $\varphi\gamma'$ Wasserdampf, wobei φ die **relative Feuchtigkeit** genannt wird und zwischen 0 und 1 liegt.

Es ist auch $\varphi = \frac{p_D}{p'}$, d. h. die relative Feuchtigkeit ist auch das Verhältnis des wirklichen Teildruckes des Wasserdampfes zum Sättigungsdrucke.*) Für $\varphi = 1$ ist die Luft mit Wasserdampf gesättigt, bei $\varphi < 1$ kann 1 cbm noch $(1 - \varphi)\gamma'$ Gramm Wasserdampf aufnehmen.

Ist der Druck des Gemisches (der feuchten Luft) $= p$, so sind die Raumteile von Luft und Wasserdampf

$$r_L = \frac{p - \varphi p'}{p}, \qquad r_D = \frac{\varphi p'}{p}.$$

Das scheinbare Molekulargewicht (S. 401) der feuchten Luft ist $\mu = 28{,}95 - 10{,}93\,\varphi\,\frac{p'}{p} \sim 28{,}95 - 11\,\varphi\,\frac{p'}{p}$

und ihre Gaskonstante $R = \dfrac{29{,}27}{1 - 0{,}377\,\varphi\,\frac{p'}{p}}$.

Das Gewicht von 1 cbm feuchter Luft in kg berechnet sich zu

$$\gamma = \gamma'' p - 0{,}000607\,\gamma' \cdot \varphi \quad \text{oder}$$
$$\gamma = 342\,\frac{p}{T} - 0{,}175\,\varphi\,\frac{h'}{T}.$$

Zur Erleichterung dieser Berechnung dient die Reihe 4 und 5 der Tafel S. 403. Mit derselben ist

$$\gamma = \gamma'' p - A\varphi,$$

*) Dies gilt nicht mehr genau bei sehr hohen Teildrücken (mehrere Atmosphären) des Wasserdampfes.

Digitized by Google

oder, wenn der Druck in mm Q.-S. von 0^0 (h) (z. B. als Barometerstand) gegeben ist,

$$\gamma = \gamma'' \frac{h}{735{,}5} - \Delta\varphi.$$

Für trockene Luft ist $\Delta = 0$ zu setzen.

Mischung von Luft und Wasserdampf.

t	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0^0 h'	Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei t und h' in g γ'	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und t^0 in kg γ''	Korrektur für feuchte Luft Δ	t	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0^0 h'	Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei t und h' in g γ'	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und t^0 in kg γ''	Korrektur für feuchte Luft Δ
— 20	0,77	0,90	1,351	0,001	10	9,21	9,41	1,208	0,006
— 19	0,85	0,99	1,346	0,001	11	9,8	10,0	1,204	0,006
— 18	0,93	1,08	1,340	0,001	12	10,5	10,7	1,200	0,007
— 17	1,03	1,18	1,335	0,001	13	11,2	11,4	1,196	0,007
— 16	1,13	1,29	1,330	0,001	14	12,0	12,1	1,192	0,007
— 15	1,24	1,41	1,325	0,001	15	12,8	12,8	1,188	0,008
— 14	1,36	1,53	1,320	0,001	16	13,6	13,7	1,183	0,008
— 13	1,49	1,67	1,315	0,001	17	14,5	14,5	1,179	0,009
— 12	1,63	1,83	1,310	0,001	18	15,5	15,4	1,175	0,009
— 11	1,78	1,99	1,305	0,001	19	16,5	16,3	1,171	0,010
— 10	1,95	2,17	1,300	0,001	20	17,5	17,3	1,167	0,011
— 9	2,13	2,36	1,295	0,001	21	18,6	18,3	1,163	0,011
— 8	2,32	2,56	1,290	0,002	22	19,8	19,4	1,159	0,012
— 7	2,53	2,78	1,286	0,002	23	21,1	20,6	1,155	0,013
— 6	2,76	3,01	1,281	0,002	24	22,4	21,8	1,151	0,013
— 5	3,01	3,27	1,276	0,002	25	23,8	23,1	1,148	0,014
— 4	3,28	3,54	1,271	0,002	26	25,3	24,5	1,144	0,015
— 3	3,57	3,84	1,267	0,002	27	26,8	25,8	1,140	0,016
— 2	3,88	4,15	1,262	0,003	28	28,4	27,3	1,136	0,017
— 1	4,22	4,48	1,257	0,003	29	30,1	28,8	1,132	0,017
0	4,58	4,84	1,253	0,003	30	31,8	30,4	1,128	0,018
+ 1	4,93	5,20	1,248	0,003	32	35,3	33,5	1,121	0,020
2	5,29	5,57	1,244	0,003	34	39,5	37,2	1,114	0,023
3	5,69	5,96	1,239	0,004	36	44,2	41,3	1,107	0,025
4	6,10	6,37	1,235	0,004	38	49,3	45,8	1,100	0,028
5	6,54	6,81	1,230	0,004	40	54,9	50,7	1,093	0,031
6	7,01	7,26	1,226	0,004	42	61,0	56,0	1,086	0,034
7	7,51	7,76	1,221	0,005	44	67,8	61,8	1,079	0,037
8	8,05	8,28	1,217	0,005	46	75,1	68,1	1,072	0,041
9	8,61	8,83	1,212	0,005	48	83,2	74,9	1,065	0,045
10	9,21	9,41	1,208	0,006	50	92,0	82,3	1,058	0,050

Wird 1 cbm Luft, welche bei t_0 und p_0 eine relative Feuchtigkeit φ_0 hat, auf eine Temperatur t und einen Druck p gebracht, so ändert sich auch die relative Feuchtigkeit in φ, wofür

$$\varphi \frac{p'}{p} = \varphi_0 \frac{p_0'}{p_0}.$$

Ergibt sich $\varphi > 1$, so ist bei der Zustandsänderung Wasser niedergeschlagen worden, und φ ist $= 1$. Die Menge w des niedergeschlagenen Wassers in Gramm für 1 cbm von p_0, t_0, φ_0 ist

$$w = \frac{\varphi_0 \frac{p}{p'} - \frac{p_0}{p_0'}}{\frac{p}{p'} - 1} \gamma_0'$$

oder angenähert, wenn p' klein gegen p ist: $w = \left(\varphi_0 - \frac{p_0}{p} \frac{p'}{p_0'}\right) \gamma_0'$.

Ist $\varphi < 1$, so bedeutet w diejenige Dampfmenge, welche die Luft bei der gedachten Zustandsänderung noch aufzunehmen vermag.

Der Dampfmenge w entspricht im Anfangszustande p_0 t_0 ein Raum

$$\Delta V = \frac{\varphi_0 \frac{p}{p_0} \frac{p_0'}{p'} - 1}{\frac{p}{p'} - 1} \text{ cbm}$$

oder angenähert, wenn p' klein gegen p ist $\Delta V = \left(\varphi_0 - \frac{p_0}{p} \frac{p'}{p_0'}\right)$.

Wird feuchte Luft abgekühlt, so wächst der Feuchtigkeitsgrad φ und wird bei der Temperatur t', welche dem gegebenen Teildrucke des Dampfes $p_D = \varphi_0 p_0'$ nach Tafel S. 403 entspricht, $= 1$. Diese Temperatur, bei welcher das Niederschlagen des Dampfes beginnt, nennt man den **Taupunkt.**

Messung der Luftfeuchtigkeit.

1. Taupunkt-Hygrometer. Durch Verdunstung von Aether wird ein Glas- oder Metallgefäfs mit glänzender Oberfläche so lange abgekühlt, bis sich Wasserdampf auf ihr niederschlägt und sie trübt; die gleichzeitig abgelesene Temperatur im Gefäfs gibt den Taupunkt der Luft t'. In Tafel S. 403 findet sich zu t' unter γ' der Wassergehalt der Luft, derselbe mufs noch mit $\frac{T'}{T}$ multipliziert werden, worin T' und T die absoluten Temperaturen zu t' und t sind. Die relative Feuchtigkeit ergibt sich als das Verhältnis des so bestimmten Wassergehalts zum Werte γ' bei t.

2. Psychrometer. Ein Thermometer, dessen Kugel mit einem feuchten Läppchen umwickelt ist, wird gleichzeitig mit einem trockenen Thermometer der zu untersuchenden Luft ausgesetzt. Ist t die Lufttemperatur (trockenes Thermometer), t_f die Anzeige des feuchten Thermometers, h' und h'_f die entsprechenden Dampfspannungen in mm Q.-S. nach Tafel S. 403, so berechnet sich der wirkliche Teildruck des Wasserdampfes in der Luft

$$h_D = \varphi h' = h'_f - 0{,}60\,(t - t_f), \quad \text{wenn } t' > 0,$$
$$h_D = \varphi h' = h'_f - 0{,}52\,(t - t_f), \quad \text{wenn } t' < 0.$$

Die Unveränderlichen gelten für mäfsig bewegte freie Luft; bei ruhiger Luft mufs das Psychrometer etwas bewegt werden.

Genauer als das einfache ist das **Aspirationspsychrometer.***)

Für viele Zwecke reichen gut justierte **Haarhygrometer** aus.

---

*) Genaue Auskunft über die Bedienung der Psychrometer und Berechnung ihrer Angaben gibt die „Anleitung" des preufs. meteor. Instituts.

Digitized by Google

C. Besondere Zustandsänderungen.

(Expansionskurven.)

Die folgenden Formeln gelten für G kg des Gases. Ist die Gewichteinheit vorhanden, so sind statt V, U, J, S die kleinen Buchstaben und $G=1$ zu setzen. Zeiger 1 und 2 beziehen sich auf Anfang und Ende der Zustandsänderung.

1. Rauminhalt unveränderlich.

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1}{T_2}, \qquad Q=U_2-U_1=G\,c_v\,(t_2-t_1) \quad \text{und}$$

$$Q=\frac{A}{\varkappa-1}\,V\,(P_2-P_1)=\frac{A}{\varkappa-1}\,V\,(p_2-p_1)\,10^4.$$

Für zweiatomige Gase $Q=58{,}5\,V\,(p_2-p_1)$.

2. Druck unveränderlich.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}, \qquad L=P\,(V_2-V_1)=G\,R\,(t_2-t_1),$$

$$Q=G\,c_p\,(t_2-t_1)=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,A\,L.$$

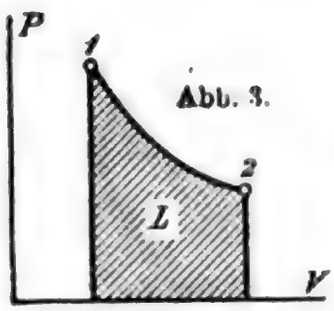


Abb. 3.

3. Temperatur unveränderlich (Isotherme).

$U=$ unveränderlich, $pV=$ unveränderlich,

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{V_1}, \qquad L=G\,R\,T\ln\frac{p_1}{p_2}=P_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2},$$

$$Q=A\,L. \text{ (Abb. 3.)}$$

4. Entropie unveränderlich (Adiabate).

$$Q=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$pV^{\varkappa}=$ unveränderlich, $\qquad \frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa}, \quad . \quad . \quad . \quad (2,\ 3)$

$TV^{\varkappa-1}=$ unveränderlich, $\qquad \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1}, \quad . \quad (4,\ 5)$

$\frac{T}{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}=$ unveränderlich, $\qquad \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \quad . \quad . \quad (6,\ 7)$

$$A\,L=U_1-U_2=G\,c_v\,(t_1-t_2),$$

$$L=\frac{P_1V_1}{\varkappa-1}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)=\frac{P_1V_1}{\varkappa-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] \text{ (Abb. 3.)}$$

Digitized by Google

Werte der Exponenten für zweiatomige Gase:

$$\varkappa = 1{,}4, \qquad \varkappa - 1 = 0{,}4, \qquad \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}286,$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 0{,}714, \qquad \frac{1}{\varkappa - 1} = 2{,}5, \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 3{,}5.$$

5. Polytrope.

$$pV^n = \text{unveränderlich}, \qquad pv^n = \text{unveränderlich}.$$

Diese Kurve wird vielfach zur Darstellung der Expansionskurven in Maschinen gebraucht, hierbei liegen die Exponenten n gewöhnlich zwischen 1 und $\varkappa$.

Es gelten die vorstehenden Beziehungen (2) bis (7) der Adiabate mit n statt $\varkappa$.

Die Polytropen der Gase sind Kurven unveränderlicher spezifischer Wärme; es ist

$$c_n = \frac{n - \varkappa}{n - 1} c_v; \quad \text{für } 1 < n < \varkappa \text{ ist } c_n \text{ negativ.}$$

$$AL = G(c_n - c_v)(t_2 - t_1), \qquad Q = G c_n (t_2 - t_1),$$

$$L = \frac{GR}{n-1}(t_1 - t_2), \qquad Q = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} AL,$$

$$L = \frac{P_1 V_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{P_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{P_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \quad \text{(Abb. 3.)}$$

Konstruktion der polytropischen Kurve.*) (Abb. 4.)

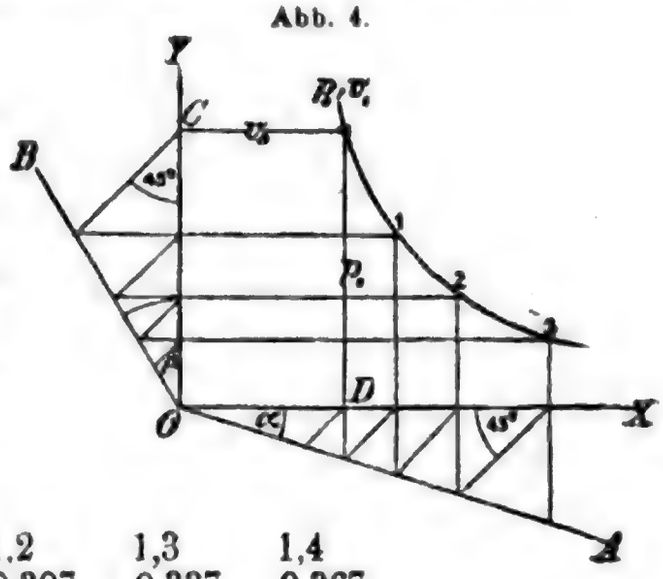
Man ziehe $O A$ unter dem beliebigen Winkel α gegen die x-Achse geneigt, bestimme den Winkel $Y O B = \beta$ aus der Gleichung

$$(1 + \operatorname{tg}\beta) = (1 + \operatorname{tg}\alpha)^n;$$

dann ziehe man von den dem gegebenen Anfangszustande $p_0 v_0$ entsprechenden Punkten D und C abwechselnd zu den Koordinatenachsen winkelrechte und unter 45^0 geneigte Linien in der aus der Abb. 3 ersichtlichen Weise, so sind die Punkte 1, 2, 3 Punkte der Kurve.

Es ist bequem $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$ zu setzen, dann wird für

Abb. 4.



$n = 1{,}1$	1,2	1,3	1,4
$\operatorname{tg}\beta = 0{,}278$	0,307	0,337	0,367.

*) Nach E. Brauer; vgl. Z. d. V. d. I. 1885 S. 433.

Digitized by Google

Adiabatische und polytropische Expansion von Gasen.

$\frac{p_1}{p_2}$	Für $n =$ 1,4 (Adiabate)	1,3	1,2	1,1	Für $n =$ 1,4 (Adiabate)	1,3	1,2	1,1
	ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V_2}{V_1} =$				ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_1}{T_2} =$			
1,1	1,070	1,076	1,083	1,090	1,028	1,022	1,016	1,009
1,2	1,139	1,151	1,164	1,180	1,053	1,043	1,031	1,017
1,3	1,206	1,224	1,244	1,269	1,078	1,062	1,045	1,024
1,4	1,271	1,295	1,323	1,358	1,101	1,081	1,058	1,031
1,5	1,336	1,366	1,401	1,445	1,123	1,098	1,070	1,038
1,6	1,399	1,436	1,479	1,533	1,144	1,115	1,081	1,044
1,7	1,461	1,504	1,557	1,620	1,164	1,130	1,092	1,050
1,8	1,522	1,571	1,633	1,706	1,183	1,145	1,103	1,055
1,9	1,581	1,638	1,706	1,791	1,201	1,160	1,113	1,060
2,0	1,641	1,705	1,782	1,879	1,219	1,174	1,123	1,065
2,5	1,924	2,023	2,145	2,300	1,299	1,235	1,165	1,087
3,0	2,193	2,330	2,498	2,715	1,369	1,289	1,201	1,105
3,5	2,449	2,624	2,842	3,126	1,431	1,336	1,232	1,121
4,0	2,692	2,907	3,177	3,505	1,487	1,378	1,260	1,134
4,5	2,926	3,178	3,500	3,925	1,526	1,415	1,285	1,147
5,0	3,156	3,449	3,824	4,320	1,583	1,449	1,307	1,157
5,5	3,378	3,712	4,142	4,710	1,627	1,482	1,328	1,167
6,0	3,598	3,970	4,447	5,100	1,668	1,512	1,348	1,177
6,5	3,809	4,218	4,760	5,483	1,707	1,540	1,366	1,186
7,0	4,012	4,467	5,058	5,861	1,742	1,566	1,383	1,194
7,5	4,217	4,710	5,360	6,250	1,778	1,591	1,399	1,201
8,0	4,415	4,950	5,650	6,620	1,811	1,616	1,414	1,208
9,0	4,800	5,420	6,240	7,370	1,873	1,660	1,442	1,221
10,0	5,188	5,885	6,820	8,120	1,931	1,701	1,468	1,233

6. Untersuchung von Expansionskurven.

(Ermittlung des Exponenten n.)

Es seien V_1 und V_2 die absoluten Rauminhalte zweier Zustände, p_1 und p_2 die Drücke, dann ist

$$n = \frac{\lg p_1 - \lg p_2}{\lg V_2 - \lg V_1}.$$

Die Berechnung von n für mehr als zwei Punkte zeigt, ob und in welchen Grenzen n als unveränderlich betrachtet werden kann, und inwieweit eine Zustandsänderung nach der polytropischen Kurve angenommen werden darf. $n = 1$ ergibt die **gleichseitige Hyperbel.** Besser noch läfst sich der Exponent n ermitteln, wenn man für ver-

Digitized by Google

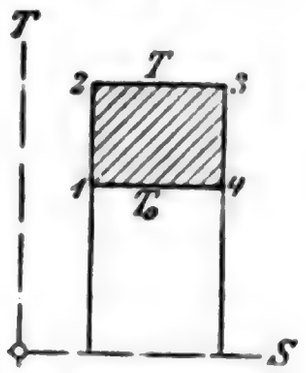
schiedene Punkte der Expansionskurve $\lg V$ und $\lg p$ in rechtwinkligen Koordinaten aufträgt. Für $n =$ unveränderlich mufs sich dann eine Gerade ergeben; die Tangente ihres Neigungswinkels ist $= n$.

D. Besondere Arbeitsprozesse.

1. Carnotscher Kreisprozefs. (Abb. 5).

Er verläuft auf zwei Isothermen T und T_0 und zwei Adiabaten.
1 2, adiabatische Kompression von T_0 auf T,
2 3, isothermische Expansion,
3 4, adiabatische Expansion von T auf T_0,
4 1, isothermische Kompression.

Abb. 5.



$$p_2 p_4 = p_1 p_3,$$
$$T_2 T_4 = T_1 T_3,$$
$$V_2 V_4 = V_1 V_3,$$
$$V_2 p_2 = V_3 p_3,$$
$$V_4 p_4 = V_1 p_1,$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{x-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{x-1} = \frac{T}{T_0}$$

$$L = G R (t - t_0) \ln \frac{p_2}{p_3} = P_1 V_1 \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \ln \frac{p_2}{p_3}.$$

Der **Wirkungsgrad** des Prozesses ist $\eta = \dfrac{A L}{Q_{23}} = \dfrac{T - T_0}{T}$.

Wird der Prozefs umgekehrt durchlaufen, so wird die Arbeit L aufgewendet, und die Wärme Q_{14} wird bei der tiefen Temperatur T_0 entzogen; sie stellt im Falle einer Kältemaschine die Kälteleistung dar.

$$\varepsilon = \frac{Q_{14}}{A L} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

nennt man die **Leistungsziffer** der nach dem Carnotschen Prozefs arbeitenden Kältemaschine.

2. Kreisprozefs zwischen zwei Linien gleichen Druckes und zwei Adiabaten. (Abb. 6.)

(Heifs- und Kalt-Luftmaschinen.)

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{x-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{x-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} \text{ (Tafel S. 407)},$$

$$A L = G c_p (t_3 - t_2 - t_4 + t_1),$$

Digitized by Google

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}},$$

$$\varepsilon = \frac{Q_{14}}{AL} = \frac{T_4}{T_3 - T_4} = 1 : \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} - 1\right].$$

Für Kaltluftmaschinen ist die theoretische Kolbenfläche F in qm für doppeltwirkende Kompressoren

$$F = \frac{1}{c}\,\frac{Q_0}{300\,000}\,\frac{T_4}{T_4 - T_1},$$

wenn c die Kolbengeschwindigkeit in m/sk und Q_0 die Kälteleistung für die Stunde in WE bedeutet.

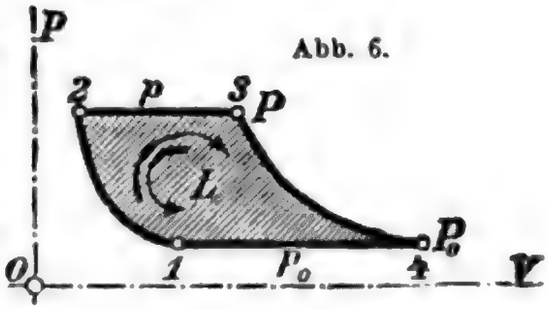


Abb. 6.

3. Kreisprozefs zwischen zwei Kurven gleichen Rauminhaltes und zwei Polytropen oder Adiabaten. (Abb. 7.)

Der Exponent sei für beide Polytropen derselbe (n).

(Gasmaschine.)

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_1}{p_4},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1},$$

$$L = \frac{P_1 V}{n-1}\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right)\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1} - 1\right].$$

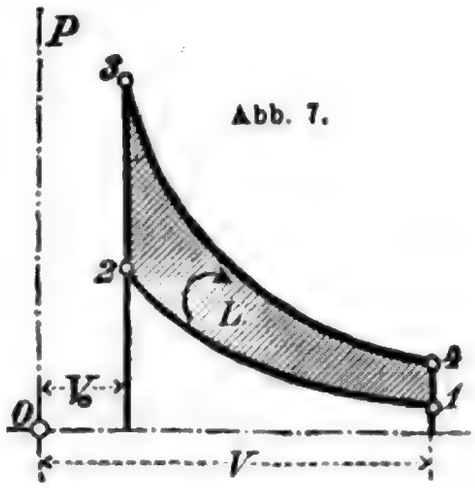


Abb. 7.

Der mittlere Druck des Diagramms ist

$$p_i = \frac{L}{V - V_0}$$

$$p_i = p_1\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right)\frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} = p_1\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) a.$$

Die Werte von a gibt die folgende Tafel:

$p_2 : p_1 =$		3	4	5	6	8	10	12	14	16
$n = 1{,}4$	$a =$	1,70	1,94	2,13	2,31	2,62	2,88	3,10	3,31	3,50
$n = 1{,}3$	$a =$	1,69	1,92	2,11	2,28	2,57	2,81	3,03	3,22	3,39
$n = 1{,}2$	$a =$	1,68	1,90	2,08	2,25	2,51	2,74	2,94	3,12	3,27

Digitized by Google

Sind die Kurven 1 2 und 3 4 Adiabaten, so ist überall n durch x zu ersetzen, und insbesondere gilt dann noch

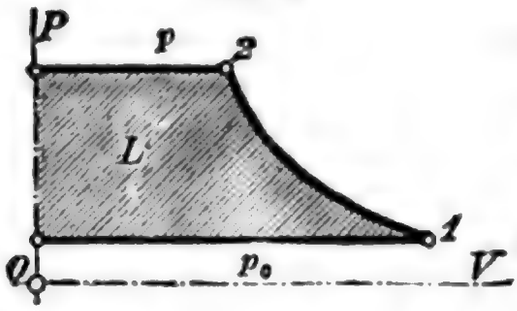
$$AL = G c_v (t_3 - t_2 - t_4 + t_1) = G c_v T_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right)\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{x-1} - 1\right],$$

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{x-1}.$$

4. Luftkompressor. (Abb. 8.)

Für einen Kompressor ohne schädlichen Raum und ohne Arbeitsverluste (Abb. 8) ist die Arbeit zur Kompression von G kg bzw. V cbm Luft oder Gas vom Drucke p_0 und der Temperatur t_0 auf den Druck p

Abb. 8.



1. bei isothermischer Kompression:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} V\,dP = G R T_0 \ln \frac{p}{p_0} = P_0 V \ln \frac{p}{p_0}$$

(Abb. 7), da

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_1 = p_0.$$

Die während der Kompression durch Kühlwasser abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = AL.$$

2. bei polytropischer und adiabatischer Kompression:

$$L = G \frac{n}{n-1} R (t_2 - t_1),$$

$$L = P_0 V \frac{n}{n-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_0 V \frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]$$

$$p_1 = p_0. \qquad T_1 = T_0.$$

Für die Adiabate ist n durch x zu ersetzen.
Die abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = \frac{x-n}{x-1}\,\frac{1}{n}\,AL.$$

Die kleinste und daher günstigste Kompressorarbeit liefert die **Isotherme**, sie ist daher bei der Beurteilung von ausgeführten Kompressoren zugrunde zu legen.

3. Die Ausdrücke für die Kompressorarbeit (Fläche L der Abb. 8) lassen sich in allen Fällen schreiben $L = 10\,000\,V p_m$, worin p_m den mittleren Druck des verlustfreien Kompressors ohne schädlichen Raum darstellt. Zur Berechnung von p_m für verschiedene Kompressionskurven dient die folgende Tafel, es ist $p_m = p_0 b$. (b stellt den mittleren Druck dar, wenn der Ansaugedruck p_0 gerade $= 1$ at ist.)

Digitized by Google

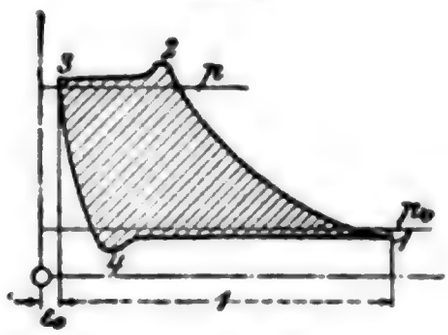
Tafel für b.

$p : p_0 =$	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
$n = 1$ Isotherme	0,405	0,693	0,916	1,099	1,386	1,61	1,79	2,08	2,30
$n = 1,1$	0,418	0,715	0,957	1,155	1,470	1,73	1,95	2,29	2,56
$n = 1,2$	0,420	0,738	0,990	1,205	1,560	1,84	2,09	2,48	2,81
$n = 1,3$	0,425	0,754	1,018	1,252	1,640	1,95	2,22	2,67	3,04
$n = 1,4$ Adiabate	0,430	0,768	1,046	1,290	1,703	2,04	2,34	2,84	3,26

Für Verbundkompression berechnet sich unter der Voraussetzung, daſs im Zwischenkühler auf die Anfangstemperatur t_0 gekühlt wird, die Arbeit, wenn man in die obigen Formeln und die Tafel $\sqrt{\frac{p}{p_0}}$ statt $\frac{p}{p_0}$ einführt und die gefundene Arbeit verdoppelt.

Ausgeführte Kompressoren (Abb. 9) saugen weniger Luft an, als ihrem Hubraume entspricht. Das Verhältnis der wirklich angesaugten Luftmenge in cbm vom Drucke p_0 und der Temperatur t_0 zum Hubraume heiſst der **Lieferungsgrad** λ des Kompressors; er wird bedingt durch den schädlichen Raum (Rückexpansion 3 — 4, Abb. 9), durch Drosselung der angesaugten Luft ($p_1 < p_0$) und Erwärmung der angesaugten Luft durch die Zylinder- und Kanalwände ($t_1 > t_0$).

Abb. 9.



Die durch den Indikator gemessene indizierte Kompressorarbeit ist stets gröſser als die theoretische Arbeit bei isothermischer Kompression; das Verhältnis beider heiſst der **indizierte Wirkungsgrad** η_i des Kompressors, er wird bedingt durch mangelhafte Kühlung ($n > 1$), durch die Mehrarbeit infolge der Drosselung und durch die schädliche Erwärmung der Luft an den heiſsen Wandungen während des Ansaugens, denn die Arbeit steigt im Verhältnis der absoluten Temperatur T_1. Ist p_m der mittlere Druck des theoretischen (verlustfreien Prozesses) und p_i der mittlere indizierte Druck des untersuchten Kompressors, λ sein Lieferungsgrad, so ist

$$\eta_i = \lambda \frac{p_m}{p_i}.$$

Der Wirkungsgrad η_i und der Lieferungsgrad λ nehmen wegen der Wandungswirkung rasch ab, wenn das Druckverhältnis $p : p_0$ wächst, daher Verbundkompression vorteilhaft.

Um einen Einblick in die schädliche Wirkung der Wandungen zu erhalten, berechnet man die Temperatur T_1 nach dem Ansaugen bzw. beim Beginn der Kompression.

Digitized by Google

Es ist

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\frac{p_1}{p_0}}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_0)\frac{p_3}{p_0}\frac{T_0}{T_3} + \lambda}.$$

T_3 kann näherungsweise der zu messenden Austrittstemperatur der Luft gleichgesetzt werden; ε_0 ist das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraum. ε_3 und ε_1 sind die Hubstrecken bei Beginn der Rückexpansion und der Kompression, die meist gleich 0 bzw. gleich 1 zu setzen sein werden. Die Formel kann auch zur Berechnung der Temperatur in irgend einem anderen Punkte der Kompressionslinie dienen. Dichtigkeit des Kolbens und der Steuerung ist vorausgesetzt.

V. Dämpfe.

A. Allgemeines.

1. Wenn man ein beliebiges Gas bei gleichbleibender Temperatur verdichtet, so beginnt es bei einem bestimmten, von der Temperatur abhängigen Drucke **(Sättigungsdruck)** und zugehörigen Rauminhalte v'' flüssig zu werden. Setzt man die Raumverminderung weiter fort, so bleibt von diesem Punkte ab mit der Temperatur auch der Druck unveränderlich, bis das Gas vollständig verflüssigt ist, wobei es einen Raum v' einnimmt.

Zwischen Beginn und Ende der Verflüssigung besteht eine Mischung aus einem gasförmigen (dampfförmigen) und einem flüssigen Anteil (Phase). Es bezeichne für 1 kg Mischung x den dampfförmigen und $y = 1 - x$ den flüssigen Anteil.

Im Gebiete des nassen Dampfes, dem Sättigungsgebiete, ist also die Temperatur nur eine Funktion des Druckes und umgekehrt. Die Beziehung zwischen diesen Werten heißt die Spannungsgleichung oder -kurve. Im besonderen ist die dem Atmosphärendrucke zugehörige Temperatur die Siedetemperatur.

Wo eine Unterscheidung nötig ist, soll im folgenden die zu einem gegebenen Drucke p gehörige Sättigungstemperatur mit ϑ bzw. Θ (absolut) bezeichnet werden.

2. Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Höchsttemperatur t_k und einen zugehörigen Druck p_k, oberhalb deren die Verflüssigung des Gases nicht mehr in der erwähnten Weise durch Zerfall in eine gasförmige und eine flüssige Phase eintritt. Es erfolgt vielmehr ein stetiger Uebergang der gesamten Masse aus dem einen in den anderen Aggregatzustand. Den durch t_k und p_k bestimmten Zustand nennt man den **kritischen.** In ihm treffen sich die Grenzzustände (Grenzkurven) für Flüssigkeit und Dampf. Oberhalb der Werte t_k und p_k besteht keine bestimmte Grenze zwischen den beiden Aggregatzuständen.

Digitized by Google

Tafel der Siedetemperatur t_{760}, der kritischen Temperatur t_k, des kritischen Druckes p_k at und des kritischen Volumens v_k l kg.

	t_{760}	t_k	p_k	v_k
Naphthalin $C_{10}H_8$	218	468	40	
Anilin C_6H_7N	184	425	54	
Wasser H_2O	100	374	225	3,1
Benzol C_6H_6	80	290	50	3,3
Chlorkohlenstoff CCl_4	77	283	46	1,8
Alkohol C_2H_6O	78	243	65	3,6
Norm. Pentan C_5H_{12}	36	197	34	4,3
Aether $C_4H_{10}O$	35	194	37	3,8
Schweflige Säure SO_2	— 10	157	80	1,95
Chlor Cl_2	— 34	150	90	
Chlormethyl CH_3Cl	— 24	143	68	2,7
Ammoniak NH_3	— 33	133	116	
Cyan C_2N_2	— 21	128	62	
Schwefelwasserstoff H_2S	— 52	100	92	
Propan C_3H_8	— 45	97	46	
Chlorwasserstoff HCl	— 80	51	84	
Stickoxydul N_2O	— 92	37	74	2,2
Azetylen C_2H_2	— 84	36	64	4,3
Aethan C_2H_6	— 93	32	51	
Kohlensäure CO_2	— 78	31	75	2,15
Aetylen C_2H_4	— 105	10	52	4,7
Methan CH_4	— 164	— 82	57	
Stickoxyd NO	— 150	— 96	66	
Sauerstoff O_2	— 183	— 118	52	2,32
Argon A	— 186	— 120	52	2,0
Kohlenoxyd CO	— 190	— 136	36	
Stickstoff N_2	— 196	— 146	35	3,1
Wasserstoff H_2	— 253	— 241	15	30
Helium He	— 268	— 267	3	

B. Nasser Dampf.

Es bezeichne

v' bzw. v'' den Rauminhalt in cbm von 1 kg Flüssigkeit bzw. Dampf im Grenzzustande, d. h. unter dem der gegebenen Temperatur entsprechenden Sättigungsdrucke,

c die spezifische Wärme der Flüssigkeit im Grenzzustande,

r die Verdampfungswärme, d. h. die zur Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit bei unveränderlichem t und p nötige Wärme in WE,

$\psi = AP(v'' - v')$ die Arbeit, die bei der Verdampfung infolge der Raumvergrößerung geleistet wird, in WE (äußere Verdampfungswärme),

Digitized by Google

Druck des gesättigten Wasserdampfes bis zum kritischen Punkte für Temperaturen von Grad zu Grad nach Holborn, Henning u. Baumann.

Grad	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0062	0,0067	0,0072	0,0077	0,0083	0,0089	0,0095	0,0102	0,0109	0,0117
10	0,0125	0,0134	0,0143	0,0153	0,0163	0,0174	0,0185	0,0197	0,0210	0,0224
20	0,0238	0,0253	0,0269	0,0286	0,0304	0,0322	0,0342	0,0363	0,0384	0,0407
30	0,0431	0,0456	0,0483	0,0511	0,0541	0,0572	0,0604	0,0638	0,0673	0,0711
40	0,0750	0,0791	0,0834	0,0878	0,0925	0,0974	0,1026	0,1079	0,1135	0,1194
50	0,1255	0,1318	0,1385	0,1455	0,1527	0,1602	0,1681	0,1762	0,1848	0,1936
60	0,2028	0,2124	0,2224	0,2328	0,2435	0,2547	0,2664	0,2785	0,2910	0,3040
70	0,3175	0,3315	0,3460	0,3611	0,3768	0,3929	0,4097	0,4269	0,4449	0,4635
80	0,4828	0,5027	0,5233	0,5445	0,5666	0,5894	0,6129	0,6371	0,6623	0,6881
90	0,7149	0,7425	0,7710	0,8004	0,8307	0,8620	0,8942	0,9274	0,9617	0,9970
100	1,0333	1,0707	1,1093	1,1490	1,1898	1,2320	1,2752	1,3196	1,3655	1,4124
110	1,4609	1,5107	1,5618	1,6144	1,6684	1,7239	1,7808	1,8392	1,8994	1,9611
120	2,0243	2,0892	2,1559	2,2243	2,2944	2,3664	2,4401	2,5021	2,5932	2,6727
130	2,7540	2,8374	2,9229	3,0102	3,0999	3,1917	3,2855	3,3818	3,4802	3,5810
140	3,6839	3,7894	3,8972	4,0078	4,1201	4,2356	4,3536	4,4742	4,5973	4,7233
150	4,8521	4,9834	5,1177	5,2548	5,395	5,538	5,685	5,833	5,985	6,141
160	6,299	6,461	6,627	6,795	6,967	7,142	7,320	7,502	7,689	7,874
170	8,072	8,268	8,469	8,673	8,882	9,094	9,311	9,531	9,755	9,984
180	10,216	10,453	10,695	10,940	11,190	11,444	11,704	11,967	12,235	12,509
190	12,786	13,069	13,356	13,648	13,944	14,247	14,555	14,866	15,184	15,508
200	15,836	16,170	16,510	16,855	17,205	17,561	17,923	18,291	18,664	19,044
210	19,429	19,820	20,218	20,621	21,031	21,446	21,869	22,298	22,733	23,175
220	23,623	24,078	24,540	25,008	25,483	25,965	26,454	26,951	27,454	27,965
230	28,483	29,008	29,541	30,080	30,628	31,183	31,746	32,316	32,895	33,481
240	34,076	34,678	35,289	35,907	36,535	37,172	37,816	38,467	39,128	39,797
250	40,476	41,162	41,859	42,565	43,279	44,001	44,734	45,476	46,227	46,987
260	47,758	48,537	49,326	50,125	50,934	51,752	52,581	53,419	54,267	55,126
270	55,995	56,874	57,764	58,665	59,576	60,497	61,430	62,374	63,329	64,295
280	65,274	66,263	67,263	68,276	69,299	70,336	71,386	72,449	73,522	74,608
290	75,705	76,815	77,94	79,08	80,23	81,39	82,57	83,76	84,96	86,18
300	87,41	88,65	89,90	91,17	92,45	93,745	95,055	96,38	97,715	99,06
310	100,42	101,80	103,19	104,60	106,02	107,46	108,91	110,37	111,85	113,35
320	114,86	116,39	117,94	119,50	121,07	122,66	124,27	125,90	127,55	129,21
330	130,89	132,58	134,28	136,01	137,75	139,51	141,30	143,10	144,91	146,74
340	148,60	150,46	152,34	154,25	156,17	158,12	160,09	162,07	164,07	166,09
350	168,12	170,17	172,25	174,34	176,46	178,60	180,75	182,94	185,15	187,39
360	189,63	191,91	194,21	196,54	198,91	201,32	203,74	206,20	208,68	211,19
370	213,73	216,30	218,89	221,54	224,24					

Anmerkung. Weitere Spannungstafeln für Wasser S. 416 ff., schweflige Säure, Kohlensäure und Ammoniak S. 430 ff.

Digitized by Google

$\varrho = r - \psi$ die Vergrößerung der Energie durch die Verdampfung in WE (innere Verdampfungswärme),
i' und u' den Wärmeinhalt und die Energie der Flüssigkeit im Grenzzustande, von 0^0 ab gerechnet.

Dann ist $i' = u' + APv' - AP_0v_0'$, $c = \frac{di'}{dt} - Av' \frac{dP}{dT}$,

$i'' = i' + r$ der Wärmeinhalt des gesättigten Dampfes,
$u'' = u' + \varrho$ die Energie des gesättigten Dampfes,

$s' = \int_0^t \frac{c\,dT}{T}$ die Entropie der Flüssigkeit,

$s'' = s' + \frac{r}{T}$ die Entropie des gesättigten Dampfes.

a. Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für gesättigte Dämpfe die **Clapeyronsche Gleichung:** $\frac{r}{T} = A(v'' - v')\frac{dP}{dT}$.

Für nassen Dampf in beliebigem Zustande gelten

$$v = v' + x(v'' - v'), \qquad u = u' + x\varrho,$$

$$s = s' + x\frac{r}{T}, \qquad i = i' + xr.$$

Für eine Zustandsänderung 1 2 für 1 kg ist

$$Q_{1\,2} = u_2' - u_1' + x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1 + A\int_1^2 P\,dv$$

oder
$$Q_{1\,2} = i_2' - i_1' + x_2r_2 - x_1r_1 - A\int_1^2 v\,dP.$$

b. Wasserdampf.

Die folgenden Tafeln für gesättigten Wasserdampf beruhen hauptsächlich auf den Versuchen **Regnaults** und denen von **Knoblauch, Linde** und **Klebe.***)

Außer den oben angeführten Bezeichnungen bedeutet noch c_p'' den Wert der spez. Wärme für gleichen Druck in unmittelbarer Nähe der Grenzkurve.

Von den folgenden Tafeln sind die ersten beiden nach Drücken, die anderen nach Temperaturen geordnet.

c. Besondere Zustandsänderungen. (Expansionskurven.)

1. Isothermen, zugleich **Linien gleichen Druckes:** t = unveränderlich, p = unveränderlich.

$$L = P(V_2 - V_1) = GP(v'' - v')(x_2 - x_1); \qquad Q = Gr(x_2 - x_1).$$

*) Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. Berlin bei Springer. 1906.

Digitized by Google

Tafel I.

1. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	2. Absolute Temperatur T	3. Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm v″	4. Gewicht von 1 cbm Dampf kg γ''	5. Entropie der Flüssigkeit s′	6. Entropie des Dampfes s″	7. s″ − s′ = r/T	8. Spez. Wärme an der Grenzkurve c_p''
0,02	290,3	68,126	0,01468	0,0616	2,0783	2,0167	0,478
0,04	301,8	35,387	0,02826	0,1004	2,0202	1,9198	0,479
0,06	309,0	24,140	0,04142	0,1240	1,9868	1,8628	0,480
0,08	314,3	18,408	0,05432	0,1411	1,9631	1,8220	0,481
0,10	318,6	14,920	0,06703	0,1546	1,9449	1,7903	0,481
0,12	322,2	12,568	0,07956	0,1659	1,9300	1,7641	0,482
0,15	326,7	10,190	0,09814	0,1799	1,9121	1,7322	0,483
0,20	332,8	7,777	0,12858	0,1984	1,8890	1,6906	0,484
0,25	337,6	6,307	0,1586	0,2129	1,8711	1,6582	0,486
0,30	341,7	5,316	0,1881	0,2252	1,8566	1,6314	0,487
0,35	345,3	4,600	0,2174	0,2356	1,8444	1,6088	0,488
0,40	348,5	4,060	0,2463	0,2448	1,8336	1,5888	0,490
0,50	353,9	3,2940	0,3036	0,2604	1,8159	1,5555	0,492
0,60	358,5	2,7770	0,3601	0,2734	1,8015	1,5281	0,494
0,70	362,5	2,4040	0,4160	0,2846	1,7895	1,5049	0,496
0,80	366,0	2,1216	0,4713	0,2944	1,7789	1,4845	0,498
0,90	369,2	1,9003	0,5262	0,3032	1,7698	1,4666	0,499
1,0	372,1	1,7220	0,5807	0,3111	1,7615	1,4504	0,501
1,1	374,8	1,5751	0,6349	0,3183	1,7541	1,4358	0,503
1,2	377,2	1,4521	0,6887	0,3250	1,7473	1,4223	0,504
1,4	381,7	1,2571	0,7955	0,3370	1,7352	1,3982	0,507
1,6	385,7	1,1096	0,9013	0,3475	1,7248	1,3773	0,510
1,8	389,3	0,9939	1,0062	0,3569	1,7156	1,3587	0,513
2,0	392,6	0,9006	1,1104	0,3655	1,7077	1,3420	0,516
2,5	399,7	0,7310	1,3680	0,3839	1,6903	1,3064	0,521
3,0	405,8	0,6163	1,6224	0,3993	1,6760	1,2767	0,526
3,5	411,1	0,5335	1,8743	0,4125	1,6640	1,2515	0,531
4,0	415,8	0,4708	2,1239	0,4242	1,6537	1,2295	0,536
4,5	420,1	0,4217	2,3716	0,4347	1,6445	1,2098	0,541
5,0	424,0	0,3820	2,6177	0,4442	1,6363	1,1921	0,546
5,5	427,6	0,3494	2,8624	0,4529	1,6290	1,1761	0,550
6,0	430,9	0,3220	3,1058	0,4609	1,6221	1,1612	0,554
6,5	434,1	0,2987	3,3481	0,4683	1,6158	1,1475	0,558
7,0	437,0	0,2786	3,5891	0,4753	1,6101	1,1348	0,561
7,5	439,8	0,2611	3,8294	0,4819	1,6048	1,1229	0,565
8,0	442,5	0,2458	4,0683	0,4881	1,5997	1,1116	0,568
8,5	445,0	0,2322	4,3072	0,4939	1,5949	1,1010	0,572
9,0	447,4	0,2200	4,5448	0,4995	1,5905	1,0910	0,575
9,5	449,7	0,2091	4,7819	0,5048	1,5863	1,0815	0,578
10,0	451,9	0,1993	5,018	0,5099	1,5822	1,0723	0,581
11,0	456,1	0,1822	5,489	0,5194	1,5748	1,0554	0,588
12,0	459,9	0,1678	5,960	0,5282	1,5678	1,0396	0,593
13,0	463,6	0,15565	6,425	0,5364	1,5616	1,0252	0,598
14,0	467,0	0,14515	6,889	0,5440	1,5557	1,0117	0,603
15,0	470,2	0,13601	7,352	0,5513	1,5504	0,9991	0,608
16,0	473,3	0,12797	7,814	0,5581	1,5452	0,9871	0,614
18,0	479,1	0,11450	8,734	0,5707	1,5359	0,9652	0,623
20,0	484,3	0,10365	9,648	0,5821	1,5274	0,9453	0,632

Digitized by Google

Tafel II.

1. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	2. Temperatur t	3. Wärmeinhalt der Flüssigkeit i′	4. Wärmeinhalt des Dampfes i″	5. Energie des Dampfes u″	6. Verdampfungswärme i″ − i′ = r	7. u″ − u′ = ϱ	8. AP (v″ − v′) = ψ
0,02	17,3	17,3	602,9	571,0	585,5	553,6	31,91
0,04	28,8	28,8	608,3	575,1	579,4	546,3	33,15
0,06	36,0	36,0	611,6	577,7	575,6	541,7	33,92
0,08	41,3	41,4	614,1	579,6	572,7	538,2	34,49
0,10	45,6	45,7	616,0	581,1	570,4	535,4	34,94
0,12	49,2	49,3	617,7	582,3	568,4	533,1	35,32
0,15	53,7	53,8	619,7	583,9	565,9	530,1	35,79
0,20	59,8	59,9	622,4	586,0	562,6	526,1	36,42
0,25	64,6	64,8	624,6	587,7	559,8	522,9	36,92
0,30	68,7	68,9	626,4	589,1	557,5	520,2	37,34
0,35	72,3	72,5	628,0	590,3	555,5	517,8	37,70
0,40	75,5	75,7	629,4	591,3	553,7	515,6	38,02
0,50	80,9	81,2	631,7	593,1	550,5	512,0	38,56
0,60	85,5	85,8	633,7	594,6	547,8	508,8	39,01
0,70	89,5	89,9	635,3	595,9	545,5	506,1	39,39
0,80	93,0	93,5	636,8	597,0	543,3	503,6	39,73
0,90	96,2	96,7	638,1	598,1	541,4	501,4	40,03
1,0	99,1	99,6	639,3	599,0	539,7	499,4	40,30
1,1	101,8	102,3	640,7	599,8	538,4	497,5	40,55
1,2	104,2	104,8	641,3	600,5	536,5	495,7	40,78
1,4	108,7	109,4	643,1	601,9	533,7	492,6	41,18
1,6	112,7	113,4	644,7	603,0	531,2	489,7	41,54
1,8	116,3	117,1	646,0	604,1	528,9	487,1	41,85
2,0	119,6	120,4	647,2	605,1	526,8	484,7	42,14
2,5	126,7	127,7	649,9	607,1	522,2	479,4	42,74
3,0	132,8	133,9	652,0	608,7	518,1	474,9	43,23
3,5	138,1	139,4	653,8	610,1	514,5	470,8	43,65
4,0	142,8	144,2	655,4	611,3	511,2	467,2	44,01
4,5	147,1	148,6	656,8	612,4	508,2	463,9	44,33
5,0	151,0	152,6	658,1	613,3	505,5	460,8	44,61
5,5	154,6	156,3	659,2	614,2	502,9	458,0	44,87
6,0	157,9	159,8	660,2	615,0	500,4	455,3	45,10
6,5	161,1	163,0	661,1	615,7	498,1	452,8	45,32
7,0	164,0	166,1	662,0	616,3	495,9	450,4	45,51
7,5	166,8	168,9	662,8	616,9	493,9	448,2	45,67
8,0	169,5	171,7	663,5	617,5	491,8	446,0	45,86
8,5	172,0	174,3	664,2	618,0	489,9	443,9	46,02
9,0	174,4	176,8	664,9	618,5	488,1	441,9	46,17
9,5	176,7	179,2	665,5	619,0	486,3	440,0	46,30
10,0	178,9	181,5	666,1	619,4	484,6	438,2	46,43
11,0	183,1	185,8	667,1	620,2	481,3	434,6	46,67
12,0	186,9	189,9	668,1	620,9	478,2	431,3	46,88
13,0	190,6	193,7	668,9	621,6	475,3	428,2	47,08
14,0	194,0	197,3	669,7	622,2	472,5	425,2	47,26
15,0	197,2	200,7	670,5	622,7	469,8	422,4	47,43
16,0	200,3	203,9	671,2	623,2	467,3	419,7	47,58
18,0	206,1	210,0	672,4	624,1	462,4	414,6	47,85
20,0	211,3	215,5	673,4	624,9	457,9	409,8	48,08

Tafel III.

1. Temperatur t	2. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	3. Druck mm Q.-S. von 0°	4. Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm v″	5. Gewicht von 1 cbm Dampf kg γ″	6. Entropie der Flüssigkeit s′	7. Entropie des Dampfes s″	8. s″ − s′ = r/T
0	0,0063	4,60	204,97	0,00488	0,0000	2,1783	2,1783
5	0,0089	6,53	146,93	0,00681	0,0182	2,1479	2,1297
10	0,0125	9,17	106,62	0,00938	0,0360	2,1188	2,0828
15	0,0173	12,70	78,23	0,01278	0,0535	2,0909	2,0374
20	0,0236	17,40	58,15	0,01720	0,0707	2,0643	1,9936
25	0,0320	23,6	43,667	0,02290	0,0877	2,0389	1,9512
30	0,0429	31,5	33,132	0,03018	0,1044	2,0146	1,9102
35	0,0569	41,8	25,393	0,03938	0,1208	1,9912	1,8704
40	0,0747	54,9	19,650	0,05089	0,1369	1,9688	1,8319
45	0,0971	71,4	15,346	0,06516	0,1528	1,9474	1,7946
50	0,125	92,0	12,091	0,08271	0,1685	1,9268	1,7583
55	0,160	117,5	9,607	0,10409	0,1839	1,9070	1,7231
60	0,202	148,8	7,695	0,12995	0,1991	1,8880	1,6889
65	0,254	186,9	6,211	0,16100	0,2141	1,8697	1,6556
70	0,317	233,1	5,050	0,19800	0,2289	1,8522	1,6233
75	0,392	288,5	4,1353	0,2418	0,2435	1,8352	1,5917
80	0,482	354,6	3,4085	0,2934	0,2579	1,8189	1,5610
85	0,589	433,0	2,8272	0,3537	0,2721	1,8031	1,5310
90	0,714	525,4	2,3592	0,4239	0,2861	1,7879	1,5018
95	0,862	633,7	1,9797	0,5051	0,2999	1,7731	1,4732
100	1,033	760	1,6702	0,5987	0,3136	1,7589	1,4453
105	1,232	906	1,4166	0,7059	0,3271	1,7452	1,4181
110	1,462	1075	1,2073	0,8283	0,3404	1,7319	1,3915
115	1,726	1269	1,0338	0,9673	0,3536	1,7190	1,3654
120	2,027	1491	0,8894	1,1243	0,3666	1,7064	1,3398
125	2,371	1744	0,7681	1,3018	0,3795	1,6943	1,3148
130	2,760	2030	0,6664	1,5005	0,3922	1,6824	1,2902
135	3,200	2354	0,5800	1,7241	0,4048	1,6710	1,2662
140	3,695	2718	0,5071	1,9719	0,4173	1,6599	1,2426
145	4,248	3125	0,4450	2,2471	0,4296	1,6490	1,2194
150	4,868	3581	0,3917	2,553	0,4418	1,6384	1,1966
155	5,557	4088	0,3460	2,890	0,4538	1,6280	1,1742
160	6,323	4651	0,3065	3,262	0,4658	1,6181	1,1523
165	7,170	5274	0,2724	3,671	0,4776	1,6082	1,1306
170	8,104	5961	0,2429	4,117	0,4893	1,5986	1,1093
175	9,131	6717	0,2171	4,607	0,5009	1,5893	1,0884
180	10,258	7546	0,1945	5,140	0,5124	1,5802	1,0678
185	11,491	8453	0,1748	5,720	0,5238	1,5713	1,0475
190	12,835	9442	0,1575	6,348	0,5351	1,5626	1,0275
195	14,300	10519	0,1423	7,028	0,5463	1,5541	1,0078
200	15,890	11688	0,1288	7,763	0,5574	1,5458	0,9884

Digitized by Google

Tafel IV.

1. Temperatur t	2. Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	3. Wärmeinhalt des Dampfes i''	4. Diff.	5. Energie des Dampfes u''	6. Verdampfungswärme (i''−i') = r	7. (u''−u') = ϱ	8. AP(v''−v') = ψ
0	0	594,7		564,7	594,7	564,7	30,02
5	5,0	597,1		566,5	592,1	561,5	30,56
10	10,0	599,4	4,74	568,3	589,4	558,3	31,11
15	15,0	601,8		570,1	586,8	555,1	31,65
20	20,0	604,1	4,71	571,9	584,1	551,9	32,19
25	25,0	606,5		573,7	581,5	548,7	32,74
30	30,0	608,8	4,67	575,5	578,8	545,5	33,28
35	35,0	611,1		577,3	576,1	542,3	33,81
40	40,1	613,5	4,63	579,1	573,4	539,1	34,34
45	45,1	615,8		580,9	570,7	535,8	34,88
50	50,1	618,0	4,58	582,6	567,9	532,5	35,41
55	55,1	620,3		584,4	565,2	529,3	35,93
60	60,1	622,6	4,52	586,1	562,4	526,0	36,45
65	65,2	624,8		587,8	559,6	522,7	36,96
70	70,2	627,0	4,44	589,5	556,8	519,3	37,47
75	75,3	629,2		591,2	553,9	516,0	37,97
80	80,3	631,3	4,34	592,8	551,0	512,6	38,47
85	85,3	633,5		594,5	548,1	509,3	38,96
90	90,4	635,6	4,23	596,1	545,2	505,7	39,45
95	95,5	637,6		597,7	542,2	502,2	39,92
100	100,5	639,7	4,09	599,2	539,1	498,7	40,39
105	105,6	641,7		600,8	536,1	495,2	40,85
110	110,7	643,6	3,95	602,3	532,9	491,6	41,30
115	115,8	645,5		603,8	529,8	488,0	41,74
120	120,9	647,4	3,79	605,2	526,6	484,4	42,17
125	126,0	649,2		606,6	523,3	480,7	42,59
130	131,1	651,0	3,63	608,0	520,0	477,0	43,00
135	136,2	652,8		609,3	516,6	473,2	43,41
140	141,3	654,5	3,45	610,6	513,2	469,4	43,80
145	146,4	656,1		611,9	509,7	465,5	44,18
150	151,6	657,8	3,27	613,1	506,2	461,6	44,55
155	156,7	659,3		614,3	502,6	457,7	44,90
160	161,9	660,8	3,07	615,4	498,9	453,7	45,25
165	167,1	662,3		616,5	495,2	449,6	45,58
170	172,2	663,7	2,86	617,6	491,4	445,5	45,90
175	177,4	665,0		618,6	487,6	441,4	46,20
180	182,6	666,3	2,66	619,6	483,7	437,2	46,49
185	187,9	667,6		620,6	479,8	433,0	46,78
190	193,1	668,8	2,48	621,5	475,7	428,7	47,05
195	198,3	670,0		622,3	471,7	424,4	47,31
200	203,6	671,1	2,27	623,2	467,5	420,0	47,56

Tafel V.

t	V	J	S	t	V	J	S
0	0,075	8	0,021	225	0,0101	1,00	0,00159
5	0,071	7	0,020	230	0,0098	0,97	0,00152
10	0,067	7	0,018	235	0,0095	0,94	0,00146
15	0,063	6	0,017	240	0,0092	0,91	0,00139
20	0,059	6	0,016	245	0,0089	0,88	0,00134
25	0,056	6	0,015	250	0,0086	0,85	0,00128
30	0,053	5	0,014	255	0,0083	0,82	0,00123
35	0,050	5	0,013	260	0,0081	0,79	0,00118
40	0,048	5	0,012	265	0,0078	0,77	0,00113
45	0,045	5	0,011	270	0,0076	0,75	0,00109
50	0,043	4,3	0,0103	275	0,0074	0,72	0,00105
55	0,041	4,1	0,0097	280	0,0071	0,70	0,00101
60	0,039	3,9	0,0091	285	0,0069	0,68	0,00097
65	0,037	3,7	0,0085	290	0,0067	0,66	0,00093
70	0,035	3,5	0,0080	295	0,0065	0,64	0,00090
75	0,033	3,4	0,0075	300	0,0063	0,62	0,00086
80	0,032	3,2	0,0070	305	0,0062	0,60	0,00083
85	0,030	3,1	0,0066	310	0,0060	0,58	0,00080
90	0,029	2,9	0,0062	315	0,0058	0,57	0,00077
95	0,028	2,8	0,0059	320	0,0057	0,55	0,00074
100	0,0265	2,66	0,00554	325	0,0055	0,53	0,00072
105	0,0255	2,55	0,00524	330	0,0053	0,52	0,00069
110	0,0243	2,44	0,00494	335	0,0052	0,50	0,00067
115	0,0232	2,35	0,00468	340	0,0051	0,49	0,00064
120	0,0223	2,24	0,00442	345	0,0049	0,48	0,00062
125	0,0214	2,14	0,00418	350	0,0048	0,46	0,00060
130	0,0205	2,06	0,00397	355	0,0047	0,45	0,00058
135	0,0197	1,97	0,00376	360	0,0046	0,44	0,00056
140	0,0189	1,89	0,00357	365	0,0044	0,43	0,00054
145	0,0181	1,82	0,00339	370	0,0043	0,41	0,00052
150	0,0174	1,75	0,00321	375	0,0042	0,40	0,00051
155	0,0168	1,68	0,00306	380	0,0041	0,39	0,00049
160	0,0161	1,61	0,00291	385	0,0040	0,38	0,00047
165	0,0155	1,55	0,00277	390	0,0039	0,37	0,00046
170	0,0149	1,49	0,00263	395	0,0038	0,36	0,00044
175	0,0144	1,44	0,00251	400	0,0037	0,35	0,00043
180	0,0139	1,38	0,00239	405	0,0036	0,34	0,00042
185	0,0134	1,33	0,00228	410	0,0035	0,33	0,00040
190	0,0129	1,29	0,00217	415	0,0034	0,33	0,00039
195	0,0124	1,24	0,00208	420	0,0034	0,32	0,00038
200	0,0120	1,20	0,00198	425	0,0033	0,31	0,00037
205	0,0116	1,15	0,00189	430	0,0032	0,30	0,00036
210	0,0112	1,11	0,00181	435	0,0031	0,29	0,00035
215	0,0108	1,08	0,00173	440	0,0031	0,29	0,00034
220	0,0105	1,04	0,00166	445	0,0030	0,28	0,00033
225	0,0101	1,00	0,00159	450	0,0029	0,27	0,00032

Digitized by Google

Im pv- und ts-Diagramm (S. 396) sind die Isothermen der Abszissenachse parallele Geraden. Im is-Diagramm sind sie ebenfalls Geraden, u. zw. ist die Tangente ihres Neigungswinkels gleich der abs. Temperatur.

2. Adiabaten: $s =$ unveränderlich.

$$s_1' + x_1 \frac{r_1}{T_1} = s_2' + x_2 \frac{r_2}{T_2}; \qquad AL = G(u_1' + x_1 \varrho_1 - u_2' - x_2 \varrho_2).$$

Für Wasserdampf kann bei $x > 0{,}7$ die Adiabate im pv-Diagramm mit genügender Annäherung durch eine polytropische Kurve (S. 396 u. 406) dargestellt werden:

$p V^{\varkappa} =$ unveränderlich, u. zw. $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1\, x$.

In dieser Näherungsgleichung hat $\varkappa$ nicht die besondere Bedeutung wie bei Gasen. Es wird nun $L = \frac{P_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$.

3. Linien gleicher Dampfmenge (gleichen Mischungsverhältnisses): $x =$ unveränderlich.

Ist $x \geqq 0{,}5$, so kann für Wasserdampf mit genügender Genauigkeit gesetzt werden

$$p_1 v_1^{\frac{16}{15}} = p_2 v_2^{\frac{16}{15}} = 1{,}787\, x^{\frac{16}{15}} \quad \text{oder} \quad p_1^{\frac{15}{16}} v_1 = p_2^{\frac{15}{16}} v_2 = 1{,}7235\, .\, x,$$

d. h. die Linien gleicher Dampfmenge sind Polytropen. Im besonderen gilt für trockenen Dampf $x = 1$ $p^{\frac{15}{16}} v'' = 1{,}7235$.

Diese Formel kann zur Berechnung des Rauminhaltes oder der Dichte des trocken gesättigten Dampfes benutzt werden.

Die Linien für $x = 0$ und $x = 1$ heifsen **Grenzkurven**, da sie das Sättigungsgebiet begrenzen.

Die Linien gleicher Dampfmenge werden im pv-, ts- und is-Diagramm (S. 396) gezeichnet, indem man die geraden Isothermen zwischen den Grenzkurven in gleiche Teile teilt und entsprechende Punkte verbindet.

4. Linien gleichen Rauminhaltes:

$v =$ unveränderlich, $v' + x(v'' - v') =$ unveränderlich.

$$x_1(v_1'' - v_1') = x_2(v_2'' - v_2'); \qquad Q = G(u_2' + x_2 \varrho_2 - u_1' - x_1 \varrho_1).$$

C. Ueberhitzter Dampf.

(Unvollkommene Gase.)

1. In der Nähe des Sättigungsgebietes weichen die Gase von den Gesetzen der vollkommenen Gase ab; diese Abweichungen werden am gröfsten in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem wird

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \infty, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \infty, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \infty, \qquad c_p = \infty.$$

Digitized by Google

Diesem Verhalten ist besonders bei der Kohlensäure in ihrer Anwendung bei Kältemaschinen Rechnung zu tragen.

2. Für **Wasserdampf** sind in dem technisch in Betracht kommenden Gebiete (Heifsdampfmaschinen) die Abweichungen von den Gasgesetzen nicht sehr beträchtlich.

Zur Berechnung des Rauminhaltes, der Entropie, des Wärmeinhaltes und der Energie des überhitzten Wasserdampfes dienen die folgenden Formeln:

Rauminhalt: $v = 47\,\frac{T}{P} + 0{,}001 - \mathfrak{V}$,

Entropie: $s = 0{,}477 \ln T - 0{,}11 \ln p - \mathfrak{S}p - 1{,}0544$,

Wärmeinhalt: $i = 594{,}7 + 0{,}477\,t - \mathfrak{J}p$,

Energie: $u = 564{,}7 + 0{,}367\,t - 78{,}1\,\mathfrak{V}p$.

Die Hülfsgröfsen $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{J}$ sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben und können der Tafel V, S. 420 entnommen werden.

$$\mathfrak{V} = 0{,}075\left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}} \qquad \mathfrak{S} = \frac{10\,000}{427}\,\frac{10}{3}\,\frac{\mathfrak{V}}{T}, \qquad \mathfrak{J} = \frac{10\,000}{427}\left(\frac{13}{3}\,\mathfrak{V} - 0{,}001\right).$$

Es läfst sich auch schreiben:

$$i = \frac{13}{3}\,\psi + A\,v'P + 464{,}7; \qquad u = \frac{10}{3}\,\psi + 464{,}7.$$

Zur Berechnung der Ueberhitzungswärme $= i - i''$ zieht man von dem nach obiger Formel berechneten Werte des Wärmeinhaltes des überhitzten Dampfes den dem gegebenen Drucke entsprechenden Wert i'' nach Taf. II, S. 417 ab.

Für adiabatische Zustandsänderungen des überhitzten Wasserdampfes folgen aus obigen Formeln die Gleichungen:

$$\frac{p}{T^{\frac{13}{3}}} = \text{Konst.}; \qquad T\,(v - 0{,}001)^{0{,}3} = \text{Konst.}; \qquad p\,(v - 0{,}001)^{1{,}3} = \text{Konst.}$$

Wenn man das sehr kleine Flüssigkeitsvolumen $v' = 0{,}001$ vernachlässigt, was in den meisten Fällen unbedenklich geschehen kann, so stimmt das Verhalten des überhitzten Wasserdampfes in den folgenden Beziehungen mit jenem der vollkommenen Gase überein.

Für die Adiabate gilt:

$$\frac{p}{T^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}} = \text{konst.}, \qquad T v^{\varkappa - 1} = \text{konst.}, \qquad p\,v^{\varkappa} = \text{konst.},$$

und der Wärmeinhalt und die Energie berechnen sich wie bei Gasen zu:

$$i = A\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,Pv + \text{konst.}, \qquad u = A\,\frac{1}{\varkappa - 1}\,Pv + \text{konst.},$$

wobei für Wasserdampf zu setzen ist:

$$\varkappa = 1{,}3, \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = \frac{13}{3}, \qquad \frac{1}{\varkappa - 1} = \frac{10}{3}.$$

Digitized by Google

Mittlere spezifische Wärme $[c_p]_\vartheta^t$ des überhitzten Wasserdampfes zwischen der Sättigungstemperatur ϑ und verschiedenen Ueberhitzungstemperaturen t bei verschiedenen Drücken p, nach den Formeln S. 422.

$p =$	0,1	0,5	1	2	4	6	8	10	12	14	16
$\vartheta =$	45,6	80,9	99,1	119,6	142,8	157,9	169,5	178,9	187,0	194,0	200,3
$t = 100$	0,480	0,490	0,501	—	—	—	—	—	—	—	—
150	0,479	0,488	0,495	0,513	0,533	—	—	—	—	—	—
200	0,479	0,486	0,491	0,503	0,523	0,538	0,558	0,573	0,588	0,601	—
250	0,479	0,484	0,489	0,500	0,514	0,528	0,543	0,556	0,569	0,578	0,588
300	0,479	0,483	0,487	0,496	0,508	0,519	0,531	0,541	0,551	0,562	0,569
350	0,479	0,482	0,485	0,493	0,503	0,513	0,522	0,531	0,539	0,547	0,555
400	0,478	0,482	0,484	0,491	0,500	0,508	0,517	0,523	0,531	0,538	0,545

Knoblauch und **Jakob***) haben die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes durch Versuche bei 2, 4, 6 und 8 at bis 350° bestimmt, und Knoblauch und H. Mollier**) haben diese Versuche wiederholt und bis 550° ausgedehnt. Sie erhalten für die mittlere spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes folgende Werte:

Mittlere spezifische Wärme $[c_p]_\vartheta^t$ des überhitzten Wasserdampfes nach den Versuchen von Knoblauch und H. Mollier.

$p =$	2	4	6	8
$\vartheta =$	119,6	142,8	157,9	169,5
$t = 150$	0,496	0,528	—	—
200	0,488	0,509	0,537	0,565
250	0,484	0,499	0,519	0,535
300	0,482	0,495	0,510	0,521
350	0,483	0,494	0,505	0,514
400	0,484	0,493	0,503	0,511
450	0,486	0,494	0,503	0,510
500	0,489	0,496	0,504	0,510
550	0,492	0,499	0,505	0,511

D. Anwendung auf die Theorie der Dampfmaschine.

Es bezeichne

p, P den Dampfdruck vor dem Eintritt in die Maschine,
ϑ, Θ die dem Drucke p entsprechende Sättigungstemperatur,
t, T die Temperatur des eintretenden Dampfes bei Ueberhitzung,
x dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn nafs,
p_0, P_0 den Gegendruck (Kondensator- oder Auspuffdruck),

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 35 u. 36.
**) Mitt. Forschungsarb. Heft 108 u. 109.

Digitized by Google

ϑ_0, Θ_0 die zugehörige Sättigungstemperatur,
t_0, T_0 die Temperatur des austretenden Dampfes, wenn überhitzt,
x_0 dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn naſs.

a. Die aus 1 kg trocken **gesättigten Dampfes in der verlustfreien Maschine** (d. h. bei vollständiger adiabatischer Expansion von p auf p_0 in einem wärmedichten Zylinder einer reibungsfreien Maschine) **gewinnbare Arbeit** ist

$$AL = i'' - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s''),$$

für nassen Dampf ist AL um $r(1-x)\left(1-\frac{T_0}{T}\right)$ kleiner.

Näherungsformeln:

Für trockenen Dampf, $x = 1$

$$AL = \frac{\lg p - \lg p_0}{6{,}76 - 0{,}9 \lg p_0} 632,$$

Für nassen Dampf, $x > 0{,}7$

$$L = \frac{x}{x-1} Pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right].$$

$$v = v' + x(v'' - v'); \; x = 1{,}035 + 0{,}1\, x.$$

b. Die aus 1 kg **überhitzten Dampfes in der verlustfreien Maschine gewinnbare Arbeit** ist

$$AL = i - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s),$$

wenn, wie in der Regel: $s_0'' \geqq s$.

i und s sind nach den Formeln S. 422 für den gegebenen überhitzten Dampf zu berechnen, i_0'' und s_0'' beim Drucke p_0 aus den Dampftafeln S. 416 ff. zu entnehmen. Ist

$$s_0'' < s, \text{ so ist}$$

$$L = \frac{13}{3} Pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{3}{13}}\right] \quad \text{oder} \quad AL = (i - 464{,}7)\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{3}{13}}\right].$$

c. Der Dampfverbrauch für die Stunde und Pferdestärke in der verlustfreien Maschine ist

$$D = \frac{1}{AL} \frac{75}{427} 60^2 = \frac{632}{AL}.$$

Für trockenen Dampf ergibt sich (s. u. **a.**)

$$D = \frac{6{,}76 - 0{,}9 \lg p_0}{\lg p - \lg p_0}.$$

Am raschesten und bequemsten lassen sich die Arbeit und der Dampfverbrauch von verlustfreien Maschinen mit Hülfe des JS-Diagrammes ermitteln (Anm. S. 396).

d. Der thermische Wirkungsgrad η_t einer Dampfmaschine ist das Verhältnis der gewonnenen indizierten Arbeit L_i zu der zur Dampferzeugung aufgewendeten Wärme.

Allgemein

$$\eta_t = \frac{AL_i}{i - t_w}.$$

Für trockenen Dampf

$$\eta_t = \frac{AL_i}{i'' - t_w}.$$

Digitized by Google

t_w ist die Speisewasser-Temperatur; soll η_t zum Vergleich verschiedener Maschinen dienen, so ist für t_w stets ein gleicher Normalwert einzuführen, setzt man dafür 25° C, so wird angenähert (Fehler meist unter 1 %), wenn D_i den tatsächlichen Dampfverbrauch für die indizierte Pferdekraftstunde bezeichnet,

für trockenen Dampf	für überhitzten Dampf
$\eta_t = 1 : D_i$	$\eta_t = 1 : D_r$.

D_r bezeichnet den **reduzierten Dampfverbrauch** bei Heifsdampfmaschinen und berechnet sich aus dem tatsächlichen Dampfverbrauch D_i für die indizierte Pferdestärke nach

$$D_r = \frac{i - t_w}{i'' - t_w} D_i.$$

Dieser reduzierte Dampfverbrauch, der den Arbeitswert des überhitzten Dampfes auf trockenen gesättigten Dampf bezogen angibt, ist bei dem Vergleich der Wirtschaftlichkeit von Heifsdampfmaschinen mit gewöhnlichen Dampfmaschinen einzuführen.

Statt des thermischen Wirkungsgrades wird manchmal der **Wärmeverbrauch** W für die Stunde und Pferdestärke angegeben, es ist

$$W = 632 : \eta_t.$$

e. **Der indizierte Wirkungsgrad** η_i stellt das Verhältnis der wirklich gewonnenen indizierten Arbeit zu der Arbeit der verlustfreien Maschine dar; er ist $\eta_i = D : D_i$.

f. Auswertung von Dampfmaschinen-Versuchen.

Für die folgenden Rechnungen mufs aus dem Versuche ermittelt sein: der Dampfverbrauch D_i, die Mittelwerte der Ein- und Austrittsdrücke, die Ueberhitzung oder Feuchtigkeit beim Eintritt, ein mittleres Indikatordiagramm (Abb. 10 S. 426).

Es bezeichne aufser den S. 413, 423 u. 424 genannten Gröfsen

ε_0 das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraume,

ε_1, ε_2 . . . das Verhältnis der vom Kolben bis zu den betreffenden Punkten durchlaufenen Räume zum Hubraume,

p_i den mittleren Druck des Diagramms,

p_I, p_{II} . . . denselben für die einzelnen Zylinder bei mehrfacher Expansion,

N_i die gesamte indizierte Leistung in PS,

N_I, N_{II} . . . die indizierte Leistung der einzelnen Zylinder,

φ das Verhältnis des in den Zylinder gelangten Dampfgewichtes zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht (Zylinder + Mantel),

φ_I, φ_{II} . . . das Verhältnis der in die einzelnen Zylinder einer mehrstufigen Maschine eintretenden Dampfgewichte zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht,

μ, μ_I, μ_{II} . . . das Verhältnis der in den einzelnen Zylindermänteln niedergeschlagenen Dampfgewichte zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht. Für Einzylindermaschinen ist

$$\varphi = 1 - \mu.$$

Digitized by Google

1. Das Gewicht der im schädlichen Raume abgesperrten Dampfmenge (m) im Verhältnis zu der während des Spiels gebrauchten Dampfmenge berechnet sich zu

$$m = \frac{27\,(t_0 + t_3)}{p_i\, D_i\, v_3}.$$

Für Mehrzylindermaschinen ist für die einzelnen Zylinder zu setzen

p_{I}, p_{II} . . . statt p_i und $D_i \frac{N_i}{N_{\mathrm{I}}}$, $D_i \frac{N_i}{N_{\mathrm{II}}}$ . . . statt D_i.

An die Stelle von t_3 und v_3 kann auch t_4 und v_4 oder jeder beliebige Punkt der Kompressionslinie treten. Der Zustand des abgesperrten Dampfes und damit v_3 und v_4 können nicht genau ermittelt werden, doch ist der Einfluss dieser Unsicherheit, die sich durch die folgenden Rechnungen zieht, meist gering.

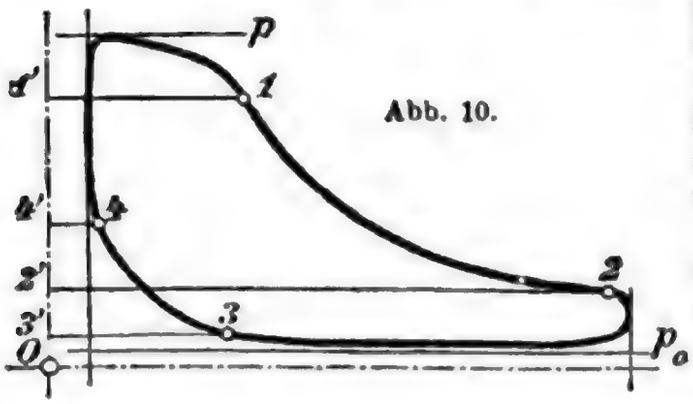


Abb. 10.

Man nimmt für gewöhnliche Fälle den Dampf im Punkte 3 trocken an. Dann wird

$$m = \frac{27\,(t_0 + t_3)\,\gamma_3''}{p_i\, D_i}.$$

Da sich die Werte von γ bei niedrigen Drücken rasch ändern und die Interpolation schwierig wird, schreibt sich die Formel für m bequemer

$$m = \frac{632\,(t_0 + t_3)\,p_3}{p_i\, D_i\, \psi_3}.$$

ψ und γ'' s. Tafel S. 416 bis 419.

In Fällen, wo der Dampf den Zylinder überhitzt verläfst, ist $t_3 = t_0$ zu setzen und nach der später folgenden Gleichung zu berechnen. Damit ist dann v_3 bestimmt.

2. Berechnung des Dampfzustandes während der Expansion.

Für einen beliebigen Punkt der Expansionslinie gilt für Einzylindermaschinen mit oder ohne Mantel, mit oder ohne Ueberhitzung

$$x_e = \frac{27\,(t_0 + t_e)\,\gamma_e}{D_i\, p_i\, (\varphi + m)} \quad \text{oder} \quad x_e = \frac{632\,(t_0 + t_e)\,p_e}{D_i\, p_i\, (\varphi + m)\,\psi_e}.$$

Für Mehrzylindermaschinen ist in vorstehenden Formeln wie oben p_{I}, p_{II} . . . , $D_i \frac{N_i}{N_{\mathrm{I}}}$ . . . sowie φ_{I}, φ_{II} . . . statt φ einzuführen.

Wird der für x_e erhaltene Wert gröfser als 1, so berechnet sich der spez. Rauminhalt des überhitzten Dampfes zu $v = x v''$ und damit aus Formel S. 422 die Temperatur.

3. Zustand des austretenden Dampfes.

Der Wärmeinhalt des eintretenden Dampfes ist für gesättigten bzw. überhitzten Dampf

$$i = i' + x r \quad \text{bzw.} \quad i = 594{,}7 + 0{,}477\,t - 3p$$

Digitized by Google

und derjenige des austretenden Dampfes

$$i_0 = i_0' + x_0 r_0 \quad \text{bzw.} \quad i_0 = 594{,}7 + 0{,}477\, t_0 - \Im p_0.$$

Werte von $\Im$ Taf. S. 420.

Bezeichnet

$\Sigma(\mu i')$ den Wärmeinhalt sämtlicher Kondensationswasser,

$(\mu i')_{\mathrm{I}}$ . . . den Wärmeinhalt für den Mantel eines einzelnen Zylinders,

S, S_{I} . . . die durch Ausstrahlung verlorene,

K, K_{I} . . . die durch Kolbenreibung erzeugte Wärme für 1 kg verbrauchten Dampf, für die ganze Maschine bzw. einen einzelnen Zylinder,

so ist **für Einzylindermaschinen**

$$(1-\mu)\, i_0 = i - \mu i' - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich i_0 und damit aus einer der vorstehenden Gleichungen x_0 oder t_0;

für Mehrzylindermaschinen

Hochdruck-Zylinder:

$$\varphi_{\mathrm{I}}\, i_0 = i\,(\varphi_{\mathrm{I}} + \mu_{\mathrm{I}}) - (\mu i')_{\mathrm{I}} - \frac{N_{\mathrm{I}}}{N_i}\,\frac{632}{D_i} - S_{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{I}}.$$

Niederdruck-Zylinder:

$$\varphi\, i_0 = i - \Sigma(\mu i') - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Entsprechende Formeln gelten für Mitteldruck-Zylinder unter Berücksichtigung der Art der Mantelheizung.

4. Wärmeaustausch zwischen Dampf und Zylinderwand. (Kalorimetrische Untersuchung.)

Alle Wärmemengen sind für 1 kg des von der Maschine gebrauchten Dampfes gerechnet.

Wünscht man die Wärmemengen auf einen Hub zu beziehen, so sind sie mit der für den Hub gebrauchten Dampfmenge $\left(\frac{D_i N_i}{2 \cdot 60 \cdot n}\right)$ zu multiplizieren.

Zunächst sind aus dem Indikatordiagramm die mittleren Drücke (auf die Diagrammlänge bezogen) der Flächen 411'4'4, 122'1'1 (Abb. 10 S. 426) usw. durch Planimetrieren zu ermitteln, sie seien p_{41}, p_{12}, p_{23}, p_{34}.

Die von dem Dampfe in den vier Abschnitten aufgenommenen oder abgegebenen Wärmemengen berechnen sich nun, wie folgt:

1. Eintritt: $Q_{41} = (\varphi + m)\, i_1 - \varphi i - m i_4 + \frac{p_{41}}{p_i}\,\frac{632}{D_i}$;

2. Expansion: $Q_{12} = (\varphi + m)\,(i_2 - i_1) + \frac{p_{12}}{p_i}\,\frac{632}{D_i}$;

3. Kompression: $Q_{34} = m\,(i_4 - i_3) + \frac{p_{34}}{p_i}\,\frac{632}{D_i}$;

4. Austritt: $Q_{23} = \varphi\, i_0 + m i_3 - (\varphi + m)\, i_2 + \frac{p_{23}}{p_i}\,\frac{632}{D_i}$.

Digitized by Google

Ist die Wärmemenge Q_0, die 1 kg Dampf im Kondensator an das Kühlwasser abgibt, sowie die Temperatur t_l des Kondensates durch Versuch bestimmt, so ist $i_0 = Q_0 + t_l$.

Tritt der Dampf überhitzt aus der Maschine aus mit der Temperatur t_0, die gemessen sei, so ist damit der entsprechende Wärmeinhalt i_0 bestimmt.

Endlich kann Q_{23} noch bestimmt werden aus der Gleichung

$$Q_{41} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = \mu (i - i') - S + K.$$

Die vorstehenden Formeln gelten für Einzylindermaschinen, u. zw. für Betrieb mit gesättigtem wie mit überhitztem Dampfe. Sollen sie auf Mehrzylindermaschinen Anwendung finden, so ist folgendes zu beachten:

Für die Zylinder, die aus den Aufnehmern gespeist werden, ist statt i der entsprechende Wert einzuführen; φ ist durch φ_{I}, φ_{II} . . . zu ersetzen; $\frac{632}{D_i}$ ist stets mit $\frac{N_{\mathrm{I}}}{N_i}$, $\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_i}$ . . . zu multiplizieren. In der Gleichung, welche die Summe der vier Wärmemengen enthält, bezieht sich μ nur auf den Mantel des betrachteten Zylinders und an Stelle von S, K tritt S_{I}, K_{I} . . .

E. Anwendung auf die Theorie der Kältemaschinen.

(Kaltdampfmaschinen.)

1. Die Kältemaschinen bestehen im wesentlichen aus dem Kompressor, dem Verdampfer und dem Kondensator. Die letztgenannten beiden werden durch Rohrschlangen gebildet, in denen die Arbeitsflüssigkeit, meist Ammoniak, Kohlensäure oder schweflige Säure umläuft. Die Kondensatorrohre werden äufserlich von Kühlwasser, die des Verdampfers von der zu kühlenden Flüssigkeit oder Luft umspült. Besonders häufig wird eine Salzlösung*) gekühlt, die als Zwischenmittel zur Uebertragung der Kälte dient. Der Prozefs der Maschinen spielt sich zwischen zwei von der Spannungskurve des verwendeten Dampfes abhängigen Drücken ab: dem Verdampferdrucke p_0 und dem Kondensatordrucke p. Ersterer ist wesentlich bestimmt durch die Temperatur, auf der das Kühlmittel erhalten werden soll, letzterer durch die Temperatur und Menge des Kühlwassers. In gewöhnlichen Fällen liegen die zu p_0 und p gehörigen Sättigungstemperaturen ϑ_0 und ϑ nur sehr wenig unter oder über den Ablauftemperaturen des Salz- und Kühlwassers.

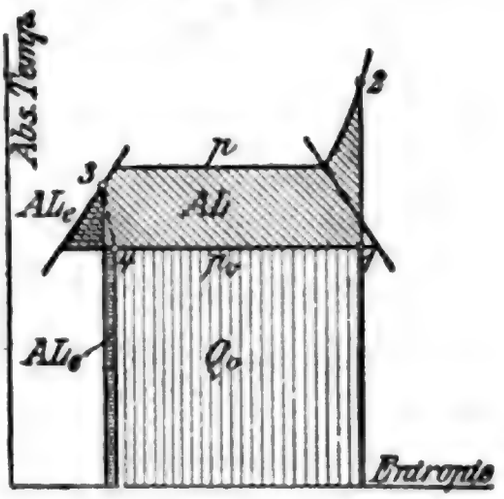
2. Abb. 11 stellt den Prozefs im Wärmediagramm (S. 396) dar. Der Kompressor saugt aus dem Verdampfer trockenen oder wenig feuchten Dampf an (Zustand 1 Abb. 11 Punkt 1), komprimiert denselben adiabatisch auf den Zustand 2 (Punkt 2) und drückt ihn in den Kondensator. Daselbst wird der durch die Kompression überhitzte oder getrocknete Dampf unter Abgabe der Wärme Q an das Kühlwasser vollständig verflüssigt (Linie 2 3) und gelangt im Zustande 3 mit einer Temperatur t_3 zum **Regulierventil** (Drosselventil) und durch dieses in den Verdampfer zurück (Punkt 4). Beim Durchströmen des Regulier-

*) Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen S. 375.

Digitized by Google

ventils verdampft ein kleiner Teil der Flüssigkeit (Zustand 4), der Rest wird vollständig oder doch fast vollständig im Verdampfer verdampft (Linie 4 1), indem Wärme von der Salzlösung an den Arbeitsdampf übergeht. Diese der Salzlösung entzogene Wärme Q_0 ist die erstrebte **Kälteleistung.**

Abb. 11.



Bezeichnet man die Kompressorarbeit in WE mit AL, so hat man die Hauptbeziehung

$$Q = Q_0 + AL.$$

3. Entscheidend für die Wirtschaftlichkeit einer Kältemaschine ist das Verhältnis der erzeugten Kälte Q_0 zu dem Arbeitsaufwande AL, es heifst die **Leistungsziffer** der Maschine

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{AL}.$$

Anstatt der Leistungsziffer gibt man häufig die Kälteleistung K für die Stunde und Pferdestärke an. Es ist

$$K = 632\,\varepsilon.$$

Die Leistungsziffer ist wesentlich von den Temperaturen von Salz- und Kühlwasser und den hierdurch bedingten Drücken abhängig.

Die Anwendung des Regulierventils verursacht infolge des nicht umkehrbaren Durchströmungsprozesses einen Leistungsverlust. Die Arbeit AL_e, welche die gespannte Flüssigkeit in einem besonderen Expansionszylinder leisten könnte, geht verloren, und aufserdem wird noch die Kälteleistung um den gleichen Betrag vermindert, da die Flüssigkeit die nicht abgegebene Arbeit AL_e als Wärme in den Verdampfer mitbringt. Der **Leistungsverlust** durch das Regulierventil ist daher, wenn $\varepsilon' = \frac{Q_0 + AL_e}{AL - AL_e}$ die Leistungsziffer mit Expansionszylinder bedeutet,

$$\zeta = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{AL_e}{AL}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon'}\right).$$

Bei Anwendung eines Expansionszylinders wäre der Prozefs ein Carnotscher, solange ohne Ueberhitzung (nafs) und ohne Unterkühlung gearbeitet wird; in diesem Falle ist

$$\varepsilon' = \frac{T_0}{T - T_0} \text{ und } \zeta = \frac{AL_e}{AL}\,\frac{T}{T_0}.$$

Da bei gegebenen Temperaturen AL_e nur von der Gröfse der spezifischen Wärme des Arbeitstoffes in flüssigem Zustande abhängt und AL mit der Verdampfungswärme wächst, so wird ζ um so ungünstiger sein, je gröfser die Flüssigkeitswärme und je kleiner die Verdampfungswärme des Stoffes ist; im allgemeinen also ungünstig in der Nähe des kritischen Punktes.

Für Ammoniak und schweflige Säure beträgt je nach den Temperaturen $\zeta = 0{,}04$ bis $0{,}08$; für Kohlensäure liegt ζ etwa zwischen $0{,}15$ und $0{,}40$.

Digitized by Google

Aufser den genannten physikalischen Eigenschaften des Arbeitsstoffes sind, wie schon angedeutet, die Temperaturen von Einfluss auf ζ. Im besonderen kann der Verlust verringert werden, wenn man die Temperatur vor dem Regulierventil t_3 möglichst tief hält. Dies ist besonders bei Kohlensäure von Wichtigkeit und wird durch besondere Flüssigkeitskühler erreicht.

4. Die **Kompressorarbeit** AL einer verlustfreien Maschine.

Allgemein ist für 1 kg: $AL = i_2 - i_1$, wobei $s_2 = s_1$.

a) Es wird trockener Dampf angesaugt:

$$AL = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} AP_0 v_0'' \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1 \right],$$

es kann gesetzt werden

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 4, \quad \varkappa = \frac{4}{3} \text{ für } NH_3; \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 5, \quad \varkappa = 1{,}25 \text{ für } SO_2.$$

Rauminhalt von 1 kg Kohlensäure in Litern

(Nach Amagats

°C	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
— 20	19,50	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
— 15	20,35	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99
— 10	21,15	15,85	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01
— 5	21,90	16,55	12,45	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03
0	22,65	17,20	13,15	10,60	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05
5	23,35	17,80	13,80	11,20	8,90	1,12	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08
10	24,05	18,40	14,40	11,70	9,40	7,50	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12
15	24,70	18,95	14,95	12,20	9,90	8,25	6,95	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17
20	25,30	19,50	15,50	12,65	10,45	8,75	7,45	6,05	1,29	1,28	1,26	1,24	1,23
25	25,90	20,00	16,00	13,10	10,95	9,20	7,90	6,65	5,59	4,20	1,38	1,34	1,31
30	26,50	20,50	16,50	13,55	11,40	9,60	8,35	7,15	6,10	5,10	3,97	1,58	1,48
35	27,10	21,00	17,00	14,00	11,80	10,00	8,80	7,60	6,52	5,59	4,70	3,90	2,68
40	27,70	21,49	17,45	14,40	12,20	10,40	9,20	7,95	6,90	6,03	5,27	4,71	3,80
45	28,30	21,98	17,90	14,80	12,60	10,80	9,55	8,30	7,25	6,40	5,75	4,95	4,36
50	28,85	22,47	18,35	15,20	13,00	11,20	9,90	8,65	7,60	6,76	6,06	5,32	4,76
55	—	22,96	18,80	15,60	13,40	11,50	10,25	9,00	7,90	7,08	6,36	5,66	5,10
60	—	23,45	19,25	16,00	13,80	11,80	10,55	9,30	8,25	7,35	6,64	5,97	5,40
65	—	23,94	19,65	16,40	14,15	12,10	10,85	9,60	8,50	7,62	6,90	6,27	5,68
70	—	24,43	20,05	16,80	14,50	12,40	11,10	9,90	8,80	7,90	7,16	6,55	5,94
75	—	24,92	20,45	17,20	14,80	12,70	11,40	10,20	9,10	8,20	7,40	6,79	6,19
80	—	25,42	20,85	17,58	15,10	13,00	11,70	10,45	9,40	8,48	7,63	7,03	6,44
85	—	25,91	21,25	17,95	15,45	13,30	11,95	10,75	9,65	8,74	7,88	7,24	6,66
90	—	26,40	21,65	18,30	15,75	13,60	12,20	11,00	9,90	8,98	8,12	7,45	6,87
95	—	26,89	22,00	18,65	16,05	13,90	12,45	11,25	10,15	9,21	8,36	7,67	7,08
100	—	27,38	22,40	19,00	16,35	14,20	12,70	11,50	10,40	9,43	8,60	7,88	7,30
105	—	—	22,75	19,35	16,65	14,50	12,95	11,75	10,65	9,65	8,80	8,10	7,49
110	—	—	23,15	19,70	16,95	14,80	13,20	12,00	10,85	9,87	9,00	8,32	7,66
115	—	—	23,50	20,05	17,25	15,05	13,45	12,20	11,10	10,10	9,20	8,50	7,85
120	—	—	23,85	20,35	17,55	15,35	13,70	12,40	11,30	10,30	9,40	8,69	8,04
125	—	—	24,20	20,65	17,80	15,65	13,95	12,60	11,50	10,50	9,60	8,83	8,23
130	—	—	24,50	20,95	18,05	15,90	14,20	12,80	11,70	10,70	9,75	9,00	8,43
135	—	—	24,80	21,25	18,30	16,15	14,45	13,00	11,90	10,90	9,95	9,17	8,60
140	—	—	25,10	21,55	18,55	16,45	14,70	13,20	12,10	11,10	10,10	9,34	8,75
145	—	—	25,40	21,80	18,80	16,70	14,95	13,40	12,25	11,25	10,25	9,47	8,88
150	—	—	25,70	22,05	19,00	16,95	15,20	13,60	12,40	11,35	10,40	9,60	9,00

Digitized by Google

b) Der Dampf ist am Ende der adiabatischen Kompression gerade trocken: $AL = i'' - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s'')$.

Benutzung der Tafeln S. 435 ff.

5. Die im Kondensator abgegebene Wärme Q:

$$Q = i_2 - i_3.$$

i_3 ist unter i' den Dampftafeln zu entnehmen. i ev. aus:

$$i = i_1 + AL.$$

6. Durchgang durch das Regulierventil:

$$i_3 = i_4; \quad i_3 = i_0' + x_4 r_0, \text{ daraus } x_4.$$

7. Kälteleistung Q_0:

$$Q_0 = i_1 - i_4 = i_1 - i_3; \quad i_1 = i_0' + x_1 r_0.$$

Wärmebilanz des Kreislaufes: $Q = Q_0 + AL$.

bei verschiedenen Temperaturen und Drücken.

Versuchen.)

85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150 at
0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99
1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00
1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02
1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04
1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07
1,22	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10
1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14
1,41	1,38	1,35	1,32	1,30	1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19
1,71	1,58	1,51	1,45	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,28	1,27	1,26	1,25
2,99	2,29	1,90	1,67	1,57	1,51	1,47	1,43	1,39	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31
3,67	3,07	2,61	2,19	1,86	1,72	1,64	1,58	1,52	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38
4,17	3,65	3,19	2,76	2,38	2,09	1,88	1,77	1,67	1,62	1,57	1,53	1,49	1,46
4,53	4,09	3,62	3,20	2,82	2,55	2,30	2,05	1,90	1,81	1,73	1,67	1,62	1,58
4,85	4,44	3,99	3,56	3,20	2,91	2,68	2,45	2,22	2,04	1,92	1,84	1,77	1,71
5,15	4,78	4,29	3,92	3,53	3,25	2,97	2,75	2,54	2,35	2,29	2,04	1,95	1,86
5,43	4,99	4,56	4,21	3,84	3,52	3,25	3,02	2,80	2,62	2,45	2,29	2,16	2,03
5,68	5,23	4,81	4,45	4,10	3,80	3,50	3,26	3,04	2,86	2,69	2,52	2,38	2,24
5,93	5,47	5,06	4,69	4,34	4,03	3,74	3,48	3,26	3,06	2,90	2,74	2,59	2,44
6,18	5,70	5,28	4,90	4,56	4,25	3,96	3,70	3,47	3,27	3,09	2,92	2,77	2,62
6,39	5,90	5,48	5,10	4,76	4,45	4,18	3,92	3,67	3,47	3,28	3,10	2,95	2,80
6,60	6,12	5,68	5,30	5,00	4,64	4,37	4,10	3,86	3,65	3,46	3,27	3,11	2,97
6,80	6,32	5,86	5,50	5,14	4,83	4,54	4,29	4,05	3,83	3,63	3,44	3,28	3,13
7,00	6,51	6,05	5,68	5,33	5,01	4,71	4,48	4,22	4,00	3,80	3,60	3,49	3,29
7,19	6,69	6,23	5,85	5,50	5,19	4,88	4,64	4,40	4,16	3,95	3,75	3,57	3,44
7,37	6,90	6,41	6,03	5,67	5,35	5,01	4,80	4,55	4,32	4,11	3,90	3,74	3,58
7,54	7,06	6,58	6,20	5,84	5,52	5,20	4,94	4,70	4,48	4,26	4,04	3,88	3,72
7,76	7,20	6,74	6,36	6,00	5,67	5,34	5,08	4,84	4,62	4,40	4,18	4,00	3,84
7,87	7,36	6,90	6,51	6,16	5,82	5,47	5,20	4,96	4,76	4,54	4,30	4,12	3,96
8,04	7,52	7,05	6,65	6,36	5,96	5,61	5,32	5,08	4,88	4,64	4,42	4,22	4,06
8,20	7,68	7,20	6,80	6,46	6,10	5,73	5,44	5,20	5,00	4,76	4,52	4,33	4,16
8,34	7,84	7,35	6,94	6,59	6,23	5,85	5,55	5,32	5,12	4,86	4,61	4,41	4,24
8,48	8,00	7,50	7,08	6,71	6,35	5,98	5,65	5,42	5,22	4,95	4,69	4,50	4,32

Digitized by Google

Für Kohlensäure ist Formel a) wegen der Nähe des kritischen Punktes unzulässig. Die Tafel (unten) gibt für diesen Dampf die Kompressorarbeit und die durch die Kompression erzeugte Temperatur t (Ueberhitzungstemperatur) nach zeichnerischer Ermittlung mit Hülfe des JS-Diagramms (Anm. S. 396).

8. **Bemerkungen zu den Tafeln** S. 435 bis 438. Die Tafeln S. 435 bis 438 geben für schweflige Säure, Ammoniak und Kohlensäure die wichtigsten physikalischen Gröfsen des Sättigungsgebietes.

In den Tafeln S. 433 u. 434 geben die oberen Zahlen die Kälteleistungen von verlustfreien Maschinen in WE für 1 Stunde und 1 PS; sie sind unter der Annahme berechnet, dafs trockener Dampf angesaugt wird. Die Drücke $p = 9$ für Ammoniak und $p = 60$ für Kohlensäure entsprechen etwa normalen Kühlwasserverhältnissen, während die einander entsprechenden Drücke $p = 13$ und $p = 80$ bei Kühlwassermangel oder sehr warmem Kühlwasser vorkommen. Um zu zeigen, dafs Kohlensäuremaschinen auch bei Kondensatordrücken arbeiten können, die weit über dem kritischen liegen, ist noch der Druck $p = 100$ und für Ammoniak ungefähr entsprechend $p = 17$ aufgenommen.

In denselben Tafeln stellen die unteren Ziffern das Verhältnis der Kälteleistung bei der gegebenen Flüssigkeitstemperatur t' zu jener bei $t' = t_0$ dar. Da im letzteren Falle, d. h. beim Abkühlen bis zur Verdampfertemperatur, der Verlust durch das Ueberströmen und der Einfluss der besonderen physikalischen Eigenschaften des Arbeitsstoffes wegfällt, so ermöglichen diese Tafelwerte einen völlig unabhängigen Vergleich der Leistungsfähigkeit der beiden Maschinen für die verschiedensten Arbeitsverhältnisse. Zieht man die genannten Ziffern von 1 ab, so erhält man die spez. Dampfmenge x_4 nach Eintritt in den Verdampfer.

Adiabatische Kompression von trocken gesättigten Kohlensäuredämpfen.

p in at =		60	70	80	90	100
$t_0 = -30°$	AL	15,15	17,18	19,00	20,63	22,14
	t	72,0	86,5	99,0	111,0	122,0
$= -25°$	AL	13,19	15,14	16,90	18,47	19,92
	t	67,0	80,5	93,0	105,0	115,5
$= -20°$	AL	11,30	13,18	14,87	16,39	17,78
	t	62,0	75,0	87,5	99,0	109,0
$= -15°$	AL	9,53	11,32	12,95	14,40	15,75
	t	57,0	70,0	82,0	93,0	103,0
$= -10°$	AL	7,86	9,55	11,13	12,54	13,84
	t	52,0	65,0	76,5	87,0	97,5
$= -5°$	AL	6,31	7,90	9,42	10,77	12,01
	t	47,0	60,0	71,0	81,0	92,0
$= 0°$	AL	4,85	6,30	7,76	9,07	10,25
	t	42,0	55,0	66,0	76,0	86,5

p = Enddruck der Kompression, t_0 = Anfangstemperatur,
t = Endtemperatur, AL = Kompressorarbeit für 1 kg Kohlensäure.

Digitized by Google

Schwefligsäuremaschinen haben bei gleichen Sättigungstemperaturen im Kondensator angenähert dieselbe theoretische Leistung wie Ammoniakmaschinen. Den drei Kondensatordrücken der Tafeln würden hier etwa die Drücke $p = 3{,}5$, 5,0 und 6,5 entsprechen.

Kälteleistung in WE für eine Stunde und Pferdestärke (S. 432).

A. Ammoniakmaschine.

Kondensatordruck $p = 9$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	-5	-10	-15	-20	-25
	t_0	6473 1,00	5277 1,00	4432 1,00	3779 1,00	3276 1,00
	10	6118 0,95	4898 0,93	4041 0,91	3386 0,90	2884 0,88
	15	5997 0,93	4800 0,91	3960 0,89	3318 0,88	2826 0,86
	20	5875 0,91	4702 0,89	3879 0,88	3249 0,86	2767 0,85

Kondensatordruck $p = 13$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	-5	-10	-15	-20	-25
	t_0	4400 1,00	3794 1,00	3305 1,00	2909 1,00	2586 1,00
	10	4159 0,95	3522 0,93	3013 0,91	2607 0,90	2277 0,88
	15	4077 0,93	3452 0,91	2953 0,89	2554 0,88	2231 0,86
	20	3994 0,91	3381 0,89	2893 0,88	2501 0,86	2185 0,85
	25	3910 0,89	3310 0,87	2831 0,86	2448 0,84	2138 0,83
	30	3825 0,87	3238 0,85	2769 0,84	2394 0,82	2090 0,81

Kondensatordruck $p = 17$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$	Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	-5	-10	-15	-20	-25
	t_0	3522 1,00	3101 1,00	2755 1,00	2459 1,00	2215 1,00
	10	3329 0,95	2878 0,93	2512 0,91	2203 0,90	1951 0,88
	15	3263 0,93	2821 0,91	2462 0,89	2159 0,88	1911 0,86
	20	3197 0,91	2764 0,89	2411 0,88	2114 0,86	1872 0,85
	25	3130 0,89	2705 0,87	2360 0,86	2069 0,84	1831 0,83
	30	3062 0,87	2646 0,85	2308 0,84	2023 0,82	1791 0,81

Digitized by Google

Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	-5	-10	-15	-20	-25

B. Kohlensäuremaschine.

Kondensatordruck $p = 60$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$

t_0				
	5985 1,00	5025 1,00	4310 1,00	3747 1.00	3312 1.00
10	5130 0,86	4150 0,83	3435 0.80	2888 0,77	2472 0,75
15	4770 0.80	3864 0,77	3196 0.74	2687 0,72	2300 0,70
20	4330 0,73	3506 0,70	2903 0,68	2442 0,65	2089 0,63

Kondensatordruck $p = 80$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$

t_0					
	4032 1,00	3566 1,00	3178 1.00	2857 1,00	2588 1,00
10	3503 0,87	2986 0,84	2570 0,81	2235 0,79	1965 0,76
15	3289 0,92	2806 0,79	2416 0,76	2101 0,74	1846 0,72
20	3072 0,76	2621 0,74	2258 0,71	1963 0,69	1725 0,67
25	2790 0,69	2398 0,68	2066 0,65	1796 0,63	1578 0,61
30	2397 0,60	2066 0,58	1779 0,56	1548 0,55	1358 0,53

Kondensatordruck $p = 100$ at

Temperatur vor dem Regulierventil $t' =$

t_0					
	3170 1,00	2879 1,00	2614 1,00	2392 1,00	2195 1,00
10	2779 0,88	2433 0,85	2140 0,82	1895 0,79	1687 0,77
15	2629 0,83	2303 0,80	2025 0,78	1793 0,75	1596 0,73
20	2474 0,78	2168 0,75	1906 0,73	1688 0,71	1503 0,69
25	2304 0,73	2032 0,71	1787 0,68	1583 0,66	1410 0,64
30	2102 0,66	1856 0,64	1633 0,63	1446 0,60	1288 0,59

Die in den Tafeln gegebenen Kälteleistungen werden von ausgeführten Maschinen wegen der eintretenden Verluste (Wandungswirkung, Ventilwiderstände, Wärmeeinstrahlung) nicht erreicht, doch darf man bei guten Maschinen auf 75 bis 85 % der theoretischen Tafelwerte rechnen. Ueber Drosselungsverluste S. 454 ff.

Tafel für Rauminhalt von 1 kg Kohlensäure bei -20^0 bis $+150^0$ C und 20 bis 150 at S. 430 u. 431.

Digitized by Google

Tafel für gesättigte Dämpfe der schwefligen Säure (S. 430).

(Berechnet nach Versuchen von Cailletet & Mathias.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) p	v'' (cbm/kg)	Spezifisches Gewicht γ (kg/cbm)	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äußere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	$\frac{r}{T}$
— 30	0,39	0,822	1,217	— 9,05	88,72	97,77	90,27	7,50	— 0,0351	0,3672	0,4023
— 25	0,51	0,643	1,556	— 7,62	89,28	96,91	89,24	7,67	— 0,0293	0,3614	0,3907
— 20	0,65	0,513	1,950	— 6,15	89,77	95,92	88,12	7,80	— 0,0234	0,3557	0,3791
— 15	0,83	0,416	2,406	— 4,66	90,16	94,82	86,90	7,92	— 0,0176	0,3499	0,3675
— 10	1,04	0,330	3,024	— 3,14	90,46	93,60	85,57	8,03	— 0,0117	0,3442	0,3559
— 5	1,29	0,270	3,708	— 1,58	90,69	92,27	84,15	8,12	— 0,0059	0,3385	0,3443
0	1,58	0,223	4,490	0	90,82	90,82	82,62	8,20	0,0000	0,3327	0,3327
+ 5	1,93	0,184	5,443	+ 1,61	90,86	89,25	80,99	8,26	+ 0,0059	0,3269	0,3210
+ 10	2,34	0,152	6,592	+ 3,25	90,81	87,56	79,28	8,28	+ 0,0117	0,3212	0,3094
+ 15	2,81	0,127	7,893	+ 4,92	90,68	85,76	77,46	8,30	+ 0,0176	0,3154	0,2978
+ 20	3,35	0,107	9,372	+ 6,62	90,47	83,85	75,55	8,30	+ 0,0234	0,3096	0,2862
+ 25	3,96	0,090	11,148	+ 8,35	90,17	81,82	73,54	8,28	+ 0,0293	0,3039	0,2746
+ 30	4,67	0,076	13,210	+ 10,11	89,78	79,67	71,44	8,23	+ 0,0351	0,2981	0,2629
+ 35	5,46	0,065	15,456	+ 11,90	89,30	77,40	69,24	8,16	+ 0,0410	0,2923	0,2513
+ 40	6,35	0,055	18,282	+ 13,71	88,74	75,03	66,95	8,08	+ 0,0468	0,2865	0,2397

$$c = 0{,}3194 + 0{,}00117\,t, \qquad s' = 0{,}00117\,t,$$

$$\frac{r}{T} = 0{,}3327 - 0{,}002324\,t, \qquad v' = 0{,}0007.$$

Digitized by Google

Tafel für gesättigten Ammoniakdampf (S. 430).

(Berechnet nach Versuchen von Dieterici und Wobsa.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg qcm) (absolut) p	Raum-inhalt (cbm/kg) v''	Spezifisches Gewicht γ''	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme ganze r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äufsere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	Differenz $\frac{r}{T}$
— 30	1,192	0,9857	1,013	— 32,72	295,2	327,9	300,4	27,52	— 0,1265	1,2234	1,3499
— 25	1,512	0,7896	1,266	— 27,40	297,0	324,4	296,5	27,90	— 0,1048	1,2039	1,3087
— 20	1,900	0,6373	1,570	— 22,03	298,7	320,8	292,5	28,30	— 0,0835	1,1850	1,2685
— 15	2,367	0,5180	1,928	— 16,61	300,3	317,0	288,4	28,62	— 0,0622	1,1678	1,2300
— 10	2,923	0,4247	2,355	— 11,13	301,9	313,0	284,0	28,95	— 0,0414	1,1490	1,1904
— 5	3,579	0,3505	2,853	— 5,59	303,3	308,8	279,5	29,24	— 0,0206	1,1315	1,1521
0	4,347	0,2914	3,432	0	304,4	304,4	274,9	29,50	0	1,1158	1,1158
+ 5	5,242	0,2439	4,103	+ 5,65	305,5	299,9	270,2	29,73	+ 0,0205	1,0998	1,0793
+ 10	6,271	0,2051	4,874	+ 11,35	306,6	295,0	265,1	29,89	+ 0,0405	1,0825	1,0420
+ 15	7,451	0,1735	5,762	+ 17,13	307,2	290,0	260,0	30,01	+ 0,0607	1,0670	1,0063
+ 20	8,792	0,1479	6,768	+ 22,95	307,7	284,7	254,6	30,11	+ 0,0805	1,0513	0,9708
+ 25	10,308	0,1265	7,910	+ 28,84	308,1	279,1	249,0	30,14	+ 0,1003	1,0363	0,9360
+ 30	12,009	0,1087	9,205	+ 34,79	308,3	273,5	243,4	30,08	+ 0,1207	1,0213	0,9006
+ 35	13,906	0,0939	10,655	+ 40,80	308,3	267,4	237,4	30,03	+ 0,1392	1,0077	0,8685
+ 40	16,011	0,0814	12,289	+ 46,87	308,0	261,0	231,1	29,85	+ 0,1583	0,9922	0,8338

$v' = 0{,}0016.$

Digitized by Google

Tafel für gesättigte Dämpfe der Kohlensäure (S. 430).

(Berechnet nach Versuchen von Amagat.)

Temperatur t (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) p	Rauminhalt der Flüssigk. v' (cbm/kg)	Rauminhalt des Dampfes v'' (cbm/kg)	Spezifisches Gewicht γ'' (kg/cbm)	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme r	Verdampfungswärme innere ϱ	Verdampfungswärme äußere ψ	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	$\frac{r}{T}$
— 30	15,0	0,00097	0,02697	37,1	— 14,29	55,78	70,07	60,96	9,11	— 0,0533	0,2350	0,2883
— 25	17,5	0,00098	0,02292	43,7	— 12,15	56,00	68,15	59,16	8,99	— 0,0448	0,2300	0,2748
— 20	20,3	0,00100	0,01954	51,2	— 9,93	56,11	66,04	57,21	8,83	— 0,0363	0,2248	0,2611
— 15	23,5	0,00102	0,01668	59,9	— 7,63	56,10	63,73	55,10	8,63	— 0,0276	0,2194	0,2470
— 10	27,1	0,00104	0,01426	70,1	— 5,21	55,97	61,18	52,80	8,38	— 0,0186	0,2140	0,2326
— 5	31,0	0,00107	0,01218	82,1	— 2,68	55,68	58,36	50,27	8,08	— 0,0095	0,2083	0,2178
0	35,4	0,00110	0,01041	96,2	0	55,19	55,19	47,47	7,72	0	0,2021	0,2021
+ 5	40,3	0,00113	0,00887	112,7	+ 2,87	54,49	51,62	44,31	7,31	+ 0,0099	0,1956	0,1857
+ 10	45,7	0,00117	0,00752	133,0	+ 5,98	53,50	47,52	40,73	6,79	+ 0,0205	0,1884	0,1679
+ 15	51,6	0,00123	0,00630	158,7	+ 9,45	52,14	42,69	36,53	6,16	+ 0,0321	0,1803	0,1482
+ 20	58,1	0,00131	0,00524	191	+ 13,45	50,20	36,75	31,41	5,34	+ 0,0452	0,1707	0,1255
+ 25	65,4	0,00142	0,00419	238	+ 18,44	47,28	28,84	24,60	4,24	+ 0,0613	0,1581	0,0968
+ 30	73,1	0,00167	0,00296	338	+ 26,39	41,32	14,93	12,72	2,21	+ 0,0868	0,1361	0,0493
+ 31	74,7	0,00186	0,00257	389	+ 29,87	38,23	8,36	7,12	1,24	+ 0,0981	0,1256	0,0275
+ 31,35	75,3	0,00216	0,00216	464	+ 34,14	34,14	0	0	0	+ 0,1120	0,1120	0

$$p = C\left(\frac{T}{100} - 1\right)^{4,525}, \qquad \lg C = 0,47237,$$

$$r = 1,125\, T^{0,43}\,(304,35 - T)^{0,43},$$

$$c = 0,000333\, T + 0,285\,\frac{r}{T} + 0,215\,\frac{r}{304,35 - T},$$

$$s' = 0,10155 + 0,000333\, t - \frac{1}{2}\,\frac{r}{T}.$$

Digitized by Google

Tafel für gesättigten Stickstoffdampf.

(Nach R. Plank.)

Temperatur °C t	Absolute Temperatur T	Druck p in at	Spezifisches Volumen der Flüssigkeit v'	Spezifisches Volumen des Dampfes v''	Gewicht von 1 cbm Dampf $\gamma'' = \frac{1}{v''}$	Entropie der Flüssigkeit s'	Entropie des Dampfes s''	$s'' - s' = \frac{r}{T}$	Wärmeinhalt der Flüssigkeit i'	Wärmeinhalt des Dampfes i''	Verdampfungswärme $r = i'' - i'$	$u'' - u' = \rho$	$AP(v'' - v') = \psi$
		kg/qcm	cbm/kg	cbm/kg	kg/cbm				WE	WE	WE	WE	WE
— 210	63	0,132	0,001140	1,425	0,702	0,0030	0,8175	0,8145	0,22	51,53	51,31	46,91	4,40
— 208	65	0,174	0,001152	1,113	0,899	0,0170	0,7992	0,7822	1,08	51,93	50,85	46,32	4,53
— 206	67	0,240	0,001165	0,829	1,206	0,0303	0,7828	0,7525	1,94	52,35	50,41	45,76	4,65
— 204	69	0,329	0,001177	0,620	1,613	0,0433	0,7668	0,7235	2,80	52,73	49,93	45,16	4,77
— 202	71	0,446	0,001190	0,4681	2,137	0,0550	0,7510	0,6960	3,67	53,10	49,43	44,55	4,88
— 200	73	0,592	0,001204	0,3602	2,778	0,0665	0,7365	0,6700	4,53	53,44	48,91	43,93	4,98
— 198	75	0,771	0,001217	0,2824	3,542	0,0778	0,7228	0,6450	5,39	53,78	48,39	43,31	5,08
— 196	77	0,984	0,001231	0,2254	4,438	0,0892	0,7104	0,6212	6,26	54,10	47,84	42,67	5,17
— 194	79	1,240	0,001245	0,1821	5,493	0,1003	0,6989	0,5986	7,12	54,41	47,29	42,04	5,25
— 192	81	1,538	0,001259	0,1492	6,702	0,1115	0,6885	0,5770	7,98	54,71	46,73	41,40	5,33
— 190	83	1,885	0,001274	0,1234	8,105	0,1218	0,6777	0,5559	8,85	54,98	46,13	40,73	5,40
— 188	85	2,329	0,001289	0,1013	9,87	0,1322	0,6674	0,5352	9,72	55,22	45,50	40,04	5,46
— 186	87	2,805	0,001304	0,0852	11,74	0,1423	0,6578	0,5155	10,60	55,46	44,86	39,35	5,51
— 184	89	3,352	0,001320	0,0721	13,87	0,1520	0,6489	0,4969	11,47	55,68	44,21	38,65	5,56
— 182	91	3,964	0,001336	0,0615	16,26	0,1616	0,6402	0,4789	12,34	55,91	43,57	37,98	5,59

Digitized by Google

Für die Theorie der Maschinen zur Luftverflüssigung und zur Trennung von Sauerstoff und Stickstoff nach Linde ist die folgende Dampftafel des Stickstoffes (R. Plank) von Wichtigkeit.

Formeln für gesättigten und überhitzten Stickstoffdampf:

$$v = \frac{30{,}2\,T}{P} - \frac{64{,}4}{T^2},$$

$$i = 37{,}45 + 0{,}2246\,T + 0{,}000019\,T^2 - 0{,}452\,\frac{P}{T^2},$$

$$u = 37{,}45 + 0{,}1539\,T + 0{,}000019\,T^2 - 0{,}3\,\frac{P}{T^2},$$

$$s = 0{,}3880 + 0{,}2246 \ln T + 0{,}000038\,T - 0{,}0707 \ln P - 0{,}3\,\frac{P}{T^2},$$

$$c_p = 0{,}2246 + 0{,}000038\,T + 0{,}905\,\frac{P}{T^2}.$$

Im Sättigungsgebiete gelten ferner näherungsweise

$$\log p = 3{,}0 + 0{,}4 \log T - \frac{289{,}6}{T},$$

$$r = 68{,}85 - 0{,}2736\,T.$$

VI. Strömende Bewegung von Gasen und Dämpfen.

A. Allgemeines.

Es bezeichne

F, F_1, F_2 verschiedene Querschnitte des Stromes in qm,
G die durch diese in 1 sk hindurchfliefsende Menge in kg,
w, w_1, w_2 die mittleren Geschwindigkeiten in den betrachteten Querschnitten in m/sk,
h, h_1, h_2 die Höhe der Querschnitte über einer beliebigen Wagerechten in m,
u, u_1, u_2 die innere Energie und
i, i_1, i_2 den Wärmeinhalt für 1 kg der Flüssigkeit in den betrachteten Querschnitten (s. S. 395 ff.) in WE,
P, P_1, P_2 die spez. Drücke in kg/qm,
γ, γ_1, γ_2 die spez. Gewichte in kg/cbm und
v, v_1, v_2 die spez. Rauminhalte in cbm/kg in den betrachteten Querschnitten,
A das mechanische Wärmeäquivalent $= 1/427$,
Q_{12} die auf der Strecke 1 bis 2 einem kg der strömenden Flüssigkeit von aufsen zugeführte Wärme in WE,
R_{12} die durch innere und äufsere Reibung verbrauchte Energie für 1 kg in mkg,
$g = 9{,}81$ m/sk² die Beschleunigung durch die Schwere.

Die Bedingung für die Stetigkeit der Bewegung ist

$$G = F_1 w_1 \gamma_1 = F_2 w_2 \gamma_2 = F_1 \frac{w_1}{v_1} = F_2 \frac{w_2}{v_2} \text{ oder } \frac{dv}{v} = \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w}.$$

Digitized by Google

Ferner nach dem Energieprinzip

$$A\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}+u_2-u_1+A(P_2v_2-P_1v_1)+A(h_2-h_1)=Q_{12}$$

oder, wenn man den Wärmeinhalt einführt,

$$A\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}+i_2-i_1+A(h_2-h_1)=Q_{12}$$

oder $$\frac{Awdw}{g}+di+Adh=dQ.$$

Führt man die Wärmegleichung ein in der Form

$$dQ=di-Avdp \text{ (S. 395 ff.)},$$

so gilt für den vorliegenden Fall $dQ+dR=di-Avdp$

oder $$Q_{12}+AR_{12}=i_2-i_1-A\int_1^2 vdp,$$

da die Reibung auch als eine dem strömenden Stoffe zugeführte Wärmemenge aufzufassen ist, und weiter

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}+\int_1^2 vdp+R_{12}+(h_2-h_1)=0$$

oder $$\frac{wdw}{g}+vdp+dR+dh=0.$$

In vielen praktischen Fällen wird (h_2-h_1) sowie Q_{12} als sehr klein zu vernachlässigen sein, dann ist

$$A\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=i_1-i_2 \quad \text{oder} \quad \frac{Awdw}{g}=-di \quad \text{und}$$

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=-\int_1^2 vdp-R_{12} \quad \text{oder} \quad \frac{wdw}{g}=-vdp-dR.$$

Vernachlässigt man auch die Reibung, so ist i_1-i_2 und $\int vdp$ nach der Gleichung der Adiabate zu bestimmen, da in diesem Falle der strömenden Flüssigkeit keine Wärme zugeführt wird.

B. Ausfluß.

Es bezeichne

- p, P den unveränderlichen Druck in dem Raume, aus dem der Ausfluß stattfindet, in at und kg/qm,
- t, T, v die Temperatur, absolute Temperatur und den spez. Raum inhalt daselbst,
- p_0, P_0 den ebenfalls unveränderlichen Druck in dem Raume, in den das Gas einströmt,
- t_0, T_0 die Temperatur des ausfließenden Strahles,
- F_0 den Querschnitt der Ausflußöffnung in qm,
- α die Kontraktionszahl (S. 304),
- w_0 die Ausflußgeschwindigkeit in m/sk.

Digitized by Google

Vernachlässigt man zunächst die Reibung und setzt die Geschwindigkeit im Ausflufsraume sehr klein gegen w_0, dann ist unter der Annahme, dafs der Strahl im Ausflufsquerschnitte den Druck der Umgebung p_0 erreicht $\frac{w_0^2}{2g} = \frac{i - i_0}{A} = \int_{P_0}^{P} v\,dP$, d. h. die Ausströmungsenergie ist gleich der Arbeit, die das Gas (Dampf) vom Drucke p in einer Kolbenmaschine beim Gegendrucke p_0 leisten könnte.

Die Reibung wird in der Regel, wie in der Hydraulik, durch die Einführung einer Geschwindigkeitszahl φ berücksichtigt.

1. Vollkommene Gase.

Da $i = c_p T + C$, $i_0 = c_p T_0 + C$ ist (S. 395 ff.), so folgt

$$A \frac{w_0^2}{2g} = c_p (T - T_0)$$

und nach Einführung der Gleichung der Adiabate

$$w_0 = \varphi \sqrt{\frac{2g\,c_p}{A} T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]}$$

oder auch

$$w_0 = \varphi \sqrt{2g \frac{x}{x-1} P v \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right]}, \quad \ldots \quad (1)$$

$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \frac{T_0}{T}$, s. auch Tafel, S. 407.

Die Temperatur des ausströmenden Gases ist

$$T_0 = T - \frac{A}{c_p} \frac{w_0^2}{2g} = T - \varphi^2 T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}}\right].$$

Für reibungslosen Austritt, $\varphi = 1$, folgt T_0 aus vorstehender Formel und Tafel S. 395.

2. Wasserdampf.

Nach dem oben ausgesprochenen Satze ist die Ausströmungsenergie des Wasserdampfes gleich der Arbeit einer verlustfreien Dampfmaschine für dieselben Drücke, und es können daher die S. 423 für diese Arbeit gegebenen Formeln ohne weiteres zur Berechnung von $A \frac{w_0^2}{2g}$ dienen.

Im JS-Diagramm (Anm. S. 396) kann die Ausflufsgeschwindigkeit für nassen, trockenen und überhitzten Dampf unmittelbar abgegriffen werden.

Digitized by Google

3. Ausflufsexponent.

Die obige Formel (1) für die Ausflufsgeschwindigkeit gilt sowohl für Gase als für gesättigten und für überhitzten Wasserdampf. Für gesättigten Wasserdampf ist, nach früherem (S. 421), $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1\,x$, für überhitzten Wasserdampf (S. 422) $\varkappa = 1{,}3$ zu setzen. Im letzteren Falle darf die Formel nicht mehr benutzt werden, wenn der Dampfzustand die Grenzkurve überschreitet.

Es läfst sich nun nach Vorschlag von Zeuner die Reibung statt durch φ dadurch berücksichtigen, dafs man an Stelle des Exponenten der Adiabate $\varkappa$ einen etwas kleineren, den **Ausflufsexponenten** m, für die Expansion verwendet, so dafs

$$w_0 = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} P v \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]}.$$

Der Ausflufsexponent beruht auf der Annahme einer unveränderlichen **Widerstandszahl** ζ (s. Hydraulik); es ist

$$m = \frac{\varkappa(1+\zeta)}{1+\varkappa\zeta}.$$

Die Beziehung zwischen Geschwindigkeitszahl φ und Ausflufsexponent m ist vom Druckverhältnis $p : p_0$ abhängig, u. zw. ist bei gegebenen Ausflufsexponenten die Geschwindigkeitszahl um so gröfser, je gröfser $p : p_0$ ist.

Für kleine Werte von $p : p_0$ gilt angenähert der Grenzwert für $p = p_0$

$$\varphi^2 = \frac{m-1}{\varkappa - 1} \frac{\varkappa}{m}.$$

4. Form der Ausflufsdüsen.

Die Gleichungen für w_0 sind nicht nur für den Endquerschnitt F_0 einer Ausflufsdüse, sondern nach Einführung des entsprechenden Druckes p_x für jeden beliebigen Querschnitt F_x der Düsen gültig. Aus der Bedingung, dafs der Druck von dem Höchstwerte p **stetig** bis auf p_0 abnehmen mufs, folgt eine bestimmte Form der Düse.

Aus $G = \frac{w_x F_x}{v_x}$ folgt für Gase und Dämpfe

$$F_x = G : \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{v} \left[\left(\frac{p_x}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_x}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}.$$

Diese Gleichung ergibt für F_x bei einem bestimmten Druckverhältnis

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \beta \qquad \lg\beta \text{ rd. } \frac{3 + 0{,}1314\,m}{3+m} - 1$$

einen kleinsten Querschnitt F_1.

Für reibungslose Strömung ist $m = \varkappa$ zu setzen.

Digitized by Google

Für trockenen Wasserdampf und reibungslose Strömung ergibt sich die Düsenerweiterung wie folgt

$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$
100	13,80	3,72	2,58	20	3,97	1,99	2,18
90	12,69	3,56	2,56	10	2,44	1,56	1,92
80	11,56	3,40	2,54	8	2,07	1,44	1,86
70	10,40	3,22	2,51	6	1,72	1,31	1,74
60	9,16	3,03	2,47	4	1,35	1,16	1,55
50	7,98	2,83	2,43	2	1,02	1,01	1,12

Ist $p_0 : p > \beta$, so hat dieses Minimum keine Bedeutung, und jede innen abgerundete Mündung, sich verengende Düse oder Oeffnung in dünner Wand wird einen zylindrischen Strahl von der gröfstmöglichen Ausflufsgeschwindigkeit ergeben. Ist jedoch $p_0 : p < \beta$, so mufs die Düse so geformt werden, dafs auf die innere Abrundung eine engste Stelle F_1 und dann eine allmähliche Erweiterung auf F_0 folgt.*) Das Verhältnis der Querschnitte $F_1 : F_0$ ist von dem Druckverhältnis $p_0 : p$ abhängig und findet sich leicht, wenn man in die Gleichung für F_x einmal $p_0 : p$ und einmal β einführt.

Wendet man bei $p_0 : p < \beta$ eine sich erweiternde Düse nicht an, sondern läfst durch eine einfache Oeffnung oder sich verengende Düse ausströmen, so kann im Endquerschnitte der Aufsendruck nicht erreicht werden, sondern es stellt sich daselbst der höhere Druck $p_1 = p\beta$ ein. Die Geschwindigkeit im Endquerschnitte der Mündung (Düse) w_1 ist in diesem Falle unabhäng von p_0

$$w_1 = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} Pv \frac{m-1}{m+1}}$$

oder

$$w_1 = \varphi_1 \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa+1} Pv} = \varphi_1 \sqrt{g \varkappa P_1 v_1}, \qquad \varphi_1^2 = \frac{m-1}{\varkappa-1} \frac{\varkappa+1}{m+1}.$$

Nach dem Austritt aus einer solchen Mündung breitet sich der Strahl infolge des Ueberdruckes aus.

Der Wert $w_1 = \sqrt{g \varkappa P_1 v_1}$, den die Geschwindigkeit bei reibungsfreier Strömung im engsten Querschnitt annimmt, stellt die **Schallgeschwindigkeit** für den dortigen Zustand dar.

Allgemein ist die Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{g \left(\frac{dP}{d\gamma}\right)_s} = \sqrt{-gPv \left(\frac{d \ln P}{d \ln v}\right)_s};$$

wenn für die Adiabate die Gleichung $Pv^{\varkappa} = \text{konst.}$ gilt, so ergibt sich wie oben:

$$a = \sqrt{g \varkappa Pv}.$$

*) Solche Düsen finden bei Dampfturbinen, Injektoren usw. Anwendung.

Digitized by Google

5. Ausflufsmenge.

Allgemein ist $G = \frac{w_0 F_0}{v_0}$.

Für $\frac{p_0}{p} > \beta$ ist bei reibungsfreiem Ausflufs:

$$G = F_0 \sqrt{\frac{2gx}{x-1} \frac{P}{v} \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{x}} - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x+1}{x}} \right]}.$$

Dieser Ausdruck kann mit einem Ausflufskoeffizienten μ multipliziert werden, um der Reibung Rechnung zu tragen und die Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu erreichen.

Bei Anwendung des Ausflufsexponenten erhält man:

$$G = F_0 \sqrt{2g \frac{x}{x-1} \frac{P}{v} \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right]}.$$

Für $\frac{p_0}{p} < \beta$ ist bei reibungsfreiem Ausflufs:

$$G = F_1 \sqrt{x g \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{P}{v}}$$ oder wie oben:

$$G = F_1 \sqrt{g x \frac{m-1}{x-1} \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{P}{v}}.$$

F_1 ist der kleinste Querschnitt der Düse oder Mündung.

6. Ausflufs bei geringem Ueberdrucke.

Ist $p_0 : p > 0{,}9$, so kann mit genügender Genauigkeit (Fehler unter 2 %) $v_0 = v$ gesetzt werden, und daher

$$w_0 = \varphi \sqrt{2 g v (P - P_0)}.$$

In diesen Fällen gibt man die Ausflufsmenge V häufig in cbm statt dem Gewichte nach an: $V = \alpha F_0 w_0$.

C. Zusammenstellung der Ausflufsformeln für Luft und gesättigten Wasserdampf. Erfahrungswerte.

1. Luft.

Für verschiedene Werte von m wird das Druckverhältnis β und die zugehörige Geschwindigkeitszahl φ_1 wie folgt

$m =$	1,4	1,38	1,35	1,30	1,25
$\beta =$	0,530	0,533	0,538	0,547	0,556
$\varphi_1{}^2 =$	1	0,940	0,876	0,767	0,654
$\varphi_1 =$	1	0,970	0,936	0,876	0,810

Digitized by Google

1. Ist $\frac{p_0}{p} > \beta$, so gelten $w_0 = 44{,}8\,\varphi\sqrt{T\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0{,}286}\right]}$.

$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0{,}286} = \frac{T_0}{T}$ s. Tafel S. 407,

oder $$w_0 = 44{,}8\sqrt{T\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]},$$

$$G = 1{,}53\,\alpha\,F_0\,P_0\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}-1\right]},$$

$$G = 1{,}53\,\mu\,F_0\,P_0\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}286}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}286}-1\right]}.$$

Die Ausflufsmenge in cbm vom Druck p_0 und der Temperatur T ist

$$V = 45{,}35\,\mu\,F_0\sqrt{T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}286}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0{,}286}-1\right]}.$$

Für $p_0 : p > 0{,}5$ ist nach Weisbach und Grashof*)

Art der Ausflufsmündung	μ	α	φ	ζ	m	Bemerkungen
Bei kreisförmiger Mündung von 14 mm Durchmesser in dünner, ebener Wand	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	—
Bei kurzem, zylindrischem Ansatzrohre von 14 mm Durchmesser ohne innere Abrundung	0,815	1	0,821	0,490	1,243	bei $p_0 : p = 1{,}08$
	0,813	1	0,838	0,444	1,252	„ $p_0 : p = 1{,}41$
	0,831	1	0,866	0,362	1,271	„ $p_0 : p = 1{,}70$
Bei kurzem, kegelförmigem Mundstücke von 10 mm Mündungsdurchmesser	0,97	1	0,974	0,034	1,392	—

Nach Bachmann**) steigt für kreisrunde Mündungen in dünner Wand beim Ausströmen in die Atmosphäre der Ausflufskoeffizient μ linear mit dem Ueberdrucke, solange $\frac{p_0}{p} > \beta$,

$$\mu = 0{,}60 + 0{,}000197\,h; \quad h \text{ Ueberdruck in mm Q.-S.}$$

Auch für kurze, gut abgerundete Mündungen fand Bachmann eine kleine Zunahme von μ mit dem Ueberdrucke.

Für eine Mündung von 20 mm Durchmesser und 20 mm Länge ergab sich $\mu = 0{,}96$ bis $0{,}98$; diese Mündung war nach einer Sinuslinie geformt. Anders abgerundete Mündungen und solche von gröfserer Länge ergaben kleinere μ.

2. Ist $\frac{p_0}{p} < \beta$, so wird $w_1 = 18{,}3\,\varphi_1\sqrt{T}$,

$$G = 3970\,\mu\,F_1\frac{p}{\sqrt{T}}$$

*) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I S. 580 bis 592.
**) Diss. Heidelberg 1912.

Digitized by Google

und die Ausflufsmenge in cbm von p_0 und T

$$V = 11{,}6\,\mu\,F_1\,\frac{p}{p_0}\sqrt{T}.$$

Nach Versuchen von Zeuner ist für innen gut abgerundete Mündungen $\mu = 0{,}96$.

Dieser Wert wurde auch von Bachmann bestätigt.

3. Bei geringem Ueberdrucke ist

$$w_0 = 24\,\varphi\sqrt{T\left(1-\frac{p_0}{p}\right)}, \qquad G = 0{,}82\,\alpha\,\varphi\,F_0\sqrt{\frac{p}{T}\,(p-p_0)}.$$

Beim Austritt in die freie Luft ist, wenn h den Ueberdruck in mm W.-S. und b den Barometerstand in mm Q.-S. bedeutet,

$$w_0 = 24\,\varphi\sqrt{\frac{T}{13{,}7\,\frac{b}{h}+1}} \quad \text{oder angenähert} \quad w_0 = 0{,}24\,\varphi\sqrt{T\,h}.$$

Die Ausflufsmenge in cbm ist in allen diesen Fällen $V = \alpha\,\varphi\,F_0\,w_0$, u. zw. bezogen auf T und p.

2. Trocken gesättigter Wasserdampf.

$m =$	1,135	1,128	1,120	1,105	1,090
$\beta =$	0.577	0,579	0.581	0,583	0,585
$\varphi_1^2 =$	1	0,951	0,895	0,789	0,681
$\varphi_1 =$	1	0,975	0,946	0,888	0,825

1.
$$w_0 = 1680\,\varphi\,p^{0{,}03}\sqrt{1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0{,}12}} \quad \text{oder} \quad w_0 = 2300\,\varphi\sqrt{\frac{\lg p - \lg p_0}{6{,}76 - 0{,}9\,\lg p_0}}$$

Beim Ausströmen in die Atmosphäre wird $w_0 = 880\,\varphi\sqrt{\lg p}$.

2. Ist $p_0 : p < \beta$, so berechnet sich die Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitte F_1 der Mündung zu

$$w_1 = 422\,\varphi_1\,p^{0{,}03},$$ ist also nahezu unveränderlich, und die Ausflußmenge in der Sekunde

$$G = 153\,\varphi_1\,F_1 p^{0{,}97}.$$

Nach Versuchen kann angenommen werden, dafs φ_1 meist nur wenig von 1 abweicht.

Für geringen Ueberdruck ist $w_0 = 579\,\varphi\,p^{0{,}03}\sqrt{1-\frac{p_0}{p}}$.

Bei Austritt in die Aufsenluft ist angenähert

$$w_0 = 5{,}79\,\varphi\sqrt{h}, \qquad G = 3{,}4\,\alpha\,\varphi\,F_0\sqrt{h},$$

wo h der Ueberdruck in mm W.-S.

Digitized by Google

Werte von $p^{0,97}$.

p =	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
$p^{0,97}$ =	1,48	1,96	2,43	2,90	3,37	3,83	4,30	4,76	5,22	5,68	6,14
p =	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
$p^{0,97}$ =	6,60	7,05	7,51	7,96	8,42	8,87	9,32	9,77	10,22	10,67	11,12

Nach Versuchen von Rosenhain*) ergaben sich bei Austritt in die freie Luft folgende Werte für φ

p	2,4	3,8	5	8	12	15
Oeffnung in dünner Wand, $d_1 = 4{,}8$ mm	0,90	0,87	0,86	0,86	0,86	0,85
Sich erweiternde Düse $d_1 = 4{,}8$ mm, $d_0 = 6{,}5$ mm, $l = 20$ mm	—	0,79	0,84	0,93	0,96	0,96

Nach Bendemann**) ist das sekundliche Dampfgewicht beim Ausströmen durch eine gut abgerundete Mündung: $G = F\psi\sqrt{\frac{p}{v}}$, worin zu setzen ist für:

$$\frac{p_0}{p} \geqq 0{,}93, \qquad \psi = 4{,}16\sqrt{1-\frac{p_0}{p}},$$

$$\frac{p_0}{p} \geqq 0{,}577 \qquad \psi = 44{,}62\sqrt{1-1{,}09\left(1-\frac{p_0}{p}\right)-\left(\frac{p_0}{p}\right)^2},$$

$$\frac{p_0}{p} < 0{,}577, \qquad \psi = 20{,}31;$$

wenn im ersten Falle (Dampfmesser) der Druckunterschied in mm Q.-S. gemessen ist, so wird:

$$G = 0{,}0606\, F\sqrt{(670\,p - h)\frac{h}{p\,v}}.$$

D. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen.

Ueber Bewegung bei geringen Druckunterschieden s. unter Mechanik luftförmiger Körper (S. 349). Es bedeute

D in mm der gleichbleibende Durchmesser der Leitung,
l in m die Länge der Leitung,
$\pm h$ in m der Anstieg oder Fall der Leitung,
G in kg/Stunde die durch die Leitung gehende Gewichtsmenge.

*) Inst. of Civil Engineers 1900.
**) Mitt. Forschungsarb. Heft 37. Herausg. v. V. d. I.

Digitized by Google

Für eine sehr kurze Leitungsstrecke dl gilt nach S. 440:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}; \qquad A\frac{w\,dw}{g} + di + A\,dh = dQ;$$

$$dQ + A\,dR = di - A\,v\,dP; \qquad \frac{w\,dw}{g} + v\,dP + dR + dh = 0.$$

Für die Reibungsarbeit oder den Leitungswiderstand dR auf der Strecke dl mufs man zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Geschwindigkeit ist kleiner als eine gewisse kritische Geschwindigkeit w_k. Dann stellt sich die geordnete schichtenweise oder Stromlinien-Bewegung ein, und die Reibung ist:

$$dR = \alpha\frac{\eta\,w}{\gamma\,D^2}\,dl;$$

η ist die Zähigkeit (S. 260 u. 348) der Flüssigkeit, α eine Unveränderliche.

b) Die Geschwindigkeit ist gröfser als die kritische. Dann tritt wirbelnde Strömung ein, und es gilt angenähert:

$$dR = \beta\frac{w^2}{D}\,dl;$$

β angenähert gleichbleibend.

Die kritische Geschwindigkeit beträgt rd.: $w_x = 2 \cdot 10^3 \frac{\eta}{D\gamma}$.

Für Luft von 20° zeigt die folgende Tafel die Werte der kritischen Geschwindigkeit:

Kritische Geschwindigkeit für Luft von 20°.

$D =$	25	50	100	250	500
$p = 0{,}2$	6,00	3.00	1,50	0,60	0,30
1	1,20	0,60	0,30	0,12	0,06
10	0,12	0,06	0,03	0,012	0,006

Im folgenden soll nur der Fall b) $w > w_k$ behandelt werden.

Fritzsche*) hat auf Grund eigener Versuche mit Luft, sowie mit Benutzung aller früheren Versuche für β folgenden Ausdruck gefunden:

$$\beta = 6{,}02 \,.\, D^{-0{,}269} \,.\, (\gamma w)^{-0{,}148}.$$

Dieser Wert stimmt auch vorzüglich mit den Ergebnissen neuer Versuche über die Fortleitung von gesättigtem und überhitztem Wasserdampfe überein, welche vom bayer. Revisionsverein ausgeführt wurden.**) Er kann somit für Luft wie für Dampf Anwendung finden;

$$\text{mit } G = \frac{\gamma\,w\,D^2}{353{,}7} \text{ wird auch } \beta = 2{,}526\,\frac{D^{0{,}027}}{G^{0{,}148}}.$$

Da die Veränderlichkeit von $D^{0{,}027}$ stets klein ist gegenüber dem erreichbaren Genauigkeitsgrad, so läfst sich (mit $D = 100$) einfach setzen

$$\beta = \frac{2{,}86}{G^{0{,}148}}.$$

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 60. Herausg. v. V. d. I.

**) Die Versuche ergaben im Mittel $\beta = 1{,}06$ für $D = 70$, $G = 860$ (im Mittel).

Digitized by Google

Dieser Wert kann aus der folgenden Tafel entnommen werden:

Widerstandszahlen für Rohrleitungen.

G	β	G	β	G	β	G	β
10	2,03	100	1,45	1000	1,03	10 000	0,73
15	1,92	150	1,36	1500	0,97	15 000	0,69
25	1,78	250	1,26	2500	0,90	25 000	0,64
40	1,66	400	1,18	4000	0,84	40 000	0,595
65	1,54	650	1,10	6500	0,78	65 000	0,555
100	1,45	1000	1,03	10000	0,73	100 000	0,520

Die Werte gelten für einen gewöhnlichen (mittleren) Rauhigkeitsgrad der Rohrleitung.

Ist die Wärme Q, die von aufsen zu- oder abgeleitet wird, gering und die Geschwindigkeitsänderung nicht aufsergewöhnlich grofs, so kann $i =$ konst. und damit bei Gasen, überhitzten und angenähert auch bei gesättigten Dämpfen $Pv =$ konst. gesetzt werden. Bei Gasen ist dann auch die Temperatur in der Leitung unveränderlich.

Nehmen wir ferner eine geradlinige Leitung oder einen Leitungsteil von gleichbleibendem Durchmesser an, so wird allgemein:

$$\frac{2h}{P_1 v_1} = \ln \frac{w_2^2}{w_1^2} - \left(1 + \frac{D\frac{h}{l}}{\beta g P_1 v_1}\right) \ln \frac{w_2^2 + \frac{D}{\beta}\frac{h}{l}}{w_1^2 + \frac{D}{\beta}\frac{h}{l}} \quad . \quad (1)$$

Der Zeiger 1 bezieht sich auf den Zustand am Anfange der Leitung.

Fast immer wird $\dfrac{D\frac{h}{l}}{\beta g P_1 v_1}$ als sehr klein zu vernachlässigen sein,

dann ist:
$$\frac{2h}{P_1 v_1} = \ln \frac{1 + \frac{D}{\beta w_1^2}\frac{h}{l}}{1 + \frac{D}{\beta w_2^2}\frac{h}{l}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

da $\dfrac{2h}{P_1 v_1}$ auch meist klein ist, kann man mit $\dfrac{w_1^2}{w_2^2} = \dfrac{p_2^2}{p_1^2}$ ferner

schreiben:
$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2} = \frac{2}{P_1 v_1}\left(\beta \frac{l}{D} w_1^2 + h\right); \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für kleine Druckunterschiede kann man endlich noch schreiben

$$P_1 - P_2 = \gamma_1 \left(\beta \frac{l}{D} w_1^2 + h\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

worin statt γ_1 und w_1 auch Mittelwerte γ, w dieser Gröfsen für die ganze Leitung eingesetzt werden können.

Für eine wagerechte Leitung ergeben sich folgende den obigen entsprechende Formeln:

$$\frac{P_1 v_1}{2}\left(1 - \frac{p_2^2}{p_1^2}\right) - \frac{w_1^2}{g} \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{\beta}{D} w_1^2 l, \quad . \quad . \quad (1a)$$

Digitized by Google

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2} = \frac{2}{P_1 v_1} \beta \frac{w_1^2}{D} l, \quad \ldots \quad (3a)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\beta \gamma w_1^2}{D} l \ldots \ldots \ldots \quad (4a)$$

Die Gl. (4) kann noch wie folgt umgeformt werden:
In at beträgt der Druckabfall:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{\beta}{10\,000} \gamma \frac{w^2}{D} l + \frac{\gamma h}{10\,000}$$

oder in anderer Schreibweise: $\Delta p = 12{,}5\,\beta \frac{G^2}{\gamma D^5} l + \frac{\gamma h}{10\,000}$

oder $$\Delta p = 0{,}0354\,\beta\, G \frac{w}{D^3} l + 0{,}0354 \frac{G h}{w D^2}$$

oder $$\Delta p = \frac{0{,}0532\,\beta}{10\,000} \sqrt{\frac{\gamma^3 w^5}{G}} \cdot l + \frac{\gamma h}{10\,000}.$$

In diesen und den folgenden Formeln wird h nur bei senkrechten oder doch sehr stark steigenden oder fallenden Leitungen zu berücksichtigen sein und auch dann nur, wenn $\beta \frac{w^2}{D}$ kleine Werte hat.

1. Luftleitungen.

Für Gase läfst sich die Formel (4) noch umgestalten; es wird:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\beta}{RT} \frac{w^2}{D} l + \frac{h}{RT}.$$

R ist die Gaskonstante für Luft $= 29{,}2$, für p und T sind wie für w Mittelwerte für die betrachtete Rohrstrecke einzuführen.

2. Dampfleitungen.

Da sich $\frac{p}{\gamma''} = p v''$ für **trocken gesättigten Dampf** nur wenig ändert, so kann man setzen:

Für Hochdruckleitungen ($p = 4$ bis 20 at):

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}51\,\beta}{10\,000} \frac{w^2}{D} l + \frac{h}{20\,000},$$

$$\Delta p = 24{,}5\,\beta \frac{G^2}{p D^5} l + \frac{p h}{20\,000}, \quad \Delta p = \frac{0{,}0194\,\beta}{10\,000} \sqrt{\frac{p^3 w^5}{G}} l + \frac{p h}{20\,000}.$$

Für Niederdruckleitungen ($p = 1$ bis 4 at):

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}56\,\beta}{10\,000} \frac{w^2}{D} l + \frac{h}{17\,500}$$

und $$\Delta p = 22{,}5\,\beta \frac{G^2}{p D^5} l + \frac{p h}{17\,500}.$$

Für **überhitzten Dampf** ist in den allgemeinen Gleichungen $v = \frac{1}{\gamma}$ nach der Gleichung S. 422 einzuführen.

Digitized by Google

Wenn die Fortleitung unter **Wärmeaustausch** mit der Umgebung erfolgt, so wird die Zustandsänderung nicht mehr eine Hyperbel sein, sondern bei Wärmeabgabe steiler, bei Wärmeaufnahme flacher verlaufen, doch ändert dies, solange w^2 klein ist, nichts Wesentliches an den bisher für den Spannungsabfall gegebenen Formeln.

Für die Bestimmung des zweckmäfsigsten Durchmessers einer Dampfleitung sind der Druckverlust durch Leitungswiderstand und der Wärmeverlust durch äufsere Abkühlung mafsgebend. Mit der Verkleinerung des Rohrdurchmessers nimmt der Leitungswiderstand zu und die äufsere Abkühlung ab.

Die Verluste durch **äufsere Abkühlung** bestimmen sich aus den Gesetzen des Wärmedurchgangs, S. 381 ff.

Im folgenden sind einige Versuchsergebnisse mit gesättigtem Dampfe mitgeteilt.

Stündliche Kondensationswassermenge K in kg/qm Rohrinnenfläche.
(Nach Gutermuth.)*)

Versuchs-Dampfleitung	Isolierung der Leitung	Dampfspannung in at Ueberdruck	K Flanschen nicht umhüllt	K Flanschen umhüllt	Bemerkungen
gufseiserne Leitung: $l = 823$ m, $d = 0.140$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz und Blechmantel	3,0	1,03	.	Schachtleitungen
		4.0	1,09	.	
		5.0	1.21	.	
		6.0	1,33	.	
dgl.: $l = 365$ m, $d = 0,294$ m	40 mm Korksteinschalen + 9 mm Asbestmasse	5,2	0,732	.	
schmiedeiserne Leitung: $l = 330$ m, $d = 0,076$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz	3,0	1,10	.	
		4,0	1,21	.	
		5.0	1,29	.	
		6.0	1,35	.	
schmiedeiserne Leitung: $l = 22$ m, $d = 0,120$ m	alte Kieselgurschnur, 25 mm dick	3,0	1.11	.	wagerechte Leitungen
		5,0	1,24	.	
	neue Kieselgurschnur, 30 mm dick	3,0	0.93	.	
		5,0	1,13	.	
	Knochesche Masse, 30 mm dick	3,0	0,93	.	
		5,0	1,128	.	
	nackte Leitung	3.0	3,39	.	
		5.0	4,17	.	
	Oertgen & Schulte. Kieselgurmasse, 20 mm dick.	3,0	0,96	0.85	
		5,0	1,128	0,956	
	Torfschalen, 35 mm dick, mit Asbestunterlage.	3,0	0,62	0.54	
		5,0	0,70	0,64	
	Asbest-Seidenformstücke, 26 mm dick, mit Asbestunterlage	3,0	0,71	.	
		5,0	0,812	.	

*) Z. d. V. d. I. 1887 S. 670.

Digitized by Google

Die Versuche (Tafel s. unten) sind vom bayer. Revisionsverein mit Leitungen von 26 m Länge mit 6 Flanschen ausgeführt. Die Umhüllung bestand aus Diatomit.

Für die **Ermittlung des zweckmäfsigsten Leitungsdurchmessers** ist unter Zugrundelegung der am Ende der Dampfleitung nötigen Dampfmenge und des nötigen Dampfdruckes folgende Ueberlegung mafsgebend:

1. **Der Kesseldruck ist vorgeschrieben.** Dann ist der zulässige Spannungsabfall bestimmt, und die Dampfgeschwindigkeit sowie der Leitungsdurchmesser ermitteln sich aus der Formel für den Leitungswiderstand ohne Rücksicht auf die Kondensationsverhältnisse in der Leitung. Der Kondensationsverlust würde sich alsdann nur durch Erhöhung des Spannungsverlustes (also nur durch Verminderung des Leitungsdurchmessers) verringern lassen.

Dampf- und Wärmeersparnis durch die Umhüllung von Dampfleitungen.

Temperaturgefälle zwischen Dampf und Luft	Wärmeverlust für 1 m in 1 Stunde			Dampf- und Wärmeersparnis	
	Nackte Leitung	Umhüllte Leitung			
		Flanschen frei	Flanschen umhüllt	Flanschen frei	Flanschen umhüllt
	WE	WE	WE	vH	vH
Lichte Weite der Leitung = 150 mm					
100	655	161	105	75	84
110	756	186	116	75	85
120	873	210	131	76	85
130	992	232	146	77	85
140	1118	258	161	77	86
150	1245	281	176	77	86
160	1385	308	191	78	86
170	1535	330	206	79	87
Lichte Weite der Leitung = 70 mm					
100	328	92	66	72	80
110	369	103	73,5	72	80
120	411	113	81	72,5	80,5
130	456	120	89	73,5	80,5
140	510	131	97	74,5	81
150	567	141	103	75	82
160	629	149	110	76,5	82,5
170	693	159	118	77	83
180	766	173	127	77,5	83,5

2. **Der Kesseldruck ist nicht vorgeschrieben.** Hierbei müssen Vergleichsrechnungen über den Dampfverbrauch der ganzen Dampfmaschinenanlage samt Leitung bei grofsem und kleinem Spannungsabfall,

Digitized by Google

also bei enger und weiter Leitung, sowie die besonderen praktischen Anforderungen an den Maschinenbetrieb den Leitungsdurchmesser bestimmen.

Im allgemeinen wird sich hinsichtlich der Dampfkosten grofser Spannungsabfall und enge Leitung vorteilhafter erweisen als geringer Spannungsabfall und weite Leitung.

E. Drosseln.

Wird in einen stetigen Flüssigkeitsstrom eine engere Durchgangsstelle (Ventil, Klappe usw.) eingeschaltet, so entsteht dadurch ein Druckabfall. Es sei p der unveränderliche Druck und w die Geschwindigkeit vor, p_0 und w_0 hinter der Drosselstelle.

Die Gleichung für den Durchgang durch den Drosselquerschnitt lautet, wenn kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet,

$$A\frac{w^2}{2g}+i=A\frac{w_0^2}{2g}+i_0.$$

Fast in allen praktischen Fällen wird der Unterschied der kinetischen Energie vor und nach dem Drosseln zu vernachlässigen sein; dann ergibt sich das einfache Gesetz: Der Wärmeinhalt bleibt durch Drosseln unverändert: $i=i_0$.

Daraus läfst sich der Zustand der Flüssigkeit nach dem Drosseln bestimmen, wenn man den Spannungsabfall sowie den Zustand vor dem Drosseln kennt (S. 395).

1. Vollkommene Gase. (S. 396 ff.)

Da für diese $i=c_pT+C$ ist, folgt $T=T_0$,
d. h. die Temperatur wird bei vollkommenen Gasen durch Drosseln nicht verändert.

Da die meisten Gase nicht genau den Gesetzen der vollkommenen Gase entsprechen, so treten geringe Abweichungen von diesem Gesetz auf, u. zw. in dem Sinne, dafs die Temperatur durch das Drosseln etwas sinkt. Von dieser Erscheinung hat Linde bei der Konstruktion seiner Maschine zur Verflüssigung von Gasen Gebrauch gemacht.

Die Temperaturänderung durch Drosseln ist bestimmt durch die allgemeine Gleichung

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_i=-\frac{1}{c_p}\left(\frac{di}{dP}\right)_T=\frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{dv}{dT}\right)_P-v\right]=\frac{AT^2}{c_p}\left(\frac{d\left(\frac{v}{T}\right)}{dT}\right)_P.$$

Versuche von Thomson und Joule über das Drosseln haben ergeben

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i=a\left(\frac{273}{T}\right)^2$$

$a=0{,}271$ für Luft,
$a=0{,}333$ für Sauerstoff.
$a=1{,}35$ für Kohlensäure.
Wasserstoff ergab einen kleinen negativen Wert für a.

Die Versuche wurden mit Drücken von 1 bis 4,5 at und bei Temperaturen von 14 bis 100° C. ausgeführt.

Digitized by Google

E. Vogel (Dissertation)*) fand im Münchner Lab. f. techn. Phys. a abhängig vom Drucke, nämlich:

$$a = 0{,}268 - 0{,}00086\,p \text{ für Luft,}$$
$$a = 0{,}313 - 0{,}00085\,p \text{ für Sauerstoff.}$$

Die Versuchstemperatur wurde nicht verändert und betrug 10° C. Druckbereich bis 150 at.

2. Gesättigte Dämpfe. (S. 412 ff.)

Es ist $i = i' + xr$ und daher

$$i' + xr = i_0' + x_0 r_0,$$

woraus sich die spezifische Dampfmenge x_0 nach dem Drosseln berechnen läfst (Anwendung s. Kältemaschinen, S. 428).

Wasserdampf wird durch Drosseln stets trockener, trockener Dampf überhitzt. Ergibt die Formel $x_0 > 1$, so ist Ueberhitzung eingetreten, und es gilt die Formel

$$i' + xr = i_0'' + c_p\,(t_0 - \vartheta_0).$$

Die Gleichung kann zur Berechnung der ursprünglichen Dampffeuchtigkeit dienen, wenn die Ueberhitzungstemperatur gemessen wird (Anwendung beim Drosselkalorimeter zur Bestimmung der Feuchtigkeit von Kesseldampf).

Arbeitsverlust durch Drosseln.

Das Drosseln hat als nicht umkehrbarer Vorgang stets eine Verringerung der nutzbaren Arbeit der gedrosselten Flüssigkeit zur Folge. Dieser Verlust läfst sich für Dampfmaschinen und Kältemaschinen leicht berechnen, indem man die durch das Drosseln bewirkte Entropievermehrung mit der absoluten Kondensatortemperatur multipliziert (S. 395).

Die Entropievergröfserung berechnet sich aus der Wärmegleichung

$$T\,ds = di - A\,v\,dP \text{ zu } \left(\frac{ds}{dP}\right)_i = -A\,\frac{v}{T}.$$

Solange die Druckverminderung Δp nicht sehr grofs ist, läfst sich demnach schreiben $\Delta s = A\,\frac{v}{T}\,\Delta P.$

Für vollkommene Gase wird $\Delta s = AR\,\frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{\mu}\,\frac{\Delta p}{p}.$

Für gesättigte Dämpfe wird

$$\Delta s = A\,\frac{v' + x\,(v'' - v')}{\Theta}\,\Delta P = \frac{A\,P\,v' + x\,\psi}{\Theta}\,\frac{\Delta p}{p}$$

oder, wenn x nicht sehr klein: $\Delta s = \frac{x\,\psi}{\Theta}\,\frac{\Delta p}{p}.$

Für überhitzten Dampf wird $\Delta s = (0{,}11 - 0{,}3\,\mathfrak{S}p)\,\frac{\Delta p}{p}.$

$\mathfrak{S}$ s. Tafel V. S. 420.

In diese Formeln sind für p, ϑ und ψ die Mittelwerte vor und nach dem Drosseln zu setzen.

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 7. Herausg. v. V. d. I.

Digitized by Google

Beispiel: Bei einer Auspuffmaschine werde der Dampf in der Zuleitung oder in den Eintrittskanälen von 10 auf 9 at gedrosselt, wie grofs ist der Arbeitsverlust $A L_d$? Gegendruck = 1,0.

a) Der Dampf sei trocken gesättigt:

$$A L_d = A s \Theta_0 = \frac{\psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{46{,}3}{450} \cdot \frac{1}{9{,}5} \cdot 372 = 4{,}04 \text{ WE.}$$

Nehmen wir den Dampfverbrauch der Maschine $D_i = 12{,}5$, also $A L_i = \frac{632}{12{,}5} =$ 50,7 WE, so beträgt der Drosselverlust $\frac{4{,}04}{50{,}7} \cdot 100 = 7{,}95\,\%$ der indizierten Leistung der Maschine.

b) Der Dampf sei überhitzt, $t = 350^0$:

$$A L_d = (0{,}11 - 0{,}3 \Sigma p) \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = (0{,}11 - 0{,}3 \cdot 0{,}0006 \cdot 9{,}5) \frac{0{,}1}{9{,}5} 372 = 4{,}24;$$

wenn wir D_i hier zu 8,5 annehmen, ist dies 5,7 % der indizierten Leistung.

Für dieselbe Maschine betrage die Drosselung beim Austritt 0,1 at [von 1,1 auf 1,0] Dann ist im Falle:

a) Der austretende Dampf ist feucht, $x = 0{,}94$:

$$A L_d = \frac{x \psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{0{,}94 \cdot 40{,}2}{373} \frac{0{,}1}{1{,}05} 372 = 3{,}6 \text{ WE}$$

oder 7,1 % der indizierten Arbeit.

b) Der austretende Dampf ist überhitzt, $t = 150^0$:

$$A L_d = (0{,}11 - 0{,}3 \Sigma p) \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = (0{,}11 - 0{,}3 \cdot 0{,}0032 \cdot 1{,}05) \frac{0{,}1}{1{,}05} 372 = 3{,}86 \text{ WE}$$

oder 5,2 % der indizierten Arbeit.

Von grofser Bedeutung sind auch die Drosselverluste bei Kältemaschinen; der Rechnungsweg ist derselbe.

Setzen wir gleich grofse Maschinen, gleiche Umdrehungszahlen, gleiches Verhältnis von Zylinderdurchmesser zum Hub und vom freien Ventilquerschnitte zum Zylinderquerschnitte und gleiche Widerstandskoeffizienten für die Ventile voraus, so sind die relativen Arbeitsverluste durch Drosselung beim Durchgange durch die Gang- und Druckventile proportional dem Ausdrucke

$$\sqrt[3]{\frac{v^2}{Q_0^5}},$$

worin v das spez. Volumen an der Drosselstelle und Q_0 die Kälteleistung für 1 kg Flüssigkeit bedeutet.

Bei diesem Vergleiche verhält sich Ammoniak am günstigten, dann folgt Kohlensäure und dann schweflige Säure.

VII. Verbrennung.

A. Brennstoffe.

Natürliche: Holz, Torf, Kohle (Braunkohle, Steinkohle), Erdöl, Naturgas.

Künstliche: Holzkohle, Koks (Grudekoks, Hüttenkoks, Gaskoks), Briketts (aus Braunkohle, aus Steinkohle), Erdöldestillate (Benzin, Petroleum usw.), Generatorgas oder Luftgas, Mischgas oder Kraftgas, Wassergas, Leuchtgas, Koksofengas, Hochofengas oder Gichtgas, Oelgas.

Alle diese Brennstoffe bestehen vorwiegend aus Kohlenstoff und Wasserstoff neben mehr oder weniger Sauerstoff, die festen Brennstoffe

Digitized by Google

enthalten noch mineralische Bestandteile (Asche) und Wasser, aufserdem Stickstoff und Schwefel.

Holz. Frisch gefälltes Holz enthält 20 bis 60 % Wasser, lufttrockenes 10 bis 20 %. Spezifisches Gewicht und Heizwert*) sind daher sehr veränderlich.

Zusammensetzung des getrockneten Holzes.

Holzart	Spez. Gew.	C vH	H vH	O vH	N vH	Asche vH	Heizwert für 1 kg bei Verbrennung zu CO_2 und flüssigem Wasser WE	Heizwert für 1 kg bei Verbrennung zu CO_2 und Wasserdampf WE
Eiche . .	0,9—0,8	50,16	6,02	43,45		0,37	4620	—
Buche . .	0,8—0,7	49,06	6,11	44,17	0,09	0,57	4780	—
Tanne . .	0,5—0,4	50,36	5,92	43,39	0,05	0,28	5035	—
Fichte . .		50,31	6,20	43,08	0,04	0,37	5085	—
Mittel		49,56	6,11	43,82	0,10	0,42	4820	4490
In runden Zahlen		50	6	44	—	—	—	4500

Die **Holzkohle** ist ein von flüchtigen Bestandteilen und **Schwefel** freier, aschearmer Brennstoff. Destillationsprodukte bei der Gewinnung der Holzkohle: Holzgas, Holzessig, Holzteer.

Torf. Lufttrockener Torf enthält noch 15 bis 20 % Wasser, 2 bis 20 % und noch mehr Asche, sein Heizwert beträgt 3300 bis 4500 WE. In der wasser- und aschefreien Substanz finden sich auf 50 bis 60 % Kohlenstoff 5 bis 7 % Wasserstoff, 44 bis 28 % Sauersoff, 1 bis 2,5 % Stickstoff.

Die unter der Bezeichnung **Mineralkohlen** zusammengefafsten **Braunkohlen, Steinkohlen** und **Anthrazite** sind nicht immer scharf voneinander zu trennen und zeigen in einigen Abarten Uebergangsformen.

Die **Braunkohlen** werden unterschieden in dichte, erdige Braunkohle (teils in Stücken, teils zerfallen), Pechbraunkohle (fast schwarz mit muscheligem Bruche, der Steinkohle nahestehend), Lignit (bituminöses Holz mit deutlicher Holzstruktur), Blätterbraunkohle, Moorkohle, Schwelkohle, wovon die letztere bitumenreiche Sorte durch trockene Destillation Paraffin, Solaröl, Karbolsäure, Kreosot und als festen Rückstand pulvrigen **Grudekoks** liefert.

Braunkohle gibt einen braunen, Steinkohle einen braunschwarzen oder schwarzen Strich, erstere gibt mit Kalilauge eine braune Färbung, letztere nicht. Die Destillationsprodukte der Braunkohle reagieren vorwiegend sauer, die der Steinkohle infolge des höheren Stickstoff- bzw. Ammoniakgehaltes alkalisch. Frisch geförderte Braunkohle ist sehr wasserreich (40 bis 60 %), ohne dabei nafs auszusehen. Auch der Aschegehalt ist häufig hoch, so dafs der Heizwert der Rohkohle oft nur 2500 WE beträgt und weitere Transporte sich nicht lohnen.

*) Ueber den Begriff Heizwert S. 461.

Digitized by Google

Störend ist auch der oft hohe Schwefelgehalt der Braunkohlen (Gips, Schwefelkies). Wegen des meist hohen Gehaltes an Grus wird Braunkohle vorwiegend auf Treppenrosten verbrannt.

Steinkohlen. Nach dem stärkeren oder geringeren Glanze unterscheidet man Glanz- und Mattkohle. Als mineralische Beimengungen (Asche) überwiegen Silikate, Sulfate, Schwefelkies. Beim Erhitzen schmelzen gewisse Steinkohlensorten. Nach vollendeter Zersetzung durch Hitze bleibt Koks zurück, der zum Teil aus freiem Kohlenstoff besteht.

Nach dem Gasreichtum, der mit dem Sauerstoffgehalt steigt und fällt, unterscheidet man **Mager-** und **Fettkohlen.**

Ueber den Charakter und die Verwendbarkeit der Steinkohlen gibt weniger die Elementarzusammensetzung Aufschluſs, als vielmehr die Verkokungsprobe.

Als Klassifizierungsprinzip für die Kohlen dient die Beschaffenheit der unter gleichen Versuchsbedingungen erzielten Verkokungsrückstände, die entweder keine äufsere Verschiedenheit gegen das ursprüngliche (gepulverte) Material erkennen lassen oder eine durch Erweichen oder oberflächliches Zusammenkleben charakterisierte sog. Sinterung oder ein völliges Schmelzen zu teigartiger, durch entweichende Gase aufgeblähter Masse zeigen.

Backkohlen geraten beim Verkoken völlig in Fluſs, Sandkohlen backen nicht, entweder infolge Mangels an flüchtigen Bestandteilen

Steinkohlentypen.

Nr.	Kohlentypen	Elementarzusammensetzung	Verhältnis O : H	Koksmenge nach der Destillat.	Spez. Gewicht des Koks	Beschaffenheit des Koks
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I	Trockene Kohle mit langer Flamme (Sandkohle)	75,0 ÷ 80,0 % C 5,5 ÷ 4,5 % H 12,5 ÷ 15,0 % O	3 ÷ 4	50 ÷ 60	1,25	Pulverförmig, höchstens zusammengefrittet
II	Fette Kohle mit langer Flamme (Gaskohle)	80,0 ÷ 85,0 % C 5,8 : 5,0 % H 14,2 ÷ 10,2 % O	2 ÷ 3	60 ÷ 68	1,28 bis 1,30	Geschmolzen, aber stark zerklüftet
III	Fette Kohle (Schmiedekohle)	84,0 ÷ 89,0 % C 5,5 ÷ 5,0 % H 11,0 ÷ 5,5 % O	1	68 ÷ 74	1,30	Geschmolzen, bis mittelmäßig kompakt
IV	Fette Kohle mit kurzer Flamme (Kokskohle)	88,0 ÷ 91,0 % C 5,5 ÷ 4,5 % H 6,8 ÷ 5,5 % O	1	74 ÷ 82	1,30 bis 1,35	Geschmolzen, sehr kompakt, wenig zerklüftet
V	Magere Kohle oder Anthrazit mit kurzer Flamme	90,0 ÷ 93,0 % C 4,5 : 4,0 % H 5,5 ÷ 3,0 % O	1	82 ÷ 92	1,35 bis 1,41	Gefrittet oder pulverförmig

Digitized by Google

bei überwiegendem, fixem Kohlenstoffe (geologisch alte Kohlen) oder infolge grofsen Gasreichtums bei hohem Sauerstoffgehalte (junge Kohlen). Man unterscheidet danach folgende Hauptklassen:

1. Anthrazit, gasarme Sandkohle,
2. Magerkohle, gasarme Sinterkohle,
3. Back-, Schmiede- oder Kokskohle (Fettkohle),
4. Gaskohle, gasreiche Back- oder backende Sinterkohle,
5. Gasreiche Sinter- und Sandkohle (zu ersteren gehören die Flammkohlen, zu letzteren die Braunkohlen).

Zwischen 4. und 5. stehen die Gasflammkohlen.

Zusammensetzung und Heizwert von deutschen Kohlen.*)

		Ruhrkohlen	Saarkohlen, Schlesische und Sächsische Kohlen	Oberbayerische Molasse-Kohlen	Sächsische Braunkohlen	Torf	Steinkohlen-Briketts	Braunkohlen-Briketts	Gaskoks	Westfäl. Anthrazit**)
100 G.-T. lufttrockener Kohle enthalten	Kohlenstoff C	80	75	53	40	44	82	52	84	85,42
	Wasserstoff H	4,7	5	4	3	4,5	4,2	4,3	0,8	3,82
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6	10	12	11	25	3,7	16	3,4	4,68
	Schwefel S	1,5	1	5	2	0,5	1,2	2	1,0	1,23
	Wasser W	1,3	2,5	9	37	20	1,7	17	1,8	0,95
	Asche	6,5	6,5	17	7	6	7,2	9	9	3,9
Brennbare Stoffe in 100 G.-T. Kohle		92,2	91	74	56	74	91,1	74	89,2	95,2
100 G.-T. wasser- und aschefreier Stoffe enthalten	Kohlenstoff C	86,8	82,5	71,6	71,5	59,4	90	70	94,2	89,7
	Wasserstoff H	5,1	5,5	5,4	5,4	6,1	4,6	5,8	0,9	4,0
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6,5	11	16,2	19,5	33,8	4,1	21,5	3,8	4,9
	Schwefel	1,6	1	6,8	3,6	0,7	1,3	2,7	1,1	1,3
100 T. Kohle geben	Koksausbeute	77	64	56	31	31	83	40	96	89,33
	festen Kohlenstoff	70	57	38	24	25	76	32	88	85,00
	flüchtige Bestandteile	22	33	35	33	49	15	43	2	9,72
Heizwert der Kohle		7650	7100	5200	3600	3800	7750	4800	7000	7975
Heizwert der brennbaren Stoffe		8300	7800	7100	6630	5400	8500	6540	7830	8380

*) Die Tafel enthält Mittelwerte für gute Kohlen nach Untersuchungen von Bunte, Z. d. V. d. I. 1900 S. 669.

**) Z. d. V. d. I. 1905 S. 238.

Digitized by Google

Syndikatsmarken des Rheinisch-Westfälischen Kohlensyndikats:*)

1. Fettkohlen.

Fördergruskohlen	etwa 10 % Stückgehalt
Förderkohlen	„ 25 „ „
Melierte Kohlen	„ 40 „ „
Bestmelierte Kohlen	„ 50 „ „
Förderschmiedekohlen	„ 25 „ „
Melierte Schmiedekohlen	„ 40 „ „
Stückkohlen I	abgesiebt über 80 mm
„ II	„ „ 50 „
„ III	„ „ 35 „
Gewaschene melierte Kohlen	(Stücke und Nüsse III/IV gemischt)
Nufskohlen I	etwa 50/80 mm Korngröfse
„ II	„ 30/50 „ „
„ III	„ 15/30 „ „
„ IV	„ 10/15 „ „
„ V	„ 6/10 „ „
Nufsgruskohlen	„ 0/50 bis 0/75 mm Korngröfse
Fein- und Kokskohlen	„ 0/6 „ 0/10 „ „

2. Gas- und Gasflammkohlen.

Fördergruskohlen	etwa 10 % Stückgehalt
Flammförderkohlen	„ 25 „ „
Gasflammförderkohlen	„ 45 „ „
Generatorkohlen	„ 45 „ „
Gasförderkohlen	„ 45 „ „
Stückkohlen I	abgesiebt über etwa 80 mm
„ II	„ „ „ 50 „
„ III	„ „ „ 35 „
Nufskohlen I	etwa 50/80 mm Korngröfse
„ II	„ 28/50 „ „
„ III	„ 18/28 „ „
„ IV	„ 8/18 „ „
„ V	„ 5/8 „ „

Nufsgruskohlen in verschiedenen Absiebungen über Siebe von nicht weniger als 20 mm und nicht mehr als 80 mm Lochweite.

Feinkohlen	etwa 0/8 mm Korngröfse.

3. Ess- und Magerkohlen.

Fördergruskohlen	etwa 10 % Stückgehalt
Förderkohlen	„ 25 „ „
„	„ 35 „ „
Melierte Kohlen	„ 45 „ „
Bestmelierte Kohlen	„ 50 „ „
Aufgebesserte melierte Kohlen	„ 60 „ „
„ „ „	„ 75 „ „
Stückkohlen	abgesiebt über 80 mm
Gewaschene melierte Kohlen	(Stücke und Nüsse III/IV gemischt)
Nufskohlen I	etwa 50/80 mm Korngröfse
„ II	„ 25/50 „ „
„ III	„ 15/25 „ „
„ IV	„ 8/15 „ „
„ V oder Perlkohlen	„ 6/10 „ „
Nufsgruskohlen	„ 4/8 „ „
Feinkohlen	„ 0/4 bis 0/8 mm Korngröfse.

4. Koks.

Hochofenkoks	
Gießereikoks	
Brechkoks I	etwa 50/80, 60/100, 70/100 mm Korngröfse
„ II	„ 30/50, 40/60, 40/70 „ „
„ III	„ 20/30, 20/40 mm Korngröfse
„ IV	„ 10/20, 10/30 „ „

5. Briketts.

Eiform-Briketts	etwa 50, 80, 125 g schwer
Brikett (vierkantig)	„ 1½, 3, 5, 6, 7, 10 kg schwer

*) Januar 1911.

Digitized by Google

Lagerungsverluste und Selbstentzündung der Kohlen. Durch längeres Lagern an der Luft tritt ein Zerfall (Verwitterung) der Kohlen ein, verbunden mit einem Verluste an Heizkraft, Verkokungs- und Vergasungswert. Zugleich besteht die Gefahr einer Selbstentzündung der in hoher Schicht aufgespeicherten Kohlenvorräte.

Kohlen sind daher, vor Nässe und Erwärmung geschützt, in nicht zu hohen Haufen zu lagern (in der Regel nicht über 5 m). In die Kohlenhaufen sind unten verschlossene und zugespitzte Röhren einzutreiben, in die Thermometer zur Beobachtung der Temperaturerhöhung eingeführt werden. Feuchte, grusige Kohle darf nicht mit anderer Kohle überdeckt werden, sondern mufs vorher austrocknen. Einen entstehenden Kohlenbrand soll man nicht mit Wasser zu löschen versuchen, weil die starke Dampfentwicklung das weitere Vorgehen gegen den Brandherd erschwert. Vielmehr ist die Kohle um die brennende Stelle abzugraben und zur Erstickung der Glut mit breiigem Ton zu bedecken. Eine Ventilation der gelagerten Kohlen zur Verhütung der Selbstentzündung ist zu verwerfen, weil sie oft gerade die Erhitzung begünstigt.

Briketts. Braunkohlenbriketts (mit einem Heizwerte von etwa 5000 WE) namentlich für Zimmerheizung.

Aus Steinkohlenklein werden Preſskohlen (Kohlenziegel) unter Zusatz von etwa 5 % eines Bindemittels, wie Teer, Weichpech, Asphalt, Harz, Melasse u. a., gewonnen und wegen ihres geringen Platzbedarfs viel zur Heizung von Lokomotiven und Dampfschiffen verwendet. Auch ist der Lagerungsverlust bei Briketts sehr gering.

Koks. Hauptprodukt im Kokereibetrieb (sog. Hüttenkoks), Nebenprodukt bei der Leuchtgasfabrikation (Gaskoks). Koks, im Gegensatze zur Steinkohle, unschmelzbar, fest und hart, also widerstandsfähig gegen den Druck der Hochofenbeschickung, dabei poröser und ärmer an Schwefel. Je dichter der Koks, desto höhere Temperaturen lassen sich damit erzeugen. Koks erfordert, mit Steinkohle verglichen, entsprechend seiner geringeren Dichte und deshalb niedrigerem Heizwert in gleichen Volumen gröfsere Heizflächen.

Erdöl oder Petroleum. Das rohe Erdöl ist weinhell bis pechschwarz, von 0,79 bis 0,94 spez. Gewicht. Es besteht fast nur aus Kohlenwasserstoffen, enthält etwa 84 % Kohlenstoff, 14 % Wasserstoff, selten über 2 bis 3 % Sauerstoff, wenig Schwefel und Stickstoff und hat einen Heizwert von 10000 bis 11000 WE für 1 kg. Die Kohlenwasserstoffe sind in der Hauptsache Paraffine ($C_n H_{2n+2}$) (pennsylvanisches Oel), Olefine, Naphthene ($C_n H_{2n}$) (Oel aus Baku).

Durch Destillation in Raffinerien wird das Rohpetroleum zerlegt

1. in Benzin, Siedepunkt bis 150° (Petroleumäther, Gasolin, Kanadol, spez. Gewicht 0,64 bis 0,65, S.-P. 40 bis 70° C; Benzin, spez. Gewicht 0,70, S.-P. 70 bis 120° C; Ligroin, spez. Gewicht 0,73, S.-P. 120 bis 135° C; Putzöl, spez. Gewicht 0,74 bis 0,75, S.-P. 130 bis 160° C):
2. in Brennpetroleum oder Kerosin, S.-P. 150 bis 300° C, spez. Gewicht von pennsylvanischem Oel 0,83 bis 0,87, von Bakuöl 0,815 bis 0,825;
3. in die Rückstände, die über 300° sieden: Schmieröl, Masut, Heizöle, Paraffinöl, Vaselin.

Digitized by Google

Von diesen drei Fraktionen, die alle einen Heizwert von 10 000 bis 11 000 WE für 1 kg haben, enthalten die Rohöle etwa folgende Mengen:

Rohöl von	Spez. Gewicht	Benzin vH	Brennöl vH	Rückstand vH
Pennsylvanien .	0,79 bis 0,82	10 bis 20	55 bis 75	10 bis 20
Ohio	0,80 „ 0,85	16 „ 20	30 „ 40	35 „ 50
Baku	0,85 „ 0,90	5	25 „ 30	60 „ 65
Galizien . . .	0,82 „ 0,88	5 bis 20	35 „ 50	30 „ 45
Elsafs . . .	0,90	0 „ 5	25	65 „ 70

Teer hat ein spez. Gewicht von 1,10 bis 1,26, einen Heizwert von etwa 8500 WE und wird in Gaswerken zu 3,5 bis 6 %, in Kokereien zu 2,5 bis 3,5 %, bei der Trockendestillation der Steinkohlen zu etwa 10 bis 15 % aus Braunkohlen gewonnen.

Näheres über flüssige Brennstoffe s. auch nächst. Kapitel „Verbrennung".

Ueber **gasförmige Brennstoffe** s. ebenfalls das Kapitel „Verbrennung", ferner Bd. II. Kapitel „Verbrennungsmaschinen".

B. Verbrennung.

Unter **Heizwert** (Verbrennungswärme) eines Stoffes verstehen wir diejenige Wärme, welche der Stoff bei seiner Verbrennung abgibt, wenn die Verbrennungserzeugnisse wieder auf die Anfangstemperatur abgekühlt werden. Wir unterscheiden weiter noch zwei Arten der Verbrennung, für welche der Heizwert unter Umständen etwas verschieden ist: a) die Verbrennung bei unveränderl. Druck, b) die Verbrennung bei unveränderl. Volumen. (Näheres S. 469.) Für feste Brennstoffe kommt nur die Verbrennung bei unveränderl. Druck in Betracht. Allgemein ist dann der Heizwert = dem Unterschiede des Wärmeinhalts des brennbaren Gemisches und der Verbrennungserzeugnisse bei gleicher Temperatur $h = J' - J''$.

Da die spezifische Wärme vor und nach der Verbrennung im allgemeinen etwas verschieden sein wird, so ändert sich der Heizwert etwas mit der Temperatur, doch ist dieser Einfluss praktisch verschwindend. Hingegen ändert sich der Heizwert sprungweise, wenn die Verdampfungstemperatur des in den Verbrennungserzeugnissen enthaltenen Wassers überschritten wird, u. zw. um den Betrag der Verdampfungswärme jener Wassermenge (w), wofür wir rund 600 WE für 1 kg Wasser setzen können.

Danach unterscheiden wir den **oberen Heizwert,** der auf flüssiges Wasser bezogen ist, und den um 600 w kleineren **unteren Heizwert** bezogen auf Wasserdampf. Der letztere kommt praktisch meist in Betracht.

Angenähert kann der Heizwert eines Brennstoffes aus der Elementaranalyse nach folgender Formel berechnet werden:

$$h_u = 8100\,c + 29\,000\left(h - \frac{o}{8}\right) + 2500\,s - 600\,w.$$

Digitized by Google

worin c, h, o, s und w den Gehalt an Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Schwefel und Wasser in kg für 1 kg Brennstoff bedeuten.

Die Ermittlung des Heizwertes durch Verbrennen in der **kalorimetrischen Bombe** von Berthelot-Mahler oder Hempel ist stets vorzuziehen. Die Verbrennung erfolgt in verdichtetem Sauerstoffe von rd. 25 at Druck; die entwickelte Wärmemenge wird kalorimetrisch gemessen.

Bedeutet G das Gewicht der verbrannten Substanz, π den Wasserwert des Apparates, W die Wassermenge des Kalorimeters in kg, Δt die beobachtete Temperaturerhöhung, Δt_k eine den Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigende Korrektur in °C, so ist der Heizwert

$$h = \frac{(W + \pi)(\Delta t + \Delta t_k)}{G} \text{ WE.}$$

Δt_k bestimmt man durch Beobachtung der Temperaturänderung des Kalorimeters vor und nach dem Versuche. π wird durch Verbrennen einer Normalsubstanz (Benzoësäure 6322, Kampfer 9292, Rohrzucker 3955 WE/kg) oder auf elektrischem Wege ein für allemal ermittelt. An der gemessenen Wärmemenge sind Korrekturen für Zündung und die bei der Verbrennung gebildete Salpeter- und Schwefelsäure anzubringen. Die Säuren werden durch Titration bestimmt.

Zur genauen Ermittlung von h sind verhältnismäfsig grofse Wassermengen erforderlich und nur kleine Temperaturerhöhungen (2 bis 3° C) zulässig, daher die Anwendung hochempfindlicher Thermometer (Beckmann-, Widerstandsthermometer, Thermoelemente) geboten.

Mittels der Bombe wird der obere Heizwert bestimmt. Ergibt sich aus der Elementaranalyse w kg Verbrennungswasser für 1 kg Brennstoff, so ist der untere Heizwert $h_u = h - 600\,w$ WE.

Heizwerte h für 1 kg Brennstoff.

(Die Werte der Tafel sind obere Heizwerte, d. h. sie beziehen sich auf flüssiges Wasser.)

	WE		WE
Aether	8900	Masut (Petroleumrückstände)	10500
Alkohol	7100	Naphthalin	9700
Anilin	8800	Petroleum	11000
Antimon	960	Phosphor (P zu P_2O_5)	5950
Benzol	10000	Rohrzucker	4000
Blei	260	Rüböl, Olivenöl, Leinöl	9300
Braunkohlenteerol	10000	Schiefspulver	700 bis 800
Chlormethyl	3200		
Eisen (Fe zu FeO)	1260	Schwefel (S zu SO_2)	2220
„ (Fe zu Fe_3O_4)	1680	Schwefelkohlenstoff	3400
„ (Fe zu Fe_2O_3)	1890	Schwefelwasserstoff	2740
Glyzerin	4300	Silicium (Si zu SiO_2)	7830
Holz	4100	Talg	8370
Holzgeist	5300	Terpentinöl	10850
Kohlenstoff (C zu CO_2)	8140	Wachs	9000
„ (C zu CO)	2440	Zellulose	4200
Kupfer (Cu zu CuO)	590	Zink (Zn zu ZnO)	1300

Digitized by Google

Luftbedarf für die Verbrennung.

Zusammensetzung der Luft:

	Gew.-Teile	Raumteile	
Sauerstoff, O_2 . . .	0,231	0,2090	rd. **0,21**
Stickstoff, N_2 . . .	0,7555	0,7813	rd. **0,79.**
Argon, A	0,013	0,0094	
Kohlensäure, CO_2 .	0,0005	0,0003	

Dazu kommt noch der nach Temperatur und Feuchtigkeitsgrad sehr verschiedene Wasserdampfgehalt. Gröfsenordnung etwa 1 g für 1 cbm Luft. Näheres S. 403.

1 kg Brennstoff von der Zusammensetzung c, h, o in Gewichtsteilen braucht zu seiner vollkommenen Verbrennung an Sauerstoff mindestens:

$$S_{min} = \frac{1}{12}\left[c + 3\left(h - \frac{o}{8}\right)\right] \text{ in Mol,*)}$$

dieser Wert ist mit 24,4 oder 22,4 zu multiplizieren, um die Sauerstoffmenge in cbm von 15° u. 1 at oder in cbm von 0° u. 760 mm zu erhalten.

An Luft ist der $\frac{1}{0{,}21}$-fache Betrag nötig.

$$L_{min} = 9{,}7\left[c + 3\left(h - \frac{o}{8}\right)\right] \text{ in cbm von } 15^0 \text{ u. 1 at,}$$

$$L_{min} = 8{,}9\left[c + 3\left(h - \frac{o}{8}\right)\right] \text{ in cbm von } 0^0 \text{ u. 760 mm.}$$

In der Praxis wird stets mehr Luft zugeführt, als für die Verbrennung nötig. Das Verhältnis $\lambda = \frac{L}{L_{min}}$ der zugeführten zur Mindestluftmenge nennen wir den **Luftüberschufs.**

Verbrennungsgleichungen: (Alle Raumeinheiten sind auf 15° u. 1 at bezogen.)

$$\left.\begin{matrix}12\text{ kg} \\ 1\text{ Mol}\end{matrix}\right\} \text{C} + 1\text{ Mol } O_2 = 1\text{ Mol } CO_2 + 97\,700\text{ WE,}$$

$$0{,}492\text{ kg C} + 1\text{ cbm } O_2 = 1\text{ cbm } CO_2 + 4000\text{ WE,}$$

$$\left.\begin{matrix}12\text{ kg} \\ 1\text{ Mol}\end{matrix}\right\} \text{C} + \frac{1}{2}\text{ Mol } O_2 = 1\text{ Mol CO} + 29\,300\text{ WE,}$$

$$0{,}492\text{ kg C} + \frac{1}{2}\text{ cbm } O_2 = 1\text{ cbm CO} + 1200\text{ WE,}$$

$$\left.\begin{matrix}2\text{ kg} \\ 1\text{ Mol}\end{matrix}\right\} H_2 + \frac{1}{2}\text{ Mol } O_2 = 1\text{ Mol } H_2O \text{ flüssig} + 68\,200\text{ WE,}$$

$$\left.\begin{matrix}2\text{ kg} \\ 1\text{ Mol}\end{matrix}\right\} H_2 + \frac{1}{2}\text{ Mol } O_2 = 1\text{ Mol } H_2O \text{ Dampf} + 57\,400\text{ WE,}$$

$$\left.\begin{matrix}0{,}0822\text{ kg} \\ \text{oder } 1\text{ cbm}\end{matrix}\right\} H_2 + \frac{1}{2}\text{ cbm } O_2 = 1\text{ cbm } H_2O \text{ flüssig} + 2800\text{ WE,}$$

$$\left.\begin{matrix}0{,}0822\text{ kg} \\ \text{oder } 1\text{ cbm}\end{matrix}\right\} H_2 + \frac{1}{2}\text{ cbm } O_2 = 1\text{ cbm } H_2O \text{ Dampf} + 2360\text{ WE.}$$

*) Kapitel IV S. 396 „Vollkommene Gase".

Digitized by Google

1 kg Brennstoff gibt Verbrennungserzeugnisse in Mol:

$$CO_2 = \frac{c}{12}, \qquad H_2O = \frac{h}{2} + \frac{w}{18};$$

zur Umrechnung in cbm sind diese Werte wie oben mit 24,4 bzw. 22,4 zu multiplizieren. Aufserdem enthalten die Verbrennungsgase den Stickstoff der Luft und den überschüssigen Sauerstoff und zwar beträgt für 1 kg Brennstoff in cbm:

$$\begin{gathered} O_2 = 0{,}21\, L_{min}\,(\lambda - 1) \\ N_2 = 0{,}79\, L_{min} \cdot \lambda \\ \hline O_2 + N_2 = L_{min}\,(\lambda - 0{,}21) \end{gathered}.$$

Das Verhältnis der Menge der **trockenen Rauchgase** (ohne Wasser) zu der zugeführten Luftmenge beträgt:

$$\frac{\text{Rauchgase}}{\text{Luft}} = 1 + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{c}{12\, L_{min}} - 0{,}21\right).$$

Die **Zusammensetzung der trockenen Rauchgase** nach Raumteilen beträgt **bei vollkommener Verbrennung,** wenn wir $\frac{h - \frac{o}{8}}{c} = a$ setzen:

$$CO_2 = \frac{0{,}21}{\lambda + 3\,(\lambda - 0{,}21)\,a}; \qquad CO_2 + O_2 = 0{,}21\,\frac{\lambda + 3\,(\lambda - 1)\,a}{\lambda + 3\,(\lambda - 0{,}21)\,a};$$

$$O_2 = \frac{0{,}21\,(\lambda - 1)\,(1 + 3a)}{\lambda + 3\,(\lambda - 0{,}21)\,a}; \qquad N_2 = \frac{0{,}79\,\lambda\,(1 + 3a)}{\lambda + 3\,(\lambda - 0{,}21)\,a}.$$

Für einen Brennstoff, der nur Kohlenstoff enthält, beträgt der $CO_2 + O_2$-Gehalt der Rauchgase stets 0,21 Raumteile; je mehr Wasserstoff der Brennstoff enthält, desto mehr sinkt der $CO_2 + O_2$-Gehalt.

Der Kohlensäuregehalt der Rauchgase hängt in erster Linie vom Luftüberschufse ab; für Brennstoffe, die nur Kohlenstoff enthalten (Koks), beträgt CO_2 in den Rauchgasen: $CO_2 = \frac{0{,}21}{\lambda}$.

Aus dem durch Analyse bestimmten Kohlensäuregehalte der Rauchgase läfst sich bei bekannter Zusammensetzung des Brennstoffes der Luftüberschufs berechnen; es ist: $\lambda = 0{,}21\,\frac{\frac{1}{CO_2} + 3a}{1 + 3a}$

oder $$\lambda = 0{,}21\,\frac{\frac{1 - CO_2}{O_2} - 1}{0{,}21\,\frac{1 - CO_2}{O_2} - 1} = 1 + \frac{0{,}79}{0{,}21\,\frac{1 - CO_2}{O_2} - 1}$$

oder $$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{0{,}79}{0{,}21}\,\frac{O_2}{N_2}}.$$

Digitized by Google

Wenn der Kohlenstoff nicht vollständig zu CO_2, sondern zum Teil zu **Kohlenoxyd** verbrennt, so bedeutet dies einen Verlust für die Feuerung, der sich wie folgt berechnet:

Verlust durch unvollkommenes Verbrennen

$$= \frac{\text{Heizwert des gebildeten Kohlenoxyds}}{\text{Heizwert des Brennstoffes}} = \frac{\frac{CO}{CO_2 + CO}}{5{,}04\,(0{,}285 + a)}.$$

CO_2 und CO bedeuten die Raumteile dieser Gase in den trockenen Rauchgasen.

Verbrennungstemperatur ist die Temperatur, welche die Verbrennungserzeugnisse bei vollkommener Verbrennung und bei Ausschluſs von Wärmeverlusten annehmen. Auch hierbei unterscheiden wir Verbrennung bei gleichem Drucke (Feuerungen) und bei gleichem Volumen (Verbrennungsmaschinen). Im ersten Falle bleibt der Wärmeinhalt, in letzterem die Energie unverändert. Die Höhe der Verbrennungstemperatur ist von der Art des Brennstoffes (Heizwert), der Anfangstemperatur (Vorwärmung der Verbrennungsluft) und sehr wesentlich vom Luftüberschuſse abhängig. Bei der Berechnung der Verbrennungstemperatur muſs das Anwachsen der spezifischen Wärme der Gase mit der Temperatur beachtet werden. (S. 399 u. Taf. S. 400.)

Ueber 1800° C beginnt die Verbrennung allmählich unvollständig zu werden, da dann Zersetzung von Kohlensäure und Wasserdampf eintritt.

Die Verbrennungstemperatur t für 1 kg Brennstoff mit $L = \lambda \cdot L_{min}$ Luft bei einer Anfangstemperatur der Luft von t_0 und bei gegebener Zusammensetzung und bekanntem Heizwerte des Brennstoffes findet sich nun wie folgt:

$$\mu h_u + \lambda \cdot L_{min} \cdot [\mu C_p]_{2\,at}^{t_0} \cdot t_0$$

$$= \left[\frac{c}{12}[\mu c_p]_{CO_2}^{t} + \left(\frac{h}{2} + \frac{w}{18}\right)[\mu c_p]_{H_2O}^{t} + L_{min}(\lambda - 0{,}21)\,[\mu c_p]_{2\,at}^{t}\right] t.$$

Damit findet sich t rasch mit Hülfe der Tafel der mittleren spezifischen Wärmen (S. 400), indem man für $[\mu c_p]_o^t$ zunächst schätzungsweise die Temperatur t annimmt.

Für einige typische Brennstoffe ist in der folgenden Tafel (3. Reihe) die Rechnung für verschiedenen Luftüberschuſs durchgeführt. Angenommen ist hierbei, daſs die Luft mit 20° zugeführt wird.

Wärmeverlust durch die Verbrennungsgase. Dadurch, daſs die Verbrennungsgase einer Feuerung mit einer höheren als der Umgebungstemperatur in den Schornstein abziehen, entsteht ein Verlust. Dieser Schornsteinverlust ist gleich:

$$\frac{\text{Wärmeinhalt der abziehenden Gase}}{\text{Heizwert des Brennstoffes}};$$

Digitized by Google

damit erhalten wir diesen Verlust in Bruchteilen des Heizwertes durch folgende Formel:

Schornsteinverlust

$$= \frac{t_1 \cdot \left\{ \frac{c}{12} \left[\mu c_p\right]_{t_0}^{t_1}{}_{CO_2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{w}{18}\right) \left[\mu c_p\right]_{t_0}^{t_1}{}_{H_2O} + L_{min} (\lambda - 0{,}21) \left[\mu c_p\right]_{t_0}^{t_1}{}_{2\,at} \right\}}{\mu h_u},$$

$t_1 - t_0$ ist der Temperaturunterschied zwischen den abziehenden Rauchgasen und der Umgebung.

Auch hierfür sind in der folgenden Tafel Beispiele für typische Brennstoffe, verschiedene Abgastemperaturen und verschiedenen Luftüberschuß gerechnet. Als Umgebungstemperatur ist 20° angenommen.

Vielfaches der theoretischen Luftmenge	CO_2-Gehalt der Heizgase aus der Analyse R.-T.	Verbrennungstemperatur °C	Wärmeverlust ε für eine Abgastemperatur von °C				
			500	400	300	200	100
Kohlenstoff. $h = 8140$.							
1,0	0,210	2330	0,181	0,142	0,103	0,066	0,029
1,25	0,167	1965	0,222	0,175	0,127	0,081	0,036
1,5	0,139	1690	0,263	0,207	0,151	0,096	0,042
2,0	0,105	1340	0,346	0,273	0,199	0,127	0,055
2,5	0,084	1105	0,428	0,338	0,247	0,158	0,068
3,0	0,070	945	0,511	0,403	0,295	0,188	0,082
Steinkohle. 0,75 C, 0,05 H_2, 0,03 W. $h_u = 7500$.							
1,0	0,181	2185	0,193	0,151	0,110	0,070	0,031
1,25	0,144	1855	0,236	0,184	0,134	0,085	0,038
1,5	0,120	1620	0,278	0,217	0,158	0,101	0,045
2,0	0,089	1285	0,363	0,284	0,207	0,131	0,058
2,5	0,071	1065	0,448	0,351	0,255	0,163	0,072
3,0	0,059	910	0,534	0,419	0,304	0,194	0,086
Braunkohle. 0,40 c, 0,03 h, 0,36 w. $h_u = 3600$.							
1,0	—	1920	0,231	0,183	0,136	0,089	0,045
1,5	—	1450	0,323	0,256	0,190	0,125	0,062
2,0	—	1170	0,414	0,328	0,244	0,161	0,080
2,5	—	980	0,505	0,401	0,298	0,197	0,098
3,0	—	850	0,596	0,473	0,352	0,232	0,113
Gichtgas. 0,03 H_2 + 0,29 CO + 0,08 CO_2 + 0,60 N_2. $h_u = 880$.							
1,0	0,236	1595	0,279	0,218	0,158	0,101	0,044
1,5	0,190	1350	0,339	0,265	0,192	0,122	0,053
2,0	0,159	1170	0,399	0,312	0,227	0,144	0,063
2,5	0,137	1040	0,459	0,358	0,261	0,166	0,072
3,0	0,121	930	0,518	0,401	0,295	0,187	0,082

Digitized by Google

In lebhafte Verbrennung gerät ein Körper nur, wenn er auf seine für ihn charakteristische Entzündungstemperatur erhitzt wird, er brennt weiter, solange die Temperatur nicht unter die Entzündungstemperatur sinkt und genug Sauerstoff zu seiner Verbrennung vorhanden ist.

Durch Mangel an Sauerstoff und durch Abkühlung wird die Verbrennung unvollständig (Rufsabscheidung usw.).

Feste (und flüssige) natürliche Brennstoffe werden bei der Verbrennung wie bei der trockenen Destillation (Entgasung) zunächst zersetzt und geben gasförmige Produkte ab, die mit Flamme verbrennen.

Brennstoffe, die keine flüchtigen Bestandteile enthalten, z. B. Holzkohle, Koks, glühen nur, brennen aber nicht mit Flamme. Bei der gewöhnlichen Rostfeuerung ist daher zu unterscheiden eine Verbrennung über dem Rost, gebildet durch die Flamme der entwickelten Gase, und eine Verbrennung auf dem Rost, gebildet durch die Glut des Destillationsrückstandes.

Die Produkte vollkommener Verbrennung sind bei allen Brennstoffen Kohlensäure und Wasserdampf.

Rufs und Rauch. Bei Verbrennung fester Heizstoffe ist häufig die Zuführung von Luft durch den Rost ungleichmäfsig und dadurch die Mischung von Gas und Luft unvollständig, oder die Entwicklung von brennbaren Gasen (Teerdämpfen usw.) erfolgt schneller und reichlicher als die zur völligen Verbrennung erforderliche Luftzufuhr, oder die Flamme wird vor der vollständigen Verbrennung durch Berührung mit kalten Flächen unter die Entzündungstemperatur der schwer brennbaren Teerdämpfe abgekühlt. In diesen Fällen entsteht Rauch und Rufs. Die vollständige Verbrennung fester Brennstoffe und ihrer gasförmigen Bestandteile wird durch eine richtige Luftzufuhr ermöglicht.

Zur Abhülfe gegen Rufs und Rauch ist dafür zu sorgen, dafs Luftzuführung und Luftbedarf im richtigen Verhältnis zueinander stehen und dafs die Verbrennungsgase Gelegenheit finden, sich mit der zugeführten Luft zu mischen.

Gut entgaster Koks liefert ohne Rauch- und Rufsbildung bei vollständiger Verbrennung Kohlensäure, bei unvollständiger Kohlenoxyd.

Im **Bunsenbrenner** kann dem Gase bis zur Hälfte der zur vollständigen Verbrennung notwendigen Luft zugeführt werden.

Am inneren Kegel der Bunsenflamme verbrennt Luft in überschüssigem Gase unter Bildung von Kohlensäure, Wasser, Kohlenoxyd und Wasserstoff (Wassergasgleichgewicht); im äufseren Flammenmantel verbrennt das nur teilweise verbrannte Gas vollständig im Luftüberschufs zu Wasser und Kohlensäure; in der Zwischenzone brennt nichts; d. h. da kein freier Sauerstoff vorhanden ist, kann auch keine Oxydation erfolgen, vielmehr ist die Flamme eine Masse glühender Gase, welche allseitig von einer ungemein dünnen Zone umgeben ist, in der die Verbrennung stattfindet. Bei weiterer Steigerung der Luftzufuhr im Bunsenbrenner schlägt die Flamme zurück, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flamme nach rückwärts wird dann gröfser als die Ausströmungsgeschwindigkeit des Gasluftgemisches aus dem Brennerrohre. Durch Erhöhung der letzteren (Prefsgas, Prefsluft, Gebläse) gelingt es, die ganze zur vollkommenen Verbrennung nötige

Digitized by Google

Luft vor der Verbrennung beizumischen und eine auf ein kleines Volumen konzentrierte sehr heifse Flamme zu erzielen (Sauerstoff-Leuchtgasgebläse).

C. Verbrennung gasförmiger und flüssiger Brennstoffe.*)

1. Von gasförmigen Brennstoffen kommen technisch in Betracht: Kohlenoxyd CO, Wasserstoff H_2 und eine Anzahl Kohlenwasserstoffe der allgemeinen Formel $C_m H_n$, darunter besonders: Methan CH_4, Aethylen C_2H_4, Azetylen C_2H_2.

Die Sauerstoff- und Luftmengen, die zur Verbrennung von 1 cbm eines Gases mindestens notwendig sind, seien: S_{min} und L_{min} in cbm.

Für Kohlenwasserstoffe $C_m H_n$ ist

$$S_{min} = m + \frac{n}{4}, \qquad L_{min} = \frac{1}{0{,}21} S_{min}.$$

Für Kohlenwasserstoffe gilt die Verbrennungs-Gleichung

$$1\, C_m H_n + \left(m + \frac{n}{4}\right) O_2 = m\, CO_2 + \frac{n}{2} H_2O,$$

d. h. 1 Raum-Einheit des Gases verbrennt mit $\left(m + \frac{n}{4}\right)$ R.-E. Sauerstoff zu m R.-E. Kohlensäure und $\frac{n}{2}$ R.-E. Wasserdampf.

2. 1 R.-E. Gas sei aus folgenden Bestandteilen gemischt [die chemischen Zeichen sollen zugleich die Raumteile bezeichnen]:

$$CO + H_2 + CH_4 + C_2H_4 + C_2H_2 + O_2 + N_2 + CO_2 + H_2O = 1.$$

Die zur Verbrennung von 1 R.-E. dieser Mischung nötige Sauerstoffmenge in R.-E. ist

$$S_{min} = \frac{CO + H_2}{2} + 2\,CH_4 + 3\,C_2H_4 + 2{,}5\,C_2H_2 - O_2.$$

Als Verbrennungsgase ergeben sich in R.-E., wenn dem Gase L R.-E. Luft beigemischt werden:

$$\begin{aligned}
\text{Kohlensäure} &= CO_2 + CO + CH_4 + 2\,C_2H_4 + 2\,C_2H_2,\\
\text{Wasserdampf} &= H_2O + H_2 + 2\,CH_4 + 2\,C_2H_4 + C_2H_2,\\
\text{Sauerstoff} &= 0{,}21\,L - S_{min},\\
\text{Stickstoff} &= N_2 + 0{,}79\,L.
\end{aligned}$$

Die Verbrennung hat im allgemeinen eine Veränderung (Verkleinerung) der Molekülzahl im Gefolge, dadurch ändert sich die Gaskonstante R und, gleiche Anfangs- und Endwerte von Druck und Temperatur vorausgesetzt, auch der Rauminhalt.

Für 1 R.-E. von $C_m H_n$ ist die Raumverkleinerung (Kontraktion) $\Delta V = \left(1 - \frac{n}{4}\right)$ R.-E. Ist die Gaskonstante des Gemisches von Gas und Luft vor der Verbrennung R' und nach derselben R'', so ist

$$\frac{R''}{R'} = \frac{1 + L - \Delta V}{1 + L}.$$

*) In diesem Kapitel sind wiederholt die Formeln und Tafeln über vollkommene Gase S. 396 bis 404 benutzt.

Digitized by Google

Für die obige Gasmischung ist

$$\Delta V = \frac{CO + H_2 + C_2H_2}{2}.$$

Da bei den gewöhnlichen Werten von Druck und Temperatur der Wasserdampf kondensiert, so tritt dadurch eine weitere Raumabnahme $\Delta V'$ ein, die gleich dem früher berechneten Rauminhalte des dampfförmig gedachten Wassers ist.

3. Den **Heizwert** eines gasförmigen Brennstoffes bezieht man entweder auf die Gewichtseinheit (kg), h, oder auf die Raumeinheit (u. zw. auf 1 cbm bei 15° C und 1 at) H:

$$H = h\frac{\mu}{847}\frac{10\,000}{288} = h\frac{\mu}{24{,}4}; \qquad \mu h = 24{,}4\,H.$$

Der Heizwert hat erst eine bestimmte Bedeutung, wenn man den Zustand des Gemisches vor und nach der Verbrennung genau angibt. Hierbei kommen zwei Fälle besonders in Betracht:

α. Der Heizwert für gleichbleibenden Druck h_p, H_p, ist die Wärmemenge, die nach aufsen abgegeben wird, wenn Temperatur und Druck vor und nach der Verbrennung denselben Wert haben.

β. Der Heizwert für gleichbleibenden Rauminhalt h_v, H_v, ist die Wärmemenge, die abgegeben wird, wenn Temperatur und Rauminhalt vor und nach der Verbrennung gleiche Werte haben.

Die Heizwerte für gleichen Druck und gleichen Rauminhalt unterscheiden sich (gleichen Anfangszustand vorausgesetzt) durch die Arbeit, die der Raumveränderung $\Delta V + \Delta V'$ für gegebenen unveränderlichen Druck entspricht. Für den Druck von 1 at ist

$$H_p - H_v = A\,10\,000\,(\Delta V + \Delta V') = 23{,}4\,(\Delta V + \Delta V').$$

Der Unterschied der beiden Heizwerte ist sehr gering und kommt höchstens bei Wasserstoff in Betracht; für ihn ist bei 15° und 1 at

$$H_p - H_v = \frac{15000}{427} = 35 \text{ oder } 1{,}25\,\% \text{ von } H_p.$$

Bezeichnen i', u', c_v', c_p' den Wärmeinhalt, die Energie und die spez. Wärmen für 1 kg des brennbaren Gemisches und i'', u'', c_v'', c_p'' dieselben Gröfsen nach der Verbrennung, O in kg die nötige Sauerstoffmenge für 1 kg des Brennstoffes, so ist

$$h_p = (1 + O)\,(i' - i''), \qquad h_v = (1 + O)\,(u' - u'').$$

Besteht das Gemenge vor und nach der Verbrennung nur aus Gasen, und bezeichnet man den Heizwert für 0° mit h_p^0, h_v^0, so ist der Heizwert für eine beliebige Temperatur t

$$h_p = h_p^0 + (1 + O)\,(c_p' - c_p'')\,t, \qquad h_v = h_v^0 + (1 + O)\,(c_p' - c_p'')\,t.$$

In der Regel kommt diese Abhängigkeit des Heizwertes von der Temperatur nicht in Betracht. Bestehen die Verbrennungserzeugnisse ganz oder zum Teile aus Wasser, so ändert sich der Heizwert bei der Verdampfungstemperatur sprungweise um das Produkt aus der Verdampfungswärme r (S. 417 ff.) und der gebildeten Wassermenge. Letztere sei für 1 kg des Brennstoffes w kg, für 1 cbm W kg.

Digitized by Google

Für 1 kg Wasserstoff beträgt für atmosphärischen Druck $w r_{100} = 9 . 539{,}1 = 4852$ WE oder 14 % des Heizwertes h_p. Die Aenderung von h_v ist $w \varrho_{100} = 9 . 498{,}7 = 4488$ WE.

4. Wenn die Verbrennung ohne Wärmeabgabe nach aufsen stattfindet, so wird die ganze entwickelte Wärme von den Verbrennungsgasen aufgenommen. Auch hier sind zwei Sonderfälle wichtig:

α. **Verbrennung bei unveränderlichem Drucke:** Das Gemisch, enthaltend 1 kg Brennstoff und G kg Luft und Beimengungen, habe vor der Verbrennung die Temperatur t_1, nach der Verbrennung die Temperatur t; die gebildete Wassermenge sei w, dann ist

$$h_p + (1 + G)\, c_p' \, t_1 = w r_0 + (1 + G)\, c_p'' \, t.$$

β. **Verbrennung bei unveränderlichem Rauminhalte:**

$$h_v + (1 + G)\, c_v' \, t_1 = w \varrho_0 + (1 + G)\, c_v'' \, t.$$

Diese und die früheren Formeln gelten auch für veränderliche spez. Wärmen, wenn unter C_p', C_p'', C_v', C_v'' die mittleren spez. Wärmen zwischen 0^0 und $t_1{}^0$ bzw. t^0 verstanden werden.

Die Gröfsen $h_p - w r_0$ und $h_v - w \varrho_0$ nennt man den **unteren Heizwert** bei unveränderlichem Drucke und unveränderlichem Rauminhalte. Tritt bei der Verbrennung keine Raumverminderung ein, ($\Delta V = 0$), so sind beide einander gleich; sonst unterscheiden sich beide durch den sehr kleinen, der Raumverminderung entsprechenden Arbeitswert. Man kann daher beide Werte einander gleich setzen und kurz mit h_u und H_u bezeichnen; setzt man noch abgerundet $r_0 = 600$, so erhält man die üblichen Formeln

$$h_u = h_p - w . 600, \qquad H_u = H_p - W . 600.$$

Zur praktischen Bestimmung von H_p und W und damit von H_u dient in bester Weise das Kalorimeter von Junkers.

Wenn die Temperatur t_1 vor der Verbrennung gering ist gegen t, so können mit Rücksicht auf die Unsicherheit der spez. Wärme der Verbrennungserzeugnisse die vorstehenden Verbrennungsgleichungen für den praktischen Gebrauch wie folgt vereinfacht werden:

$$h_u = (1 + G)\, c_p'' \, (t - t_1) \text{ und } h_u = (1 + G)\, c_v'' \, (t - t_1).$$

Für gasförmige Brennstoffe schreibt man die Verbrennungsgleichungen nach Raumteilen (r)

$$H_u + \Sigma (r' C_p') \, t_1 = \Sigma (r'' C_p'') \, t,$$
$$H_u + \Sigma (r' C_v') \, t_1 = \Sigma (r'' C_v'') \, t,$$

hierbei ist $\Sigma r''$ um den Betrag der Raumverkleinerung ΔV kleiner als $\Sigma r'$.

Ist p_1 der Druck vor und p der nach der Verbrennung im unveränderlichen Raume, so ist $\dfrac{p}{p_1} = \dfrac{T}{T_1} \dfrac{R''}{R'}$.

Formeln und Tafeln über die mittleren spezifischen Wärmen der Gase finden sich S. 398 u. 400.

Zündgeschwindigkeit.

Die Verbrennung, die in einem Punkte eines entzündlichen Gasgemisches ausgelöst wird, kann sich in zwei wesentlich verschiedenen

Digitized by Google

Formen fortpflanzen. Die Zündgeschwindigkeit ist bei der langsamen Verbrennung besonders durch die Wärmeleitung, die spezifische Wärme, die Dichte und durch die Aenderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur bestimmt. Eine zweite Fortpflanzungsart der Verbrennung beruht auf der Erscheinung, dafs die Entzündung durch die von starkem Drucke verursachte Temperatursteigerung stattfindet (Kompressionswelle).

Mit der Zündgeschwindigkeit stehen die Explosionsgrenzen im engen Zusammenhange. Für diese erreicht die Zündgeschwindigkeit annähernd den Wert Null. Beide sind von der Natur des Brenngases, der Art und Menge der im Gemische enthaltenen an der Verbrennung nicht teilnehmenden Gase, der Gröfse und Gestalt des Explosionsraumes abhängig.

Nägel*) fand bei Verwendung einer kugelförmigen Bombe von 30 l Inhalt mit zentraler Zündung für die Zündgeschwindigkeit die in Tafel 1 zusammengestellten Werte.

Tafel 1.

Wasserstoff-Luftgemische Anfangs-Temp. 15°, $H_u = 2360$			Leuchtgas-Luftgemische Anfangs-Temp. 75°, $H_u = 4300$			Generatorgas-Luftgemische Anfangs-Temp. 75°, $H_u = 1180$		
Volumenanteil des Brenngases im Gemische	absol. Anfangsdruck at	Zündgeschwindigkeit msk $^{-1}$	Volumenanteil des Brenngases im Gemische	absol. Anfangsdruck at	Zündgeschwindigkeit msk $^{-1}$	Volumenanteil des Brenngases im Gemische	absol. Anfangsdruck at	Zündgeschwindigkeit msk $^{-1}$
0,1030	0,50	0,602	0,08	0,50	0,372	0,30	0,50	0,526
0,1043	1,50	0,671	0,08	1,00	0,193	0,30	3,50	0,362
0,1013	2,50	0,508	0,08	2,00	0,108	0,30	7,50	0,149
0,1813	0,50	4,378	0,11	0,50	1,559	0,465	0,50	2,183
0,1823	1,50	5,715	0,11	3,50	1,430	0,465	3,50	2,207
0,1823	2,50	6,120	0,11	5,50	1,435	0,465	5,50	1,913
0,2397	0,50	8,220	0,16	0,50	4,033			
0,2437	1,50	11,82	0,16	3,00	3,768			
0,2440	2,50	13,92	0,16	5,50	3,623			

Bei Gemischen mit mittleren und hohen Gasgehalten von Leuchtgas und Generatorgas ist die Zündgeschwindigkeit vom Anfangsdrucke fast unabhängig. Wasserstoff-Luftgemische ergeben mit steigendem Drucke um so gröfsere Zündgeschwindigkeiten, je höher die Gasgehalte sind.

Das Explosionsbereich eines Gas-Luftgemisches liegt zwischen der unteren Grenze mit Luftüberschufs und der oberen mit Luftmangel.

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 54. Herausg. v. V. d. I.

Digitized by Google

Die Zündgeschwindigkeit geht mit steigendem Volumenanteil des Brenngases im Gemische durch ein Maximum. Die Lage des Maximums entspricht einem Mischungsverhältnis, bei dem das Brenngas von dem vorhandenen Sauerstoffe nicht vollständig verbrannt werden kann.

Benzindampf-Luftgemische ergeben nach Neumann*) die gröfste Zündgeschwindigkeit 2,6 msk^{-1} und höchste Maschinenleistung bei 20% Luftmangel. Die Explosionsgrenzen liegen bei 1,40 und 4,13 Volumenprozent Brenngas.

Tafel 2.

Explosionsgrenzen verschiedener Gase und Dämpfe.

Art des Gases	Prozentgehalt der Mischung an brennbarem Gase			Explosionsbereich erstreckt sich über Prozente der möglichen Gas-Luftmischungen	Selbstentzündung in Luft bei Atmosphärendruck Temp. °C
	Keine Explosion (untere Explosionsgrenze)	Explosionsbereich in 19 mm Rohr	Keine Explosion (obere Explosionsgrenze)		
Kohlenoxyd .	16,4	16,6 bis 74,8	75,1	58,4	—
Wasserstoff .	9,4	9,5 „ 66,3	66,5	57,0	580 bis 590
Wassergas .	12,3	12,5 „ 66,6	66,9	54,3	—
Azetylen . .	3,2	3,5 „ 52,2	52,4	49,0	406 bis 440
Leuchtgas	7,8	8,0 „ 19,0	19,2	11,2	600
Aethylen . .	4,0	4,2 „ 14,5	14,7	10,5	542 bis 547
Alkohol . .	3,9	4,0 „ 13,6	13,7	9,7	510
Methan . .	6,0	6,2 „ 12,7	12,9	6,7	650 bis 750
Aether . .	2,6	2,9 „ 7,5	7,9	5,0	400
Benzol . .	2,6	2,7 „ 6,3	6,7	3,9	520
Pentan . .	2,3	2,5 „ 4,8	5,0	2,5	—
Benzin . .	2,3	2,5 „ 4,8	5,0	2,5	415

e. Verbrennung von Gasen und Gasgemischen.

In der Tafel S. 473 sind aufser den eingangs erwähnten einfachen Gasen einige technisch wichtige Gasgemische aufgenommen; da die Zusammensetzung dieser Gase veränderlich ist, so können die Tafelwerte hier nur ungefähre Anhaltpunkte bieten.

Den Berechnungen sind folgende mittleren Raumverhältnisse zugrunde gelegt:

Leuchtgas:

$$0{,}1\,CO + 0{,}45\,H_2 + 0{,}35\,CH_4 + 0{,}04\,C_2H_4 + 0{,}03\,CO_2 + 0{,}03\,N_2,$$

Wassergas:

$$0{,}4\,CO + 0{,}5\,H_2 + 0{,}04\,CO_2 + 0{,}06\,N_2,$$

Generatorgas (Mischgas, Dowsongas, Kraftgas):

$$0{,}18\,H_2 + 0{,}24\,CO + 0{,}06\,CO_2 + 0{,}52\,N_2,$$

Gichtgas (Eisen-Hochofen):

$$0{,}03\,H_2 + 0{,}29\,CO + 0{,}08\,CO_2 + 0{,}60\,N_2.$$

*) Mitt. Forschungsarb. Heft 79. Herausg. v. V. d. I.

Digitized by Google

Häufig enthält Wassergas und Mischgas etwas CH_4, in diesem Falle steigt der Heizwert beträchtlich.

Wird 1 cbm eines Gases oder Gasgemisches mit L cbm Luft gemischt und bei unveränderlichem Rauminhalte verbrannt, so berechnet sich die Endtemperatur (t) aus folgender Gleichung:

$$H_u + t_0 \cdot \Sigma \left(V' [C_v]_0^{t_0} \right) = t \cdot \Sigma \left(V'' [C_v]_0^{t} \right)$$

oder für 1 Mol 24,4 $H_u + t_0 \cdot \Sigma \left(V' [\mu c_v]_0^{t_0} \right) = t \cdot \Sigma \left(V'' [\mu c_v]_0^{t} \right)$.

Die Lösung erfolgt am einfachsten durch vorläufige Annahme von t mit Hülfe der Tafel S. 400 und darauffolgende Wiederholung der Rechnung (Beispiel S. 475).

Bei Gasmaschinen sind stets noch Rückstände zu berücksichtigen.

Bei Verbrennung unter gleichbleibendem Drucke ist oben C_p und c_p statt C_v und c_v zu setzen.

Verbrennung von Gasen.

	Molekulargewicht μ	Dichte, bezogen auf Luft δ	Zur Verbrennung von 1 cbm nötiger Sauerstoff, cbm S	Zur Verbrennung von 1 cbm nötige Luft, cbm L	Raumverminderung b. d. Verbrennung v. 1 cbm Gas ΔV	Gebildetes Wasser f. 1 cbm Gas von 15° und 1 at in kg w	Oberer Heizwert f. 1 kg Gas h	Unterer Heizwert f. 1 kg Gas h_u	Oberer Heizwert f. 1 cbm Gas v. 15° u. 1 at H	Unterer Heizwert f. 1 cbm Gas v. 15° u. 1 at H_u
Kohlenoxyd CO	28	0,97	0,5	2,38	0,5	0	2440	2440	2800	2800
Wasserstoff H_2	2	0,07	0,5	2,38	0,5	0,74	34100	28700	2800	2360
Methan CH_4	16	0,554	2	9,52	0	1,47	13250	11900	8700	7820
Aethan C_2H_6	30	1,035	3,5	16,7	−0,5	2,21	12350	11300	15200	13900
Propan C_3H_8	44	1,52	5	23,8	−1	2,95	12000	11050	21700	19950
Butan C_4H_{10}	58	2,00	6,5	31,0	−1,5	3,69	11800	10900	28100	25900
Aethylen C_2H_4	28	0,965	3	14,3	0	1,47	12000	11250	13800	12920
Propylen C_3H_6	42	1,45	4,5	21,4	−0,5	2,21	11850	11100	20400	19100
Butylen C_4H_8	56	1,935	6	28,6	−1	2,95	11600	10870	26600	24850
Azetylen C_2H_2	26	0,90	2,5	11,9	0,5	0,74	12000	11600	12800	12360
Leuchtgas . .	12,58	0,434	1,10	5,21	0,275	0,91	9960	8900	5135	4590
Wassergas . .	15,66	0,54	0,45	2,15	0,45	0,369	3930	3580	2520	2300
Generatorgas .	24,25	0,84	0,21	1,00	0,21	0,133	1180	1100	1175	1095
Gichtgas . .	28,48	0,98	0,16	0,76	0,16	0,022	768	757	896	883

Digitized by Google

Endtemperatur (t) und Druckzunahme $\left(\frac{p}{p_0}\right)$ bei der Verbrennung von Gasen im geschlossenen Raume.

$\frac{H_u}{1+L}$ =	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	Generatorgas. $H_u = 1095$								
$t_0 = 0$	1315 5,49	1480 6,00	1640 6,48	1790 6,91	1940 7,30	2060 7,66	2180 7,96	2295 8,28	2405 8,52
100	1385 4,19	1545 4,55	1700 4,90	1850 5,21	1985 5,48	2115 5,73	2230 5,95	2345 6,15	2455 6,34
200	1450 3,44	1610 3,72	1765 3,98	1910 4,23	2040 4,43	2170 4,62	2285 4,79	2395 4,95	2505 5,08
300	1520 2,95	1680 3,18	1830 3,39	1970 3,58	2100 3,75	2225 3,91	2340 4,05	2450 4,17	2555 4,27
400	1590 2,62	1750 2,81	1895 2,98	2030 3,14	2160 3,28	2280 3,40	2395 3,51	2505 3,62	2605 3,71
500	1660 2,36	1815 2,53	1960 2,67	2095 2,80	2220 2,92	2235 3,02	2445 3,12	2555 3,21	2655 3,30

$\frac{H_u}{1+L}$ =	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	Leuchtgas. $H_u = 4590$								
$t_0 = 0$	1290 5,62	1460 6,22	1615 6,74	1760 7,25	1895 7,71	2025 8,14	2145 8,53	2260 8,91	2365 9,27
100	1365 4,31	1525 4,72	1675 5,10	1820 5,46	1955 5,79	2080 6,10	2195 6,38	2310 6,64	2415 6,90
200	1435 3,54	1595 3,86	1740 4,16	1880 4,43	2015 4,69	2135 4,92	2250 5,14	2360 5,33	2465 5,54
300	1505 3,05	1660 3,30	1805 3,54	1945 3,76	2075 3,97	2190 4,16	2305 4,34	2415 4,50	2515 4,66
400	1575 2,70	1730 2,91	1870 3,11	2005 3,29	2135 3,47	2250 3,63	2360 3,78	2470 3,92	2570 4,05
500	1650 2,44	1800 2,63	1940 2,79	2070 2,95	2195 3,10	2310 3,23	2420 3,36	2525 3,48	2620 3,59

Obere Zeile t. t_0 Anfangstemperatur,

Untere Zeile $\frac{p}{p_0}$. H_u Unterer Heizwert, L Luftmenge.

Die vorstehende Zahlentafel gibt ohne besondere Berücksichtigung der Rückstände die Endtemperaturen und Enddrücke für die Verbrennung von Leuchtgas und Generatorgas von der oben angenommenen mittleren Zusammensetzung. Für die spez. Wärme sind die folgenden Formeln von Langen benutzt:

Mittlere Molekularwärmen für konstanten Druck $[\mu c_p]_0^t$

für zweiatomige Gase $6{,}8 + 0{,}0006\,t$
„ Wasserdampf $7{,}9 + 0{,}00215\,t$
„ Kohlensäure $8{,}7 + 0{,}0026\,t$.

Digitized by Google

Die Tafel läfst ersehen, dafs der „Heizwert der Ladung" $\frac{H_u}{1+L}$ in erster Linie mafsgebend ist. Dafs Leuchtgas niedrigere Temperaturen, aber höhere Drücke ergibt wie Generatorgas, ist eine Folge der geringeren Raumverminderung, denn diese wirkt auf Temperatur und Druck gerade entgegengesetzt ein.

Zusammensetzung der Gase wie S. 472.

Als Beispiel sind im folgenden alle in Betracht kommenden Rechnungen für das **Leuchtgas** durchgeführt.

Bestandteile	R.-T. r	μ	μr	H_p	rH_p	Sauerstoff	
CO	0,10	28	2,80	2800	280	$\frac{1}{2}$	0,050
H_2	0,45	2	0,90	2800	1260	$\frac{1}{2}$	0,225
CH_4	0,35	16	5,60	8700	3045	2	0,700
C_2H_4	0,04	28	1,12	13800	550	3	0,120
CO_2	0,03	44	1,32	—	—	—	—
N_2	0,03	28	0,84	—	—	—	—
Summe	1,00	—	12,58	—	5135	—	1,095

Damit beträgt der Heizwert des Leuchtgases 5135 WE für 1 cbm bei 15° und 1 at.

Die Gaskonstante ist $R' = \frac{848}{12,58} = 67,4$. Das Gewicht von 1 cbm ist $\frac{12,58}{24,4} = 0,516$ kg.

Die Dichtigkeit in bezug auf Luft ist $\frac{12,58}{29} = 0,434$.

Zur Verbrennung ist 1,095 cbm Sauerstoff oder $\frac{1,095}{0,21} = 5,21$ cbm Luft nötig. Es sei angenommen, dafs dem Gase 6,5 cbm Luft beigemengt werden, dann ergeben sich folgende Verbrennungserzeugnisse in cbm:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kohlensäure} = 0,03 + 0,1 + 0,35 + 2 \cdot 0,04 = 0,560 \\ \text{Wasserdampf} = 0,45 + 2 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,04 = 1,230\end{array}\right\} = \Sigma(r'')$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Stickstoff und} \\ \text{Sauerstoff}\end{array}\right\} \quad 6,5 - 1,095 \underbrace{= 5,405}_{\text{Summe} = 7,225 \text{ cbm.}} \left.\begin{array}{l}{\scriptstyle 0,03} \\ \end{array}\right\} = 5,435 = L - S_{\min}$$

Die Raumverminderung beträgt mithin: $1 + 6,5 - 7,225 = 0,275$.

Die für 1 cbm Gas gebildete Wassermenge ist

$$W = 1,23 \cdot \frac{18}{24,4} = 0,91 \text{ kg},$$

daraus folgt der untere Heizwert des Gases

$$H_u = 5135 - 0,91 \cdot 600 = 4590 \text{ WE}.$$

Es sei nun die Temperatur und die Druckerhöhung zu bestimmen, welche eintreten, wenn das Gas-Luft-Gemisch ohne Wärmeverlust bei gleichem Rauminhalte verbrennt, und zwar unter der Annahme, dafs dem Gemische noch 1,5 cbm Rückstände beigemengt werden und dafs die Temperatur t_0 vor der Verbrennung 300° beträgt.

Nach Formel 8. 472 und mit Benutzung der Werte Tafel 8. 400 folgt zunächst der Wert $\Sigma\left(V'\left[\mu c_v\right]_0^{t_0}\right)$ vor der Verbrennung aus der folgenden Uebersicht:

Bestandteile	Menge, V'		$\left[\mu c_v\right]_0^{300}$	$V'\left[\mu c_v\right]_0^{300}$
Zweiatom. Gase[1])	$0,1 + 0,45 + 0,03 + 6,5 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 5,435 = 8,21$		5,00	41,05
CO_2	$0,03 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 0,56$	$= 0,145$	7,76	1,13
H_2O	$\frac{1,5}{7,225} \cdot 1,23$	$= 0,255$	6,16	1,57
CH_4		$= 0,35$	8,00	2,80
C_2H_4		$= 0,04$	10,70	0,43
		9,00		46,98

[1]) Die spez. Wärme des Wasserstoffes ist in diesem Beispiel der der übrigen zweiatomigen Gase gleichgesetzt.

Digitized by Google

Indem die Endtemperatur t zunächst 2000° geschätzt wird, ergibt sich nach der Verbrennung folgende Uebersicht:

Bestandteile	Menge, V''	$[\mu c_v]_0^{2000}$	$V''[\mu c_v]_0^{2000}$	$[\mu c_v]_0^{2150}$	$V''[\mu c_v]_0^{2150}$
Zweiatom. Gase	$5{,}435 + \frac{1{,}5}{7{,}225} \cdot 5{,}435 = 6{,}565$	5,70	37,40	5,76	37,90
CO_2	$0{,}56 + \frac{1{,}5}{7{,}225} \cdot 0{,}56 = 0{,}675$	10,29	6,93	10,41	7,03
H_2O	$1{,}23 + \frac{1{,}5}{7{,}225} \cdot 1{,}23 = 1{,}485$	8,27	12,30	8,67	12,89
	8,725		56,63		57,84

Wir erhalten nun in erster Annäherung:

$$t = \frac{H_u \cdot 24{,}4 + t_0 \Sigma\left(V' [\mu c_v]_0^{t_0}\right)}{\Sigma\left(V'' [\mu c_v]_0^{t}\right)} = \frac{4590 \cdot 24{,}4 + 300 \cdot 46{,}98}{56{,}63} = 2220°;$$

nehmen wir t rund 2150 und rechnen wiederholt (Uebersicht), so finden wir

$$t = \frac{4590 \cdot 24{,}4 + 300 \cdot 46{,}98}{57{,}84} = 2179 \text{ oder rd. } 2180°.$$

Die Druckerhöhung beträgt:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \cdot \frac{R''}{R'} = \frac{2453}{573} \cdot \frac{8{,}725}{9} = 4{,}18.$$

f. Von **flüssigen Brennstoffen** kommen hauptsächlich die Destillationserzeugnisse des Erdöls in Betracht. Alle sind Mischungen einer grofsen Anzahl von Kohlenwasserstoffen, und zwar hauptsächlich der Methanreihe C_nH_{2n+2}; sie unterscheiden sich wesentlich nur durch das spez. Gew. und die Flüchtigkeit (Siedepunkt), während die Zusammensetzung, der Heizwert, der Sauerstoffbedarf und die Verbrennungserzeugnisse nur wenig veränderlich sind.

Für Verbrennungsmaschinen werden am häufigsten Benzin und Petroleum (Leuchtöl) von den in der Zahlentafel S. 477 angenommenen

Oele für Dieselmaschinen.

	Spez. Gewicht bei 15°	Unterer Heizwert für 1 kg	Elementaranalyse H vH	C vH	$12 \cdot \frac{H}{C}$ vH
Gereinigtes Petroleum	0,879	10 610	14,20	85,10	2,00
Solaröl	0,849	10 100	13,30	85,67	1,86
Gasöl	0,865	10 000	12,50	84,60	1,77
Braunkohlenrohöl	0,908	9 800	12,42	85,64	1,74
Paraffinöl	0,926	9 750	11,63	85,98	1,55
Tegernsee-Rohöl	0,868	9 940	11,09	86,95	1,53
Anthracenöl	1,091	8 960	6,89	89,10	0,92
Kreosotöl	1,050	8 970	6,13	91,20	0,81

Digitized by Google

Flüssige Brennstoffe.

	Molekulargewicht	Spez. Gew. bei 15°	Siedetemperatur	Oberer Heizwert für 1 kg	Unterer Heizwert für 1 kg	Zur Verbrennung von 1 kg nötiger Sauerstoff in cbm von 15° und 1 at	Zur Verbrennung von 1 kg nötige Luftmenge in cbm von 15° und 1 at	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Kohlensäure in cbm von 15° und 1 at	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Wasserdampf in cbm von 15° und 1 at	Dasselbe in kg
	μ	γ	t_s	h	h_u	S_{min}	L_{min}	CO_2	H_2O	H_2O
Alkohol C_2H_6O	46	0,794	78,3	7100	6400	1,59	7,6	1,06	1,59	1,174
Spiritus 95 Gew.-Proz.		0,809	78,5	6740	6000	1,51	7,2	1,01	1,58	1,165
„ 90 „		0,823	78,7	6390	5630	1,43	6,8	0,956	1,57	1,157
„ 85 „		0,836	78,9	6030	5240	1,35	6,4	0,903	1,55	1,148
„ 80 „		0,849	79,2	5680	4860	1,27	6,1	0,850	1,54	1,139
„ 75 „		0,861	79,6	5320	4470	1,19	5,7	0,796	1,53	1,131
„ 70 „		0,873	80,0	4970	4080	1,11	5,3	0,743	1,52	1,122
Benzol C_6H_6	78	0,885	80,4	10000	9590	2,35	11,2	1,88	0,94	0,693
Naphthalin $C_{10}H_8$ (Schmelztemp. 80°)	128	0,977 (bei 80°) 1,152 (fest b. 15°)	218	9700	9370	2,29	10,9	1,91	0,76	0,563
Pentan C_5H_{12}	72	0,627	37	11750	10850	2,71	12,9	1,70	2,03	1,500
Hexan C_6H_{14}	86	0,658	69	11550	10670	2,70	12,85	1,705	1,99	1,465
Heptan C_7H_{16}	100	0,683	98	11520	10660	2,69	12,8	1,71	1,95	1,440
Benzin	—	0,69 ÷ 0,71	80 ÷ 220	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,71	1,95	1,44
Petroleum	—	0,79 ÷ 0,82	200 ÷ 250	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,73	1,87	1,38

Digitized by Google

mittleren Eigenschaften, für Dieselmaschinen Petroleum, Braun- und Steinkohlenteeröle verwendet. Der Kohlenstoffgehalt der gebräuchlichen Treiböle schwankt zwischen 85 bis 96 %. Der Wasserstoffgehalt schwankt in weiten Grenzen von etwa 7 % (Teeröle) aufwärts bis zu etwa 13,5 % (beste Gasöle). Nach Rieppel ist für die Brauchbarkeit eines Oeles der Wasserstoffgehalt der Elementaranalyse entscheidend.

Grenzwerte von Kraftölen.*)

	Deutsche Erdöle	Braunkohlenteeröle	Steinkohlenteeröle
Spezifisches Gewicht bei 15°	0,725 bis 0,941	0,820 bis 0,957	1,006 bis 1,110
Flammpunkt . . . . °C	unter — 15° bis 175	56 „ 116	66 „ 121
Brennpunkt . . . . . „	unter — 15° bis 203	71 „ 154	84 „ 160
Heizwert des Rohöles WE/kg	8928 bis 10362	9409 bis 10118	8845 „ 9125
Kohlenstoff . . . . . %	85,1 „ 86,8	85,4 „ 86,7	87,1 „ 91,4
Wasserstoff . . . . . „	11,6 „ 14,4	9,8 „ 12,6	6,0 „ 7,8
Sauerstoff und Stickstoff . „	0,0 „ 1,2	0,8 „ 3,2	1,4 „ 4,9
Schwefel . . . . . „	0,1 „ 1,2	0,4 „ 1,6	0,4 „ 0,9
Disponibler Wasserstoff auf 1000 Teile Kohlenstoff . . . . . Teile	133 „ 169	114 „ 141	62 „ 83

Selbstentzündungstemperaturen.

	nach Holm**)	nach Constam und Schläpfer	
		Platintiegel, Sauerstoffstrom	Platintiegel, Luftstrom
Gasöl . . . . °C	350	350	400 bis 460
Steinkohlenteeröl „	580	550	590 „ 650
Steinkohlenteer . „	500	480 bis 530	600 „ 630

Vergasung.

Generatorgas entsteht dadurch, dafs in einem Schachtofen (Generator) eine hohe Schicht glühender Kohle erhalten wird, durch die Luft und Wasserdampf geblasen werden. Die Kohle verbrennt gröfstenteils zu Kohlensäure, von der der überwiegende Teil wieder zu Kohlenoxyd reduziert wird.

Der eingeblasene Wasserdampf wird (meist nur teilweise) in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzt. Der unzersetzte Teil erhöht den Feuchtigkeitsgehalt des Gases. Ist dieser während der Verbrennung noch im Gase

*) Constam u. Schläpfer, Z. d. V. d. I. 1913 S. 1489.
**) Z. f. angew. Chemie 1913 S. 273.

Digitized by Google

erhalten, so erniedrigen sich die erreichbaren Verbrennungstemperaturen. Die Anwendung überhitzten Dampfes und Vorwärmen der eingeblasenen Luft ist vorteilhaft.

Die Gröfse des Wasserdampfzusatzes richtet sich nach der Beschaffenheit des zu vergasenden Brennstoffes. Bei Vergasung von reinem Kohlenstoffe kann man etwa 0,220 kg, bei Steinkohle 0,180 kg Wasserdampf auf 1 cbm Luft rechnen.

Bei gut geleiteter Vergasung findet man unter normalen Verhältnissen und bei guten Brennstoffen einen um 25 % schwankenden Kohlenoxydgehalt. Als höchste Werte kommen 31 bis 32 % als Folge einer sehr heifsen Vergasung bei geringem oder keinem Wasserzusatze vor.

Die folgende Zahlentafel gibt die mittlere Gaszusammensetzung verschiedener Generatoren.

	Vergaster Brennstoff Heizwert für 1 kg	Gaszusammensetzung					Heizwert des Gases für 1 cbm
		CO_2	CO	H_2	CH_4	N_2	
Generator ohne Wasserdampf	Steinkohle 7950	0,053	0,237	0,065	0,019	0,626	1060
Generator mit Wasserdampf	Anthrazit 7800	0,072	0,268	0,184	0,006	0,470	1345
Wassergas	Koks 7000	0,030	0,445	0,489	0,004	0,032	2660
Hochofengas		0,075	0,312	0,024	0,001	0,588	1030

Das erzeugte Gas*) besteht aus CO, H_2, CO_2 und N_2, wobei die chemischen Zeichen zugleich die Raumteile der Stoffe in dem erzeugten Gase bezeichnen sollen. Das Verhältnis des Heizwertes der erzeugten Gasmenge zu dem Heizwerte der gleichzeitig verbrannten Kohle bezeichnen wir als den Wirkungsgrad (η) des Generators. Dann gelten folgende Beziehungen für die Raumteile:

$$H_2 + CO + CO_2 + N_2 = 1; \quad \frac{21}{79} N_2 = 0{,}5\,CO + CO_2 - 0{,}5\,H_2;$$

$$\eta\,(CO + CO_2) = 0{,}7\,(H_2 + CO),$$

und daraus folgen für die Zusammensetzung des Gases bei angenommenem CO_2-Gehalte:

$$H_2 + CO = \frac{8}{7}\,\frac{\eta}{3-\eta}\,(1 - CO_2); \quad CO + CO_2 = \frac{0{,}8}{3-\eta}\,(1 - CO_2);$$

$$N_2 = \frac{15}{7}\,\frac{1{,}4-\eta}{3-\eta}\,(1 - CO_2); \quad H_2 = \frac{8}{7}\,\frac{\eta - 0{,}7}{3-\eta}\,(1 - CO_2) + CO_2.$$

*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 532

Digitized by Google

Es sei

$\mathfrak{H}$ der obere Heizwert für 1 cbm Gas bei 15° und 1 at,
$\mathfrak{L}$ die Luftmenge in cbm für 1 cbm Gas,
$\mathfrak{K}$ die Kohlenstoffmenge in kg für 1 cbm Gas von 15° und 1 at,
$\mathfrak{W}$ die zersetzte Wassermenge in kg für 1 cbm Gas von 15° und 1 at;

dann gilt:

$$\mathfrak{H} = 2800\,(H_2 + CO); \quad \mathfrak{L} = \frac{N_2}{0{,}79}; \quad \mathfrak{K} = \frac{12}{24{,}4}\,(CO + CO_2); \quad \mathfrak{W} = \frac{18}{24{,}4}\,H_2.$$

Das Verhältnis von Luft zu Kohlenstoff ist $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}} = 6{,}9\,(1{,}4 - \eta)$.

Führt man in den Generator keinen Wasserdampf, sondern nur Luft ein, so erhält man **Luftgas**, das aus CO, N_2 und CO_2 besteht, und zwar ist:

$$CO = 1{,}652\,(0{,}21 - CO_2), \qquad N_2 = 0{,}652\,(1 + CO_2),$$

$$\eta = 0{,}7\,\frac{0{,}21 - CO_2}{0{,}21 - 0{,}395\,CO_2}.$$

Wassergas entsteht, wenn nur Wasserdampf in den Generator eingeblasen wird; es besteht aus H_2 und CO und meist etwas CO_2:

Es wird $\eta = 1{,}4$, d. h. dem Generator mufs noch eine Wärmemenge von 40 % vom Heizwerte des verbrannten Kohlenstoffes zugeführt werden. Dies geschieht durch **„Warmblasen"** mittels des Luftgasprozesses bei abwechselndem Betriebe.

Die Zusammensetzung des Wassergases wird:

$$H_2 = 0{,}5\,(1 + CO_2), \qquad CO = 0{,}5\,(1 - 3\,CO_2).$$

$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{W}$ berechnen sich auch in diesen Sonderfällen nach den obenstehenden Formeln.

Digitized by Google

4. ABSCHNITT.

Festigkeitslehre.

I. Allgemeines und Versuchswerte.

A. Erklärungen und allgemeine Gesetze.*)

Die Formänderung, die ein würfelförmiges Körperteilchen unter der Einwirkung äufserer Kräfte erfährt, besteht im allgemeinen aus **Längenänderungen** und aus **Winkeländerungen.** Den ersteren entsprechen **Normalspannungen** σ, den letzteren **Schubspannungen** τ in den Flächen des Körperteilchens.

a. Längenänderungen und Normalspannungen.

1. Wird ein gerader zylindrischer Stab von der Länge l und vom Durchmesser d an seinen Endflächen durch zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete, gleichmäfsig über die Endflächen verteilte Zugkräfte P beansprucht, so erfolgt

1. eine Vergröfserung der Länge l um λ, also auf $l + \lambda$,
2. eine Verminderung des Durchmessers d um δ, also auf $d - \delta$.

Das Verhältnis $\varepsilon = \dfrac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \dfrac{\lambda}{l}$ heifst **Dehnung.**

Das Verhältnis $\varepsilon_q = \dfrac{\delta}{d} = \dfrac{\varepsilon}{m}$ heifst **Querzusammenziehung.**

Der **Wert** $m = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \dfrac{\text{Dehnung}}{\text{Querzusammenziehung}}$ ist vom Stoffe des Stabes abhängig und liegt für isotrope, d. h. nach allen Richtungen hin physikalisch sich gleichartig verhaltende Körper zwischen 3 und 4; für Metalle ist $m = {}^{10}/_{3}$.**)

2. Der Dehnung $\varepsilon = \lambda : l$ entspricht, wenn F den Stabquerschnitt bedeutet, die **Zugspannung** (Normalspannung) $\sigma = P : F$. (Die Spannung σ wird stets auf den ursprünglichen Stabquerschnitt bezogen.) Das Verhältnis

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E}$$

*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 11. Aufl., Stuttgart 1913.

**) Für Flufseisen liegt nach Versuchen von W. Krüger (Z. d. V. d. I. 1909 S. 1453) m zwischen 3,3 und 3,5. Nach R. Plank (Z. d. V. d. I. 1911 S. 1479) nimmt m mit der Temperatur (für Eisen sehr langsam) ab und nähert sich gegen die Schmelztemperatur dem unteren Grenzwerte 2, der für Flüssigkeiten gilt. Daselbst finden sich auch Werte von m für andere Stoffe.

Digitized by Google

heifst die **Dehnungszahl** (in qcm/kg) und sein umgekehrter Wert $E = 1 : \alpha$ das **Elastizitätsmafs** (in kg/qcm). Es ist

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{oder} \quad \lambda = \alpha l \sigma, \quad \text{ferner} \quad \alpha = \frac{F\lambda}{Pl} \quad \text{und} \quad E = \frac{Pl}{F\lambda}.$$

Die Dehnungszahl α eines Stoffes ist demnach die Verlängerung in cm, die ein aus dem Stoffe bestehender Stab von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt durch 1 kg Belastung erfährt, oder auch die Zahl, mit der man die Spannung σ multiplizieren mufs, um die Dehnung zu erhalten, oder kurz: die Zunahme der Einheit der Länge für das Kilogramm Spannung.*)

Im allgemeinen ist α (oder E) abhängig von der Spannung σ. Für manche Stoffe (z. B. für Schweifseisen, Flufseisen, Stahl, Kupfer, Aluminium, Holz) ist jedoch α innerhalb gewisser Spannungsgrenzen nahezu unveränderlich; alsdann sind also die Dehnungen ε den Spannungen σ proportional, und es ist $\varepsilon = \alpha\sigma$ **(Hookesches Gesetz).** Die Spannung σ_p, bis zu der diese Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung stattfindet, heifst **Proportionalitätsgrenze.****)

Die meisten Baustoffe haben keine Proportionalitätsgrenze. Für sie — mit Ausnahme von Marmor und Gummi sowie Gufseisen bei einer gewissen Art des Belastungswechsels — gilt bis zur Streckgrenze (σ_f) nach C. Bach und W. Schüle mit hinreichender Genauigkeit das allgemeine Gesetz der elastischen Dehnungen

$$= \alpha_0 \sigma^n \quad \textbf{(Potenzgesetz).}$$

Hierin sind α_0 und n für jeden Stoff unveränderlich; für Gufseisen, Kupfer, Zinkgufs, Granit, Sandstein, Zement, Zementmörtel und Béton ist $n > 1$, und die Dehnungen wachsen rascher als die Spannungen; für Leder und Hanfseile ist $n < 1$.***)

In Abb. 1 sind, dem Verhalten eines Stabes bei allmählich wachsender Zugbeanspruchung entsprechend, die Spannungen σ als Funktion der Dehnungen ε dargestellt. OZ_0 = Achse der Dehnungen, OB_1 = Achse der zugehörigen Spannungen, Linie $OPSBZ$ = Spannungslinie. Dabei ist eine Proportionalitätsgrenze P vorausgesetzt, mithin OP eine Gerade.

Die Dehnungszahl α_σ ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der im Punkte (ε, σ) an die Spannungslinie gezogenen Tangente gegen die σ-Achse.

---

*) Die Dehnungszahl α läfst sich mit der Wärme-Ausdehnungszahl α (S. 369) vergleichen, die die Zunahme der Einheit der Länge eines Stabes für 1 Grad Temperaturerhöhung bedeutet.

**) Bei gleichen Spannungsänderungen gilt hierbei jede neue Dehnung praktisch als ebenso grofs wie die vorausgegangenen, solange sie von deren Mittelwert um nicht mehr als 0,0005 % der beobachteten Dehnung abweicht (Angabe von Gebr. Böhler & Co. A.-G.)

***) Für **Kautschuk** ist nach A. Imbert (Civ.-Ing. 1893 S. 120)

$$\varepsilon = e^{m\sigma} - 1, \quad \text{also} \quad \alpha_\sigma = m e^{m\sigma}.$$

Bezeichnet α_σ den Wert der veränderlichen Dehnungszahl bei der Spannung σ, so ist nach dem Potenzgesetze

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n = \int_0^\sigma \alpha_\sigma \, d\sigma, \quad \text{also} \quad \alpha_0 n \sigma^{n-1} \, d\sigma = \alpha_\sigma \, d\sigma. \qquad \alpha_\sigma = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = (\alpha_0 n)\, \sigma^{n-1}.$$

Für den spannungslosen Zustand ($\sigma = 0$) würde hiernach $\alpha_\sigma = 0$, $E = \infty$ sein, falls $n > 1$ (Gufseisen usw.), und $\alpha_\sigma = \infty$, $E = 0$, falls $n < 1$ (Leder usw.).

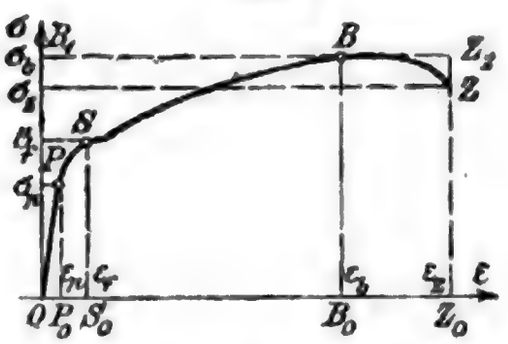
Digitized by Google

Streck- oder **Fliefsgrenze** σ_f (in kg/qcm) ist die oberhalb von σ_p liegende Spannung, bei der für manche Stoffe eine besonders rasche und bleibende Dehnung (ein Strecken, Fliefsen) eintritt (S in Abb. 1).

Obere Streckgrenze ist die Spannung, bei der das Strecken beginnt, untere Streckgrenze die kleinste Spannung, auf die die Belastung während des Streckens sinkt. Auch bei Stoffen, die keine scharf ausgeprägte Streckgrenze besitzen, spricht man (nach Vereinbarg. d. Internat. Verbandes f. d. Materialprüf. d. Technik) von einer solchen, u. zw. versteht man darunter die Spannung, bei der die bleibende Dehnung λ_2 (s. u. 8.) den Wert von 0,2 bis 0,5 % erreicht. Fried. Krupp nimmt (insbes. bei Stahl) 0,2 % an.

Mit wachsender Belastung tritt unter Zunahme der Dehnung bei B die **Höchstspannung** σ_b ein, die man gewöhnlich gleich der **Zugfestigkeit** K_z anzunehmen pflegt. Die Zugfestigkeit (Bruchspannung) K_z (in kg/qcm) ist indessen genauer die (auf den ursprünglichen Stabquerschnitt F bezogene) Spannung σ_z, bei der mit fortgesetzter Dehnung der Bruch des Stabes erfolgt (bei Z, Abb. 1). Als zugehörige Dehnung zu K_z gilt allgemein ε_z (statt des schwer mefsbaren ε_b).

Abb. 1.



Bei zerrissenen Stäben (von der ursprünglichen Länge l und dem Querschnitte F) ist noch festzustellen: die Länge l_b nach erfolgtem Bruch und der Querschnitt F_b an der Bruchstelle. Man nennt

$$\varphi = 100\,\frac{l_b - l}{l}$$ die Dehnung und

$$\psi = 100\,\frac{F - F_b}{F}$$ die Querzusammenziehung (**Einschnürung**)

des zerrissenen Stabes, ausgedrückt in Prozent der ursprünglichen Länge bzw. des ursprünglichen Querschnittes. ψ ist ein Mafs für die **Zähigkeit** des Stoffes. (Ueber die Abhängigkeit der zu wählenden Länge l vom Stabquerschnitt F s. 5. Abschn., Stoffkunde.)

8. Wird der um λ gedehnte Stab entlastet, so verliert er die erlittene Formänderung nicht wieder vollständig; ist λ_1 die verschwindende Längenänderung, die sog. **elastische** (federnde) **Dehnung**, so ergibt sich die **bleibende** Dehnung $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$.

Für genügend kleine Belastungen sind die bleibenden Dehnungen λ_2 gleich null oder doch verschwindend klein. Die Spannung σ_e, bis zu der die bleibende Dehnung λ_2 nahezu $= 0$, der Stab also nahezu vollkommen elastisch ist, nach Festsetzung des Internat. Material-Prüfungskongresses zu Brüssel 1906 die Spannung, bei der λ_2 den Wert 0,001 % erreicht,*) heifst die **Elastizitätsgrenze.**

Bei Metallen wird durch Hämmern, Walzen, Ziehen (bei Stahl auch durch Härten und bei Gufseisen auch durch verminderten P- oder C-Gehalt) die Elastizitätsgrenze σ_e er-

*) Nach-B. Kirsch ist 0,001 % viel zu klein, schon deshalb, weil die Spannungen sich nur mit 0,01 % Genauigkeit bestimmen lassen; er empfiehlt 0,01 %. Fried. Krupp setzt insbesondere für Stahl stets die Streckgrenze σ_f (s. oben) statt der Elastizitätsgrenze σ_e; beide fallen übrigens bei den meisten Stahlsorten nahe zusammen. Die Proportionalitätsgrenze σ_p wird nur in besonderen Fällen bestimmt.

Digitized by Google

weitert, in geringem Maße auch die Zugfestigkeit K_z vergrößert, die Dehnbarkeit (die bleibende Formänderung λ_1) aber vermindert. — Ausglühen bewirkt das Gegenteil.

Ein Stoff ist um so elastischer, je größer die elastische (federnde) Längenänderung λ_1 im Vergleich zur ganzen Längenänderung λ ist. Das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda$ dient daher als Maß für die **Vollkommenheit der Elastizität** (bei einer bestimmten Belastung). Für vollkommene Elastizität ist $\lambda_1 : \lambda = 1$; sonst ist das Verhältnis ein echter Bruch.

Die **Größe der Elastizität** α_1 ist die Federung der Längeneinheit für die Einheit der Spannung, also $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{l\sigma}$.

4. Die durch eine bestimmte Belastung oder Entlastung zu erzielende Formänderung bedarf je nach dem Stoff einer kürzeren oder längeren Zeit, während deren die **elastische Nachwirkung** eintritt.

Die Formänderungen und ebenso die Festigkeit sind daher abhängig von der Zeit, innerhalb deren die Belastung von 0 bis zum Größtwerte wächst, und abhängig von der Dauer der vollen Belastung.

Eine besonders starke elastische Nachwirkung zeigt das Leder.

5. Die Formänderungen und die Festigkeit sind meist in hohem Grade abhängig von der **Temperatur.** (Weiteres hierüber S. 486 ff.)

6. Vorstehende Erklärungen gelten sinngemäß auch für eine Druckbeanspruchung des Stabes.

Die **Druckspannung** σ bewirkt eine Verkürzung ε der Stablänge l um λ ($\varepsilon = \lambda : l$) und eine Vergrößerung des Durchmessers, Querdehnung (Querausbauchung) $\varepsilon_q = \varepsilon : m$. An Stelle der Streckgrenze σ_f tritt hier die **Quetschgrenze,** bei der der Stoff nach der Seite abfließt, ohne daß eine Zerstörung erfolgt.

Die **Druckfestigkeit** K (in kg/qcm), d. i. die Spannung, bei der der gedrückte Körper zerstört wird, nimmt mit zunehmender Stablänge ab.

Nach Bauschinger ist für Steine

$$K = \left(a + b\,\frac{\sqrt{F}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{F}}{1/4\,u}}.$$

worin F der Querschnitt des gedrückten Prismas, h seine Höhe, u der Umfang seines Querschnittes, a und b zwei nur von der Stoffbeschaffenheit abhängige Zahlenwerte sind.

Die **Würfelfestigkeit** ist die Druckfestigkeit des in Form eines Würfels gedrückten Körpers.

Härtezahl, das Ergebnis der Brinellschen Kugeldruckprobe, ist der Quotient aus der Kraft, mit der eine Hartstahlkugel in den Stoff gedrückt wird, geteilt durch die Oberfläche des erzeugten Eindrucks in qmm.

7. Arbeit der Längenänderung. Die Arbeit A, die zur Formänderung von 1 ccm eines prismatischen Stabes bis zu dessen Zerreißen (Zerdrücken) erforderlich ist, heißt das **Arbeitsvermögen** des Stoffes und wird dargestellt durch die Fläche $OPSBZZ_0O$ in Abb. 1; es ist (in cmkg/ccm):

$$A = \xi\sigma_b\,\varepsilon_z$$

worin $\sigma_b\,\varepsilon_z$ das Rechteck $OB_1Z_1Z_0O$ aus σ_b und ε_z und ξ (< 1) den Völligkeitsgrad bedeutet.

Wird ein Stab durch eine von null bis P stetig wachsende, an dem einen Stabende angreifende Kraft gedehnt oder gedrückt, wobei in dem um x cm von der Endfläche abstehenden Querschnitt F die Normalspannung σ entsteht, so ist allgemein die zur Erzeugung der Formänderung aufgewendete Arbeit (in cmkg)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2\,dx}{EF} = \frac{1}{2}\int_0^l \alpha_\sigma\sigma^2 F\,dx.$$

Digitized by Google

Insbesondere für den prismatischen Stab vom Rauminhalt $Fl = V$ (in ccm) wird innerhalb der Proportionalitätsgrenze die Arbeit der Formänderung

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} Fl = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{P}{2} \frac{\sigma}{E} l = \frac{1}{2} P\lambda,$$

wenn λ die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes bedeutet.

Besteht, wie unter 3. ausgeführt, λ aus einer elastischen (federnden) Verlängerung λ_1 und einer bleibenden Verlängerung λ_2, so ist nach F. Grashof die Arbeit der Längenänderung $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ für den prismatischen Stab

$$A = P(1/2\,\lambda_1 + \vartheta\,\lambda_2),$$

worin ϑ zwischen 0,75 und 1 liegt.

b. Winkeländerungen und Schubspannungen.

1. Aendern unter der Einwirkung einer äufseren Kraft zwei ursprünglich winkelrecht aufeinander stehende Flächenteilchen eines Körpers ihren rechten Winkel um γ (in Bogenmafs gemessen), so ist die Aenderung γ auch gleich der Strecke, um die sich zwei um 1 voneinander abstehende parallele Flächenteilchen gegeneinander verschoben haben. Die **Schiebung** oder Winkeländerung γ ist stets die Folge einer paarweise auftretenden **Schubspannung** τ in den beiden winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen.

Das Verhältnis $\frac{\text{Schiebung}}{\text{Schubspannung}} = \frac{\gamma}{\tau} = \beta = \frac{1}{G}$

heifst die **Schubzahl** (in qcm/kg) und der umgekehrte Wert $G = 1 : \beta$ das **Gleitmafs** oder das Schubelastizitätsmafs (in kg/qcm).

Die Schubzahl β ist demnach die Strecke in cm, um die sich zwei um 1 cm voneinander abstehende Flächenteilchen unter der Einwirkung der Schubspannung von 1 kg/qcm gegeneinander verschieben, oder der in Bogenmafs gemessene Winkel, um den sich der rechte Winkel zweier ursprünglich winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen bei 1 kg/qcm Schubspannung ändert.

2. Zwischen der Dehnungszahl α und der Schubzahl β sowie zwischen dem Elastizitätsmafs E und dem Gleitmafs G bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\beta = \frac{2(m+1)}{m} \alpha \quad \text{und} \quad G = \frac{m}{2(m+1)} E,$$

daher für $m = 10/3$ (S. 481):

$$\beta = 2{,}6\,\alpha \quad \text{und} \quad G = 5/13\,E = 0{,}385\,E.$$

3. **Schubfestigkeit** K_s (in kg/qcm) ist die Schubspannung, bei der sich zwei gegeneinander verschobene Querschnitt-Ebenen eines Stabes trennen ($K_s = \mu_1 K_z$).

τ_p (in kg/qcm) ist die Schubspannung, die der Proportionalitätsgrenze σ_p (S. 482) entspricht.

Lediglich praktische Bedeutung haben: die **Biegungsfestigkeit** $K_b = \mu_0 K_z$ (in kg/qcm) als die rechnungsmäfsige gröfste Normalspannung, bei der der Bruch eines gebogenen, und die **Drehungsfestigkeit** K_d (in kg/qcm) als die rechnungsmäfsige gröfste Schubspannung, bei der der Bruch eines gedrehten Körpers eintritt.

Digitized by Google

c. Zulässige Spannung und Sicherheit gegen Bruch.

Die **zulässige Spannung** (k_z für Zug, k für Druck, k_b für Biegung, k_s für Schub, k_d für Drehung) ist die Spannung, bis zu der ein Körper durch äufsere Kräfte auf eine der verschiedenen Arten der Festigkeit beansprucht werden darf. Die zulässige Spannung liegt gewöhnlich unterhalb der Proportionalitätsgrenze und der Elastizitätsgrenze. — Weiteres S. 502 ff.

Die **Sicherheit gegen Bruch** $\mathfrak{S}$ ist das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Spannung; für Zugbeanspruchungen ist also die Sicherheit $\mathfrak{S} = K_z : k_z$, für Druckbeanspruchungen $\mathfrak{S} = K : k$ usw. Man spricht von einer $\mathfrak{S}$-fachen Sicherheit gegen Bruch.

B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen.

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf **kg** und **qcm.** — Weitere Angaben über einzelne Baustoffe s. 5. Abschn., Stoffkunde, u. 6. Abschn., Maschinenteile.

a. Eisen und Stahl.

Werte von E, G, K_z, K, A s. die Tafeln S. 487 u. 488 ff.

Scherfestigkeit $K_s = \mu_1 K_z$. Gufseisen $\mu_1 = 1{,}02$ bis 1,17, i. M. $= 1{,}10$; Schweifseisen in Stäben $\perp$ z. F. $\mu_1 = 0{,}78$ bis 0,82, in Blechen $\mu_1 = 0{,}87$ längs, $\mu_1 = 0{,}84$ quer; für Flufseisen in Stäben $\perp$ z. F. $\mu_1 = 0{,}84$ bis 0,87.

Anforderungen an die Festigkeit, Dehnung und Einschnürung von Eisen und Stahl mit Rücksicht auf den Verwendungszweck des Metalles s. ferner 5. Abschn., Stoffkunde, u. 6. Abschn., Maschinenteile.

Einfluss der Temperatur auf die Festigkeit. Für **Schweifseisen** ist

f. d. Temperatur	$t =$	100°	200°	300°	400°	500°	600°	700°	800°
die Zugfestigkeit	$=$	104	112	116	96	76	42	25	15

in Prozent der Zugfestigkeit K_z bei $t = +20°$.

Für **Flufseisen** ist nach Versuchen von Martens und Rauh,*) wobei

im angelieferten Zustande: $K_z = 4100$, $\varphi = 26{,}9\ \%$, $\psi = 48{,}3\ \%$,
geglüht . . . . . $K_z = 3850$, $\varphi = 30{,}4\ \%$, $\psi = 58{,}6\ \%$,

für die Temperatur . . $t =$	$-20°$	$+20°$	100°	200°	300°	400°	500°	600°
Zugfestigkeit . . . $K_z =$	4100	3850	3950	5100	4750	3300	1900	1070
Elastizitätsmafs . $E : 1000 =$	2070	2070	2010	1950	1880	1790	1510	1340
Dehnung . . . . . $\varphi =$	37	37	22	19	23	45	66	99
Einschnürung . . . . $\psi =$	57	58	51	41	23	56	78	90,5

$K_{z\,min} = 3800$ für $t = 50°$; $K_{z\,max} = 5150$ für $t = 240°$; $\varphi_{min} = 19\ \%$ für $t = 160°$; $\psi_{min} = 23\ \%$ für $t = 300°$ (**Blaubrüchigkeit** des Flufseisens). (Fortsetzung auf S. 492.)

*) Mitteilungen aus den Königl. Techn. Versuchsanstalten zu Berlin, 1890 Heft IV S. 159 ff.; ferner A. Ledebur, Z. d. V. d. I. 1896 S. 565 ff. Weitere Versuche von C. Bach, Z. d. V. d. I. 1904 S. 1300.

Digitized by Google

(E, G, σ_p, σ_f in kg/qcm gelten für Zug und Druck.)

Eisensorte	Elastizitätsmafs $E = \frac{1}{\alpha}$	Gleitmafs $G = \frac{1}{\beta}$	Proportionalitätsgrenze σ_p	Streck- bzw. Quetschgrenze σ_f	Festigkeit für Zug K_z	Festigkeit für Druck K	Arbeitsvermögen A	Bemerkungen
Schweifseisen, ∥ zur Sehnenrichtung	2 000 000	770 000	1300 und mehr[4])	1800 und mehr	3300 bis 4000[1])	σ_f mafsgebd.	200 bis 700	[1]) Gilt für **Schweifseisen** ∥ zur Sehnenrichtung; f. Schweifseisen ⊥ zur Sehnenrichtung ist $K_z = 2800$ bis 3500.
Flufseisen	2 150 000	830 000	1800 und mehr[4])	2000 und mehr	3400 bis 5000	σ_f mafsgebd.	600 bis 800	[2]) Nach Stribeck ist E nahezu unabhängig von dem Grade des Härtens (Z. d. V. d. I. 1901 S. 77); spätere Versuche mit Chromstahl zeigten gröfsere Zunahme von $1 : E$ mit der Härtung (Z. d. V. d. I. 1907 S. 1445).
Flufsstahl	2 200 000	850 000	2500 bis 6000	3000 u. mehr; härterer Stoff ohne Streckgrenze	5000 bis 20 000	wenn weich, so ist σ_f mafsgebend; wenn hart, so $K \geqq K_z$	Zäher Stahl 800 u. mehr	
Federstahl, ungehärtet	2 200 000	850 000	5000 u. mehr	.	bis 10 000 und mehr	.	.	[3]) S. 493.
„ gehärtet	2 200 000[2])	850 000	7500 u. mehr	.	bis 17 000	.	.	[4]) Ueber σ_e S. 511.
Nickelstahl für Brücken[5]) . . . . (Deutschl. 2 bis 2,5 % Ni) (Amerika > 3,25 % Ni)	.		$q = 20\,\%$[4]) $\psi = 40$ „	3800	5600 bis 6700	.	.	**Werte des Völligkeitsgrades ξ.** ($A = \xi K_z \frac{q}{100}$, S. 484).
Stahlgufs[3]) . . .	2 150 000	830 000	2000 u. mehr	2100 u. mehr	3500 bis 7000 u. mehr	wie bei Flufsstahl	Zäher Stahlgufs 700 u. mehr	Schweifseisen 0,7 bis 0,8; Flufseisen, zähes, 0,63; Flufsstahl (für Maschinenteile) 0,6 bis 0,75; Stahlgufs, zäher, 0,7.
Gufseisen	750 000 bis 1 050 000	290 000 bis 400 000	σ_p und σ_f nicht vorhanden. Für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{1\,250\,000}\,\sigma^{1,1}$; für Druck: $\varepsilon = \frac{1}{1\,180\,000}\,\sigma^{1,06}$.		1200 bis 3200	7000 bis 8500	8 bis 14	[5]) S. u. a. Eisenbau 1911 S. 161.

Digitized by Google

Hochwertige Spezialstahle, insbesondere für den Kraftwagen- und Luftschiffbau.

Die Werte von K_z und σ_f sind hier ausnahmsweise in kg/qmm angegeben.

(Die eingeklammerten Zahlen bedeuten gewährleistete Mindestwerte.)

Marke	Nähere Bezeichnung	Zugfestigkeit K_z	Streckgrenze σ_f (S. 483)	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Verwendungszweck und Bemerkungen
a) Fried. Krupp A.-G., Essen (Ruhr).						
1. Kohlenstoffstahl.						
A 7 J	Automobilstahl	54 bis 58 (50)	33 bis 37	30 (28)	68	Achsen, Achsschenkel, Pleuelstangen, Kurbelachsen, Wellen usw. von mäfsiger Beanspruchung
A 9 J	„	63 „ 66 (60)	36 „ 40	26 bis 28 (22)	63 bis 65	
A 12 P	„ schweifsbar . . .	63 bis 71	28 „ 32	23 bis 24	40 „ 41	
C 46 O	Spezialstahl	81 bis 87 (70)	62 bis 66 (50)	20 (15)	59 „ 62	Wie vor, jedoch bei hoher Beanspruchung: C 46 O u. F 48 O besonders für Kurbelachsen
B 46 J	„	73 „ 81 (70)	46 „ 57 (43)	22 bis 26 (18)	51 „ 56	
F 48 O	„	88 „ 95 (80)	74 „ 80 (60)	18 „ 20 (14)	59 „ 62	
B 56 J	„ für Oelhärtung geglüht . . .	86 bis 90	50 bis 55	18 bis 22	49 „ 53	Zahnräder, die grofsem Verschleifs unterliegen, aber nicht an der Oberfläche gehärtet werden sollen
	„ für Oelhärtung in Oel gehärtet	94 „ 102	57 „ 67	15 „ 19	41 „ 50	
A 4 J	Automobil-Einsatzstahl geglüht . . .	47 bis 49 (44 bis 50)	30 „ 33	33 „ 35 (28)	69 „ 72	Einsatzstahl für mäfsige Beanspruchung (Zahnräder, Achsschenkel, Steuerungsteile)
	Automobil-Einsatzstahl in Wasser gehärtet	52 bis 67	38 „ 40	19 bis 27	50 „ 72	
A 2 O	dgl. geglüht	40 bis 43 (37 bis 44)	22 „ 25	38 bis 41 (35)	72 „ 75	
	dgl. in Wasser gehärtet	54 bis 59	35 „ 40	25 bis 30	61 „ 66	
B 76 M	Spezialfederstahl geglüht	83 „ 96	52 „ 58	18 „ 20	37 „ 39	Federn für Lastwagen
	Spezialfederstahl in Wasser gehärtet	140 bis 158 (140)	127 bis 143 (120)	7 bis 9 (5)	32 „ 42	
F 64 D	dgl. geglüht	115	—	7.5	—	Federn für Touren- u. Rennwagen
	dgl. in Wasser gehärtet	175 bis 180	$\sigma_e = 145$	3.5	—	
2. Nickelstahl.						
E 120 O	Nickel-Einsatzstahl, geglüht . .	57 bis 59 (52 bis 60)	42 bis 49 (38)	30 (25)	73 bis 75	Einsatzstahl für hohe Beanspruchung, bei besonders zähem Kern (Zahnräder, Achsschenkel, Steuerungsteile)
	„ in Wasser gehärtet	76 bis 79	60	19 bis 21	57	
E 112 O	„ geglüht	48 bis 52 (45 bis 55)	35 bis 38 (32)	30 bis 25 (26)	72 bis 75	
	„ in Wasser gehärtet	68 bis 71	50	16 bis 24	62	

Digitized by Google

Marke	Nähere Bezeichnung	Zugfestigkeit K_z	Streckgrenze σ_f (S. 483)	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Verwendungszweck und Bemerkungen
	3. Chrom-Nickel-Stahl.					
E F 60 O	. . . . .	85 bis 92 (80)	73 bis 82 (70)	20 (18)	66 bis 63	Achsen, Kurbelachsen, Lenkvorrichtungen, Räder, Wellen, Pleuelstangen, Kolbenstangen u. dgl.
	in Oel gehärtet und angelassen .	112 bis 164	106 bis 156	13 bis 8	56 „ 40	
E F 34 O	. . . . .	92 bis 96 (85)	73 bis 80 (70)	20 (16)	65 „ 63	Kurbelachsen
E F 31 O	. . . . .	78 „ 86 (70)	61 „ 71 (60)	22 bis 20 (18)	72 „ 68	Wie E F 60 O
E F 28 O	. . . . .	63 „ 68 (60)	48 „ 53 (45)	24 (20)	75 „ 70	Teile von geringerer Beanspruchung, aber von zähestem Material
E F 58 O	für Einsatzhärtung, geglüht . .	63 „ 70 (65)	52 „ 58 (50)	29 bis 23 (20)	75	Hochbeanspruchte Zahnräder
	„ „ gehärtet . .	101 bis 120	82 bis 110	12 bis 11	60 bis 57	
E F 35 O	„ „ geglüht . . .	56 bis 67 (55)	42 bis 53 (40)	28 bis 26 (22)	75 „ 72	Wie E F 58 O
	„ „ gehärtet . .	87 bis 96	68 bis 80	18 bis 14	54 „ 50	
E F 62 O	für Oel- oder Lufthärtung, geglüht	80 „ 87	67 „ 69	23 „ 19	60 „ 64	
	bei 800° in Oel gehärtet	195 „ 190	—	12 „ 11	34 „ 33	Teile des Bewegungsmechanismus
	bei 830° an der Luft gehärtet . .	194 „ 189	—	13 „ 10	35 „ 32	

Marke	Nähere Bezeichnung	Zustand	Zugfestigkeit K_z	Streckgrenze σ_f (S. 483)	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Verwendungszweck
	b) Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin-Wien.						
	1. Stahl zur Verwendung im veredelten Zustande.						
Auto spezial V D	Chromnickelvanadiumstahl für höchste Beanspruchung	I	105 bis 120	95 bis 110	13 bis 10	55 bis 45	I für Teile von Luftfahrzeugen, Autokurbelwellen, Kardan-, Getriebe- u. Kettenwellen, Motorbootwellen u. dgl. II für Autoachsen, Achsschenkel, Teile der Lenkvorrichtung, Pleuelstangen u. dgl.
		II	95 „ 105	80 „ 95	16 „ 13	60 „ 50	
Auto extra P A	Chromnickelvanadiumstahl für hohe Beanspruchung	I	93 „ 105	78 „ 93	15 „ 12	60 „ 50	
		II	80 „ 93	63 „ 78	17 „ 13	65 „ 55	
Auto prima N C	dgl.	I	80 „ 90	60 „ 70	14 „ 11	60 „ 50	
		II	70 „ 80	50 „ 60	16 „ 13	65 „ 55	
Auto M 8	Mangan-Silizium-Stahl für normale Beanspruchung	I	75 „ 85	45 „ 55	14 „ 12	55 „ 48	
		II	65 „ 75	38 „ 45	17 „ 14	48 „ 43	

I = „zähhart veredelt"; II = „zäh veredelt".

Digitized by Google

Marke	Nähere Bezeichnung	Zustand	Zugfestigkeit K_z	Streckgrenze σ_f (S. 483)	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Verwendungszweck
2. Stahl zur Verwendung im geglühten oder rohen Zustande.							
5 Nh	Nickelstahl für hohe Beanspruchung	geglüht	70 bis 85	42 bis 55	18 bis 15	60 bis 50	Wellen, Achsen, Achsschenkel, Pleuelstangen, Hebel, Kurbeln, Bolzen, Chassis-Rahmen u. dgl.
5 Nm	dsgl.	geglüht	60 „ 70	35 „ 45	20 „ 18	58 „ 48	
3 Nm	dsgl.	geglüht	50 „ 60	30 „ 40	23 „ 20	60 „ 50	
		roh	60 „ 70	35 „ 45	20 „ 16	50 „ 40	
Ni	dsgl.	geglüht	45 „ 55	25 „ 35	22 „ 19	60 „ 50	
		roh	55 „ 65	30 „ 40	19 „ 15	50 „ 40	
Auto M S	Mangan-Silizium-Stahl für normale Beanspruchung	geglüht	60 „ 70	30 „ 40	17 „ 15	50 „ 40	
		roh	70 „ 80	40 „ 50	14 „ 12	40 „ 30	
3. Stahl für Einsatzhärtung.							
E S extra	Chrom-Nickel-Stahl, sehr fest, zäh	geglüht	65 bis 75	35 bis 45	17 bis 14	60 bis 50	Teile, die ganz oder teilweise im Einsatz zu härten sind, wie Zahnräder, Kettenräder, Nocken und Daumenwellen, Zapfen, Bolzen, Lenkhebel, Steuerungsteile u. dgl.
		Oelhärtung	125 „ 140	105 „ 120	10 „ 7	50 „ 40	
		Wasserhärtung	150 „ 200	120 „ 160	10 „ 5	40 „ 30	
E S prima	dsgl.	geglüht	40 „ 60	25 „ 35	18 „ 15	60 „ 50	
		Oelhärtung	105 „ 120	85 „ 100	8 „ 6	50 „ 40	
		Wasserhärtung	130 „ 160	100 „ 130	8 „ 5	35 „ 25	
3 Nw	Nickelstahl, sehr zäh	geglüht	45 „ 55	25 „ 35	25 „ 20	65 „ 55	
		Wasserhärtung	55 „ 70	35 „ 45	18 „ 13	60 „ 50	
Ena	dsgl.	geglüht	40 „ 50	23 „ 30	26 „ 22	60 „ 50	
		Wasserhärtung	45 „ 60	30 „ 40	17 „ 12	65 „ 55	
E S	Mangan-Silizium-Stahl für normale Beanspruchung	geglüht	35 „ 45	20 „ 30	26 „ 22	60 „ 55	
		Wasserhärtung	40 „ 55	28 „ 38	16 „ 10	65 „ 55	
4. Spezial-Zahnradstahl.							
L H	Spezial-Zahnradstahl für Lufthärtung	geglüht	95 bis 110	75 bis 90	17 bis 14	55 bis 45	Zahn-, Kettenräder, Vierkantwellen u. dgl., die nicht im Einsatz gehärtet werden.
		gehärtet	160 „ 180	145 „ 165	7 „ 5	40 „ 30	

Digitized by Google

Marke	Nähere Bezeichnung	Zustand	Zugfestigkeit K_z	Streckgrenze σ_f (S. 483)	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Verwendungszweck
		5. Spezial-Zylinderstahl.					
W 43	Spezial-Wolframstahl	II	90 bis 100	60 bis 70	15 bis 10	60 bis 50	Stahlzylinder für Aeromotoren
S Z	Spezial-Manganstahl	II	75 „ 90	45 „ 60	15 „ 10	50 „ 40	
		6. Spezial-Ventilstahl.					
25 N	Hochlegierter Nickelstahl	geglüht . .	60 bis 70	30 bis 40	40 bis 30	65 bis 55	Ventile von Explosionsmotoren und Teile, die hohen Temperaturen ausgesetzt sind.
		roh	65 „ 75	35 „ 45	35 „ 25	60 „ 50	
W K Z	Spezial-Ventilstahl	geglüht . .	95 „ 110	75 „ 90	10 „ 6	30 „ 20	
		7. Spezial-Federstahl					
C S	Chrom-Silizium-Stahl	federhart . .	135 bis 155	120 bis 140	8 bis 6	40 bis 30	Stark beanspruchte Federn, besonders für Automobile.
2 Si	Siliziumstahl	„ . .	135 „ 155	115 „ 135	7 „ 4	35 „ 25	
2 M	Manganstahl	„ .	120 „ 140	100 „ 115	5 „ 3	35 „ 25	

Vanadiumstahl.*)

Die durch den Gehalt an Va herbeigeführte Steigerung von K_z beträgt bei 0,7 % Va, unabhängig vom C-Gehalt, 5 bis 8 kg/qmm, gleichzeitig steigt φ um 2 „ 3 %.

Die Einschnürung ψ wächst bei 0,7 % Va und

1 % C von $\psi = 14{,}5$ auf 42,3 | 0,7 % C von $\psi = 20$ auf 40 | 0,55 % C von $\psi = 30$ auf 42,7 | 0,15 % C von $\psi = 65$ auf 84,7.

Durch Härten steigt die Festigkeit von $K_z = 58$ auf 93 (bei $\varphi = 9{,}6$, $\psi = 44$), während sie durch Ausglühen auf 36 zurückgeht.

Titaneisen und -stahl.

Ueber die Erhöhung von K_z und φ des Eisens und Stahls durch Titangehalt s. Z. d. V. d. I. 1908 S. 897.

*) Jahrbuch d. Automobil u. -Motorboot-Industrie 1908 S. 32 u. f. Reichhaltige Angaben über Chrom-Vanadium-Stahl der American Vanadium Co., Pittsburg, Dingler Pol. J. 1911 S. 481.

Digitized by Google

Konstruktionsstahle von Fried. Krupp A.-G., Essen (Ruhr)

für allgemeinen Maschinenbau, Schiff-, Lokomotiv- und Wagenbau.

Bezeichnung	$K_{z\,min}$	σ_f	φ für $\frac{l}{d}=10$	φ für $\frac{l}{d}=5$	Zahl der Härtesorten
Martinstahl	40 bis 60	20 bis 30	22 bis 18	26 bis 21	3
Spezial-Martinstahl	45 „ 65	25 „ 35	22 „ 18	26 „ 21	3
Elektrostahl	45 „ 75	25 „ 40	22 „ 14	26 „ 16	4
Tiegelstahl	45 „ 90	25 „ 50	22 „ 8	26 „ 10	5
Spezialstahl C 24 O	50	30	20	25	1
„ F 86 O	100	75	8	10	1
Nickelstahl, weich	45 bis 50	30 bis 35	22 bis 20	26 bis 24	2
„ mittelhart	55 „ 60	38 „ 45	18	22	3
Nickelstahl, hochprozentig (25 bis 45 % Ni)	60	30	25	—	5
Chrom-Nickel-Stahl	60 bis 80	45 bis 70	18 bis 14	22 bis 17	7

Stahlformguſs von Fried. Krupp A.-G., Essen (Ruhr).

Bezeichnung	K_z	φ	ψ	Verwendungszweck
1. Stahlformguſs	37 bis 44	30 bis 35 (>20)	60 bis 65	Lokomotiv- und Tenderradsterne, Lokomotivteile
2.	40 „ 55	30 bis 28 (>18)	57	Schiffbau, Schiffsmaschinen; allgemeiner Maschinenbau
3.	55 „ 65	>12	—	Allgemeiner Maschinenbau
Spezialformguſs	60	18	55	$\sigma_e = 40$. Geschützbau
Harter Stahlformguſs	50 bis 70	Harte Oberfläche		Bei starkem Verschleiſs
Hartstahl-Formguſs (Manganstahl)	?	Im ganzen Querschnitt hart		Bei sehr starkem Verschleiſs u. hoher Bruchbeanspruchung

Werkzeugstahl von Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin-Wien.

Kohlenstoffstahl in 11 Sorten, davon 7 roh mit K_z von 75 bis 110; geglüht (alle 11 Sorten) mit K_z von 55 bis 105.

Vanadiumstahl.

Marke	Zustand	K_z	φ %	ψ %
Böhler Rapid ✡✡ Extra	geglüht	80 bis 95	12 bis 8	30 bis 20
Super Rapid	„	85 „ 100	12 „ 7	30 „ 20
Super Rapid Extra	„	85 „ 100	12 „ 7	30 „ 20
Böhler ✡ PT (Panzerplattenstahl)	roh	146 „ 152	8 „ 10	40 „ 50
	geglüht	146 „ 152	10 „ 12	50 „ 60
	veredelt	158 „ 165	6 „ 10	40 „ 50

(Fortsetzung von S. 486.)

Für hochwertiges **Gufseisen** (mit $K_z = 2350$) ist nach C. Bach bei

$t =$	300^0	400^0	500^0	570^0
die Zugfestigkeit =	99	92	76	52 %

der Zugfestigkeit K_z bei 200^0. K_b beträgt bei gewöhnlichem Maschinenguſs mindestens 2800, bei Maschinenguſs von hoher Festigkeit mindestens 3400, bei Bau- und Säulenguſs mindestens 2600 kg/qcm.

Digitized by Google

Für **Stahlguſs***) fand C. Bach (bei einem Prozentgehalt von 0,18 C, 0,36 Mn, 0,28 Si u. zus. 0,29 an S, P, As, Cu) folgende Werte bei ~ 40 min Belastungsdauer

für die Temperatur . . . $t =$	+ 20°	100°	200°	300°	400°	500°
Zugfestigkeit . . . . . $K_z =$	4265	4567	5253	5052	4043	2365
Streckgrenze . . . . . $\sigma_f =$	2375	2156	2186	1911	1384	·
Dehnung . . . . . $\varphi =$	28	16	18	25	36	64
Einschnürung . . . . . $\psi =$	57	46	41	48	63	81

Bei Stahlguſs anderer Zusammensetzung ergaben sich noch erheblich größere Verschiedenheiten, insbesondere der Dehnung.

b. Kupfer und Kupferlegierungen.

Metallsorte	Elastizitätsmaſs $E = \frac{1}{\varkappa}$ kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Dehnung φ %	Einschnürung ψ %	Arbeitsvermögen A cmkg/ccm
Kupferblech, gewalzt [1]	(1 150 000)	· [5]	2000 bis 2300 [5]	35—38	45—50	711 ($\xi = 0{,}65$ bis 0,7)
Messing, gegossen .	800 000 [2]	650	1500	13	17,5	
Rotguſs	900 000 [3]	300	2000	6—20	10,52	23 [4] ($\xi = 0{,}3$)
Geschützbronze . .	1 100 000 [3]	300	3000	·	·	·
„ verdichtet	1 100 000 [3]	900	3200	·	·	·
Phosphorbronze . .	·	·	4000	·	·	·
Manganbronze (4 %), gewalzt	1 200 000	260	2900	41	68	$\sigma_f = 1360$
Manganbronze (15 %), gegossen	940 000	770	3570	34	44	$\sigma_f = 1400$
Oerlikoner Bronze Nr. A., überschmiedet	·	2800	4400 bis 5600	15—25		·
Spezialbronze (nach C. Bach)	·	·	bis 8000	·	·	·

[1] **Kupfer.** Nach C. Heckmann: Feuerbüchs-Hartkupfer (geglüht) $K_z > 2300$, $\varphi > 38$, $\psi > 45$. Sonder-Feuerbüchskupfer und Sonder-Stehbolzenkupfer (geglüht) $K_z > 2700$, $\varphi > 35$, $\psi > 60$. Sonderkupfer, nicht über 5 mm stark, für Zentrifugen usw. (nach der Bearbeitung geglüht)

$K_z = 2700$, $\varphi > 35$, $\psi > 60$,

(hartgewalzt) $K_z = 3200$, $\varphi > 12$, $\psi > 50$.

[2] Genauer ist $\varepsilon = \sigma^{1,055} : 947\,000$ für die erste,
$\varepsilon = \sigma : 802\,000$ (bis $\sigma = 650$) für wiederholte Beanspruchung.

[3] Genauer ist $\varepsilon = \sigma^{1,029} : 734\,000$ für die erste,
$\varepsilon = \sigma : 900\,000$ (bis $\sigma = 900$) für wiederholte Beanspruchung.

[4] $A = 115$ für $K_z = 1650$, $\varphi = 8{,}4$, $\psi = 13{,}5$,
$A = 466$ für $K_z = 2700$, $\varphi = 20{,}5$, $\psi = 23{,}2$.
ξ i. M. $= 0{,}3$.

*) Z. d. V. d. I. 1903 S. 1762 1904 S. 385.

Digitized by Google

[5]) **Kupfer.** Für gehämmertes Kupfer $K_z = 2700$, für gezogenes Kupfer $K_z = 3150$ für elektrolytisch gewonnenes Kupfer $K_z = 3800$. K_z wird durch fortgesetztes Hämmern bis um 50 % gröfser, dabei φ um 80 % kleiner; die Streckgrenze rückt von 500 bis 600 nahe an die Zugfestigkeit heran. Ferner wird durch Hämmern usw. σ_e von 0 auf 600 bis 1000 gesteigert. σ_p bei stark gehämmertem Kupfer bei 600; hierbei ist dann $E = 1\,150\,000$. Nach Bach fand sich:

$\varepsilon = \sigma^{1,000} : 2\,195\,000$ (bis $\sigma = 760$) für die erste,
$\varepsilon = \sigma^{1,074} : 1\,865\,000$ für wiederholte Belastung.

σ_e nahezu $= 0$; steigt bei wiederholt stark überangestrengtem Kupfer bis auf 600 bis 1000
σ_p nahezu $= 0$; „ „ „ „ „ „ „ „ 600;
alsdann ist $E = 1\,150\,000$.

Für weiches Kupfer fand C. Bach etwa $\varepsilon = \sigma^{1,000} : 2\,200\,000$ für die erste Beanspruchung, $\varepsilon = \sigma^{1,074} : 1\,900\,000$ für wiederholte Beanspruchung.

Deltametall*) (beispielsweise 58,65 Cu, 39,61 Zn, 0,97 Sn, 0,42 Pb, 0,34 Fe; Schmelzpunkt 900 bis 1000°, spez. Gew. 8,0 bis 8,6).

Legierung	Art der Bearbeitung	σ_f	K_z	φ	ψ
I	Rohgufs, [1])	2800 bis 3100	6000	12 bis 13	12 bis 15
	gepreſst	3200 [2])	6800 bis 7000	19 „ 23	22 „ 29
II	Rohgufs,	2200 bis 2500	4600 bis 4800	21 bis 23	19 bis 24
	gepreſst	2600 „ 3200 [2])	5500 „ 6600	20 „ 21	25 „ 37
IV	Rohgufs,	1200 bis 1400	3900	37 bis 43	32 bis 37
	geschmiedet,	1600 „ 1900	4300 bis 4500	31 „ 40	32 „ 53
	gepreſst	1700	4300 „ 4700	28 „ 38	34 „ 43

[1]) $E = 1\,040\,000$ bis $1\,080\,000$; $\sigma_p = 1100$ bis 1500.

[2]) Streckgrenze nicht scharf ausgeprägt.

Rübelbronze.**) Spez. Gew. 8,1 bis 8,5. α für Wärme $= 1 : 680$. Schwindmafs 1,34 bis 1,60. Gewährleistete Werte von K_z, σ_e, φ.

Marke	Art der Herstellung	K_z	σ_e	φ_{200}	ψ	Bemerkungen
B	gegossen	4500 bis 5000	1600	30 bis 35	25	
B	gezogen	5000 „ 5500	2400	20 „ 25	40	
C	gegossen	6000 „ 6500	3200	20 „ 22	18	
D	„	5000 „ 5500	2400	25 „ 30	20	
H	geschmiedet, weich	6000 „ 6500	3200	12 „ 18	30	
H	„ , hart	6500 „ 7000	4200	10 „ 12	32	
Admos II	gepreſst	5500 „ 6500	3600	15 „ 20	.	
Admos I	gewalzt	4000 „ 5000	1800	25 „ 30	.	für Rohre
Turbo	geschmiedet, hart	7500 „ 8500	4500	15 „ 25	.	für Turbogeneratoren
Monos	gegossen, hart	6000 „ 6500	5000	5 „ 10	.	Ventilkegel u. -sitze

Muntz-Metall, gewalzt $K_z = 5050$, gepreſst 5460.

Monel-Metall (60 Ni, 40 Cu).***) Nach amerikanischen Normen (Standard-Legierung): geschmiedet $K_z = 5630$, $\sigma_e = 3500$, $\varphi = 10$; gegossen $K_z = 4100$, $\sigma_e = 2450$.

---

*) Angaben der Deutschen Delta-Metall-Gesellschaft Alexander Dick & Co., Düsseldorf-Grafenberg.

**) Nach Angaben der Fa. Allgemeines Deutsches Metallwerk, G. m. b. H., Berlin-Oberschöneweide.

***) Oesterr. Wochenschr. 1910 S. 566.

Digitized by Google

Stahlbronze von Fried. Krupp A.-G. (1913).

Nr. 1. $K_z = 4000$ bis 4500, $\sigma_e > 1800$, $\varphi > 30\,\%$
Nr. 2. $K_z = 5000$ „ 5500, $\sigma_e > 2300$, $\varphi > 20\,\%$
Nr. 3. $K_z = 6000$ „ 7000, $\sigma_e > 3200$, $\varphi > 15\,\%$.

Einfluss der Temperatur.

Kupferblech bei 50° 100° 150° 200° 250° 285° 367° 451° 556°
$K_z = 98$ 95 91 85 79 75 66 51 33 %
der Festigkeit bei etwa 10°. Nach Versuchen von Stribeck mit Stehbolzenkupfer nimmt K_z bei längerer Belastungsdauer (bis 30 st) mit wachsender Temperatur rascher ab als bei der gewöhnlichen Belastungsdauer; zwischen 300 und 400° beträgt K_z nur die Hälfte des Wertes für gewöhnliche Belastungsdauer. Aehnliches gilt für φ und ψ.

Bronze (91,4 Cu, 2,8 Zn, 5,5 Sn) mit $K_z = 2400$, $\varphi = 36$, $\psi = 52$ (Kaiserl. Werft, Kiel) hat nach C. Bach

	bei	100°	200°	300°	400°	500°
noch	$K_z =$	101	94	57	26	18 %
	$\varphi =$	98	96	32	0	0 %
	$\psi =$	91	93	31	0	0 %

der Zugfestigkeit K_z, Dehnung φ und Querzusammenziehung ψ bei 20°.

Diese Bronze, die als eine sehr gute zu bezeichnen ist, kann daher bei Ventilgehäusen, Rohrstücken u. dgl. für Temperaturen erheblich über 200° (z. B. bei mäfsig überhitztem Dampf von 260°) nicht angewendet werden.

Durana-Gufsmetall*) (58,7 Cu, 39,6 Zn, 1,0 Sn, 0,4 Pb, 0,34 Fe) der Dürener Metallwerke A.-G. Für langdauernde Belastung ergab sich:

für die Temperatur $t =$	24°	95°	148°	170°	214°	320°	420°	542°
Zugfestigkeit . . $K_z =$	4080	3450	3140	2800	1800	650	200	50
Streckgrenze . . $\sigma_f =$	1800	1720	1700	1640	1250	450	160	.
Dehnung . . . $\varphi =$	32	27	44	50	62	61	39	30
Einschnürung . $\psi =$	36	33	50	51	52	53	40	42

Für kurze Versuchsdauer ergab sich:

für die Temperatur $t =$	22°	93°	174°	207°	259°	311°	363°	414°	470°
Zugfestigkeit . $K_z =$	4080	3720	3300	3120	2820	1850	1220	750	284
Dehnung . . $\varphi =$	32	29	38	41	47	54	55	57	53
Einschnürung . $\psi =$	36	33	46	48	50	50	57	52	50.

Nach Versuchen von R. Baumann**) ist $E = 736\,000$ bis $750\,000$ bis zur Proportionalitätsgrenze 160 kg/qcm; ferner ist bei 100°, 200°, 300° $K_z = 0{,}75$, 0,4, 0,25 der Zugfestigkeit bei 20°.

Rübelbronze (S. 494). Nach Versuchen des Reichs-Marineamts ist:

für die Temperatur $t =$	190°	290°	380°	485°
Zugfestigkeit . . $K_z =$	3850	3420	3020	2040
Elastizitätsgrenze $\sigma_e =$	1720	1800	1570	1370
Dehnung . $\varphi =$	44	43	31	12

*) Nach Stribeck, Z. d. V. d. I. 1904 S. 897. **) Z. d. V. d. I. 1911 S. 2016.

Digitized by Google

c. Andere Metalle und Stoffe.

Aluminium,*) rein (98,5 bis 99 % Al)
gegossen: $E = 675\,000$, $G = 260\,000$, $K_z = 930$ bis 1000, $\varphi = 8$ bis 13; gewalzt oder geschmiedet, 0,7 cm stark: längs $E = 726\,000$, $K_z = 1500$, $\sigma_p = 480$, $\varphi = 5$; quer $E = 690\,000$, $K_z = 1400$, $\sigma_p = 440$, $\varphi = 6$.

Aluminium-Bronze mit 10 % Al: $E = 1\,200\,000$, gegossen $K_z = 6200$, $\varphi = 0{,}5$ %, gewalzt $K_z = 5100$, $\varphi = 0{,}4$ %. Aluminium-Bronze mit 5 % Al: gewalzt, 1,2 bis 1,6 cm dick, $E = 1\,200\,000$, $K_z = 4300$, $\varphi = 50$ %.

Aluminium-Messing (gegossen) mit 3 % Al: $K_z = 6000$, $\varphi = 7{,}5$ %
„ „ „ 1 % Al: $K_z = 4000$, $\varphi = 50$ %.

Magnesium:
$K_z = 2320$, $K = 2720$, $K_b = 1600$, $\sigma_p =$ nicht vorhanden.

Magnalium (mit 2 bis 23 % Magnesium, 98 bis 77 % Aluminium, 2,4 bis 2,57 spez. Gew., 600 bis 700° Schmelzpunkt): gegossen in Schalen $K_z = 3000$ bis 4500, in Sand $K_z = 1200$ bis 2100, gewalzt 2000 bis 2500 bei $\varphi = 5$ bis 10, gepreßt 3700 bis 5000.

Elektron**) (mit 80 bis 99,5 % Magnesium, 20 bis 0,5 % Aluminium, 1,8 spez. Gew.): $K_z = 3500$.

Rübelsches Leichtmetall**) (mit 96 bis 90 % Magnesium, 4 bis 10 % Zink): $K_z = 1500$ bis 2000, gewalzt 2500 bis 3500, $\varphi = 8$ bis 12.

Zink, gewalzt, bei 16°:***) Gehalt an Cd 0,03 bis 0,91 %, Pb 0,02 bis 0,81 %. Blechdicke 1,6 bis 3 mm. $E = 872\,000$ bis $1\,200\,000$, i. M. 960 000, $K_z = 2050$ bis 2570, i. M. 2350, $\varphi = 12$ bis 38, $\psi = 23$ bis 56.

Der Einfluß der **Belastungsdauer** ist hier besonders groß; es fand sich***)

$$K_z = \frac{3225}{1 + 0{,}2392\sqrt{t}},$$

wo t die Dauer der Belastung in Minuten. — Für $t = 0$ (plötzliche Belastung) ist $K_z = 3225$.

Zinn: $E = 400\,000$, $K_z = 350$.

Blei, weich, gewalzt oder gegossen: $E = 50\,000$, $K_z = 125$, $\sigma_f = 50$ bis 150 (für Druck, je nach der Höhe des Versuchskörpers, $h : d = 2$ bis 0,1).

Blei, hart (Hartblei): $K_z = 300$, $\sigma_f = 300$ (für Druck) $h : d = 1$.

Weißmetall,†) 90 Pb, 10 Sb: $\sigma_f = 153$, $K_z = 500$, $E_z = 267\,000$, $\varphi = 0{,}8$, $\psi = 1{,}5$; Druck $\sigma_f = 218$, $K = 1190$, $E = 273\,000$; $K_b = 840$; $K_s = 860$.

85 Pb, 15 Sb: $\sigma_f = 145$, $K_z = 450$, $E_z = 270\,000$, $\varphi = 1{,}2$, $\psi = 2{,}4$; Druck $\sigma_f = 168$, $K = 1180$, $E = 286\,000$, $K_b = 730$, $K_s = 340$.

80 Pb, 15 Sb, 5 Sn: $\sigma_f = 128$, $K_z = 400$, $E_z = 275\,000$, $\varphi = 0{,}5$; Druck $\sigma_f = 160$, $K = 1100$, $E = 297\,000$, $K_b = 760$, $K_s = 300$.

Weißguß-Lagermetalle von Höveler & Dieckhaus, Papenburg a. Ems: Orig.-Babbit-Metall (sehr sinnreich) $K = 1210$, α-Metall $K = 1500$, γ-Metall $K = 670$, Weißbronze Germania (zinkhaltig, Schmelzp. 435°) $K = 3380$, Tandem-Bronze, Marke P (74 % Sn), $\sigma_f = 1270$.

---

*) Im wesentlichen nach L. v. Tetmajer.

**) Nach Sander, Neue Materialien f. d. Luftschiffbau; Dingler Pol. J. 1911 S. 517. Daselbst auch Angaben über Le Ferro-Nickel und andere leichte Legierungen.

***) Nach E. Rasch, Dingler Pol. J. 1907 S. 54.

†) Nach Goodman, Dingler Pol. J. 1906 S. 718

Digitized by Google

Glas: $E = 700\,000$, $K_z = 250$. Für geblasenes Glas $K_b = 375$, für Rohglas $K_b = 200 + 160\ (1{,}5 - s)^2$, wo s die Glasdicke in cm.
Papier: $K_s = 40$ bis 180, Papierstoff (in geleimten Lagen) $K = 1000$.
Hartgummi*) (Ebonit): $K_s = 552$, $K = 870$, $E = 2630$ (bis $k_s = 108$).

d. Hölzer.

(Nach J. Bauschinger, L. v. Tetmajer und Gahns.)

Die Festigkeit nimmt mit wachsendem Feuchtigkeitsgehalte ab; so ist z. B. die Druckfestigkeit nassen Fichtenholzes (63% Feuchtigkeit) nur halb so groß als die des lufttrockenen Holzes (14% Feuchtigkeit), die Biegungsfestigkeit beträgt nur 58%.**) Mit zunehmender Lagerungszeit vergrößert sich die Druckfestigkeit bedeutend. E ist für Druck nahezu unveränderlich. — Die folgenden Angaben beziehen sich auf den ganzen Querschnitt (Kernholz und Splintholz zusammen).

Art der Beanspruchung	Feuchtigkeitsgehalt %	Elastizitätsmaß E kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Festigkeit K kg/qcm	Feuchtigkeitsgehalt %	Elastizitätsmaß E kg/qcm	Proportionalitätsgrenze σ_p kg/qcm	Festigkeit K kg/qcm
	Kiefer				**Eiche**			
Zug) parallel	13	90000	.	790	.	108000	475	965
Druck) zur Faser	18	96000	155	280	.	103000	150	345
Biegung[1]) .	23	108000	200	470	24	100000	215	600
Schub[2]) . .	25	.	.	45	.	.	.	75
	Fichte				**Buche**			
Zug) parallel	16	92000	.	750	.	180000	580	1340
Druck) zur Faser	19	99000	150	245[4])	.	169000	100	320
Biegung[1]) .	29	111000	230	420	17	128000	240	670
Schub[2]) . .	38	.	.	40	.	.	.	85
	Hartholz (Tallowwood)[3])							
Zug) parallel	.	225000	.	1000				
Druck) zur Faser	.	213000	.	638				
Biegung[1]) . .	16	201500	357	1145				
Schub[2]) . .	.	.	.	105				

[1]) Der Stammkern liegt in der Querschnittsmitte.
[2]) Abscherung ++ zur Faserrichtung in einer durch die Stammachse gehenden Ebene. K_s für das Kernholz = 0,75 K_s für den ganzen Querschnitt.
[3]) Dingler Pol. J. 1907 S. 193.
[4]) ⊥ zur Faser 25 bis 30. Rottanne ⊥ zur Faser 55.

Nach Winkler***) ist, wenn $\mu_1 = K_s : K_z$, für Nadelholz $\mu_1 = 0{,}064$ (∥ z. F.), $\mu_1 = 0{,}32$ (⊥ z. F.), für Eichenholz $\mu_1 = 0{,}084$ (∥ z. F.), $\mu_1 = 0{,}27$ (⊥ z. F.).
Nach Melan†) ist K_s:

	++	⊥		++	⊥
Kiefer	61	210	Lärche	72	247
Fichte	67	219	Eiche	75	270
Tanne	63	273	Buche	85	290

*) Nach C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl. S. 79.
**) Nach Janka, Zentralbl. Bauv. 1913 S. 706.
***) Winkler, Hölzerne Brücken I, 2. Aufl. 1887 S. 32.
†) Melan, Brückenbau I S. 80.

Digitized by Google

Neuere Versuche von C. Bach über K_s und E verschiedener Hölzer Z. d. V. d. I. 1912. S. 229.

Bambusrohr:*) $E = 110000$ bis 310000, i. M. 200000, $K = 650$, $K_s = 3100$ bis 3800, K_b bis 1500.

e. Steine**) und Bindemittel.

Baustoff	Festigkeit, bezogen auf die Druckfestigkeit K, für Zug	Biegung	Schub
Steine	$K_z = {}^1/_{26}\,K$	$K_b = {}^1/_6\,K$	$K_s = {}^1/_{13}\,K$
Zementmörtel .	$K_z = {}^1/_{12}$ bis ${}^1/_8\,K$	$K_b = {}^1/_4\,K$	$K_s = {}^1/_6\,K$
Kalkmörtel . .	$K_z = {}^1/_8\,K$	.	.
Beton	$K_z = {}^1/_{12}$ bis ${}^1/_8\,K$	.	$K_s > K_z$

Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm	Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm
Granite:[1]		mittelfeste	600—1000
sehr feste } polierbare	1200—2000	wenig feste	200—600
feste[2]) } polierbare	800—1200	**Tuff:**[1]	
wenig feste, wenig od. nicht polierbare	450—800	feste	300—1500
Syenit	800—2000	wenig feste	200—300
Porphyr	500—2000	Zement-Kiesbeton[3]) .	60—400
Basalt	1000—2000	Kunstsandstein[4]) . .	450
Basaltlava	300—1500	Bausteine aus kieselsäurereicher Müllschlacke[5]) . . .	100—300
Kalksteine:[1]		Hochofenschlacke, getempert	1000—2500
Marmor	500—1800	Klinker-Ziegelsteine .	300—950
Dichter Kalk . . .	200—1600	Mittelbrand- } Ziegelsteine[6])	200—300
Poriger Kalk . . .	200—600	Schwachbrand- }	150—200
Tonschiefer (Bruchstein)	600—1700	Ziegelmauerwerk . .	140
Sandsteine:[1]		Porige Vollsteine . .	150
sehr feste	1500—2000		
feste	1000—1500		

[1]) Nach der preufs. Min.-Best. vom 31. Januar 1910. Die Zahlen gelten für Beanspruchung senkrecht zur Lagerfläche.

[2]) C. Bach fand beispielsweise für feinkörnigen blauen Granit: $K = 1006$, $K_b = 84$, $K_s = 78$, $K_z = 45$.

[3]) Würfelfestigkeit, je nach Zusammensetzung, 28 Tage alt. Ueber die Druckfestigkeit mit zunehmendem Alter s. Beton u. Eisen 1909 S. 129.

[4]) $K_z = 47$. [5]) Z. d. V. d. I. 1913 S. 1849 (Fürth).

[6]) $K_z : K$ nach Hartig $= 1 : 14$ bis $1 : 15$.

---

*) Nach Baumann, Z. d. V. d. I. 1912 S. 232.

**) Ausführlichere Angaben über die Festigkeit natürlicher Gesteine s. Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands, Berlin 1892, Verlag der Deutschen Bauzeitung.

Digitized by Google

Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm	Baustoff	Druckfestigkeit K kg/qcm
Korkstein[1])	17	Asbestzement[2])	
Zementmörtel 1 : 3		nach 7 Tagen . . .	78
langsam bindend	mindestens	(1 Luft, 6 Wasser)	$[K_z = 14]$
nach 7 Tagen . . .	120	nach 28 Tagen . .	137
(1 Luft, 6 Wasser)	mindestens	(1 Luft, 27 Wasser)	$[K_z = 24]$
nach 28 Tagen . .	250	guter Kalkmörtel	
(1 L., 6 W., 21 L.)	mindestens	nach 28 Tagen . .	15
nach 28 Tagen . .	200 (–350)		
(1 Luft, 27 Wasser)			

[1]) Von Grünzweig & Hartmann G. m. b. H. in Ludwigshafen a. Rh. Ueber den „Expansitstein" dieser Firma liegen z. Z. noch keine Angaben vor.
[2]) Marke *B* der Asbestzementwerke, G. m. b. H., Hamburg, 33. Spez. Gew. 2,03.

Das **Elastizitätsmafs** der Steine und Mörtel hängt in hohem Grade von der Spannung und (bei letzteren) von der Erhärtungszeit ab. Setzt man nach S. 482 $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$, so ist nach C. Bach*) für

	$\frac{1}{\alpha_0}$	n	Beton (Druck):	$\frac{1}{\alpha_0}$	n
Granit (Zug)	240 000	1,40	1 Zem., 2½ Sand, 5 Kies	208 000	1,145
„ (Druck)	300 000	1,12	1 „ 5 „ 6 „	280 000	1,137
reinen Zement (Druck) . .	250 000	1,09	1 „ 5 „ 10 „	217 000	1,157
Zementmörtel 1 : 1½ (Druck)	356 000	1,11	1 „ 2½ „ 5 Sch.[1])	457 000	1,157
„ 1 : 3 „	315 000	1,15	1 „ 3 „ 6 „	380 000	1,161
„ 1 : 4½ „	230 000	1,17	1 „ 5 „ 10 „	367 000	1,207

[1]) Sch. = Kalksteinschotter.

Die Dehnungszahl bei der Spannung σ beträgt

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{E_\sigma} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \alpha_0 n \sigma^{n-1},$$

die mittlere Dehnungszahl für die Spannungsgrenzen 0 und σ

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha_0 \sigma^{n-1};$$

so ist z. B. für **Granit** das Elastizitätsmafs bei $\sigma = 45$ kg/qcm Druck $E_\sigma = 530\,400$, im Mittel zwischen $\sigma = 0$ und 45: $E = 594\,000$; für **Zementmörtel** (1 : 4½) bei $\sigma = 30$ kg/qcm Druck $E_\sigma = 480\,000$, im Mittel zwischen $\sigma = 0$ und 30: $E = 562\,000$.

Sandstein zeigt starke Veränderlichkeit von α und E; z. B. fand C. Bach für Zug bei $k = 0$ bis 4,2 $E = 93\,700$, bei $k = 4{,}2$ bis 8,3 $E = 46\,000$, bei $k = 8{,}3$ bis 12,3 $E = 29\,250$, bei $k = 12{,}3$ bis 16,4 $E = 21\,000$ i. M.**)

Bei **Portlandzementmörtel** ergeben sich nach C. Bach für einen Sandzusatz von 0, 1,5, 3 u. 4,5 R.-T. (zu 1 R.-T. Zement) zwischen 0 u. 40 kg/qcm Druck durchschn. $E = 211\,000$, $281\,000$, $232\,000$, $159\,000$ (Die spezifischen Gewichte waren dabei 2,065, 2,117, 2,04, 1,91.) Der Sandzusatz vermindert daher zunächst die Elastizität, weiterer Zusatz vermehrt sie wieder.

*) Z. d. V. d. I. 1897 S. 241. **) Weiteres Z. d. V. d. I. 1900 S. 1169.

Digitized by Google

Beton aus 1 R.-T. Portlandzement, $2^1/_2$ R.-T. Sand, 5 R.-T. Kies, 77 Tage alt, hat nach Druckversuchen von C. Bach*)

für $\sigma =$ 0 bis 7,9	$E =$ 306 000		$\sigma =$ 23,7 bis 31,6	$E =$ 212 000	
7,9 „ 15,8	256 000		31,6 „ 39,5	194 000	
15,8 „ 23,7	226 000		Weitere Angaben S. 499.		

Die Werte E sind Mittelwerte für die angegebenen Druckgrenzen.

Nach den preufs. „Bestimmungen f. d. Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten" vom 24. Mai 1907 ist bei Verbundkonstruktionen E für Beton (Druck) $= {}^1/_{15}\,E$ für Eisen anzunehmen, sofern nicht ein anderer Wert nachgewiesen wird; das ergibt $E_{\text{Beton}} = {}^1/_{15} \cdot 2\,150\,000 = 143\,000$. Nach den österr. Min.-Best. ist $E_{\text{Beton}} = 140\,000$. Für Strafsen- und Eisenbahnbrücken ist nach Bestimmungen der Königlichen Eisenbahndirektion Berlin $E_{\text{Beton}} = {}^1/_{15}\,E_{\text{Eisen}}$ (= 215 000) anzunehmen. Dieser Wert findet sich auch anderwärts.

Die Schweizer Betonbestimmungen schreiben $^1/_{20}$ vor. Eingehende Versuche hierüber Heft 25 der Veröff. d. Deutschen Eisenbeton-Aussch., W. Ernst & Sohn.

Versuche über E bei Zug von Wayss & Freytag (1901)**) lehren, dafs die vielfach übliche Annahme: $E_{\text{Zug}} = {}^1/_9$ bis $^1/_{25}\,E_{\text{Druck}}$, i. M. $= {}^1/_{16}\,E_{\text{Druck}}$, nicht zutrifft. Danach ist $E_{\text{Zug}} : E_{\text{Druck}} = 0{,}88$ bis $0{,}73$ für $\sigma = 3$ bis 6 kg/qcm.

Die österreichischen Betonbestimmungen setzen $E_{\text{Zug}} = 56\,000$.

Gleitmafs für Beton G etwa 80 000 bis 90 000, allgemein $= 0{,}5\,E$.††)

Ziegel (mit $K = 284$, $K_2 = 20$) haben nach E. Hartig etwa $E =$ 93 000, Klinker (Mergelklinker mit $K = 780$, $K_2 = 52$) $E = 210\,000$.***)

Nach der preufsischen Ministerialbestimmung vom 21. Januar 1909 ist für Ziegel $E = {}^1/_{25}\,E_{\text{Flufseisen}} = 86\,000$.

Nach Versuchen an Gewölben†) ist das mittlere Elastizitätsmafs E für die Spannungsgrenzen 0 und σ_p

für Bruchstein	Ziegelstein	Stampfbeton	Moniergewölbe
$E =$ 60 400	27 800	246 000	333 500.

f. Zugorgane.

Die Zugfestigkeit gezogener **Drähte** ist abhängig vom Drahtdurchmesser. Sind c und K_0 Unveränderliche, so ist für den Drahtdurchmesser d in **mm** die Zugfestigkeit in kg/qcm $K_z = \dfrac{c}{d} + K_0$.

Werte von c und K_0 nach Karmarsch.†††)

Drahtsorte	ungeglüht		geglüht		Drahtsorte	ungeglüht		geglüht	
	c	K_0	c	K_0		c	K_0	c	K_0
Bester Eisendraht .	1590	6370	380	3320	Messingdraht . . .	1020	5480	700	2870
Gewöhnl. Eisendraht	2290	4580	640	2870	Harter Bleidraht . .	0	220	.	.
Stahldraht	2670	6370	380	5730	Weicher Bleidraht .	0	170	.	.
Zinkdraht	220	1270	.	.	Platindraht	1210	2230	966	1850
Kupferdraht	960	3500	0	2360	Bronzedraht	1860	5030	.	.

*) Z. d. V. d. I. 1896 S. 1391. — **) E. Mörsch, Der Eisenbetonbau, 1906 S. 25 ff. — ***) Civ.-Ing. 1893 S. 323. — †) Bericht des Gewölbe-Ausschusses des Oesterr. Ing.- u. Arch.-Vereins in Wien, auch Z. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895. — ††) Angaben von Föppl und C. Bach a. Zentralbl. Bauv. 1913 S. 452. — †††) Handb. d. mechan. Technologie, 5. Aufl., I. S. 196.

Digitized by Google

Vom Drahtdurchmesser unabhängige, mittlere Werte der Zugfestigkeit K_z enthält die folgende Tafel.

Stoff	Elastizit.-Maſs für Zug $E = 1 : \alpha$ kg/qcm	Prop.-Grenze für Zug σ_p kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Bemerkungen
Eisendraht { blank gezogen	.	4200	5600 (bis 7000)	Für einmal geflochtene (Drahtspiral-) Seile $E_1 = 0{,}6\ E$, für doppelt geflochtene (übliche) Seile $E_1 = 0{,}6^2\ E$, für dreifach geflochtene Seile (mehrere Litzen zu einem Strang, mehrere Stränge zu einem Seil — Kabelseile) $E_1 = 0{,}6^3\ E$, worin E das Elastizitätsmaſs des betr. Drahtes ist.[4]
Eisendraht { geglüht . .	2000000	2000	4000[1]	
Bessemerstahldraht { blank . .	.	5200	6500	
Bessemerstahldraht { geglüht .	2150000	2250	4000—6000	
Tiegelstahldraht . .	2150000	10000	9000—19000[2]	
Chromnickeldraht[3]	.	.	9070	
Zinkdraht	150000	.	1900	
Kupferdraht . . .	1300000	1200	4000	
Bronzedraht . . .	.	.	4600—7100	
Siliziumbronzedraht	.	.	6500—8500	
Doppelbronzedraht .	.	.	7600	
Phosphorbronzedraht, geglüht . .	.	.	6300	
Messingdraht . . .	1000000	1300	5000—6100	
Aluminiumdraht 4 mm	.	.	1670—2040	$\sigma_s = 1450$[5]
dgl. kalt geschmiedet .	.	.	2300—2700	Bei 460^0 $K_z = 160$
Alum.-Bronzedraht (10 %) gegossen[5] .	.	.	6500	
Magnaliumdraht . .	.	.	3300—3700	$\varphi = 6\ \%$
Bleidraht	70000	.	220 hart, 170 weich	$G = 26250$
Tantaldraht, 0,035 mm stark[6]	.	.	27 000	
Wolframdraht, gezogen, 0,015 mm stark[7] . .		.	60 000—70 000	
Dgl., 0,03 mm stark[8] .	.	.	42 000	
Molybdändraht, gezogen, bis 0,04 mm stark[8] .	.	.	22 000	
Lederriemen, neu .	1250	160	250—450[9]	Gebrauchtes Leder für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{415}\sigma^{0,7}$, falls $\sigma = 3{,}9$ bis $27{,}2$
„ gebraucht	2250	.		
Manila- und Schleifshanfseile . . .	6000 bis 15000, i. M. 7500[10]		1200 bis 1350 neu[10], 500 alt[10]	
Drahtseile	s. o. bei Eisen- u. Stahldraht.		.	

[1]) Verzinkter, geglühter Flufseisendraht für Telegraphenzwecke $K_z = 4000$ bis 4300.

[2]) Zur Kraftübertragung für landwirtschaftliche Maschinen wird zu Drahtseilen Stahldraht von $K_z = 25\,300$ verwendet; Zentralbl. Bauv. 1886 S. 371.

Verzinkter Telegraphendraht $K_z = 18\,500$. — Gufsstahldraht zu Förderseilen (namentlich bei Menschenförderung) $K_z = 11\,500$ bis 13 000, a. Umst. bis 20 000 gewählt.

Verzinnter Saitenstahldraht $K_z = 17\,300$ bis 22 000. A. Riedinger, Augsburg, liefert Stahlkabel mit $K_z = 22\,000$ des Drahtes bei 0,2 bis 0,37 mm Dicke.

[3]) Von C. Schniewindt, Neurode (Westf.). Spez. Gew. 8,03; Erstarrungstemp. 1335°. Wärmedehnung $\alpha = 0{,}000124$ (El. Kraftbetr. u. B., 1913 S. XII).

Digitized by Google

[4]) Werte von K_z für **Drahtseile** s. auch 6. Abschn., Maschinenteile.

[5]) Draht **aus anderen Aluminiumlegierungen** (nach Moedebeck). Werte von K_z: Wolframinium 3000, Chromaluminium 4500, Nickelaluminium 4000, Viktoria-Aluminium (Cu, Sn, Al) [Partinium], gegossen, 1500, Aluman (10 Zn, 2 Cu, 88 Al), kalt geschmiedet, 3000. — Ueber Aluminiumdraht s. Engineering 1913 II S. 197.

[6]) Dingler Pol. J. 1913 S. 292. — [7]) A. a. O., 1913 S. 305. — [8]) A. a. O., 1910 S. 636 (nach Coolidge).

[9]) Bei schnellem Zerreifsen. Für monatelange Belastung sinkt K_z bis auf das $^3/_5$fache herab. E nimmt mit wachsendem σ stark zu, Riemen sind also um so weniger elastisch, je stärker sie gespannt werden.

Zugfestigkeit K_z **anderer Riemen** nach Thomae, Z. d. V. d. I. 1901 S. 353: Schlangenleder (100 mm breit, sehr dünn) 500; Chromleder (Mitte der Bauchseite, Längsrichtung) 600 bis 900 (gegen 300 bis 400 bei lohgarem Leder); Kamieriemen 820; gewebte Baumwollriemen 300, genähte dgl. 450 bis 520; Balatariemen 450; Kamelhaarriemen (Kette Kamelhaar, Einschlag Baumwolle) 400 kg/qcm.

[10]) Bezogen auf den tatsächlichen Querschnitt der Litzen $= 0{,}66\,\frac{\pi d^2}{4}$, wo d der Seildurchmesser. Bezieht man K_z auf den Querschnitt $\frac{\pi d^2}{4}$, so ergeben sich Werte $= ^2/_3$ der angegebenen.

C. Zulässige Spannungen.

a. Zulässige Spannungen für den Maschinenbau.

Erklärung des Begriffes der zulässigen Spannung S. 486.

In nachstehender Tafel gelten die zulässigen Spannungen unter I, wenn die Belastung eine ruhende ist.

Die zulässigen Spannungen unter II gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von null bis zu einem gröfsten Werte stetig wachsen und dann wieder auf null zurücksinken (z. B. wiederholte Dehnung, wiederholte Biegung, wiederholte Drehung nach einer Richtung hin).

Die zulässigen Spannungen unter III gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem gröfsten negativen Werte stetig wachsen bis zu einem gröfsten positiven, absolut gleich grofsen Werte, dann wieder abnehmen (z. B. wiederholte Biegung und wiederholte Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hin). Der Wechsel der Beanspruchung kann auch durch Aenderung der Temperatur bewirkt werden.

Für die zwischenliegenden Arten der Belastung können dazwischenliegende, den Spannungsgrenzen entsprechende Werte genommen werden.

Wenn Bauteile gegen die Wirkung bewegter Massen widerstandsfähig zu machen sind, so ist dafür eine besondere Rechnung anzustellen und u. Umst. die eigentümliche Beanspruchung (Stöfse) durch Verminderung der zulässigen Spannungen schätzungsweise zu berücksichtigen.

Gegen die Wirkung bewegter Massen sowie gegen die Einwirkung von Spannungen, die durch stark wechselnde Belastungen oder durch starke Warmeschwankungen veranlafst werden, empfiehlt sich die Wahl eines Stoffes mit ausreichend grofsem Arbeitsvermögen.

Digitized by Google

Zulässige Spannungen in kg/qcm, nach C. Bach.

Art der Festigkeit und Belastung		Schweifseisen[1]	Flufseisen[2]		Flufsstahl[2]		Stahlgufs		Gufseisen	Kupferblech, gewalzt
			von	bis	von	bis	von	bis		
Zug k_z	I	900	900	1500	1200	1800	600	1200	300	600[3]
	II	600	600	1000	800	1200	400	800	200	300
	III	300	300	500	400	600	200	400	100	.
Druck k	I	900	900	1500	1200	1800	900	1500	900	.
	II	600	600	1000	800	1200	600	1000	600	.
Biegung k_b	I	900	900	1500	1200	1800	750	1200	.	.
	II	600	600	1000	800	1200	500	800	.[4]	.
	III	300	300	500	400	600	250	400	.	.
Schub k_s	I	720	720	1200	960	1440	480	960	300	.
	II	480	480	800	640	960	320	640	200	.
	III	240	240	400	320	480	160	320	100	.
Drehung k_d	I	360	600	1200	900	1440	480	960	.	.
	II	240	400	800	600	960	320	640	.[5]	.
	III	120	200	400	300	480	160	320	.	.

[1]) Für **vorzügliches Schweifseisen** können die angegebenen zulässigen Spannungen um Beträge bis zu einem Drittel höher genommen werden.

[2]) Die höheren Werte sind nur bei durchaus zuverlässigem Stoff anzuwenden (S. 487). — Für **Draht** gelten, entsprechend der gröfseren Zugfestigkeit, gröfsere Werte für k_z. Höhere Werte sind auch zulässig bei Verwendung von Spezialstahlen von höherer Festigkeit und Elastizitätsgrenze (S. 483).

[3]) Bei Windkesseln gröfser Feuerspritzen sei $k_z \leqq 800$, bei Zentrifugen $k_z = 500$.

[4]) Für **bearbeitetes Gufseisen** (S. 523) setze man die zulässige **Biegungsspannung**

$$k_b = \mu k_z \sqrt{\frac{e}{z_0}}, \text{ worin}$$

$\mu = 1{,}20$ bis $1{,}33$, und für den Balkenquerschnitt mit bezug auf S. 523,
e den Abstand der am stärksten gespannten Faser von der Nullachse,
z_0 den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittfläche von der Nullachse bezeichnet.

Versuche ergaben für den rechteckigen Querschnitt $k_b = 1{,}7\,k_z$, für den kreisförmigen Querschnitt $k_b = 2{,}05\,k_z$, für den I-förmigen Querschnitt $k_b = 1{,}45\,k_z$.

Für **vorzügliches Gufseisen** in Formen, die Gewähr für geringe Gufsspannungen und vollkommene Dichtheit bieten, können die für k_z und k_b gegebenen Werte um Beträge bis zur Hälfte, unter Umständen um noch mehr, höher genommen werden.

Für **Rohgufs** ergab sich $k_b = 1{,}4\,k_z$ bzw. $k_b = 1{,}7\,k_z$ und $k_b = 1{,}2\,k_z$ bei den vorstehend bezeichneten Querschnitten.

[5]) Die zulässige **Drehungsspannung** k_d des **bearbeiteten Gufseisens** setze man

für den kreisförmigen Querschnitt . . . . . $k_d =$ (reichlich) k_z,
" " kreisringförmigen und hohlelliptischen Querschnitt $k_d = 0{,}8\,k_z$ bis k_z,
" " elliptischen Querschnitt . . . . . $k_d = k_z$ bis $1{,}25\,k_z$,
" " quadratischen Querschnitt . . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$,
" " rechteckigen, dreieckigen und trapezförmigen Querschnitt . . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$ bis $1{,}6\,k_z$,
" " hohlrechteckigen Querschnitt . . . . . $k_d = k_z$ bis $1{,}25\,k_z$,
" " I-, E-, +, L-förmigen Querschnitt . . . . . $k_d = 1{,}4\,k_z$ bis $1{,}6\,k_z$.

Der Einfluss der Gufshaut ist hier weit geringer als bei der Biegungsspannung

Digitized by Google

Für sehr guten gehärteten **Federstahl** ist nach C. Bach im Falle I $k_b = 7500$, $k_d = 6000$, im Falle II $k_b = 5000$, $k_d = 4000$ zu setzen. Bei Anwendung von Spezialstahl finden sich bei zylindrischen Schraubenfedern Werte $k_d = 10\,000$ und mehr. Nach Wöhler wähle man für gehärtete Eisenbahnfedern i. M. $k_b = 6500$ kg/qcm, wobei ein Spielen zwischen 6500 und 8600 zulässig; Stambke empfiehlt $k_b = 5500$ bis 5800, Bach 6000 bis 6500 kg/qcm unter Zugrundelegung der ruhigen Last. Bei Verwendung von Spezialstahl für Federn kommen Beanspruchungen von $k_d = 10\,000$ und darüber vor.

b. Zulässige Spannungen für den Hochbau (in kg/qcm).

1. Metalle.

I. Preußische Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmende Beanspruchung der Baustoffe vom 31. 1. 1910.

Metall	Zug k_z	Druck k	Biegung k_b	Schub k_s
Flußeisen in Trägern zur Unterstützung von Decken und Treppen	1200	1200	1200	1000 [1])
Als Stützlänge ist die Entfernung zwischen den Auflagermitten anzunehmen.				
Flußeisen in Stützen	1200	1200	1200	1000
Flußeisen in Stützen bei genauer Berechnung der unter den ungünstigsten Umständen auftretenden Kantenpressung	1400	1400	1400	1000
Berechnung auf Knicken mit 5facher Sicherheit (Formel $J_{min} = 2{,}33\, P_1 l^2$; S. 513 u. 515).				
Als Knicklänge gilt die ganze Systemlänge, bei übereinanderstehenden, allseitig durch Deckenträger ausgesteiften Stützen die Geschoßhöhe.				
Flußeisen in Dächern, Fachwerkwänden, Trägern zur Unterstützung von Wänden, Kranbahnträgern, wenn die Querschnittgröße durch Eigenlast, Nutzlast und Schneedruck allein bedingt ist	1200	1200	1200	1000
Flußeisen in denselben Bauteilen, wenn die größte Spannung bei gleichzeitiger ungünstigster Wirkung von Eigenlast, Nutzlast, Schneedruck und Winddruck von 150 kg/qm eintritt.	1400	1400	1400	1000
Ausnahmsweise darf bei Dächern, wenn für eine den strengsten Anforderungen genügende Durchbildung, Berechnung und Ausführung volle Sicherheit gegeben ist, für den vorstehenden Fall die Spannung betragen bis	1600	1600	1600	.

Digitized by Google

Metall	Zug k_z	Druck k	Biegung k_b	Schub k_s
Für Träger zur Unterstützung von Wänden gilt die Entfernung der Auflagermitten als Stützweite.				
Druckglieder sind auf Knicken mit 4facher Sicherheit (Formel $J_{min} = 1{,}82\, P_1 l^2$; S. 515) zu berechnen; als Knicklänge gilt die Systemlänge.				
Flufseisen in Ankern	800	.	.	.
Flufseisenstäbe in Bauteilen aus Eisenbeton, insbesondere bei Beanspruchung der Bauteile auf Biegung[2])	1000	1000	.	.
Dgl., wenn für das Eisen folgende Mindestfestigkeiten K_z und Streckgrenzen σ_f nachgewiesen sind: bei 10 mm ⌀: $K_{z\,min} = 4200$ $\sigma_f = 2520$ bis 2940[3])				
„ 20 „ „ 4050 „ 2430 „ 2835				
„ 30 „ „ 3800 „ 2280 „ 2660	1200	1200	.	
Für Schweifseisen sind die für Flufseisen angegebenen Werte um 10 % zu ermäfsigen. Noch weiter herabzusetzen ist die Beanspruchung von altem, wieder zur Verwendung gelangendem Eisen je nach seiner Beschaffenheit.				
Gufseisen in Auflagern	.	1000	.	.
Gufseisen in Säulen	.	500	250	200
Berechnung der gufseisernen Säulen auf Knicken mit 6- bis 8facher Sicherheit nach der Formel $J_{min} = 6$ bis $8\, P_1 l^2$ (S. 513 u. 515).				
Stahlformgufs	.	.	1200	.
Schmiedestahl	1400	1400	1400	.
Zinkblech	200	200	150	

[1]) Für Niete und gedrehte Schraubenbolzen; Lochleibungsdruck durchweg $k = 2000$. Bei gewöhnlichen Schraubenbolzen $k_s = 750$, Lochleibungsdruck $k = 1500$.

[2]) Preufs. Minist.-Erl. (Eisenbetonbestimmungen) vom 24. 5. 1907.

[3]) „ „ „ vom 22. 4. 1913.

II. Zulässige Spannungen des Eisens bei **Brücken** gemäfs Preufs. Minist.-Erl. vom 1. 5. 1903, Bd. III, Abschn. Statik der Baukonstruktionen, S. 73.

Nickelstahl (mit 2,5 % Ni) $k_z = 1750$; in Amerika (Manhattanbrücke) beispielsweise (bei 3,25 % Ni mit $K_z = 6000$ bis 6700, $\sigma_e > 3900$, $\varphi > 20$, $\psi = 40$) $k_z = 2810$, $k_s = 1400$, Lochleibungsdruck 2460, $k = 2810 - 10{,}55\, l : i$, worin l Stablänge, i Trägheitshalbm. des Querschnitts.

III. Ueber die zulässigen Spannungen des Schweifs- und Flufseisens für wiederholte Zug- und Druckbeanspruchungen mit Rücksicht auf Stöfse, Zuschlag- und Nebenspannungen S. 510 ff.

Digitized by Google

2. Hölzer.

Die fett gedruckten Zahlen sind vom preufs. Ministerium d. öffentl. Arb. vorgeschrieben (Erl. v. 31. 1. 1910).

Die oberen Grenzwerte dürfen keinesfalls überschritten werden.

Holzart	Zug k_z	Druck k ∥	Druck k ⊥	Biegung k_b	Schub k_s ∥ zur Faser	Schub k_s ⊥ zur Faser
Eichenholz[1]) . .	**100—120**	**80—100**	45	**100—120**	**15—20**	**80—90**
Kiefernholz . . (astfrei)	**100—120**	**60—80**	.	**100—120**	**10—15**	**60—70**
Tannenholz . . .	60	50	.			
Rottannenholz[2]) . .	.	80	12	.		
Eschenholz . . .	100—120	66	.	.		
Hartholz (Tallowwood)	200	160	.	200		30
Norweg. Pine[3]) . .	.	.	18	.		

[1]) Auch für Buchenholz anwendbar. — [2]) Der Eisenbau 1910, November.

Bei Bauten für vorübergehende Zwecke (Ausstellungshallen u. dgl.) dürfen die Zahlen um 50 % erhöht werden. Stützen sind auf Knicken mit 6- bis 10facher Sicherheit ($J_{min} = 60\ P_1 l^2$ bis $100\ P_1 l^2$) zu berechnen. Die untere Grenze von J gilt nur für vorübergehende Bauten.

3. Steine, Mauerwerk und andere Baustoffe.

I. Vorschrift des preufs. Ministeriums d. öffentl. Arb. vom 31. 1. 1910.

Natürliche Bausteine	Auflagersteine	Pfeiler u. Gewölbe	Sehr schlanke Pfeiler u. Säulen
	$S = 10—15$	$S = 15—20$	$S = 25—30$
Granit . . $k =$	**60—90**	**45—60**	**25—30**
Sandstein . $k =$	**30—50**	**25—30**	**15—20**
Kalkstein u. Marmor $k =$	**30—40**	**20—30**	**12—15**

Die Sicherheitsmafse S sind vorgeschrieben, die fett gedruckten Druckspannungen k ebenfalls, soferu besondere Festigkeitsnachweise nicht erbracht sind. Sind solche erbracht, so werden gegebenenfalls höhere Werte von k bis zu den angegebenen Grenzen empfohlen.

Mauerwerk	Druck k kg/qcm	Mauerwerk	Druck k kg/qcm
Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel 1 : 3	bis 7	Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkmörtel 1 : 3	bis 7
Mauerwerk in Hartbrandsteinen in Kalkzementmortel 1 Z. : 2 K. : 6—8 S.	12—15	Dsgl. in Kalkzementmörtel 1 Z. : 2 K. : 6—8 S. . .	12—15
Klinkermauerwerk in Zementmörtel 1 : 3 . . .	20—30	Bruchsteinmauerwerk in Kalkmörtel	bis 5
Mauerwerk aus porigen Ziegeln	3—6	Fundamentmauerwerk aus Schüttbeton	6—8
Mauerwerk aus Schwemmsteinen von $K > 20$ kg/qcm	bis 3	Stampfbeton	10—15

Digitized by Google

Guter Baugrund $k = 3$ bis 4 kg/qcm. Höhere Beanspruchung ist besonders zu begründen.

Im besonderen werden (nicht amtlich) folgende Druckbeanspruchungen für den Baugrund empfohlen (III. Bd. S. 185 ff.):

Feiner Sand, nicht fest gelagert	$k = 1{,}5$ bis 2,5 kg/qcm
Sehr fester, dichter Sand	6,5 „ 7,5 „
Trockener, festgelagerter kiesiger Baugrund ohne Ton	2,5 „ 5,0 „
Lehmiger Boden mit 30 bis 70 % Sand	0,8 „ 1,6 „
Fester Ton, mit feinem Sand gemengt	4,0 „ 5,0 „
Harter Mergel	5,4 „ 8,7 „
Fester, schiefriger und feiner Schotter	6,5 „ 8,7 „
Sandstein, der in der Hand zerbröckelt	1,6 „ 1,9 „
Fester Fels	9,0 „ 20 „

II. Schaper*) macht für **Brücken** die Druckspannung der Lagersteine abhängig von der Spannweite l und empfiehlt für die **Zwischenlage** aus Mörtelguſs zwischen Eisenlager und Stein, unabhängig von dem Baustoffe des Lagersteins bei $l = 10$ m $k = 20$, bei $l = 100$ m $k = 50$ kg/qcm mit geradliniger Zwischenschaltung, gleichmäſsige Druckverteilung vorausgesetzt (Kantenpressungen 20 % höher); für die **Untermauerung** des Auflagersteines, Beton (1 Z., 0,7 Trafs, 3 S., 7 K.) mit $K = 150$ nach 28, $K = 210$ nach 100 Tagen bei $l = 10$ m $k = 10$, bei $l = 100$ m $k = 40$ kg/qcm. (Kantenpressungen 20 % höher.)

III. **Beton für Verbundbauten**, nach der preuſs. Minist.-Best. vom 24. 5. 1907: bei Beanspruchung auf **Biegung** $k = {}^1/_6 K$, $k_z = {}^1/_3 K_z$, wenn K_z versuchsmäſsig nachgewiesen ist, oder $k_z \leqq 0{,}1 K$ bei fehlendem Nachweise von K_z; bei Beanspruchung auf achsialen **Druck** $k = 0{,}1 K$. Ferner die zulässige **Schub- und Haftspannung** $\tau = 4{,}5$ kg/qcm bei fehlendem Nachweise der Schubfestigkeit K_s, oder $= 0{,}2 K_s$ bei nachgewiesener Schubfestigkeit K_s.

IV. **Stampfbeton ohne Eiseneinlagen** nach der preuſs. Minist.-Best. vom 8. 12. 1910: $k = {}^1/_5 K$ nach 28 Tagen für ruhende Last. Bei Stützen und Pfeilern, wenn $b_{min} : l > 1 : 1$, $k = {}^1/_5 K$; wenn $b_{min} : l > 1 : 5$, $k = {}^1/_{10} K$; wenn $b_{min} : l > 1 : 10$, $k = {}^1/_{20} K$. Zwischenwerte sind geradlinig einzuschalten. Betonzugspannungen sind unberücksichtigt zu lassen (b_{min} = kleinste Breite, l = Länge).

Glas $k = 25$. Für **geblasenes** Glas ist $k_b = 125$ kg/qcm, für **Rohglas** (von $s = 0{,}5$ bis 1,5 cm Dicke) ist nach Schwering $k_b = {}^1/_3 [200 + 160 (1{,}5\ s)^2]$ kg/qcm.

Rammpfähle III. Bd., Abschn. Grundbau.

Bestimmungen über die Beanspruchung der bei **Sohornsteinen** verwendeten Stoffe Minist.-Erl. v. 30. 4. 1902), II. Bd., Abschn. Kraftmaschinen, Dampfkessel, S. 49.

II. Festigkeit gerader Stäbe.

Bemerkung. Wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, ist stets das Hookesche Gesetz (S. 482) als gültig angenommen.

A. Zug- und Druckfestigkeit.

1. Die **Belastung** P in kg, die ein auf Zug oder Druck beanspruchter **prismatischer** Stab vom Querschnitte F qcm mit Sicherheit tragen kann, ist $P = F k_z$ oder $P = F k$, wenn k_z die zulässige Zugspannung, k die zulässige Druckspannung in kg/qcm bedeutet.

---

*) Zentralbl. Bauv. 1909 S. 663.

Digitized by Google

Ist der Stab von veränderlichem Querschnitt, so ist für die Berechnung der Tragkraft der kleinste Querschnitt maßgebend.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes bedeutend ist, sind auf Knickfestigkeit zu berechnen; näheres S. 512 ff.

Die bei der Spannung σ oder der Belastung P eintretende **elastische Verlängerung** oder **Verkürzung** λ eines prismatischen Stabes von der ursprünglichen Länge l beträgt ($\lambda : l = \varepsilon$, S. 481)

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{Pl}{FE},$$

wenn E das (als unveränderlich angenommene) Elastizitätsmaß für Zug bzw. Druck bezeichnet. Ueber die bei der elastischen Längenänderung verrichtete **Arbeit** s. S. 484, unter 7.

Abb. 2.

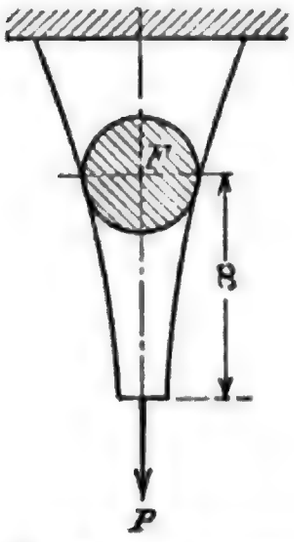
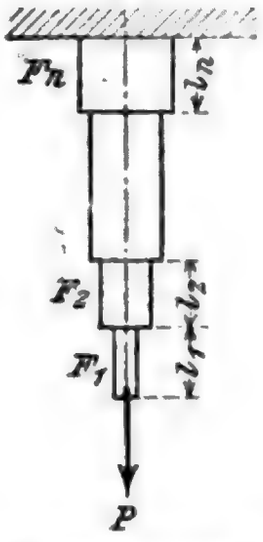


Abb. 3.



2. Die Form eines Stabes von **gleichem Widerstande** gegen Zug und Druck (Abb. 2) mit Rücksicht auf das Eigengewicht ist, wenn die Schwerachse des Stabes in die Richtung der angreifenden Kraft P fällt, bestimmt durch die Gleichung

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma}{k} x} \quad \text{oder}$$

$$\lg F = \lg \frac{P}{k} + 0{,}4343 \frac{\gamma}{k} x,$$

worin

F den veränderlichen Querschnitt des Stabes in dem beliebigen Abstande x cm vom belasteten Ende in qcm,
P die am Stabende wirkende Belastung in kg,
k die zulässige Zug- oder Druckspannung in kg/qcm,
γ das Eigengewicht des Stabes in kg/ccm,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (S. 43) bezeichnet.

Bezeichnet ferner für die aus prismatischen Teilen von verschiedenen Querschnitten zusammengesetzte **Annäherungsform** des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug und Druck (Abb. 3)

l_n die Länge des n^{ten} prismatischen Stabteiles, vom belasteten Ende an gerechnet, in cm,
F_n den Querschnitt dieses Teiles in qcm, so gilt die Gleichung

$$F_n = \frac{P k_{n-1}}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2) \dots (k - \gamma l_n)}.$$

Die bei der Längenänderung des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug oder Druck verrichtete **Arbeit** ist in cmkg

$$A = \frac{P}{\gamma} \frac{k^2}{2E} \left(e^{\frac{\gamma}{k} x} - 1 \right);$$

Digitized by Google

ist l die Stablänge, so beträgt die **elastische Verlängerung** des Stabes

$$\lambda = \frac{k\,l}{E}.$$

3. Druck auf Körper mit gewölbter Oberfläche.[1]) (Hertzsche Gleichungen.)

a. Zwei Kugeln. Beim zentrischen Druck zweier Kugeln, deren Halbmesser $= r_1$ und r_2 cm und deren Dehnungszahlen $= \alpha_1$ und α_2, ergibt sich, wenn P die Druckkraft bedeutet und für beide Kugeln das Verhältnis $m = \varepsilon : \varepsilon_Q$ (S. 481) $= {}^{10}/_{3}$ angenommen wird,

der Halbmesser der kreisförmigen Druckfläche (in cm) aus

$a^3 = 0{,}68\,P\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}}$; die gröfste Druckspannung in der Mitte der Druckfläche (in kg/qcm)

$$\sigma_{max} = 1{,}5\,\frac{P}{\pi a^2} \quad \text{aus} \quad \sigma^3_{max} = 0{,}235\,\frac{P\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2};$$

die Strecke (in cm), um die sich unter der Last P die Kugeln einander nähern, aus

$$y^3 = 0{,}46\,P^2\,(\alpha_1+\alpha_2)^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{E}$, also für gleich elastische Kugeln ergibt sich:

$$a^3 = 1{,}36\,\frac{P}{E\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)},$$

$$\sigma^3_{max} = 0{,}059\,PE^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2, \qquad y^3 = 1{,}84\,\frac{P^2}{E^2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Für zwei gleich grofse Kugeln vom Halbmesser r

$$a^3 = 0{,}68\,\frac{Pr}{E} = 0{,}34\,\frac{Pd}{E}, \qquad \sigma^3_{max} = 0{,}235\,\frac{PE^2}{4r^2} = 0{,}94\,\frac{PE^2}{d^2},$$

$$y^3 = 3{,}68\,\frac{P^2}{E^2 r} = 7{,}36\,\frac{P^2}{E^2 d}.$$

b. Kugel und ebene Platte. Für $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ gehen die ersten beiden Gruppen von Gleichungen über in:

$$a^3 = 0{,}68\,Pr\,(\alpha_1+\alpha_2) \quad \text{bzw.} \quad a^3 = 1{,}36\,\frac{Pr}{E},$$

$$\sigma^3_{max} = \frac{0{,}235\,P}{r^2\,(\alpha_1+\alpha_2)^2} \quad \text{„} \quad \sigma^3_{max} = 0{,}059\,\frac{PE^2}{r^2},$$

$$y^3 = \frac{0{,}46\,P^2\,(\alpha_1+\alpha_2)^2}{r} \quad \text{„} \quad y^3 = 1{,}84\,\frac{P^2}{Er}.$$

---

[1]) Nach C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl., 1911 S. 181. — Versuche von Stribeck Z. d. V. d. I. 1907 S. 1500.

Digitized by Google

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt $P = 4\,cr^2 = cd^2$, wo c eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche $= 4{,}26\,\frac{\sigma^3_{max}}{E^2}$ ist.

c. Zwei Kreiszylinder. Sind r_1 und r_2 die Halbmesser der Grundflächen, l die Höhe der Zylinder (in cm), so ergibt sich die Breite der rechteckigen Druckfläche (in cm) aus

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29\,\frac{P}{l}\,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}, \qquad \sigma^2_{max} = \left(\frac{4}{\pi}\,\frac{P}{bl}\right)^2 = 0{,}35\,\frac{P}{l}\,\frac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{E}$, also für gleich elastische Zylinder ergibt sich

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}58\,\frac{P}{El}\,\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}, \qquad \sigma^2_{max} = 0{,}175\,\frac{PE}{l}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Für zwei gleich grofse Zylinder, deren Halbmesser $= r$,

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29\,\frac{Pr}{El}, \qquad \sigma^2_{max} = 0{,}35\,\frac{PE}{lr}.$$

d. Kreiszylinder und ebene Platte. Für $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen:

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}29\,\frac{Pr}{l}(\alpha_1+\alpha_2) \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0{,}58\,\frac{Pr}{El},$$

$$\sigma^2_{max} = 0{,}35\,\frac{P}{lr(\alpha_1+\alpha_2)} \quad ,, \quad \sigma^2_{max} = 0{,}175\,\frac{PE}{lr}.$$

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt $P = 2\,clr = cld$, wo c eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche $= 2{,}86\,\frac{\sigma^2_{max}}{E}$ ist.

e. Wegen der zum Teil unzutreffenden Voraussetzungen der Hertzschen Theorie (u. a. sind die Zugspannungen in Ebenen quer zur Druckrichtung nicht berücksichtigt) sind die Werte der Unveränderlichen c in allen Fällen durch **Versuche** zu ermitteln; weiteres hierüber 6. Abschn., Maschinenteile, Lager.

4. Wahl der zulässigen Zug- und Druckspannung.

Für Bauteile, die eine im wesentlichen **ruhende** Belastung haben, sind die Werte von k_z und k auf S. 502 u. 504 angegeben.

Bei stark **wechselnder** Belastung, namentlich bei eisernen Brücken mit veränderlicher Verkehrslast, sind die zulässigen Spannungen mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Wöhlerschen Dauerversuche zu wählen. Diese Ergebnisse sind folgende:

1. Wiederholte Beanspruchung eines Stabes führt den Bruch bei einer geringeren Spannung herbei als bei dem Werte K_z bzw. K für ruhende Last.

2. Die Anzahl der zum Bruche erforderlichen Beanspruchungen ist um so gröfser, je kleiner die gröfste Spannung (bei unveränderlicher kleinster Spannung) ist, oder je gröfser die kleinste Spannung (bei unveränderlicher gröfster Spannung) ist.

Digitized by Google

3. Die gröfste Spannung, bei der selbst nach unbegrenzt vielen Belastungswechseln ein Bruch nicht eintritt (**Arbeitsfestigkeit**), ist um so gröfser, je gröfser die kleinste Spannung ist.

Hiernach ist es angemessen, die Gröfse der zulässigen Spannung abhängig zu machen von den Grenzen der Spannkraft. Bei Brücken ist aufserdem die Wirkung von Stöfsen der Verkehrslast zu berücksichtigen.

Insbesondere für **eiserne Stäbe** (bei Brückenträgern) ergibt sich folgende Querschnittbestimmung. Es bezeichne

F in qcm den (kleinsten) Querschnitt eines Stabes,

S_0 in kg die durch das Eigengewicht allein in dem Stabe hervorgerufene Spannkraft,

S_1 in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf derselben Seite von null liegt wie S_0,

S_2 in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf der entgegengesetzten Seite von null liegt wie S_0 (wenn also S_0 und S_1 den Stab auf Zug beanspruchen, so ist S_2 ein Druck und umgekehrt),

σ_e die Elastizitätsgrenze in kg/qcm (S. 483); für Schweifseisen ist $\sigma_e = 1600$, für Flufseisen $\sigma_e = 2000$ kg/qcm, für Brücken-Nickelstahl σ_e etwa $= 3500$ kg/qcm,

k die zulässige Zug- oder Druckspannung bei ruhender Verkehrslast in kg/qcm,

ζ die Stofszahl der Verkehrslast (S. 512),

μ eine Zahl, welche die Neben- und Zuschlagspannungen berücksichtigt (S. 512),

S_{min} und S_{max} in kg die kleinste und die gröfste Spannkraft des Stabes durch das Eigengewicht und durch die mit der entsprechenden Stofszahl multiplizierte Verkehrslast.

Bei der Berechnung von **Blechträgern** treten an die Stelle der Spannkräfte $S_0, S_1, S_2, S_{min}, S_{max}$ die entsprechenden Biegungsmomente M oder $\mathfrak{M}$ (in cmkg) und an die Stelle von F tritt das Widerstandsmoment W (in cm³).

a. Formeln von Th. Landsberg.*)

Annahmen: Stofszahl $\zeta = 1{,}5$: $\sigma_{min} + \zeta(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{2}{3}\sigma_e$

1. Für **nur gezogene oder nur gedrückte** Stäbe

Schweifseisen	Flufseisen
$F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700}$	$F = \frac{S_0}{1350} + \frac{S_1}{900}$.

2. Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0 \text{ ist,}$$

Schweifseisen	Flufseisen
$F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100}$	$F = \frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{900} + \frac{S_2}{2700}$.

*) Z. hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 1858 S. 515.

Digitized by Google

3. Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0 \text{ ist,}$$

Schweifseisen	Flufseisen
$F = -\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700}$	$F = -\frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{2700} + \frac{S_2}{900}$.

b. Formeln von Häseler und Müller-Breslau.

Allgemein ist $$F = \frac{S_0 + S_1}{k}.$$

Ist der Stab **nur auf Zug oder nur auf Druck** (ohne Knickgefahr) beansprucht, so setze man

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1}.$$

Ist dagegen der Stab kurz hintereinander **Zug- und Druckbeanspruchungen** (ohne Knickgefahr) unterworfen, so empfiehlt sich

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{S_{min}}{S_{max}}\right).$$

Stofszahl ζ. Gerber empfiehlt $\zeta = 1{,}5$; Winkler für Eisenbahnbrücken $\zeta = 1{,}3$, für Strafsenbrücken $\zeta = 1{,}2$; Häseler nimmt ζ mit der Stützweite veränderlich an und empfiehlt

für $l =$	5	10	15	20	40	60	80	100	150 m
$\zeta =$	1,7	1,6	1,5	1,3	1,3	1,25	1,2	1,2	1,2

Werte von μ bei Balkenträgern auf zwei Stützen.

Art der Träger	Nebenspannung	Zusatzspannung	Zuschlag für etwaige Mehrbelastung	demnach $\mu =$
	in Prozent der durch S erzeugten Spannung			
Blechträger	10	30	20	1,6
Fachwerkträger:				
Knotenpunkte starr	40	30	20	1,9
Knotenpunkte gelenkig . . .	15	15	20	1,5

Die in den **preufsischen Vorschriften für die Berechnung eiserner Brücken** (Minist.-Erl. vom 1. 5. 1903) bestimmten zulässigen Spannungen Abschn. I Statik der Baukonstruktionen.

Für **Maschinenteile** ist der Einfluss stark wechselnder Belastung auf die zulässige Spannung in den Angaben von C. Bach auf S. 502 bis 504 berücksichtigt.

B. Knickfestigkeit.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Vergleich zu ihren Querschnittabmessungen grofs ist, sind auf Knicken zu berechnen.

Digitized by Google

Wenn auch die Belastung zentrisch sein, d. h. im Schwerpunkte der Endflächen angreifen sollte, so tritt doch, da die Stabachse nicht genau geradlinig und der Stoff nicht vollkommen gleichartig ist, eine Ausbiegung des Stabes ein, die zunächst unbestimmbar bleibt.

1. Eulersche Formeln.

Bezeichnet

l die Länge des auf Knicken beanspruchten Stabes in cm,
J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des gefährlichen Stabquerschnittes a (Abb. 4 bis 7) in cm^4,
F den kleinsten Querschnitt des Stabes in qcm,
k die zulässige Druckspannung des Stoffes in kg/qcm,
E das Elastizitätsmafs des Stoffes in kg/qcm (S. 482, 486 ff.),

so ist nach L. Euler je nach der Befestigungsweise der Stabenden

die Knickbelastung P_k (in kg), wenn

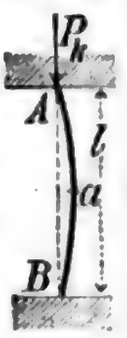
Abb. 4.

1) ein Ende eingespannt und das andere frei ist:

$$P_k = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Abb. 5.

2) beide Enden frei und in der ursprünglichen Achse AB geführt sind:



$$P_k = \pi^2\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Abb. 6.

3) ein Ende eingespannt und das andere frei in der ursprünglichen Achse AB geführt ist:

$$P_k \sim 2\,\pi^2\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Abb. 7.

4) beide Enden eingespannt und in der ursprünglichen Achse AB geführt sind:

$$P_k = 4\,\pi^2\,\frac{EJ}{l^2}.$$

Für π^2 darf angenähert 10 gesetzt werden.

Nach Versuchen von J. Bauschinger sind die Werte von P_k die Grenzbelastungen, bei denen die von vornherein vorhandene, mit allmählich wachsender Belastung des Stabes entsprechend zunehmende Durchbiegung fast plötzlich jeden mefsbaren Wert überschreitet.

Die Eulerschen Formeln sind nur dann zutreffend, wenn die mittlere Knickspannung $K_k = P_k : F$ (s. u.) die Proportionalitätsgrenze σ_p nicht überschreitet. Bei gröfseren Knickspannungen gelten die Tetmajerschen Formeln (S. 517).*)

*) Den derzeitigen Standpunkt der preufsischen Baubehörden in der Frage der Knickfestigkeit kennzeichnet folgender **Runderlafs des preufsischen Arbeitsministers** vom 10. 3. 1912, betr. die Berechnung und Ausbildung auf Knicken beanspruchter Bauglieder:

Für die Ermittlung der Knicksicherheit bleibt nach wie vor die vorgeschriebene Berechnungsweise, die sich nach der Erfahrung bewährt hat, mafsgebend. Es ist daher nachzuweisen, dafs der nach der Euler-Formel berechnete Sicherheitsgrad nicht geringer ist, als er in den Bestimmungen gefordert wird. Die Anwendung abweichender Regeln soll hierdurch nicht ausgeschlossen werden; solange sie aber nicht zu allseitiger Anerkennung gelangt sind, bedarf es daneben des Nachweises der Knicksicherheit nach der vorgeschriebenen Berechnungsweise.

Bei der Berechnung der Knicksicherheit sind mit besonderer Sorgfalt alle in Betracht kommenden Belastungsverhältnisse zu untersuchen. Namentlich dürfen, wenn nur zentrisch wirkende Belastung angenommen wird und wenn die Knicksicherheit nur eben den vorgeschriebenen Mindestwert hat, die untersten Werte der zulässigen Spannungen (S. 514 u. 515) nicht überschritten werden. Liegt exzentrischer oder quer gerichteter Kraftangriff neben der Knickung vor, so hat die Untersuchung der Stand-

Digitized by Google

Durch exzentrischen Kraftangriff wird die Knickfestigkeit bei schlanken Stäben nicht wesentlich, bei dicken Stäben sehr stark beeinflufst. Durch starre Einspannung der Stabenden wird nur bei sehr schlanken Stäben die Knickfestigkeit bedeutend erhöht.**)

Nach Engefser***) ist die Knicklast für Fall 2) genauer

$$P_k = \pi^2 \frac{T J}{l^2},$$

worin der „Knickmodul" T eine von der Querschnittform des Stabes unabhängige mittleren Verhältnissen entsprechende Gröfse ist, die zwischen dem innerhalb der Proportionalitätsgrenze geltenden Elastizitätsmafs E und (näher) dem Werte des Elastizitätsmafses $E_0 = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}$ liegt, welcher für eine Spannung gleich der Knickspannung $\sigma_k = P_k : F$ gilt und aus der Formänderungslinie $\sigma = f(\varepsilon)$ (PB in Abb. 1 auf S. 483) als Tangente des Neigungswinkels an diese im Punkte σ_k zu entnehmen ist.

Die **zulässige Belastung** (Tragfähigkeit) des auf Knicken beanspruchten Stabes beträgt (in kg) nur

$$P = P_k : \mathfrak{S},$$

wenn $\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet. Ergibt sich jedoch (bei kleinen Stablängen l) die zulässige Druckbelastung

$$P_0 = k F$$

kleiner als P, so ist die Tragfähigkeit des Stabes $= P_0$.

Bei Querschnittermittlungen auf Grund der Eulerschen Formeln ist daher stets zu untersuchen, ob die zulässige Druckspannung k für den gewählten Querschnitt nicht überschritten ist.

In den meisten Fällen ist der **Befestigungsfall** 2) (Abb. 5 S. 513) für die Rechnung vorauszusetzen, da auf vollkommene Einspannung eines Stabendes nur selten zu rechnen ist. Durch Einführung des Trägheitshalbmessers i (in cm), bestimmt durch die Gleichung $J = F i^2$ (S. 191), erhält man für Fall 2) auch den Ausdruck

$$P_k = \frac{\pi^2 E F i^2}{l^2},$$

woraus die beim Bruche des Stabes vorhandene **mittlere Knickspannung** K_k, wenn das Verhältnis $l : i$ mit x bezeichnet wird, sich ergibt zu

$$K_k = \frac{P_k}{F} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{x^2}\text{†)}.$$

Die **zulässige Knickspannung** $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{x^2 \mathfrak{S}}$.

Die **Grenzlänge** l_0 (in cm) ist die Stablänge, bei der die Tragfähigkeit für Druck und Knicken die gleiche ist; sie bestimmt sich aus

---

festigkeit sich auch auf die hierbei eintretenden gröfsten Kantenpressungen zu erstrecken. Nur unter dieser Voraussetzung dürfen die zulässigen erhöhten Spannungen (S. 504) Verwendung finden, und nur wenn bei Druckstäben von Fachwerken u. dgl. die erhöhten Spannungen nur ausnahmsweise, z. B. durch Hinzutreten des Winddruckes zu allen übrigen in der Regel vorhandenen Einwirkungen, eintreten können, darf bei Flufseisen unter Voraussetzung schärfster Berechnung eine Beanspruchung von 1600 kg/cm² eintreten.

Unbedingt ist zu beachten, dafs bei der Berechnung der Knickfestigkeit eines Stabes als **Knicklänge seine Systemlänge**, d. i. die aus dem Liniennetz des Bausystems zu entnehmende volle Länge, zu gelten hat.

**) Z. d. V. d. I. 1910 S. 329.

***) Eisenbau 1911 S. 385.

†) Ueber eine Verallgemeinerung dieser Formel s. T. Strand, Zentralbl. Bauv. 1914, S. 85 ff.

Digitized by Google

der Bedingung $\sigma_k = k$, und zwar ergibt sich die verhältnismäfsige Grenzlänge

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\mathfrak{S} k}},$$

und bei gleicher Sicherheit gegen Druck und Knicken, wenn K die Druckfestigkeit bezeichnet,

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{K}}.$$

In folgender Tafel sind für die wichtigsten Baustoffe die bei Hochbauten üblichen Werte des Sicherheitsgrades $\mathfrak{S}$ gegen Knicken, die erforderlichen kleinsten Trägheitsmomente J des Stabquerschnittes sowie die Grenzlängen l_0 für den Belastungsfall 2), S. 513 angegeben.

Im folgenden bezeichnet

P die zulässige Belastung in kg, P_1 dieselbe in t,
l die Stablänge in m,
b die kleinere Rechteckseite, d den Kreisdurchmesser } des Stabquerschnittes in m.

Bezeichnungen	Gufseisen	Schweifseisen	Flufseisen	Flufsstahl	(Kiefern-) Holz
Druckfestigkeit K . kg/qcm	7500	3750	4400	6250	280
Zuläss. Druckspannung k „	500	1080	1200	1400	60
Elastizitätsmafs E . „	1 000 000	2 000 000	2 150 000	2 200 000	100 000
Sicherheitsgrad gegen Knicken $\mathfrak{S}$ . . .	8*)	5	5**)	5	(6 ÷) 10
Erforderliches kleinstes äquat. Trägheitsmoment des gefährl. Querschnittes in cm^4 $J =$	$\frac{Pl^2}{125} = 8\,P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{400} = 2{,}5\,P_1 l^2$	$\frac{Pl^{2\,**)}}{430} = 2{,}33\,P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{445} = 2{,}24\,P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{(17\ \vdots\ )\,10} = \frac{Pl^2}{(60\ \vdots\ )\,100} \cdot P_1 l^2$
Vrhm. Grenzlänge $x_0 = l_0 : i =$	50	60,6	59,4	55,6	40,5
für das Rechteck $(i = b\sqrt{1/12})$; $l_0 : b =$	14,4	17,5	17,2	16,0	11,7
„ die Kreisfläche $(i = 1/4\,d)$; $l_0 : d =$	12,5	15,2	14,9	13,9	10,1
„ den Kreisring mit kleinem δ $(i = d\sqrt{1/8})$ $l_0 : d =$	17,6	21,4	21,1	19,7	.

*) S. 505. Die Berliner Baupolizei verlangt für gufseiserne Säulen $\mathfrak{S} = 8$ bei genau zentraler Belastung. Erfolgt jedoch, wie meist, der Angriff eines Teiles der Lasten (z. B. durch Träger auf Säulenkonsolen) exzentrisch, so sind die exzentrisch angreifenden Lasten mit 50 % Zuschlag sowohl bei Berechnung auf Knicken als auf Druck einzuführen, oder es ist die Säule — bei bekannter Gröfse der Lastexzentrizität — auf zusammengesetzte Festigkeit (Druck und Biegung) zu berechnen, wobei die Veränderlichkeit der Nutzlast zu berücksichtigen ist.

**) Druckglieder flufseiserner Fachwerksysteme sind nach den preufs. Minist.-Best. vom 31. 1. 1910 mit vierfacher Sicherheit zu berechnen, entsprechend der Formel $J = \frac{Pl^2}{550} = 1{,}82\,P_1 l^2$ (S. 505).

Digitized by Google

Für Steinprismen quadratischen Querschnittes beträgt die verhältnismäfsige Grenzlänge nach Tetmajer $x_0 = 52$; für gefugtes Mauerwerk liegen Versuchswerte nicht vor.

Die Knicklast eines von der Stabmitte nach den Enden hin geradlinig vom Querschnitte F auf F_0 sich **verjüngenden Stabes** beträgt nach H. Kayser nur ebensoviel wie die Knicklast eines gleich langen prismatischen Stabes, dessen Querschnitt gleich dem in nahezu $^1/_3$ der Stablänge vorhandenen Querschnitte F_1 des sich verjüngenden Stabes ist. Diese Regel gilt näherungsweise für alle Kreis-, Kreisring-, Rechteck- und ═-Querschnitte, und zwar dann, wenn das Endmafs zwischen 0,2 und 1,0 des Mafses in der Stabmitte beträgt; bei dem Rechteckquerschnitt ist dabei eine Seite als unveränderlich angenommen.*)

An den Stabenden muß in allen Fällen mindestens der der zulässigen Druckspannung k entsprechende Querschnitt vorhanden sein.

Für die Belastungsfälle 1), 3) und 4) (S. 513) ist das erforderliche Trägheitsmoment J 4mal bzw. $^1/_2$mal und $^1/_4$mal so grofs, als vorstehend angegeben. Die Grenzlänge l_0 ist dabei $^1/_2$mal, bzw. 1,41mal und 2mal so grofs als die Tafelwerte.

Nach Versuchen von B. Kirsch**) mit 20 mm dicken Puddeleisenstangen ist das Verhältnis der Knicklasten in den Fällen 2), 3) und 4) nicht = 1 : 2 : 4, sondern veränderlich je nach der Schlankheitsziffer $l : i = x$, und zwar für $x = 100$ (wobei etwa die Gültigkeit der Eulerschen Formel beginnt) etwa nur 1 : 1,05 : 1,13 und für $x = 200$ immer erst 1 : 1,78 : 3. Ist $x < 100$, so erhöht die Einspannung den Knickwiderstand nur unerheblich (vgl. unter 2).

Der Belastungsfall 2) setzt Spitzenlagerung des Stabes voraus. In der Praxis handelt es sich aber meist um Flächenlagerung, die eine erhebliche Einspannwirkung ergibt und nach v. Emperger***) durch Verminderung der Knicklänge l bis auf 0,7 l (Verdopplung der Tragfähigkeit) berücksichtigt werden kann. (Vgl. jedoch den Minist.-Erl. vom 10. 8. 1912 auf S. 513 u. 514.)

2. H. Kayser†) berechnet Druckstäbe so, dafs die Druckbiegungsspannung σ einen gewissen Wert nicht überschreitet. Es ist

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{R}{R - P} f_0 \frac{P}{W}.$$

Hierin bedeutet aufser den Bezeichnungen nach S. 513

R den Wert der Knickkraft aus der Eulerschen Formel (S. 513):

$$R = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

f_0 die ursprüngliche Ausbiegung der Stabachse in cm; man wähle

$$f_0 = \frac{l}{75} \text{ bis } \frac{l}{300}, \text{ i. M.} = \frac{l}{150},$$

W das Widerstandsmoment des Querschnittes in cm³ (S. 524).

Für $\sigma = \infty$ wird $P = R$.

Bei gleichem Schlankheitsverhältnis $x = l : i$ sind die Schwerpunktspannungen $\sigma_0 = \frac{P}{f}$ für geometrisch ähnliche Querschnitte, wozu angenähert auch die Normalprofile der Walzträger gehören, gleich grofs.

*) Weiteres Eisenbau 1910 S. 451.
**) Z. d. V. d. I. 1905 S. 907.
***) Z. d. V. d. I. 1898 S. 1114.
†) Zentralbl. Bauv. 1912 S. 121.

Digitized by Google

Für][-Querschnitte mit $J_x = J_y$ ist die Achse für die Berechnung maßgebend, der das kleinste W entspricht. Daher kann der Stoff erst dann voll ausgenutzt werden, wenn $W_x = W_y$ gewählt wird.

8. Tetmajersche Formeln. Nach Versuchen von Tetmajer*) ist die Eulersche Formel 2) (bei Spitzenlagerung) nur anwendbar, wenn $x = l : i \geq 80$ (Gußeisen), 112 (Schweißeisen), 105 (Flußeisen), 90 (Flußstahl), 100 (Holz) (S. 513).

Für kleinere Stablängen, als sie den vorstehenden Werten von x entsprechen, ergibt sich die Knickspannung beim Bruche (in kg/qcm)

$$K_k = P_k : F = K(1 - ax + bx^2),$$

worin K, a und b Unveränderliche bedeuten, und zwar ist (bei Spitzenlagerung)

Stoff	K	a	b	Grenzen für x	
				min	max
Gußeisen	7760	0,01546	0,00007	5	80
Schweißeisen	3030	0,00426	0	10	112
Flußeisen	3100	0,00368	0	10	105
Flußstahl**)	3350	0,00185	0	.	90
Holz	293	0,00662	0	11,8	100

Tafeln für die wichtigsten Baustoffe finden sich in F. Boerner, Statische Tabellen, 4. Aufl. S. 70, W. Ernst & Sohn.

Für einen Stab von bekanntem Querschnitt ist der Sicherheitsgrad gegen Knicken $\mathfrak{S} = K_k : \sigma$, wo K_k den vorstehend bezeichneten Wert, und σ die tatsächlich vorhandene mittlere Druckspannung ($= P : F$) in kg/qcm bedeuten.

Zur Querschnittermittlung dient die Gleichung

$$F(1 - ax + bx^2) = \frac{\mathfrak{S} P}{K},$$

woraus die Abmessungen versuchsweise zu berechnen sind.

Verhältnisse der Sicherheitsgrade nach der Eulerschen ($\mathfrak{S}$) und Tetmajerschen ($\mathfrak{S}_1$) Formel:

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}} = 1 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3,35},$$

wenn $x = 105 \quad 90,6 \quad 86,8 \quad 67,5 \quad 50.$

Für $\sigma = 750;$ $1000;$ 1250 erhält man, wenn $\mathfrak{S} = 5$

$x = 75,2;$ $65,1;$ $58,3$ und demnach

$\mathfrak{S}_1 = 2,99;$ $2,36;$ $1,95.$

Genügt man den preußischen Vorschriften, so erhält man nach Tetmajer im ungünstigsten Falle also eine etwa zweifache Knicksicherheit.

Nach den sorgfältigen Untersuchungen von v. Kármán***) dürfte der wirkliche Knicksicherheitsgrad etwas größer sein, als der nach der Tetmajerschen Formel ermittelte.

---

*) Z. d. V. d. I. 1896 S. 1404.

**) Nach Versuchen von A. Gefsner ist für Mannesmann-Stahlrohrsäulen $K = 3350$, $a = 0,0043$, $E = 2\,023\,400$, $x < 82$. Mit Beton gefüllte Rohre zeigen eine Zunahme der Knicklast um $P = 220\,F - O$, wo F der Querschnitt und O die Mantelfläche der Betonfläche in qcm, P in kg (Beton u. Eisen 1908 S. 333).

***) Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, Heft 81: v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit (1910).

Digitized by Google

v. Kármán schlägt für die Knickspannungen zwischen Elastizitätsgrenze (σ_p) und Quetschgrenze (σ_q) und für $30 < x < x_p$ folgenden Ausdruck K_k vor

$$K_k = \sigma_q - (\sigma_q - \sigma_p)\frac{x - 30}{x_p - 30}, \text{ wo } x_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}.$$

Für das von Tetmajer untersuchte Flußeisen wird $x_p = 93$ (ersetzt Tetmajers 105) und die Tetmajersche Formel geht über in $K_k = 3150 - 8x$.

Genietete Stäbe verhalten sich wie einfache Walzprofile, falls die Nietabstände nicht größer sind als das 70fache der gefaßten Platten- oder Winkeleisendicke und die Schwächung der Stabquerschnitte durch Nietlöcher nicht mehr als 12 % beträgt. *)

4. Johnson und Ostenfeld**) setzen für **Schweiß- und Flußeisen** die zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \sigma(1 - cx^2),$$

worin σ die zulässige Druckspannung in kg/qcm,

$x = l : i$ und

c eine Unveränderliche ist, die auf Grund der Tetmajerschen Versuche zu 1 : 30 000 bestimmt wurde.

Setzt man $F = \xi i^2$, mithin $J = Fi^2 = \xi i^4$, wobei der Wert von ξ nur von der Form des Stabquerschnittes abhängig ist, so erhält man den erforderlichen Querschnitt gegen Knicken (in qcm):

$$F = F_0 + {}^1/_3\,\xi l^2,$$

wenn F_0 den erforderlichen Querschnitt gegen Druck ($= P : k$) in qcm und l die Stablänge in m bezeichnet. Diese Formel ist gültig, falls $F < 2F_0$; ergibt sich $F > 2F_0$, so benutze man die Eulersche Formel (S. 513).

Die Größe ξ ändert sich nur langsam mit der Querschnittgröße; in die Formel sind zunächst folgende Näherungswerte einzusetzen:

Querschnitt	ξ	Querschnitt	ξ	Querschnitt	ξ
L, gleichschenklig .	6,0	⊥, $b = 2h$ . .	7,5	][1 cm lichter Abstand . .	6,0
L, $b : h = 2 : 3$ . .	7,0	⊥, $b = h$ . . .	5,0	dagl., Abstand so, daß $J_x = J_y$	1,2
dagl. 1 : 2 . . .	11,0	I	10,0	4 Quadranteisen ohne	
(b u. h Schenkellängen)		[.	7,0	Zwischenlagen	1,3
⊥, $b = 2h$	7,5	4 Winkeleisen,			
		1 cm l. Abstd.	4,0		

Nach vorläufiger Bestimmung von F und J ist mit dem genaueren Werte von ξ die Rechnung zu wiederholen.

Ferner ist **genau**: für das Quadrat $\xi = 12$, für das Rechteck bh $\xi = 12\frac{h}{b}$ $(h > b)$, für den Kreis $\xi = 4\pi$, für den Kreisring vom mittleren Halbmesser ρ und der Dicke δ, wenn $\delta : \rho = 0{,}05,\ 0{,}1,\ 0{,}15,\ 0{,}2$: $\xi = 0{,}63,\ 1{,}25,\ 1{,}87,\ 2{,}50$.

5. Naviersche oder Schwarz-Rankinesche Formel.

$$\text{Zulässige Knickspannung } \sigma_k = \frac{\sigma}{1 + \mu x^2},$$

worin σ_k, σ, x die Bedeutung unter **4.** haben und μ eine — sehr verschieden angegebene — Unveränderliche ist, die nach Tetmajer für

Gußeisen ($x = 20 \div 150$) $\mu = 0{,}00070$
Schweißeisen ($x = 20 \div 250$) $\mu = 0{,}00016$
Flußeisen ($x = 20 \div 250$) $\mu = 0{,}00014$
gewöhnliches Baueisen i. M. $\mu = 0{,}00015$
Holz ($x = 20 \div 200$) $\mu = 0{,}00023$.

*) L. v. Tetmajer, Angew. Elast.- u. Festigkl., 3. Aufl. 1905 S. 408.
**) Z. d. V. d. I. 1898 S. 1462; 1902 S. 1858.

Digitized by Google

Die Formel entspricht der Beanspruchung des Stabes auf Druck und Biegung durch eine exzentrisch angreifende Achsialkraft (S. 572 u. 578). Dabei bedeutet μ den Ausdruck

$$\frac{e}{l}\,\frac{p}{l},$$

wo p die unbestimmte Exzentrizität der Last und e das halbe Querschnittsmafs in der Biegungsebene ist. Nach Krohn*) ist $\mu = \frac{k}{8E}$; das ergibt für Schweifseisen und Flufseisen $\mu = 0{,}00007$, Gufseisen $\mu = 0{,}00011$.

6. Zeichnerisches Verfahren von **L. Vianello**, für beliebige Belastungen des Stabes durch Achsialkräfte sowie für veränderlichen Stabquerschnitt (z. B. für Druckglieder eines Fachwerkträgers).**)

Zu einer beliebig gewählten elastischen Linie als Grundlinie berechne man die Biegungsmomente für eine Anzahl von Punkten des Stabes, wobei auch das Moment der in den Befestigungspunkten angreifend zu denkenden Querkraft $[Q = (\Sigma Pf) : l]$ zu berücksichtigen ist, und zeichne die Momentenfläche. Nach dem Mohrschen Verfahren (S. 533) konstruiere man nun die elastische Linie als die zur Momentenfläche als Belastungsfläche gehörige Seillinie mit der Polweite EJ. Ist G die Fläche der Grundlinie, B die Fläche der ermittelten elastischen Linie, so ist die Sicherheit des Stabes gegen Knicken $\mathfrak{S} = G : B$. Verkleinert man in diesem Verhältnis die Ordinaten der elastischen Linie, so erhält man eine genauere Grundlinie, mit der das Verfahren zu wiederholen ist, falls die Abweichung von der zuerst gewählten Grundlinie erheblich war.

Für eine gleichmäfsig über die Länge l verteilte Achsialkraft (z. B. **Eigengewicht**) ist bei dem prismatischen Stabe die Knickbelastung (S. 513) im Befestigungsfalle

$$1)\ P_k = 3{,}2\,\frac{\pi^2}{4}\,\frac{EJ}{l^2}, \qquad 2)\ P_k = 1{,}9\,\pi^2\,\frac{EJ}{l^2}$$

oder gleich der Knickbelastung eines prismatischen Stabes, der nur an den Enden belastet ist und die Länge $l_1 = 0{,}56\,l$ bzw. $l_1 = 0{,}73\,l$ hat. Im Falle 2) liegt der gefährliche Querschnitt a im Abstande $0{,}45\,l$ vom unteren Stabende.

7. Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe mit **elastischer Querstützung** s. H. Zimmermann, Zentralbl. Bauv. 1906 S. 251; 1909 S. 206 sowie Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin 1910.

Ueber die Knickfestigkeit **gegliederter Stützen** s. Krohn, Zentralbl. Bauv. 1908 S. 559. Vgl. auch Bd. III, Abschn. Brückenbau, sowie „Eisenbau" 1912 (Müller-Breslau).

C. Schubfestigkeit.

Ergeben die auf einen Stab wirkenden äußeren Kräfte für den in Betracht kommenden Querschnitt F (Abb. 8) eine in dessen Ebene, u. zw. in die Richtung der Symmetrieachse OY fallende und die Stabachse winkelrecht schneidende Kraft (Schubkraft, Querkraft) Q, so wird der Querschnitt auf Schubfestigkeit beansprucht.

Diese Beanspruchung tritt nie allein auf, sondern ist stets von einem Biegungsmoment begleitet. Sieht man hiervon ab, fallen also

*) Zentralbl. Bauv. 1885 S. 400.

**) Z. d. V. d. I. 1898 S. 1436. — Die Eulerschen Formeln für Stäbe, die in bestimmten Punkten ihrer Länge festgehalten sind, s. Wittenbauer, Z. d. V. d. I. 1902 S. 501; für Stäbe, die aufserdem noch in beliebigen Punkten belastet sind, Z. d. V. d. I. 1903 S. 245.

Digitized by Google

Schubkraft Q und die gleich große Stützkraft genau in eine Ebene (Abb. 9), so kann gleichmäfsige Verteilung der Schubkraft auf den Querschnitt und parallele Richtung aller Schubspannungen angenommen werden, so dafs dann

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Abb. 8.

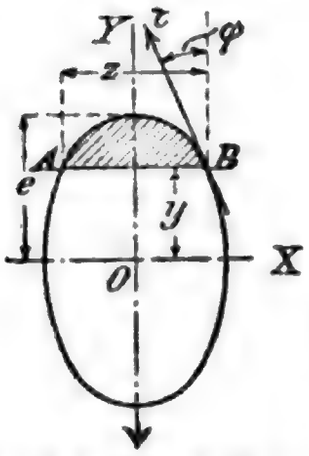
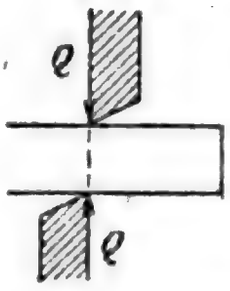


Abb. 9.



Im allgemeinen ergibt diese Formel zu kleine Werte für die gröfste Schubspannung des Querschnittes. Bei Anwesenheit auch nur des kleinsten Biegungsmomentes (wenn also die beiden Kräfte Q nicht genau zusammenfallen) verteilt sich die Schubkraft ungleichmäfsig über den Querschnitt, u. zw. ist die im Punkte B durch die Schubkraft Q hervorgerufene **Schubspannung** τ (S. 485), die nicht nur in der Ebene des Querschnittes, sondern auch winkelrecht zum Querschnitt auftritt, nach beiden Richtungen bei den Bezeichnungen der Abb. 8:

$$\tau = \frac{Q S_y}{J z \cos\varphi}, \text{ und es mufs sein } \tau_{max} \gtrless k_s.$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die zu Q winkelrecht stehende Schwerachse OX, und

$$S_y = \int_y^e y z \, dy$$

das statische Moment des gestrichelten Querschnitteiles, bezogen auf dieselbe Achse OX.

Die zur Symmetrieachse OY und zur Richtung von Q parallele Seitenspannung von τ, gleichmäßig verteilt über die Breite s gedacht*), ist

$$\tau_y = \tau \cos\gamma = \frac{Q S_y}{J z}. \qquad \tau = 0 \text{ für } y = e.$$

Für einen **rechteckigen Querschnitt** bh (Abb. 10) ist

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]; \qquad \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

Für einen **Kreis** mit dem Halbmesser r (Abb. 11) ist

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}; \qquad \tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

τ_{max} wächst von den Rändern zur Mitte hin von $\frac{Q}{F}$ bis auf $\frac{3}{2}\frac{Q}{F}$.*)

Für einen **Kreisring,** wenn die Wandstärke verhältnismäfsig klein gegen den lichten Durchmesser, ist für die Mitte ($y = 0$)

$$\tau_{max} = 2\frac{Q}{F}.$$

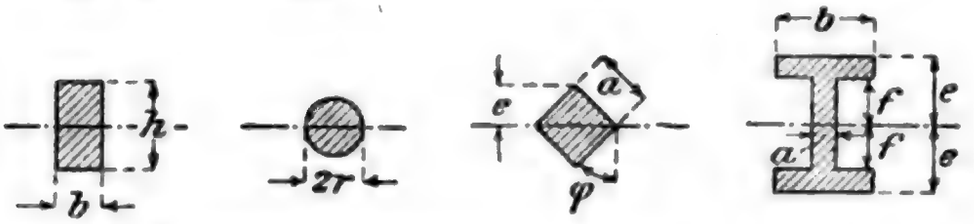
*) Z. d. V. d. I. 1913 S. 1907.

Für ein **übereck liegendes Quadrat** (Abb. 12) ist

$$\tau = \frac{Q\sqrt{2}}{a^2}\left[1 + \frac{y\sqrt{2}}{a} - 4\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]$$

und $$\tau_{max} = \frac{9}{4\sqrt{2}}\,\frac{Q}{a^2} = 1{,}591\,\frac{Q}{F} \text{ für } y = \frac{a}{4}.$$

Abb. 10. Abb. 11. Abb. 12. Abb. 13.



Für einen **I-förmigen Querschnitt** (Abb. 13) ist für $y = 0$

$$\tau_{max} = \frac{3}{4}\,\frac{Q}{a}\,\frac{be^2 - (b-a)f^2}{be^3 - (b-a)f^3}.$$

D. Biegungsfestigkeit.

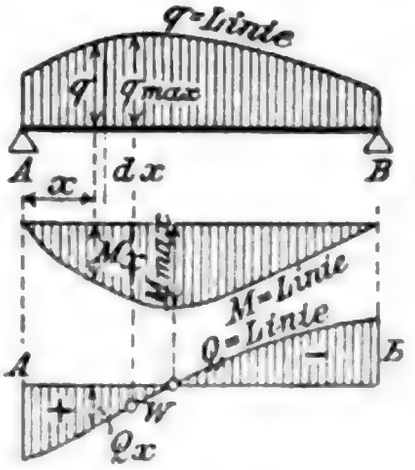
a. Allgemeines über die äufseren Kräfte gerader Träger.

Unter der Voraussetzung, dafs alle äufseren Kräfte, also auch die Auflagerdrücke (Stützkräfte, Reaktionen) A und B (S. 171 ff.), winkelrecht zur Schwerachse des wagerechten Balkens angreifen (d. h., dafs äufsere Kräfte in der Richtung der Balkenachse nicht vorkommen), bezeichnet man mit:

Querkraft Q eines Querschnittes (Transversal-, Schub-, Vertikalkraft) die der Mittelkraft aller links vom Querschnitte wirkenden äufseren Kräfte gleiche und parallele Kraft; sie ist positiv, wenn sie aufwärts (also für den rechten Trägerteil abwärts) wirkt;

Biegungsmoment M eines Querschnittes das Moment der Mittelkraft oder (S. 155) die algebraische Summe der Momente aller links von dem Querschnitt wirkenden äufseren Kräfte, bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnittes; M ist positiv, wenn rechtsdrehend (oder für den rechten Trägerteil linksdrehend).

Abb. 14.



1. Der Träger habe eine **stetige Belastung** q in kg/cm (Abb. 14). Wählt man die Längsrichtung des Trägers als x-Achse, so ist für einen beliebigen Trägerquerschnitt (x)

$$Q = A - \int q\,dx; \quad dQ = -q\,dx; \quad \text{also} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad . \quad (1)$$

$$dM = Q\,dx; \quad \text{also} \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Digitized by Google

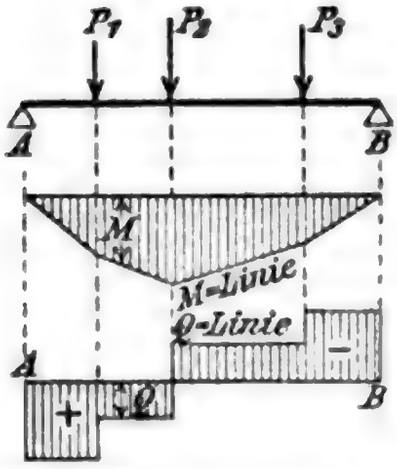
Trägt man also von einer wagerechten Geraden aus unter jedem Querschnitte die zugehörigen Werte Q und M als Ordinaten auf, so gelten für die erhaltenen Q- und M-Linien die Beziehungen:

1. Die trigonom. Tangente (Neigung) der Q-Linie bei x ist $= -q$.
2. Die trigonom. Tangente (Neigung) der M-Linie bei x ist $= Q$.
3. $M_x = \int_0^x Q\,dx = [Q\text{-Fläche}]_0^x$ (nach Gleichung 2).

Aus 1. folgt: Die Querkraft Q ist ein Maximum in jedem Querschnitte, für den $q = 0$; die Q-Linie hat einen Wendepunkt da, wo $q = \max$ (W in Abb. 14).

Aus 2. folgt: Ein (relatives) M_{max} tritt in jedem Querschnitte ein, für den die Querkraft $Q = 0$ ist oder von + in − übergeht.

Abb. 15.



Aus 3. folgt: M wird **null** in jedem Querschnitte, für den die Q-Fläche (bestehend aus +- und −-Teilen) gleich null wird.

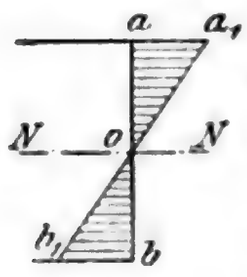
2. Wirken nur **Einzelkräfte** P_1, P_2 usw. auf den Träger (Abb. 15), so ist auf der Länge zwischen zwei benachbarten Einzelkräften die Querkraft Q unveränderlich und das Biegungsmoment M, bezogen auf x, vom ersten Grade. Die Q-Linie eines solchen Trägers ist eine Staffellinie, die M-Linie ein Vieleck.

3. Die Querkraft Q erzeugt Schubspannungen τ in der Querschnittebene (S. 485 u. 520) und gleich grofse Schubspannungen in Ebenen parallel zur Balkenachse, das Moment M Normalspannungen σ winkelrecht zum Querschnitte.

b. Spannungen.

Bei der Biegung eines Balkens behalten nur die Fasern einer einzigen, durch die Balkenschwerachse gehenden Schicht, der **Nullschicht** (neutralen Faserschicht NN, Abb. 16), ihre ursprüngliche Länge; diese Schicht schneidet jeden zur Balkenschwerachse winkelrechten Querschnitt in der **Nullinie** (neutralen Achse). Die Nullinie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes, ist gerade und trennt die gedehnten Fasern so von den verkürzten, dafs die Zug- und Druckspannungen proportional der Entfernung von ihr zunehmen. Dabei ist das Hookesche Gesetz (S. 482) als geltend vorausgesetzt, also angenommen, dafs die ursprünglich ebenen Querschnitte des Balkens nach der Biegung eben verbleiben.

Abb. 16.



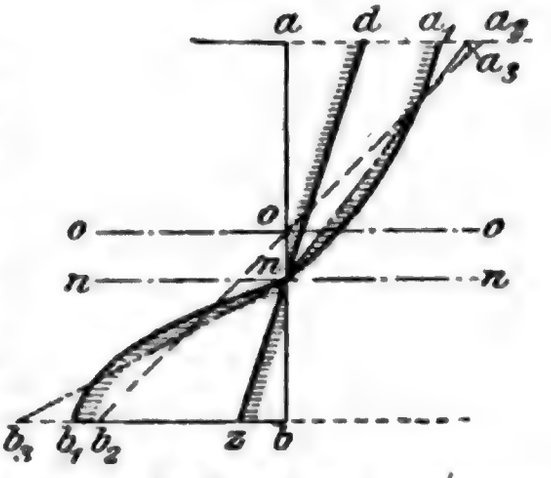
Für den Querschnitt $a\,b$ (Abb. 16) ergibt sich also als Linie der Spannungen und Dehnungen die Gerade $a_1\,o\,b_1$, die die Querschnittlinie in der Nullinie (in o) schneidet. $a\,a_1$ und $b\,b_1$ sind die gröfsten Spannungen des Querschnittes; das Dreieck $o\,a\,a_1$ stellt etwa Druckspannungen (Zusammendrückungen), das Dreieck $o\,b\,b_1$ Zugspannungen (Dehnungen) dar.

Digitized by Google

Sind die Dehnungen des Stoffes den Spannungen **nicht** proportional und aufserdem für Zug und Druck **verschieden** (z. B. bei Gufseisen, Steinen, Zement und Beton), so ist die Lage der Nullinie veränderlich; sie erfährt nach der Seite der geringeren Dehnung, der gröfseren Festigkeit, hin eine Abweichung von der Schwerachse, die mit zunehmendem Biegungsmomente wächst, anderseits aber auch abhängig ist von den Unveränderlichen α_0 und n des Dehnungsgesetzes $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ (S. 482).*) Die Nullschicht hat demnach in der Längsrichtung des Trägers eine von dessen Achse abweichende Lage und Krümmung.

Den allgemeinen Fall der Spannungsverteilung und der Dehnungen für einen Querschnitt $a\,b$ stellt hiernach Abb. 17 dar. Die Nullinie $n\,n$ liegt aufserhalb der Schwerachse $o\,o$ des Querschnittes; die Linie der Dehnungen $d\,n\,z$ ist, da der Querschnitt eben bleibt, eine **Gerade**, dagegen setzt sich die Linie der Spannungen $a_1\,n\,b_1$ aus **zwei Kurven** $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ mit verschiedenen Unveränderlichen zusammen. $a_2\,b_2$ würde die dem Hookeschen Gesetz entsprechende Spannungslinie sein. Ersetzt man die Kurve $n\,a_1$ durch die Gerade $n\,a_3$, die Kurve $n\,b_1$ durch die Gerade $n\,b_3$ derart, dafs Fläche $n\,a\,a_1 = \triangle\, n\,a\,a_3$ und Fläche $n\,b\,b_1 = \triangle\, n\,b\,b_3$, so erhält man eine angenähert richtige Spannungsverteilung, wie sie namentlich der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen häufig zugrunde gelegt wird.

Abb. 17.



Bei den vorstehend genannten Baustoffen nehmen die Spannungen **weniger** als die Dehnungen zu; deshalb ergibt sich σ_{max} bei jenen stets **kleiner** als auf Grund des Hookeschen Gesetzes.

Die für diese Stoffe aus Biegungsversuchen mittels der Gleichung (5) auf S. 524 bestimmte Biegungsfestigkeit (die scheinbare Zugfestigkeit) nähert sich der (**wirklichen**) Zugfestigkeit umsomehr, je mehr der Abstand z_0 des Schwerpunktes der auf der einen Seite der wagerechten Schwerlinie liegenden Querschnittsfläche dem Werte e gleichkommt; sie überschreitet die Zugfestigkeit umsomehr, je mehr sich der Stoff nach der wagerechten Schwerlinie zusammendrängt.

Bei **rechteckigem** Querschnitte beträgt nach L. **Geusen** u. a.**) das Verhältnis μ_0 der Biegungsfestigkeit K_b zur wirklichen Zugfestigkeit K_z

für Gufseisen, Granit und Kalkstein $\mu_0 = 2$,
„ Sandstein . . . . . $\mu_0 = 3$,
„ Beton . . . . . $\mu_0 = 2{,}2$.

Für diese Stoffe nimmt man dementsprechend $k_b = \mu_0 k_z$. (Für Gufseisen S. 508, wobei $\mu_0 = \mu \sqrt{e : z_0}$)

Je zwei Schubspannungen, die eine Kante eines beliebigen kleinen, würfelförmigen Körperteilchens winkelrecht schneiden, sind **gleich** **grofs** und haben gegen die Kante übereinstimmende Richtung (S. 520).

Bemerkung. Nachstehende Verfahren der Spannungsermittlung gelten annähernd auch für **gekrümmte Stäbe**, u. zw. um so genauer, je gröfser der Krümmungshalbmesser im Verhältnis zur Querschnitthöhe ist.

I. Die Momentenebene geht durch eine Hauptachse des Querschnittes.

In diesem Falle fällt die Nullinie mit der anderen Hauptachse des Querschnittes zusammen.

---

*) Für den **rechteckigen** Querschnitt haben R. **Latowski** und L. **Geusen** (Z. d. V. d. I. 1897 S. 941 u. 1898 S. 463) die Nullinie und Spannungsverteilung angegeben. Eine fernere Arbeit hierüber Z. österr. Ing. u. Arch.-Ver. 1903 S. 286 u. 1904 Nr. 11. Die Grundzüge einer **allgemeinen** Theorie auf Grund des Dehnungsgesetzes $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$ mit Berücksichtigung verschiedener Unveränderlichen für Zug und Druck C. **Bach**: Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. S. 224. **) Z. d. V. d. I. 1898 S. 463.

Digitized by Google

1. Normalspannungen.

Es sei σ die Normalspannung einer Faser in kg/qcm,
y der Abstand der Faser von der Nullinie in cm,
σ_1 die Normalspannung für $y = 1$ cm, also $\sigma_1 = \sigma : y$,
e_1 und e_2 der Abstand der entferntesten gezogenen bzw. gedrückten Faser (Randfaser) in cm,
e allgemein der gröfsere dieser beiden Abstände,
k_z die zulässige Zugspannung in kg/qcm,
k die zulässige Druckspannung in kg/qcm,
k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/qcm,
J das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die Nullinie, in cm⁴.

Alsdann gelten die **Grundgleichungen**

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} = \frac{\text{Biegungsmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}, \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{M}{J}\,y \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Damit die zulässigen Grenzspannungen nicht überschritten werden, mufs sein:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J}\,e_1 < k_z \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{M}{J}\,e_2 < k.$$

Die Werte $J : e_1 = W_1$ und $J : e_2 = W_2$ werden die **Widerstandsmomente** des Querschnittes für die Zug- bzw. die Druckseite genannt. Hiernach erhält man die allgemeinen **Festigkeitsbedingungen**

$$\frac{M}{W_1} \lessgtr k_z; \qquad \frac{M}{W_2} \lessgtr k.$$

Ist k_z von k verschieden, so sind beide Formeln zu benutzen. Ist die Nullinie eine Symmetrie-Achse des Querschnittes ($e_1 = e_2$), so folgt $W_1 = W_2$, und es ist die dem kleineren der beiden k-Werte entsprechende Formel mafsgebend.

Sind die zulässige Zug-, Druck- und Biegungsspannung einander gleich, $k_z = k = k_b$ (wie z. B. bei Schweifseisen, Flufseisen, Flufsstahl), und nennt man $J : e = W$ das Widerstandsmoment schlechthin (wobei der kleinere der beiden Werte W_1 und W_2 gemeint ist), so gelten die Festigkeitsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \textbf{Spannungsberechnung:} & \sigma_{max} = M : W \\ \text{für } \textbf{Querschnittsberechnung:} & W = M : k_b \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

(Tafel der W für verschiedene Querschnitte S. 534 ff.)

Der **gefährliche Querschnitt** (Bruchquerschnitt) eines Trägers, der dessen Berechnung zugrunde zu legen ist, ergibt sich nach Gleichung (5) aus der Bedingung

$$M : W \,(= \sigma_{max}) = \text{max}.$$

Nach Formel (4) sind die Spannungen gleich weit von der Nullinie entfernt liegender Querschnittselemente gleich grofs. Dies trifft jedoch nach Versuchen von C. Bach*) nur dann zu, wenn die Momentenebene in die lotrechte Symmetrieebene des Stabes fällt oder ihr parallel ist. **Für Querschnitte ohne lotrechte Symmetrieachse,**

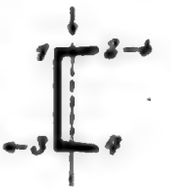
*) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl. 1911 S. 227.

Digitized by Google

z. B. für den [-Querschnitt, gilt also die Formel **nicht**, selbst wenn die Kraftebene durch die lotrechte Hauptachsenebene des Querschnittes geht.

Infolge der lotrechten Durchbiegung des Steges wirkt bei dem [-Querschnitt der Steg auf den oberen Flansch drückend, auf den unteren Flansch ziehend. Beide Kraftäufserungen erfolgen aber exzentrisch zu den Flanschen, die Spannungen verteilen sich also in diesen ungleichmäfsig. Der Steg biegt sich oben nach rechts (Abb. 18), unten nach links, er erfährt daher eine Verdrehung, durch die auch die Flanschen beeinflufst werden.

Abb. 18.



Die ungleichmäfsige Verteilung der Biegungsspannungen auf die Flanschen von [-Querschnitten hat eine Erhöhung von σ_{max} zur Folge. Die Versuche ergaben bei einem [-Eisen Nr. 30 gegenüber der rechnungsmäfsigen Spannung (nach Formel 5):

1. wenn die Kraftebene mit der senkrechten Hauptachsenebene des Stabes zusammenfällt, im Punkte 1 (Abb. 18) eine um 90 % höhere Druckspannung, im Punkte 3 eine um 67 % höhere Zugspannung;

2. wenn die Kraftebene mit der Stegmittelebene zusammenfällt,
in 1: Erhöhung der Druckspannung um 53 %,
„ 3: „ „ Zugspannung „ 36 „.

Die Beanspruchung 2. ist hiernach erheblich günstiger als 1.; es empfiehlt sich daher, [-Eisen auf dem Stege zu belasten.

Für **Träger gleichen Querschnittes** ist W unveränderlich, also der gefährliche Querschnitt der, worin M seinen Höchstwert erreicht, d. h., bei dem die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ ist oder von + in — übergeht (S. 522). Für solche Träger auf zwei Stützen hat man zur Querschnittsermittlung folgendes

Rechnungsverfahren. 1) **Bestimmung der Auflagerdrücke:** Die algebraische Summe der Produkte aus sämtlichen Lasten und den Abständen ihrer Angriffpunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom Auflager B, geteilt durch die Freilänge l, ergibt den Auflagerdruck A. Der Auflagerdruck B wird entsprechend wie A oder als Unterschied der Gesamtbelastung und des Auflagerdruckes A gefunden.

2) Addiert man, von dem einen Trägerende ausgehend, die aufeinanderfolgenden Belastungen so weit, bis sich der zugehörige Auflagerdruck ergibt oder (bei Einzellasten) überschritten wird, so liegt an dieser Stelle der **gefährliche Querschnitt.** Streckenlasten betrachtet man hierbei als die Summe von Einzellasten über den Einheiten (d. h. über den einzelnen cm) der Freilänge.

3) Multipliziert man den Auflagerdruck A (oder B) (in kg) mit der Strecke von A (bzw. B) bis zum gefährlichen Querschnitte (in cm) und zieht davon die Summe der Produkte aus den auf dieser Strecke wirkenden Lasten (in kg) und den Abständen ihrer Angriffpunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom gefährlichen Querschnitte (in cm) ab, so erhält man M_{max} (in cmkg), das, durch k_b (in kg/qcm) geteilt, das **erforderliche Widerstandsmoment** W (in cm^3) ergibt.

Digitized by Google

Beispiel.

Für den Träger in Abb. 19 ergibt sich

1. $A = 1000 \cdot \frac{9,5}{10} + 6000 \cdot \frac{4,5}{10} + 3600 \cdot \frac{7,5}{10} + 2000 \cdot \frac{6,5}{10} + 1000 \cdot \frac{3,5}{10}$

$= 950 + 2600 + 2700 + 1300 + 350 = 7900$
$B = 50 + 3400 + 900 + 700 + 650 = 5700$ $\Big\} = 13\,600.$

2. Da $1000 + 3600 + 2000 + \frac{0,5}{5,0} \cdot 6000 = 7200 < A$, die nächste Einzellast P_3 aber 1000 ist, so liegt der gefährliche Querschnitt C wegen der Streckenlast 6000 zwischen den Kräften 2000 und 1000.

Bedingung für $AC = x$ $(Q = 0)$: $6000 \cdot \frac{x - 3,5}{5,00} = 7900 - 7200 = 700$

$x = 4,08.$

3. $M_{max} = 5700 \cdot 5,92 - 1000 \cdot 2,42 - 6000 \cdot \frac{3,92}{5,00} \cdot \frac{3,92}{2} = 22\,104.$

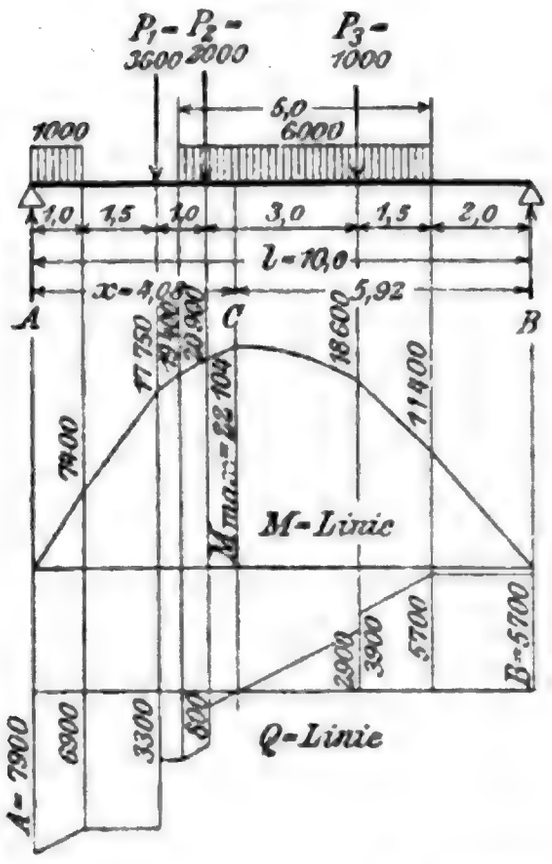
Moment in $P_1 = 7900 \cdot 2,5 - 1000 \cdot 2,0 = 17\,750,$

„ „ $P_2 = 7900 \cdot 3,5 - 1000 \cdot 3,0 - 3600 \cdot 1,0 - 6000 \cdot \frac{0,5}{5,0} \cdot 0,25 = 20\,900,$

„ „ $P_3 = 5700 \cdot 3,5 - 6000 \cdot \frac{1,5}{5,0} \cdot 0,75 = 18\,600.$

Die Momenten- und die Scherkraftlinie sind in Abb. 19 dargestellt.

Abb. 19.



Die Tafel auf S. 546 ff. gibt die Berechnung der Träger für die häufiger vorkommenden Belastungsfälle.

Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (S. 561) haben für jeden Querschnitt denselben Wert von σ_{max}; hierzu ist also nach Gleichung (5) die Bedingung zu erfüllen

$\sigma_{max} = M : W =$ unveränderlich,

d. h. M und W müssen sich für die ganze Trägerlänge nach demselben Gesetz ändern.

2. Schubspannungen.

Die Schubkraft auf die Längeneinheit des Trägers, im Abstande y von der Nullschicht, ist nach S. 520 (Abb. 8) in kg/cm

$$T_y = \tau_y z = \frac{Q S_y}{J} \quad . \quad . \quad (6)$$

Weiteres für die wichtigsten Querschnitte ist auf S. 520 u. 521 angegeben.

3. Hauptspannungen.

Die in einem Flächenteilchen des Stabquerschnittes gleichzeitig auftretende Normalspannung σ und Schubspannung τ ergeben nach jeder Richtung in der Biegungsebene eine bestimmte Normalspannung; trägt man alle diese Spannungen von dem Flächenteilchen aus auf ihren Richtungen ab, so liegen die Endpunkte auf der **Spannungsellipse**, von der zwei zugeordnete Durchmesser die Richtungen von

Digitized by Google

σ und τ haben. Die Halbachsen der Spannungsellipse, σ_{max} und σ_{min}, sind die **Hauptspannungen.** Entsprechend ergeben sich aus der Dehnung ε und der Schiebung γ die **Dehnungsellipse** und ihre Halbachsen, die **Hauptdehnungen** ε_{max} und ε_{min}.

Die Richtungen der Halbachsen dieser beiden Ellipsen stimmen (bei durchaus gleichartigen Körpern) zwar überein, dagegen stehen infolge der Querzusammenziehung ε_q die Größen $\varepsilon \frac{max}{min}$ und $\sigma \frac{max}{min}$ zueinander **nicht** in der einfachen Beziehung $\varepsilon = \alpha \sigma$.

Denkt man sich die Hauptdehnungen ε_{max} und ε_{min} entstanden durch Wirkung zweier Spannungen σ'_{max}, σ'_{min} gemäfs der Gleichung $\varepsilon = \alpha \sigma$, so heifsen σ'_{max}, σ'_{min} die **idealen Hauptspannungen** [nach C. Bach die gröfste (Zug- und Druck-) Anstrengung des Punktes].

Von den Hauptspannungen σ_{max}, σ_{min} bringt jede in ihrer eigenen Richtung eine achsiale, in der Richtung der anderen (auf ihr winkelrecht stehenden) Hauptspannung eine Quer-Längenänderung hervor; σ_{max} und σ_{min} lassen sich daher ersetzen durch die idealen Hauptspannungen σ'_{max} und σ'_{min}, von denen jede in ihrer Richtung **allein** die Formänderung bewirkt, die σ_{max} und σ_{min} **zusammen** bewirken würden.

Die **Hauptspannungen** des Querschnittsteilchens ergeben sich aus der herrschenden Normalspannung σ und Schubspannung τ zu

$$\sigma \frac{max}{min} = {}^1/_2 \sigma \pm {}^1/_2 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen ist σ_{max} stets eine Zug-, σ_{min} stets eine Druckspannung.

Der Winkel ψ, unter dem $\sigma \frac{max}{min}$ gegen die Balkenachse geneigt ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\psi = \mp \frac{2\tau}{\sigma}.$$

Die Richtungen der Hauptspannungen stehen daher **winkelrecht** aufeinander.

Für $\tau = 0$ (z. B. für die von der Nullinie entferntesten Querschnittsteile eines Trägers) wird $\psi = 0$ und $\sigma_{max} = \sigma$, $\sigma_{min} = 0$, d. h., die gröfste Dehnung findet in der Richtung der Balkenachse statt.

Für $\sigma = 0$ (z. B. für die Nullinie des Querschnittes) wird $\psi = \mp 45^0$ und $\sigma_{max} = +\tau$, $\sigma_{min} = -\tau$, d. h., Schubspannungen allein erzeugen Hauptspannungen, die unter Winkeln von 45^0 gegen die Balkenachse geneigt sind.

Die **idealen Hauptspannungen** (gröfsten Beanspruchungen) des Querschnittsteilchens sind

$$\sigma' \frac{max}{min} = \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2};$$

hierin bedeutet $m = {}^{10}/_3$ das Verhältnis $\varepsilon : \varepsilon_q$ (näheres S. 481), $\alpha_0 = k_z : \frac{m+1}{m} k_s$ (für Zug) oder $\alpha_0 = k : \frac{m+1}{m} k_s$ (für Druck) das Beanspruchungsverhältnis. Bei durchaus gleichartigen Körpern ist $\alpha = 1$; sonst ist α_0 mittels der Tafel auf S. 503 zu bestimmen.

Digitized by Google

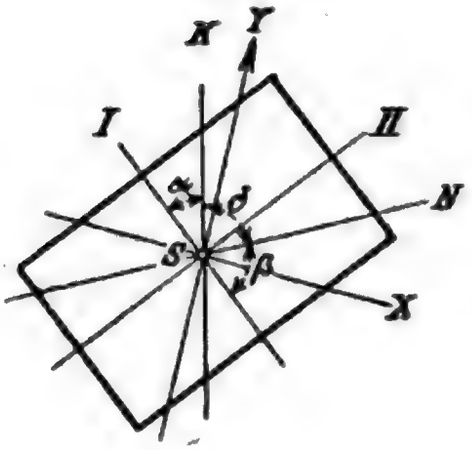
Für $m = {}^{10}/_{3}$ wird

$$\sigma' \frac{\max}{\min} = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0 \tau)^2},$$

worin $\alpha_0 = \dfrac{k_z}{1{,}3\,k_s}$ bzw. $\alpha_0 = \dfrac{k}{1{,}3\,k_s}$.

Zur Berechnung von σ'_{max} kann die Tafel auf S. 585 ff. benutzt werden.

Abb. 20.



II. Beliebige Momentenebene.

(Unsymmetrische Belastung.)

Als **Kraftlinie** SK werde die Schnittlinie der durch die Trägerschwerachse gehenden Momentenebene mit der Querschnittebene bezeichnet; ferner seien (Abb. 20)

J_x und J_y die Trägheitsmomente für zwei beliebige, sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen SX, SY,

$J_{max} = J_I$, $J_{min} = J_{II}$ die Hauptträgheitsmomente,

α der Winkel zwischen Kraftlinie SK } und erster Hauptachse SI
β der Winkel zwischen Nullinie SN } (für J_{max}),

δ der Winkel zwischen Kraftlinie SK und Nullinie SN.

1. Beziehungen zwischen Kraftlinie und Nullinie.

Kraftlinie und Nullinie bilden zwei zugeordnete Achsen des Querschnittes (für die das Zentrifugalmoment = 0 ist). Daher läfst sich die eine der beiden Linien aus der gegebenen anderen mit dem Trägheitskreise leicht finden (S. 195, Abb. 64.) Sind die Hauptachsen des Querschnittes gegeben, so findet man die Nullinie auch ohne Trägheitskreis nach dem nachstehenden zeichnerischen Verfahren (unter 2.). Rechnerisch ergibt sich β aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = J_I : J_{II}.$$

2. Spannungsermittlung.

α) Gegeben die **Hauptachsen** SI mit $J_{max} = J_I$ und SII mit $J_{min} = J_{II}$.

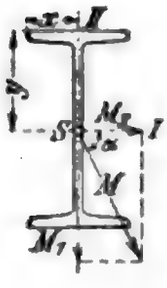
Rechnerisches Verfahren (Abb. 21). Ist

$M_1 = M \sin\alpha =$ Seitenmoment von M, winkelrecht zu SI,

$M_2 = M \cos\alpha =$ Seitenmoment von M, winkelrecht zu SII,

so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten x, parallel zu SI, und y, parallel zu SII:

Abb. 21.



$$\sigma = \frac{M_1}{J_I}\,y + \frac{M_2}{J_{II}}\,x.$$

σ_{max} ergibt sich, wenn man für x, y die Koordinaten des am weitesten von der zugehörigen Nullinie gelegenen Randpunktes des Querschnittes einsetzt, wobei die Nullinie im allgemeinen vorher zeichnerisch nach Abb. 22 oder 23 bestimmt werden mufs.

Digitized by Google

Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. I- und E-Profile, ergibt sich hiernach einfach

$$\sigma_{max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = M\left(\frac{\sin\alpha}{W_1} + \frac{\cos\alpha}{W_2}\right) = \frac{M}{W'},$$

wobei W_1 und W_2 die Widerstandsmomente, bezogen auf die Hauptachsen und den am weitesten von diesen gelegenen Randpunkt, sind.

Den Ausdruck

$$W' = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{W_1} + \frac{\cos\alpha}{W_2}} = \frac{W_1 W_2}{W_1\cos\alpha + W_2\sin\alpha}$$

nennt man die **Widerstandsgröfse** des Querschnitts für die Kraftebene M (oder für die zugehörige Nullinie). Einfache Konstruktion von W' S. 530.

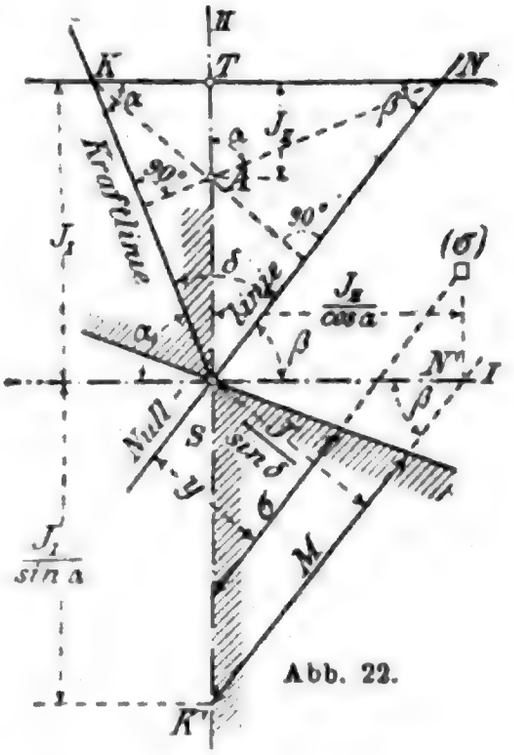


Abb. 22.

Zeichnerisches Verfahren (nach R. Land),[1]) Abb. 22.

SK sei die Kraftlinie; auf Achse SII trage $ST = J_I$, $TA = J_{II}$ (also $SA = J_I - J_{II}$) ab, so schneiden sich die Geraden KTN (parallel zu SI) und AN (winkelrecht zu SK) in einem Punkte N der Nullinie, die zugleich winkelrecht zu KA steht. (Denn es ist $TN = J_{II}\cdot\operatorname{tg}\alpha = J_I : \operatorname{tg}\beta$.)

Spannungsfläche. Trage auf SI (Abb. 22) $SN' = AN = J_{II} : \cos\alpha$ (oder $SK' = SK = J_I : \sin\alpha$ auf SII), ferner auf der durch N' (oder K') gelegten Parallelen $K'N'$ zu SN an beliebiger Stelle den Wert M ab, so begrenzen die von S ausgehenden Strahlen nach den Endpunkten von M die Spannungsfläche mit Ordinaten σ, parallel zu SN, aus der σ_{max} und σ_{min} sofort zu entnehmen sind. M hat von S den Abstand $J : \sin\delta = J : \sin(\alpha+\beta)$, worin $J = J_I\cos^2\beta + J_{II}\sin^2\beta$ das Trägheitsmoment, bezogen auf die Nullinie SN, ist. Der Mafsstab für diese Strecken σ folgt daher aus der allgemeinen Formel

$$\sigma = \left(M : \frac{J}{\sin\delta}\right) y,$$

wenn man hierin anstatt der Buchstaben den Mafsstab ihrer zeichnerischen Darstellung setzt.

Beispiel. Für die Mafsstäbe: Längen (y): 1 cm = 2 cm Wirklichkeit, Momente (M): 1 cm = 5000 cmkg, Trägheitsmomente (J): 1 cm = 100 cm⁴ wird der Mafsstab der Spannungen (σ):

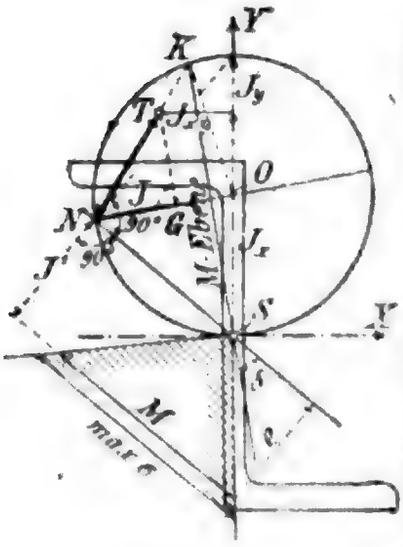
$$1\text{ cm} = \frac{5000\text{ cmkg}\cdot 2\text{ cm}}{100\text{ cm}^4} = 100\text{ kg/qcm}.$$

[1]) Zentralbl. Bauv. 1893 S. 465.

Digitized by Google

β) Gegeben der **Trägheitskreis** (bestimmt aus J_x, J_y und J_{xy}, für zwei **beliebige,** winkelrechte Schwerachsen SX, SY, S. 195), Abb. 23. Die Nullinie ist die der Kraftlinie SK zugeordnete Achse SN, bestimmt durch die Sehne KTN. Das auf NS bezogene Trägheitsmoment ist nach S. 195 $J = NG$. Da $\angle NOK = 2\,NSK = 2\delta$, so ist $\angle KNO = {}^1/_2\,(180^0 - 2\delta) = 90^0 - \delta$, also $\angle NTG = \delta$ und $TN = J' = J : \sin\delta$. Bedeutet y den Abstand eines Querschnittpunktes von der Nullinie, so ist die Spannung in diesem Punkte*)

Abb. 23.



$$\sigma = \frac{M}{J}\,y \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{M}{J}\,e = \frac{M}{J : \sin\delta}\,e,$$

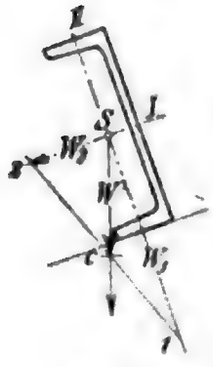
wobei $e = y_{max}$.

Spannungsfläche. Zieht man im Abstande $J' = TN$ von der Nullinie eine Parallele zu SN, trägt auf dieser die Strecke M auf, so begrenzen die von S ausgehenden beiden Strahlen nach den Endpunkten von M die Spannungsfläche mit Ordinaten σ, parallel zu SN, deren Maßstab wie vorstehend unter α) bestimmt wird.

Bemerkung. Kann sich ein Träger infolge äußerer Anordnung benachbarter Bauteile nur nach bestimmter Richtung durchbiegen, so ist hierdurch die Lage der Nullinie SN, winkelrecht zur Biegungsebene, sowie die Strecke TN aus dem Trägheitskreise gegeben, und umgekehrt ist die Lage der wirkenden Momentenebene (beeinflußt durch die seitlichen Widerstände) bestimmt.

Die **Widerstandsgröße** W' für die Nullinie SN (vgl. α) ist hiernach

Abb. 24.



$$W' = \frac{J'}{e} = \frac{J}{e\sin\delta} = \frac{W}{\sin\delta},$$

wenn $W\,(= J : e)$, entsprechend S. 524, das Widerstandsmoment für die Nullinie SN bezeichnet.

Es ist also allgemein

$$\sigma_{max} = \frac{\text{Biegungsmoment}}{\text{Widerstandsgröße}} = \frac{M}{W'} = \frac{M}{W : \sin\delta} \quad . \quad (5\,a)$$

Formel (5) auf S. 524 ist hiervon der Sonderfall für $\delta = 90^0$, d. h. für die Hauptachsen.

Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. I- und [-Profile, ergibt sich W' für eine beliebige Lage des Querschnittes zu der lotrechten Kraftlinie einfach nach Abb. 24, indem man die auf die beiden Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente $W_1 = S1$ (winkelrecht zu SI) und $W_2 = S2$ (winkelrecht zu SII) nach beliebigem Maßstabe (z. B. 1 cm = 20 cm³) aufträgt und den Schnittpunkt c der lotrechten Kraftlinie mit der Geraden 1 2 be-

*) R. Land, Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 554, auch als Sonderdruck erschienen bei Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.

Digitized by Google

stimmt. Dann ist $W' = Sc$ (im Maßstabe von W_1 und W_2) und $\sigma_{max} = M : W'$.

Nach R. Land bezeichnet man die Linie 1 2 als einen Teil der W'-Grenze, die durch Auftragen jeder Widerstandsgröße von S aus auf der zugehörigen Kraftlinie entsteht und die sich hier als Rhombus darstellt. Die durch die W'-Grenze bestimmte Fläche heißt die polarsymmetrische W'-Fläche.*) Ueber ihre Form und ihre Beziehung zum Kern s. S. 576.

8. Querschnittbestimmung.

α) Für die häufig angewendeten I- und [-Walzprofile läßt sich nach der in 2. α) (S. 529) gegebenen Gleichung für σ_{max}, wenn man dafür k_b setzt, nachstehendes Verfahren ableiten, wobei die Richtung der Kraftlinie (Momentenebene) und die Lagen der Hauptachsen gegeben seien. Man zerlege das gegebene Moment M in die Seitenmomente M_1 winkelrecht zur ersten Hauptachse SI und M_2 winkelrecht zur zweiten Hauptachse SII (Abb. 21, S. 528); dann ist das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_1 = (M_1 + u M_2) : k_b, \quad \text{worin} \quad u = W_1 : W_2.$$

Man setze also für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Walzprofiltafeln (5. Abschn.) die zugehörige Verhältniszahl u ein, bestimme nach vorstehender Formel den Wert W_1 und setze die zu dem nächst passenden Profil gehörige Verhältniszahl $W_1 : W_2 = u$ von neuem in die Formel, um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert W_1 zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind

für I-Profile $u = 9$, für [-Profile $u = 7$,
für mittlere Differdinger I-Profile $u = 3$ bis 5.

Bei [-Profilen ist S. 525 zu berücksichtigen.

Beispiel: Ein I-Träger hat durch ein einseitiges Gewölbe einen wagerechten Schub aufzunehmen; es seien folgende Größtwerte der Seitenmomente M für die Trägermitte berechnet: $M_1 = 150\,000$ cmkg (in lotrechter Ebene), $M_2 = 105\,000$ cmkg (in wagerechter Ebene). Für $k_b = 1200$ kg/qcm ist nach vorstehender Formel

$$W_1 = (150\,000 + 9 \cdot 105\,000) : 1200 = 912 \text{ cm}^3.$$

Am nächsten liegt das Normalprofil Nr. 34 mit $W_1 = 923$ cm³, für das $u = W_1 : W_2 = 9{,}40$ ist; also wird genauer: $W_1 = (150\,000 + 9{,}40 \cdot 105\,000) : 1200 = 948$ cm³, d. h., I Nr. 34 genügt nicht als Trägerquerschnitt; es ist zu wählen I Nr. 36 mit $W = 1089$ cm³.

β) Für den rechteckigen Querschnitt $h\,b$ ist $u = h : b$, und man erhält

$$h^3 = 6u\,(M_1 + u M_2) : k_b; \quad b = h : u.$$

Bei den Normalprofilen für Bauhölzer (5. Abschn., Stoffkunde) liegt u zwischen 1 und 1,43; bei größter Abweichung vom Quadrat ist für starke Querschnitte (von $18 \cdot 24$ cm ab) $u = 1{,}3$, für mittelstarke $u = 1{,}4$. Rechnungsverfahren wie unter α).

γ) Zeichnerische Bestimmung des Querschnittes von Z-Walzprofilen Zentralbl. Bauv. 1904 S. 69.

*) Ueber Eigenschaften und Anwendung dieser Fläche für beliebige Querschnitte s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 445.

Digitized by Google

c. Elastische Formänderungen gerader Träger.

Als Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten werde ein Trägerauflager, bei Freiträgern das freie Trägerende gewählt. Die x-Achse sei die ursprünglich gerade Achse des Trägers.

I. Elastische Formänderung durch Biegungsmomente.

1. Die gegenseitige **Verdrehung** zweier parallelen Trägerquerschnitte x_1 und x_2 durch das **Biegungsmoment** M ist zwischen x_1 und x_2 bei unveränderlichem Trägheitsmomente J des Trägerquerschnittes:

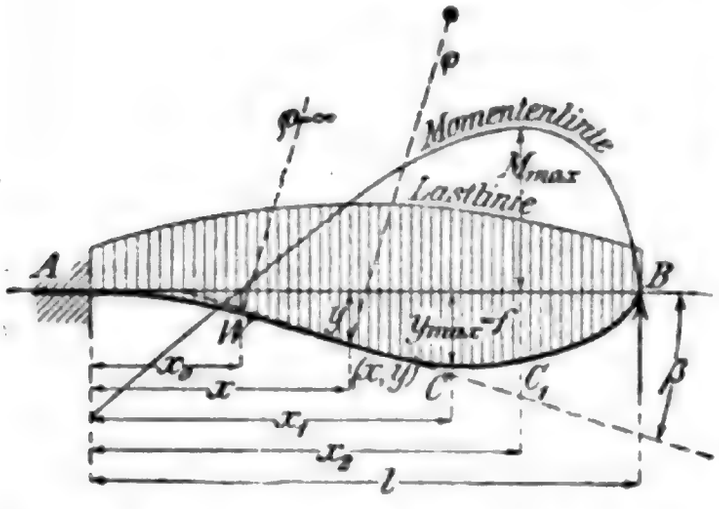
$$\beta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varrho} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M\,dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int_{x_1}^{x_2} M\,dx = \frac{1}{EJ} \cdot [\text{Momentenfläche}]_{x_2}^{x_1}.$$

E s. S. 482, 486 ff. Ist J veränderlich, so tritt in die vorstehende Formel für J ein beliebiger fester Wert J_c (zweckmäfsig der gröfste der vorhandenen J-Werte) ein und an Stelle der gegebenen Momentenfläche eine verzerrte, deren Ordinaten $M' = M\frac{J_c}{J}$ sind.

2. Die **elastische Linie** (Biegungslinie, Kurve ACC_1B in Abb. 25) ist die durch die angreifenden Kräfte gebogene (ursprünglich gerade) Achse des Trägers; für ihren Krümmungshalbmesser ϱ gilt die Formel

$$\varrho = \frac{EJ}{M} \quad \ldots \quad (7)$$

Abb. 25.



Die Trägerachse (AB) erfährt bei der Biegung meist nur kleine Neigungen β, so dafs in der allgemeinen Formel für ϱ (S. 93) $ds \sim dx$ (oder $\cos\beta \sim 1$, $\sin\beta \sim \beta$) gesetzt werden darf. Hiermit ergibt sich die **Differentialgleichung der elastischen Linie** ACC_1B:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\varrho} \quad \ldots \quad (8)$$

Das +-Zeichen gilt, wenn mit wachsendem x die Tangente des Neigungswinkels der Tangente im Punkte xy an die elastische Linie gegen die x-Achse zunimmt, wenn also die elastische Linie gegen die x-Achse konvex liegt; das —-Zeichen im anderen Falle.

Durch einmalige Integration ergibt sich hieraus $dy : dx$, d. h. die Tangente des Biegungswinkels β im Punkte (xy) ($\operatorname{tg}\beta$ in Abb. 25); durch zweimalige Integration die Gleichung der elastischen Linie, wobei die Integrationskonstanten durch die jeweiligen Auflagerbedingungen des Trägers gegeben sind. Für ein

Digitized by Google

festes oder ein wagerecht gleitendes Auflager (B in Abb. 25) ist $y = 0$, und für ein eingespanntes Trägerende (A in Abb. 25) ist $dy : dx = \operatorname{tg}\beta = 0$. **Wendepunkte** (nach S. 94, Punkt W entspr. x_0 in Abb. 25) der elastischen Linie finden sich für Querschnitte, in denen $M = 0$ (d. h. $\varrho = \infty$) ist. Die gröfste **Durchbiegung** f des Trägers (in C Abb. 25, entspr. x_1) ist aus der Bedingung $y = \max$ zu ermitteln. (Davon zu unterscheiden ist der Querschnitt des gröfsten Biegungsmomentes [C_1 in Abb. 25, entspr. x_2], der sich aus der Bedingung $M = EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \max$ ergibt.) Die Bedingung dafür, dafs die elastische Linie ein **Kreis** sei, ist

$$\frac{\varrho}{E} = \frac{J}{M} = \text{unveränderlich.}$$

Dieses rechnerische Verfahren ist nur für einfache Belastungsfälle zweckmäfsig. — Gleichung elastischer Linien für bestimmte Belastungsfälle S. 546 ff.

3. **Verfahren von Mohr** für allgemeinere Belastungsfälle.[1]) Die Durchbiegung y bei einem Querschnitte C ist gleich dem $(1 : EJ)$-fachen Werte des Momentes für C, das durch die gegebene M-Fläche als neue Belastungsfläche des Trägers erzeugt wird. Ist J veränderlich, so wird, wie vorstehend unter 1., J durch J_c und die M-Fläche durch die verzerrte M'-Fläche ersetzt. — Die elastische Linie kann hiernach, als Momentenlinie aufgefafst, auch zeichnerisch als **Seillinie** gefunden werden, u. zw. für die vorhin erwähnte neue Belastungsfläche und die Polweite EJ bzw. EJ_c.

4. **Arbeit der Biegung.** Durch das Biegungsmoment M erfährt das Teilchen dx des Stabes eine Drehung um $d\beta = \frac{dx}{\varrho} = \frac{M\,dx}{EJ}$, gemessen als Bogen für den Halbmesser 1 (unter 1.); mithin ist die Arbeit, die bei dieser Drehung verrichtet wird, $dA = {}^1/_2\, M\,d\beta$, und

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l M\,d\beta = \frac{1}{2}\int_0^l M\,\frac{dx}{\varrho} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\,dx}{EJ} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Bei Einzellasten ist die Integration für die verschiedenen Strecken von l einzeln auszuführen.

Hiernach ist für die auf S. 546 ff. angegebenen Belastungsfälle A zu ermitteln. Man erhält z. B.

für Fall 1.	$A = {}^1/_2\, Pf$,	für Fall 8. u. 12.	$A = {}^6/_{35}\, Pf$,
für Fall 7.	$A = {}^1/_3\, Pf$,	für Fall 14.	$A = {}^{17}/_{42}\, Pf$ usw.

II. Elastische Formänderung durch die Schubkräfte.[2])

Der Gleitwinkel zweier um dx voneinander entfernten Querschnitte durch die Wirkung der Schubkraft Q beträgt für Walz- und Blech-

[1]) Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete der Technischen Mechanik. 2. Aufl. 1913. Wilh. Ernst & Sohn.

[2]) R. Land, Einfluss der Schubkräfte usw. Z. f. B. 1894 S. 611 ff. (Auch als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn.)

Digitized by Google

träger, alleinige und gleiche Verteilung der Schubspannungen auf den Trägersteg vorausgesetzt, annähernd

$$\gamma = \frac{Q}{F'G} = \frac{dM}{F'G\,dx},$$

worin F' den Stegquerschnitt in qcm und G das Gleitmafs in kg/qcm bezeichnet.

Für andere Querschnitte ist statt F' der genaue Ausdruck $\frac{Q}{\int \tau^2 df}$ zu setzen, worin das Integral über den ganzen Querschnitt zu nehmen ist.

Demnach ist die Durchbiegung des Trägers infolge der Schubkräfte im Abstande x vom Auflager:

$$y = \int_0^x \gamma\,dx = \int_0^x \frac{dM}{F'G} = \frac{M_x - M_0}{F'G},$$

wo M_0 das Biegungsmoment über der Stütze bedeutet.

Für $M_0 = 0$, also für den einfachen Träger auf zwei Stützen, ist

$$y = \frac{M_x}{F'G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

d. h. die durch die Schubkräfte erzeugte elastische Linie ist die Seillinie, die zu der gegebenen Belastungsfläche des Trägers mit der Polweite $F'G$ gehört.

Ist der Stegquerschnitt F' veränderlich, so kann das unter I. angegebene Mohrsche Verfahren sinngemäfs (statt J setze F', statt Momentenfläche Belastungsfläche) Anwendung finden.

Durch den Einfluss der Schubkräfte, den man meist vernachlässigt, wird die Durchbiegung eines Trägers um etwa **8 bis 12 %** vergröfsert. Umgekehrt ergibt sich das Elastizitätsmafs E, aus Biegungsversuchen berechnet, zu klein, wenn der Einfluss der Schubkräfte nicht berücksichtigt wird.

Die **Arbeit der Formänderung** des Trägers durch die Schubkräfte ist

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^l Q\gamma\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q^2\,dx}{F'G} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

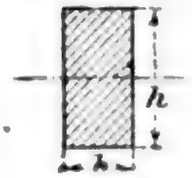
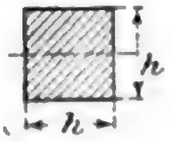
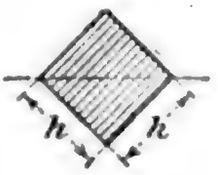
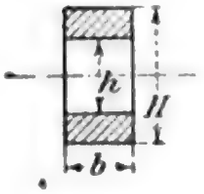
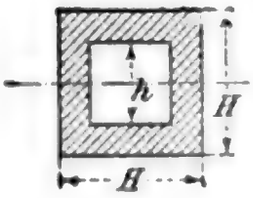
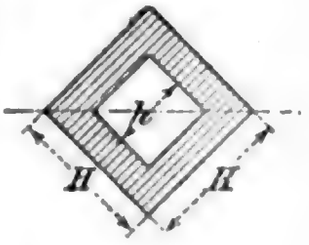
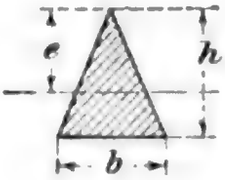
d. Trägheits- und Widerstandsmomente.

Erklärung und allgemeine Gesetze über Trägheitsmomente S. 191 ff.; zeichnerische Bestimmung der Trägheitsmomente S. 195 ff.

Aequatoriale Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der üblichsten Querschnittsformen.

Bei den **unsymmetrischen** Querschnitten Nr. 7 und 12 ist nur das **kleinere** (mafsgebende) der beiden Widerstandsmomente W_1 und W_2 angegeben (S. 524). — Trägheits- und Widerstandsmomente der deutschen **Normalprofile für Walzeisen** im 5. Abschn., Stoffkunde. Trägheitsmomente für **Blechträger**-Querschnitte III. Bd., Abschn. Brückenbau. Trägheits- und Widerstandsmomente für Profile breitfüfsiger **Eisenbahnschienen** III. Bd., Abschn. Eisenbahnwesen.

Digitized by Google

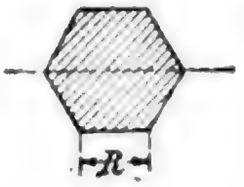
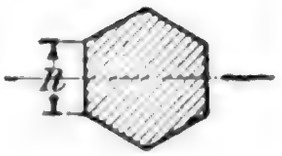
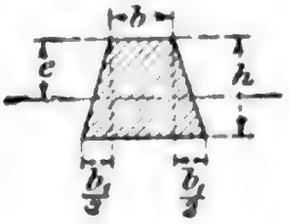
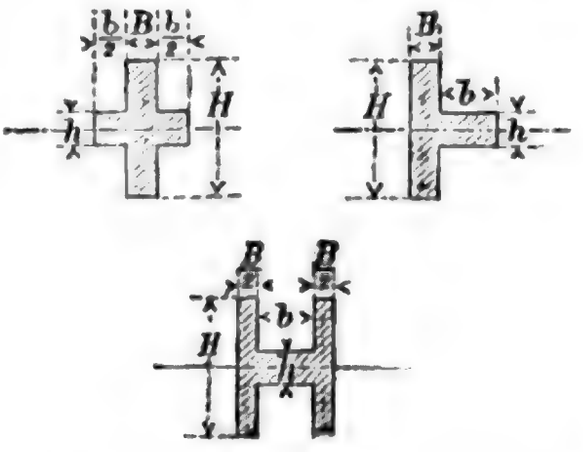
Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
1 [1])		$J = \frac{b h^3}{12}$	$W = \frac{b h^2}{6}$
2 [1])		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
3		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0{,}117851\, h^3$ [2])
4		$J = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
5 [3])		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
6		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H} = 0{,}1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$
7		$J = \frac{b h^3}{36}$ $e = \frac{2}{3} h$	$W = \frac{b h^2}{24}$

[1]) Ausführliche Tafel S. 542 ff.

[2]) Schneidet man die obere und die untere Ecke wagerecht ab, so wird W größer; die beiderseitige Verkürzung um je $^1/_{18}$ der Diagonale ergibt $W_{max} = 0{,}1242\, h^3$.

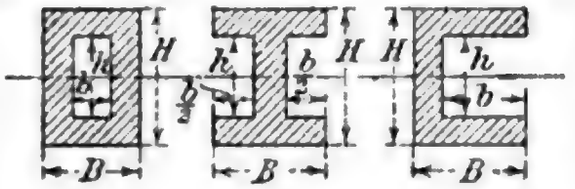
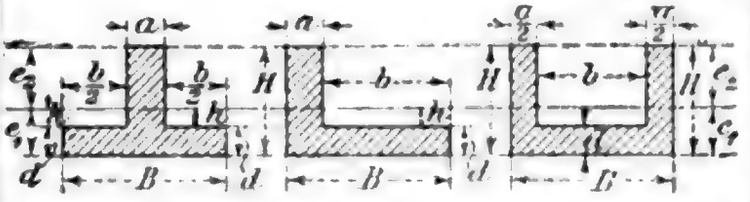
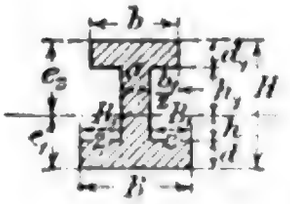
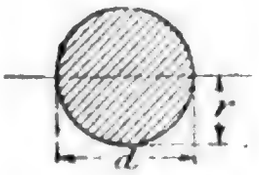
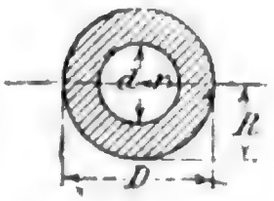
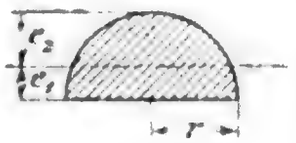
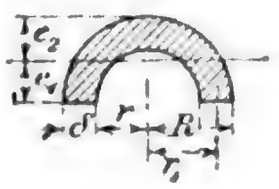
[3]) Hierzu kann die Tafel S. 542 benutzt werden.

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
8		$J = \frac{5\sqrt{8}}{16} R^4 = 0{,}5413\, R^4$	$W = \frac{5}{8} R^3$
9			$W = 0{,}5413\, R^3$
10		$J = \frac{1+2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0{,}6381\, R^4$	$W = 0{,}6906\, R^3$ [1]
11	**Regelmäßiges Vieleck.** F ist der Flächeninhalt, a die Seite, R der Halbmesser des umliegenden, r der des einliegenden Kreises. Beliebige Achse durch den Mittelpunkt. (Weiteres S. 130.)	$J = \frac{F}{24}(6R^2 - a^2) = \frac{F}{48}(12r^2 + a^2)$ $J \sim \frac{FR^2}{4}$	$W \sim \frac{FR}{4}$
12		$J = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h$	$W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$
13		$J = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$

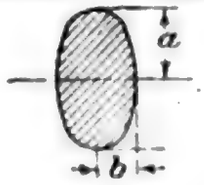
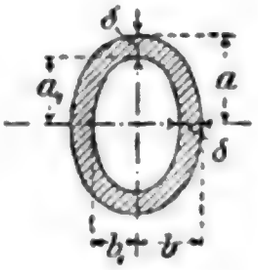
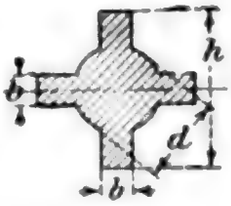
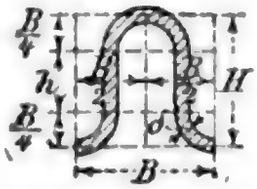
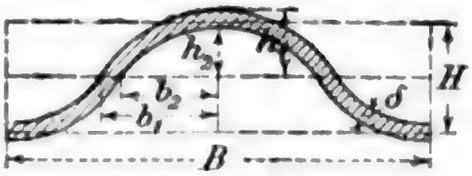
[1]) In bezug auf eine Diagonale ist $W = 0{,}6381\, R^3$.

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
14		$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
15		$J = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}$ $e_2 = H - e_1$	
16		$J = \frac{1}{3}(Be_1^3 - B_1h^3 + be_2^3 - b_1h_1^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{dH^2 + B_1d^2 + b_1d_1(2H - d_1)}{aH + B_1d + b_1d_1}$	
17[1]		$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0{,}0491\,d^4$ $= 0{,}7854\,r^4$ $= F\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{F}{4}r^2$ $J \sim 0{,}05\,d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0{,}0982\,d^3$ $= 0{,}7854\,r^3$ $= \frac{F}{4}r$ $W \sim 0{,}1\,d^3$
18[2]	 $d_m = \frac{1}{2}(D + d)$ $s = \frac{1}{2}(D - d)$	$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $= \frac{1}{4}F(R^2 + r^2)$ $J \sim 0{,}05\,(D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32}\,\frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4}\,\frac{R^4 - r^4}{R}$ $W \sim 0{,}8\,d_m^2 s,$ wenn $s : d_m$ sehr klein ist
19		$J = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $= 0{,}1098\,r^4$	$W_2 = 0{,}1908\,r^3$ $W_1 = 0{,}2587\,r^3$ $e_1 = 0{,}4244\,r$
20		$J = 0{,}1098\,(R^4 - r^4)$ $\frac{0{,}283\,R^2r^2(R - r)}{R + r}$ $J \sim 0{,}3\,\delta r_1^3,$ wenn $\delta : r_1$ sehr klein ist	$e_1 = \frac{4}{3\pi}\,\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $e_2 = R - e_1$

[1]) Ausführliche Tafel S. 539.
[2]) Ausführliche Tafel S. 540.

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
21		$J = \frac{\pi a^3 b}{4} = 0{,}7854\, a^3 b$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4} = 0{,}7854\, a^2 b$
22		$J = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1^3 b_1)$ $\sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b)\,\delta$	$W \sim \frac{\pi}{4} a\,(a + 3b)\,\delta$
		J und W auf die Achse $2b$ bezogen	
23		$J = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b\,(h^3 - d^3) + b^3 (h - d)\right]$ $W = \frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b\,(h^3 - d^3) + b^3 (h - d)\right]$	
24	 Trägerwellblech.	$J = \frac{\delta}{4}\left(\frac{\pi B^3}{16} + B^2 h + \frac{\pi B h^2}{2} + \frac{2}{3} h^3\right)$, worin $h = H - \frac{1}{2} B$ $W = \frac{2J}{H + \delta}$	
25	 Flaches Wellblech. (Welle aus Parabelbogen.)	$J = \frac{64}{105}(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$, worin $h_1 = \frac{1}{2}(H + \delta)$ | $b_1 = \frac{1}{4}(B + 2{,}6\,\delta)$ $h_2 = \frac{1}{2}(H - \delta)$ | $b_2 = \frac{1}{4}(B - 2{,}6\,\delta)$ $W = \frac{2J}{H + \delta}$	

Weitere Angaben für **Wellbleche** 5. Abschn., Stoffkunde.

Nach R. F. Mayer*) ist für alle Wellbleche (24 u. 25)

$$J = \eta\, \delta\, H^3,$$

worin η eine von dem Verhältnis $n = B : H$ abhängige Zahl ist, die aus folgender Tafel zu entnehmen ist. (Geradlinige Zwischenschaltung zulässig.)

n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η
0,3	0,20792	0,9	0,28180	1,5	0,34571	2,1	0,40173	2,6	0,45025	3,1	0,50307	3,6	0,55895
0,4	0,22101	1,0	0,29310	1,6	0,35553	2,2	0,41101	2,7	0,46051	3,2	0,51404	3,7	0,57041
0,5	0,23377	1,1	0,30412	1,7	0,36512	2,3	0,42051	2,8	0,47094	3,3	0,52511	3,8	0,58195
0,6	0,24622	1,2	0,31489	1,8	0,37451	2,4	0,43023	2,9	0,48151	3,4	0,53630	3,9	0,59357
0,7	0,25837	1,3	0,32540	1,9	0,38370	2,5	0,44014	3,0	0,49222	3,5	0,54758	4,0	0,60526
0,8	0,27023	1,4	0,33568	2,0	0,39270								

*) L. v. Tetmajer, Angew. Elast.- u. Festigkeitsl. 3. Aufl. 1905 S. 133.

Digitized by Google

1. Kreisförmiger Querschnitt.

d $J =$ äquatoriales Trägheitsmoment, $W =$ Widerstandsmoment.

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332086	13023	101	5108055	101150
2	0,7854	0,7854	52	358908	13804	102	5313378	104184
3	3,976	2,651	53	387323	14616	103	5524830	107278
4	12,57	6,283	54	417393	15459	104	5742532	110433
5	30,68	12,27	55	449180	16334	105	5966604	113650
6	63,62	21,21	56	482750	17241	106	6197171	116928
7	117,9	33,67	57	518166	18181	107	6434357	120268
8	201,1	50,27	58	555497	19155	108	6678287	123672
9	322,1	71,57	59	594810	20163	109	6929087	127139
10	490,9	98,17	**60**	636172	21206	**110**	7186886	130671
11	718,7	130,7	61	679651	22284	111	7451813	134267
12	1018	169,6	62	725332	23398	112	7723997	137929
13	1402	215,7	63	773272	24548	113	8003571	141656
14	1886	269,4	64	823550	25736	114	8290666	145450
15	2485	331,3	65	876240	26961	115	8585417	149312
16	3217	402,1	66	931420	28225	116	8887958	153241
17	4100	482,3	67	989166	29527	117	9198425	157238
18	5153	572,6	68	1049556	30869	118	9516956	161304
19	6397	673,4	69	1112660	32251	119	9843689	165440
20	7854	785,4	**70**	1178588	33674	**120**	10178763	169646
21	9547	909,2	71	1247393	35138	121	10522320	173923
22	11499	1045	72	1319167	36644	122	10874501	178271
23	13737	1194	73	1393995	38192	123	11235450	182690
24	16286	1357	74	1471963	39783	124	11605311	187182
25	19175	1534	75	1553156	41417	125	11984229	191748
26	22432	1726	76	1637662	43096	126	12372350	196387
27	26087	1932	77	1725571	44820	127	12769824	201100
28	30172	2155	78	1816972	46589	128	13176799	205887
29	34719	2394	79	1911967	48404	129	13593424	210751
30	39761	2651	**80**	2010619	50265	**130**	14019852	215690
31	45333	2925	81	2113051	52174	131	14456235	220706
32	51472	3217	82	2219347	54130	132	14902727	225799
33	58214	3528	83	2329605	56135	133	15359483	230970
34	65597	3859	84	2443920	58189	134	15826658	236219
35	73662	4209	85	2562392	60292	135	16304411	241547
36	82448	4580	86	2685120	62445	136	16792899	246954
37	91998	4973	87	2812205	64648	137	17292282	252442
38	102354	5387	88	2943748	66903	138	17802721	258010
39	113561	5824	89	3079853	69210	139	18324378	263660
40	125664	6283	**90**	3220623	71569	**140**	18857416	269392
41	138709	6766	91	3366165	73982	141	19401999	275208
42	152745	7274	92	3516586	76448	142	19958294	281108
43	167820	7806	93	3671992	78968	143	20526466	287093
44	183984	8363	94	3832492	81542	144	21106684	293163
45	201280	8945	95	3998198	84173	145	21699116	299320
46	219787	9555	96	4169220	86859	146	22303933	305563
47	239531	10193	97	4345671	89601	147	22921307	311895
48	260576	10857	98	4527664	92401	148	23551409	318315
49	282979	11550	99	4715315	95259	149	24194414	324824
50	306796	12272	**100**	4908738	98175	**150**	24850496	331430

Bemerkung. Betrug der Wert der ersten Dezimale 5 oder mehr, so wurde der Einer um eine Einheit erhöht.

Digitized by Google

2. Kreisringförmiger Querschnitt.*)

F Querschnitt, *J* Trägheitsmoment, *W* Widerstandsmoment.
Die Gewichte *g* (in kg/m) beziehen sich auf **glatte, gufseiserne Rohre (Säulen)**; 1 cbm Gufseisen wiegt 7250 kg. Für **Schweifseisen** sind die Werte *g* mit 1,076, für **Flufseisen** mit 1,083, für gewalzten und gegossenen **Flufsstahl** mit 1,084 zu multiplizieren.

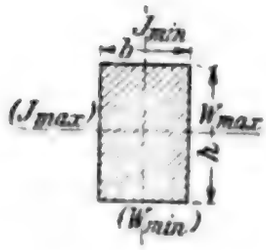
D mm	*δ* mm	*F* cm²	*J* cm⁴	*W* cm³	*g* kg/m	*D* mm	*δ* mm	*F* cm²	*J* cm⁴	*W* cm³	*g* kg/m
80	10	22,0	137	34,2	16,0	160	14	64,2	1727	216	46,5
	12	25,6	153	38,2	18,6		16	72,4	1899	237	52,5
	14	29,0	165	41,2	21,0		18	80,3	2056	257	58,2
90	10	25,1	204	45,3	18,2		20	88,0	2200	275	63,8
	12	29,4	229	50,9	21,3		22	95,4	2329	291	69,2
	14	33,4	250	55,6	24,2		24	103	2445	306	74,3
	16	37,2	267	59,3	27,0	170	14	68,6	2104	244	49,7
100	10	28,3	291	58,2	20,5		16	77,4	2320	273	56,1
	12	33,2	327	65,4	24,1		18	85,9	2517	296	62,4
	14	37,8	359	71,8	27,4		20	94,3	2699	318	68,3
	16	42,2	385	77,0	30,6		22	102	2863	337	74,2
	18	46,4	409	81,8	33,6		24	110	3013	354	79,8
110	10	31,4	397	72,2	22,8	180	14	73,0	2534	282	52,9
	12	36,9	450	81,8	26,8		16	82,4	2798	311	59,7
	14	42,2	497	90,4	30,6		18	91,6	3042	338	66,4
	16	47,3	537	97,6	34,2		20	101	3268	363	72,9
	18	52,0	572	104	37,7		22	109	3475	386	79,2
120	10	34,6	527	87,8	25,1		24	118	3663	407	85,3
	12	40,7	601	100	29,5	190	14	77,4	3017	318	56,1
	14	46,6	666	111	33,8		16	87,5	3338	351	63,4
	16	52,3	724	121	37,9		18	97,3	3636	383	70,5
	18	57,7	773	129	41,8		20	107	3914	413	77,4
	20	62,8	817	136	45,5		22	116	4168	439	84,2
130	10	37,7	683	105	27,3		24	125	4401	463	90,8
	12	44,5	782	120	32,3	200	16	92,5	3944	394	67,1
	14	51,0	871	134	37,0		18	103	4303	430	74,6
	16	57,3	949	146	41,5		20	113	4638	464	82,0
	18	62,3	1019	157	45,9		22	123	4948	495	89,2
	20	69,1	1080	166	50,1		24	133	5234	523	96,2
140	12	48,3	997	142	35,0		26	142	5499	550	103,0
	14	55,4	1114	159	40,2		28	151	5743	574	109,7
	16	62,3	1218	174	45,2		30	160	5968	597	116,1
	18	68,9	1311	187	50,0	210	16	97,5	4619	440	70,7
	20	75,4	1395	199	54,7		18	109	5047	481	78,7
150	12	52,0	1248	166	37,7		20	119	5448	519	86,6
	14	59,8	1347	180	43,4		22	130	5819	554	94,2
	16	67,4	1534	205	48,9		24	140	6166	587	101,6
	18	74,7	1656	221	54,1		26	150	6488	618	109,0
	20	81,7	1766	235	59,2		28	160	6786	646	116,1
	22	88,6	1866	249	64,2		30	170	7062	673	123,0
	24	95,0	1955	261	68,9						

*) Aus F. Boerner, Statische Tafeln usw. Berlin. 4. Aufl. 1912. Wilhelm Ernst & Sohn.

D mm	δ mm	F cm²	J cm⁴	W cm³	g kg/m	D mm	δ mm	F cm²	J cm⁴	W cm³	g kg/m
220	16	103	5342	486	74,3	290	18	154	14289	986	111,5
	18	114	5873	534	82,8		22	185	16743	1155	134,3
	20	126	6346	577	91,1		26	216	18970	1308	156,3
	22	137	6839	622	99,2		30	245	20983	1447	177,6
	24	148	7203	655	107,2		34	273	22798	1573	198,2
	26	158	7589	690	114,9	300	20	176	17330	1155	127,5
	28	169	7949	723	122,5		24	208	19966	1331	150,9
	30	179	8282	753	129,8		28	239	22363	1491	173,5
230	16	109	6207	540	78,0		32	269	24535	1636	195,3
	18	120	6630	577	86,9		36	299	26479	1765	216,5
	20	132	7341	638	95,6		40	327	28262	1884	236,9
	22	144	7862	684	104,3	320	20	188	21302	1331	136,7
	24	155	8351	726	112,6		24	223	24558	1535	161,8
	26	167	8809	766	120,8		28	257	27580	1724	186,3
	28	178	9238	803	128,8		32	290	30390	1900	209,9
	30	189	9637	838	136,7		36	321	32905	2057	232,9
240	18	126	7785	649	91,0		40	352	35186	2199	255,1
	20	138	8434	703	100,2	340	20	201	25838	1520	145,8
	22	151	9042	753	109,3		24	239	29912	1759	172,8
	24	163	9546	796	118,1		28	274	33665	1980	198,9
	26	175	10154	846	126,7		32	310	37115	2183	224,5
	28	186	10659	888	135,2		36	344	40277	2369	249,3
	30	198	11133	928	143,5		40	377	43165	2539	273,3
250	18	131	8880	710	95,1	360	20	214	30977	1721	154,9
	22	158	10334	827	114,3		24	253	35935	1996	183,6
	26	183	11633	931	132,7		28	292	40526	2251	211,7
	30	207	12778	1022	150,3		32	330	44773	2487	239,0
	34	231	13790	1103	167,3		36	366	48680	2704	265,6
260	18	137	10073	775	99,2		40	402	52276	2904	291,5
	22	164	11746	904	119,3		44	437	55582	3088	316,7
	26	191	13243	1019	138,5	380	20	226	36756	1935	164,0
	30	217	14577	1121	157,2		24	270	42718	2248	194,6
	34	241	15691	1207	175,0		28	308	48262	2540	224,5
270	18	143	11369	842	103,3		32	346	53400	2811	253,6
	22	171	13286	984	124,3		36	383	58379	3073	282,1
	26	199	15000	1111	144,5		40	418	62593	3294	309,8
	30	226	16539	1225	164,0		44	453	66671	3509	336,8
	34	252	17914	1327	182,8	400	20	239	43210	2160	173,1
280	18	148	12774	912	107,4		24	284	50306	2515	205,5
	22	178	14947	1068	129,3		28	336	56917	2846	237,2
	26	207	16909	1208	150,4		32	370	63103	3156	268,3
	30	236	18674	1334	170,8		36	412	68852	3443	298,5
	34	263	20257	1447	190,5		40	452	74195	3710	327,7
							44	492	79154	3958	356,8
							48	531	83744	4187	384,8

Digitized by Google

3. Rechteckiger und quadratischer Querschnitt.



$$J_{min} = \frac{b^3 h}{12}.$$

$$W_{max} = \frac{b h^2}{6}.$$

Bemerkung. $J_{max} = \frac{b h^3}{12}$ ergibt sich aus W_{max} der Tafel durch Multiplikation mit $\frac{h}{2}$;

$W_{min} = \frac{b^2 h}{6}$ ergibt sich aus J_{min} der Tafel durch Division mit $\frac{b}{2}$.

Querschnitt h	b	J_{min}.	W_{max}.	Querschnitt h	b	J_{min}.	W_{max}.	Querschnitt h	b	J_{min}.	W_{max}.
1	1	0,0833	0,1667		2	5,3333	21,333		6	198,00	121,00
	1	0,1667	0,6667		3	18,000	32,000		7	314,42	141,17
2	2	1,3333	1,3333	8	4	42,667	42,667	11	8	469,33	161,33
	1	0,2500	1,5000		5	83,333	53,333		9	668,25	181,50
3	2	2,0000	3,0000		6	144,00	64,000		10	916,67	201,67
	3	6,7500	4,5000		7	228,67	74,667		11	1220,1	221,83
	1	0,3333	2,6667		8	341,33	85,333		1	1,0000	24,000
4	2	2,6667	5,3333		1	0,7500	13,500		2	8,0000	48,000
	3	9,0000	8,0000		2	6,0000	27,000		3	27,000	72,000
	4	21,333	10,667		3	20,250	40,500		4	64,000	96,000
	1	0,4167	4,1667		4	48,000	54,000		5	125,00	120,00
	2	3,3333	8,3333	9	5	93,750	67,500		6	216,00	144,00
5	3	11,250	12,500		6	162,00	81,000	12	7	343,00	168,00
	4	26,667	16,667		7	257,25	94,500		8	512,00	192,00
	5	52,083	20,833		8	384,00	108,00		9	729,00	216,00
	1	0,5000	6,0000		9	546,75	121,50		10	1000,0	240,00
	2	4,0000	12,000		1	0,8333	16,667		11	1331,0	264,00
	3	13,500	18,000		2	6,6667	33,333		12	1728,0	288,00
6	4	32,000	24,000		3	22,500	50,000		1	1,0833	28,167
	5	62,500	30,000		4	53,333	66,667		2	8,6667	56,333
	6	108,00	36,000		5	104,17	83,333		3	29,250	84,500
	1	0,5833	8,1667	10	6	180,00	100,00		4	69,333	112,67
	2	4,6667	16,333		7	285,83	116,67		5	135,42	140,83
	3	15,750	24,500		8	426,67	133,33		6	234,00	169,00
7	4	37,333	32,667		9	607,50	150,00	13	7	371,58	197,17
	5	72,917	40,833		10	833,33	166,67		8	554,67	225,33
	6	126,00	49,000		1	0,9167	20,167		9	789,75	253,50
	7	200,08	57,167		2	7,3333	40,333		10	1083,3	281,67
				11	3	24,750	60,500		11	1441,9	309,83
					4	58,667	80,667		12	1872,0	338,00
8	1	0,6667	10,667		5	114,58	100,83		13	2380,1	366,17

Digitized by Google

Querschnitt h	b	$J_{min.}$	$W_{max.}$
14	1	1,1667	32,667
	2	9,3333	65,333
	3	31,500	98,000
	4	74,667	130,67
	5	145,83	163,33
	6	252,00	196,00
	7	400,17	228,67
	8	597,33	261,33
	9	850,50	294,00
	10	1166,7	326,67
	11	1552,8	359,33
	12	2016,0	392,00
	13	2563,2	424,67
	14	3201,3	457,33
15	1	1,2500	37,500
	2	10,000	75,000
	3	33,750	112,50
	4	80,000	150,00
	5	156,25	187,50
	6	270,00	225,00
	7	428,75	262,50
	8	640,00	300,00
	9	911,25	337,50
	10	1250,0	375,00
	11	1663,8	412,50
	12	2160,0	450,00
	13	2746,3	487,50
	14	3430,0	525,00
	15	4218,8	562,50
16	1	1,3333	42,667
	2	10,667	85,333
	3	36,000	128,00
	4	85,333	170,67
	5	166,67	213,33
	6	288,00	256,00
	7	457,33	298,67
	8	682,67	341,33
	9	972,00	384,00
	10	1333,3	426,67
	11	1774,7	469,33
	12	2304,0	512,00
	13	2929,3	554,67
	14	3658,7	597,33
	15	4500,0	640,00
	16	5461,3	682,67
17	1	1,4167	48,167
	2	11,333	96,333
	3	38,250	144,50
	4	90,667	192,67
	5	177,08	240,83
	6	306,00	289,00
	7	485,92	337,17
	8	725,33	385,33
	9	1032,8	433,50
	10	1416,7	481,67
	11	1885,6	529,83
	12	2448,0	578,00
	13	3112,4	626,17
	14	3887,3	674,33
	15	4781,3	722,50
	16	5802,7	770,67
	17	6960,1	818,83
18	1	1,5000	54,000
	2	12,000	108,00
	3	40,500	162,00
	4	96,000	216,00
	5	187,50	270,00
	6	324,00	324,00
	7	514,50	378,00
	8	768,00	432,00
	9	1093,5	486,00
	10	1500,0	540,00
	11	1996,5	594,00
	12	2592,0	648,00
	13	3295,5	702,00
	14	4116,0	756,00
	15	5062,5	810,00
	16	6144,0	864,00
	17	7369,5	918,00
	18	8748,0	972,00
19	1	1,5833	60,167
	2	12,667	120,33
	3	42,750	180,50
	4	101,33	240,67
	5	197,92	300,83
	6	342,00	361,00
	7	543,08	421,17
	8	810,67	481,33
	9	1154,3	541,50
	10	1583,3	601,67
	11	2107,4	661,83
	12	2736,0	722,00
	13	3478,6	782,17
	14	4344,7	842,33
	15	5343,8	902,50
	16	6485,3	962,67
	17	7778,9	1022,8
	18	9234,0	1083,0
	19	10860	1143,2
20	1	1,6667	66,667
	2	13,333	133,33
	3	45,000	200,00
	4	106,67	266,67
	5	208,33	333,33
	6	360,00	400,00
	7	571,67	466,67
	8	853,33	533,33
	9	1215,0	600,00
	10	1666,7	666,67
	11	2218,3	733,33
	12	2880,0	800,00
	13	3661,7	866,67
	14	4573,3	933,33
	15	5625,0	1000,0
	16	6826,7	1066,7
	17	8188,3	1133,3
	18	9720,0	1200,0
	19	11432	1266,7
	20	13333	1333,3
21	1	1,7500	73,500
	2	14,000	147,00
	3	47,250	220,50
	4	112,00	294,00
	5	218,75	367,50
	6	378,00	441,00
	7	600,25	514,50

Digitized by Google

Quer-schnitt		J_{min}.	W_{max}.	Quer-schnitt		J_{min}.	W_{max}.	Quer-schnitt		J_{min}.	W_{max}.
h	b			h	b			h	b		
	8	896,00	588,00		7	657,42	617,17		2	16,667	208,33
	9	1275,8	661,50		8	981,33	705,33		3	56,250	312,50
	10	1750,0	735,00		9	1397,3	793,50		4	133,33	416,67
	11	2329,3	808,50		10	1916,7	881,67		5	260,42	520,83
	12	3024,0	882,00		11	2551,1	969,83		6	450,00	625,00
	13	3844,8	955,50		12	3312,0	1058,0		7	714,58	729,17
21	14	4802,0	1029,0		13	4210,9	1146,2		8	1066,7	833,33
	15	5906,3	1102,5		14	5259,3	1234,3		9	1518,8	937,50
	16	7168,0	1176,0	23	15	6468,8	1322,5		10	2083,3	1041,7
	17	8597,8	1249,5		16	7850,7	1410,7		11	2772,9	1145,8
	18	10206	1323,0		17	9416,6	1498,8		12	3600,0	1250,0
	19	12003	1396,5		18	11178	1587,0		13	4577,1	1354,2
	20	14000	1470,0		19	13146	1675,2	25	14	5716,7	1458,3
	21	16207	1543,5		20	15333	1763,3		15	7031,3	1562,5
					21	17750	1851,5		16	8533,3	1666,7
	1	1,8333	80,667		22	20409	1939,7		17	10235	1770,8
	2	14,667	161,33		23	23320	2027,8		18	12150	1875,0
	3	49,500	242,00						19	14290	1979,2
	4	117,33	322,67		1	2,0000	96,000		20	16667	2083,3
	5	229,17	403,33		2	16,000	192,00		21	19294	2187,5
	6	396,00	484,00		3	54,000	288,00		22	22183	2291,7
	7	628,83	564,67		4	128,00	384,00		23	25348	2395,8
	8	938,67	645,33		5	250,00	480,00		24	28800	2500,0
	9	1336,5	726,00		6	432,00	576,00		25	32552	2604,2
	10	1833,3	806,67		7	686,00	672,00				
	11	2440,2	887,33		8	1024,0	768,00		1	2,1667	112,67
22	12	3168,0	968,00		9	1458,0	864,00		2	17,333	225,33
	13	4027,8	1048,7		10	2000,0	960,00		3	58,500	338,00
	14	5030,7	1129,3		11	2662,0	1056,0		4	138,67	450,67
	15	6187,5	1210,0		12	3456,0	1152,0		5	270,83	563,33
	16	7509,3	1290,7	24	13	4394,0	1248,0		6	468,00	676,00
	17	9007,2	1371,3		14	5488,0	1344,0		7	743,17	788,67
	18	10692	1452,0		15	6750,0	1440,0		8	1109,3	901,33
	19	12575	1532,7		16	8192,0	1536,0		9	1579,5	1014,0
	20	14667	1613,3		17	9826,0	1632,0	26	10	2166,7	1126,7
	21	16979	1694,0		18	11664	1728,0		11	2883,8	1239,3
	22	19521	1774,7		19	13718	1824,0		12	3744,0	1352,0
					20	16000	1920,0		13	4760,2	1464,7
	1	1,9167	88,167		21	18522	2016,0		14	5945,3	1577,3
	2	15,333	176,33		22	21296	2112,0		15	7312,5	1690,0
23	3	51,750	264,50		23	24334	2208,0		16	8874,7	1802,7
	4	122,67	352,67		24	27648	2304,0		17	10645	1915,3
	5	239,58	440,83						18	12636	2028,0
	6	414,00	529,00	25	1	2,0833	104,17		19	14861	2140,7

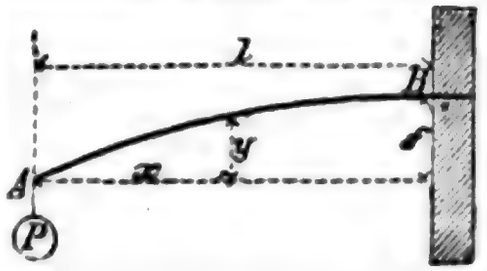
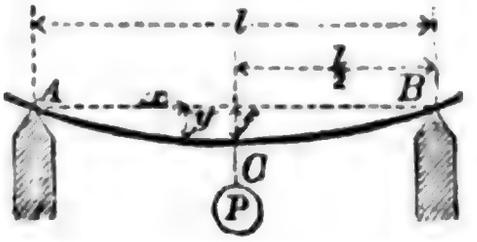
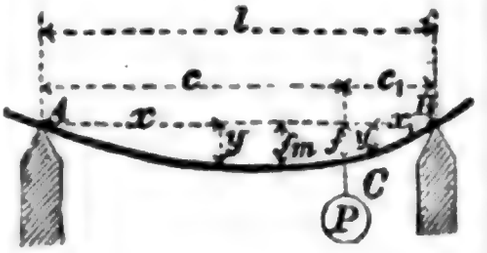
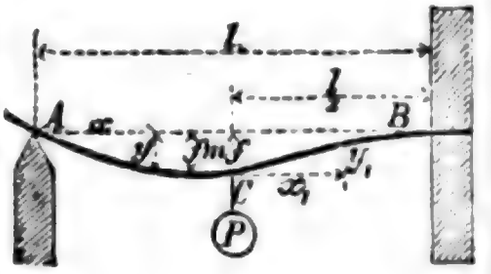
Digitized by Google

Querschnitt h	b	J_{min}.	W_{max}.
26	20	17333	2253,3
	21	20066	2366,0
	22	23071	2478,7
	23	26362	2591,3
	24	29952	2704,0
	25	33854	2816,7
	26	38081	2929,3
27	1	2,2500	121,50
	2	18,000	243,00
	3	60,750	364,50
	4	144,00	486,00
	5	281,25	607,50
	6	486,00	729,00
	7	771,75	850,50
	8	1152,0	972,00
	9	1640,3	1093,5
	10	2250,0	1215,0
	11	2994,8	1336,5
	12	3888,0	1458,0
	13	4943,3	1579,5
	14	6174,0	1701,0
	15	7593,8	1822,5
	16	9216,0	1944,0
	17	11054	2065,5
	18	13122	2187,0
	19	15433	2308,5
	20	18000	2430,0
	21	20837	2551,5
	22	23958	2673,0
	23	27376	2794,5
	24	31104	2916,0
	25	35156	3037,5
	26	39546	3159,0
	27	44287	3280,5
28	1	2,3333	130,67
	2	18,667	261,33
	3	63,000	392,00
	4	149,33	522,67
	5	291,67	653,33
	6	504,00	784,00
	7	800,33	914,67
	8	1194,7	1045,3
	9	1701,0	1176,0
	10	2333,3	1306,7
	11	3105,7	1437,3
	12	4032,0	1568,0
	13	5126,3	1698,7
	14	6402,7	1829,3
	15	7875,0	1960,0
	16	9557,3	2090,7
	17	11464	2221,3
	18	13608	2352,0
	19	16004	2482,7
	20	18667	2613,3
	21	21609	2744,0
	22	24845	2874,7
	23	28390	3005,3
	24	32256	3136,0
	25	36458	3266,7
	26	41011	3397,3
	27	45927	3528,0
	28	51221	3658,7
29	1	2,4167	140,17
	2	19,333	280,33
	3	65,250	420,50
	4	154,67	560,67
	5	302,08	700,83
	6	522,00	841,00
	7	828,92	981,17
	8	1237,3	1121,3
	9	1761,8	1261,5
	10	2416,7	1401,7
	11	3216,6	1541,8
	12	4176,0	1682,0
	13	5309,4	1822,2
	14	6631,3	1962,3
	15	8156,3	2102,5
	16	9898,7	2242,7
	17	11873	2382,8
	18	14094	2523,0
	19	16576	2663,2
	20	19333	2803,3
	21	22381	2943,5
	22	25733	3083,7
	23	29404	3223,8
	24	33408	3364,0
	25	37760	3504,2
	26	42475	3644,3
	27	47567	3784,5
	28	53051	3924,7
	29	58940	4064,8
30	1	2,5000	150,00
	2	20,000	300,00
	3	67,500	450,00
	4	160,00	600,00
	5	312,50	750,00
	6	540,00	900,00
	7	857,50	1050,0
	8	1280,0	1200,0
	9	1822,5	1350,0
	10	2500,0	1500,0
	11	3327,5	1650,0
	12	4320,0	1800,0
	13	5492,5	1950,0
	14	6860,0	2100,0
	15	8437,5	2250,0
	16	10240	2400,0
	17	12283	2550,0
	18	14580	2700,0
	19	17148	2850,0
	20	20000	3000,0
	21	23153	3150,0
	22	26620	3300,0
	23	30418	3450,0
	24	34560	3600,0
	25	39063	3750,0
	26	43940	3900,0
	27	49208	4050,0
	28	54880	4200,0
	29	60973	4350,0
	30	67500	4500,0

Digitized by Google

e. Träger mit unv

Die Freilängen l, Durchbiegungen f, Trägerhöhen h, Koordinaten x und y und
lässige Biegungsspannung k_b (S. 485, 502 ff.) und das Elastizitätsmafs E
die wagerechte Schwerachse in cm⁴ und
Arbeit

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tr Erfo stand
1.		$B = P.$ $M = Px.$ $M_{max} = Pl.$	$P =$ $W =$
2.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Px}{2}.$ $M_{max} = \frac{Pl}{4}.$	$P =$ $W =$
3.		$A = \frac{Pc_1}{l}; \quad B = \frac{Pc}{l}.$ Für AC: $M = \frac{Pc_1x}{l};$ für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}.$ $M_{max} = \frac{Pcc_1}{l}.$	$P =$ $W =$
4.		$A = \frac{5}{16}P; \quad B = \frac{11}{16}P.$ Für AC: $M = \frac{5}{16}Px;$ für C: $M = \frac{5}{32}Pl;$ für BC: $M = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right).$ $M_{max} = \frac{3Pl}{16}.$	$P =$ $W =$

*) Die Formeln für die Auflagerdrücke und die Biegungsmomente gel
Träger mit veränderlichem Querschnitt.

Für die Berechnung eingemauerter Träger ist der Sicherheit halb
Freiaufliegen anzunehmen; es sind hierbei also die Fälle Nr. 4 (S.
5, 9 (S. 548 u. 549) und 10 (S. 550 u. 551) nicht zu benutzen.

Digitized by Google

lichem Querschnitt.*)

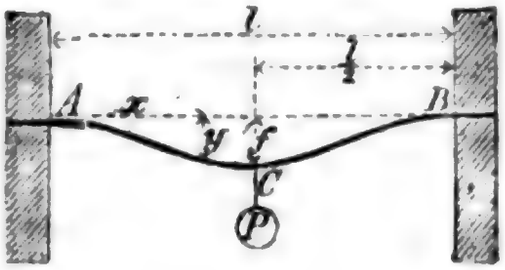
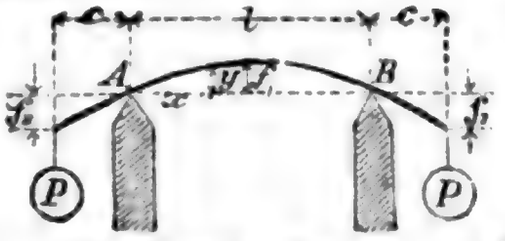
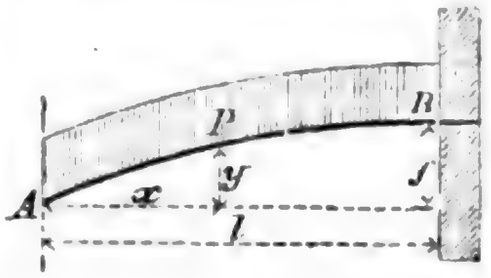
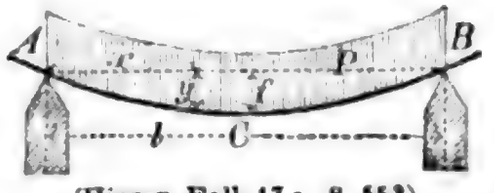
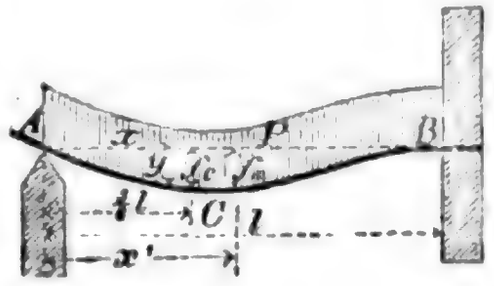
Längenabmessungen sind in cm, die äußeren Kräfte A, B, P, Q usw. in kg, die zustoffes (S. 482, 486 ff.) in kg/qcm, das Trägheitsmoment J des Trägerquerschnittes für hörige Widerstandsmoment W in cm³ auszudrücken.

s. S. 533 u. 534.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f**)	Bemerkungen
$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EJ}\left(\frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$. $\operatorname{tg}\beta_{(x=0)} = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}$ $= \frac{2}{3}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{Pl^3}{16EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}$ $= \frac{1}{6}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{c^2c_1^2}{6l}\left(2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2c_1}\right)$, $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c_1^2c^2}{6l}\left(2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2c}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$; f_{max} für $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}}$, wenn $c > c_1$; $x_1 = c_1\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}}$, wenn $c < c_1$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt bei C.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$, $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left(\frac{1}{4}\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{7l^3}{768}$; für $x = l\sqrt{1/6}$ ist $f_{max} = \sqrt{1/6}\,\frac{Pl^3}{48EJ}$.	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Wendepunkt bei $x_1 = 4/9\,l$.

**) Mit f ist die Durchbiegung im Angriffpunkte der Einzellast P, mit f_{max} (oder f_m) die größte Durchbiegung bezeichnet worden, falls f nicht damit übereinstimmt. — Die durch k_b ausgedrückten Werte von f gelten nur für homogene Balkenquerschnitte mit wagerechter Symmetrieachse. — Ueber die Vergrößerung von f (und von y) durch den Einfluß der Schubkräfte S. 533.

Digitized by Google

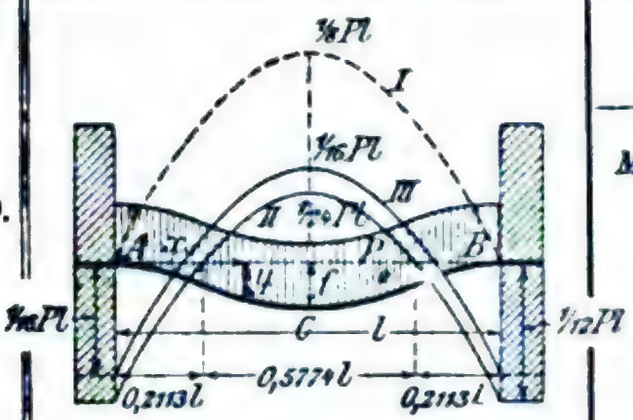
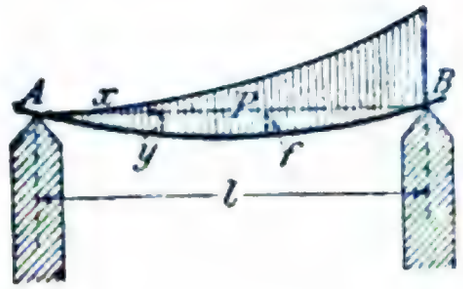
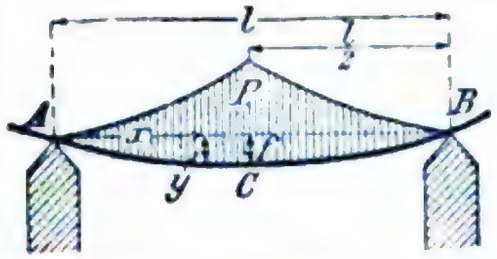
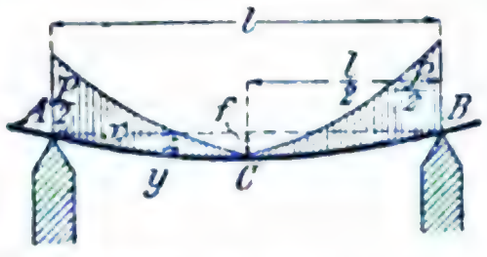
Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
5.		$A = B = \frac{P}{2}$ Für AC: $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$ für CB: $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{8k_b}$.
6.	 Dieselben Formeln gelten, wenn AB die Lastpunkte und die Enden des Trägers gestützt sind; die Gesamt durchbiegung in Trägermitte ist dann $= f_1 + f_2$	$A = B = P$. Für AB: $M = Pc = \text{konst.}$	$P = \frac{k_b W}{c}$. $W = \frac{Pc}{k_b}$.
7.		$B = P$. $M = \frac{Px^2}{2l}$. $M_{max} = \frac{Pl}{2}$.	$P = 2\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{2k_b}$.
8.	 (Hierzu Fall 17 a, S. 553).	$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{8k_b}$.
9.		$A = \frac{3}{8}P$; $B = \frac{5}{8}P$. $M = \frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{8}$ (absolutes Maximum). $M_C = \frac{9}{128}Pl$ (relatives Maximum) bei $x = \frac{5}{8}l$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$. (Tragkraft nicht größer als im Falle 8.) $W = \frac{Pl}{8k_b}$.

Digitized by Google

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{192}$ $= \frac{1}{12}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Eingespannter Träger. Gefährliche Querschnitte bei A, B und C. Wendepunkte bei $x = 1/4\,l$ und $x = 3/4\,l$.
$y = f_1 - [\varrho - \sqrt{\varrho^2 - (1/2\,l - x)^2}]$, worin $\varrho = \frac{EJ}{Pc}$ = unveränderlich. Die elastische Linie zwischen A und B ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser ϱ.	f_1 in der Mitte der Stützweite: $f_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$ $= \frac{1}{4}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h} = \frac{l^2}{8\varrho}$. $f_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c^2}{3}\left(c + \frac{3l}{2}\right)$.	Frei aufliegender*) Träger mit Kragstücken. Gefährlicher Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}$ $= \frac{1}{2}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$. $\operatorname{tg}\tau_{(x=0)} = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{24} = 3{,}2\frac{f}{l}$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{5\,l^3}{384}$ $= \frac{5}{24}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}\left(\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right)$.	$f_{max} = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{185}$, worin $\frac{1}{185} = \frac{78 + 110\sqrt{33}}{2 \cdot 16^3}$ $f_C = \frac{175}{8^3}\frac{P}{EJ}l^3$ $= \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{187}$.	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Durchbiegung f_{max} bei $x' = 1/16\,l(1 + \sqrt{33}) = 0{,}4215\,l$. Wendepunkt bei $x = 3/8\,l$. M_C bei $x = 3/8\,l$.

*) Fehlt das Kragstück bei A, so findet sich f_{max} im Abstande 0,578 l von A, u. zw. ist $f_{max} = 0{,}064\frac{P}{EJ}l^2c$, die Durchbiegung im Lastpunkte $f_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c^2}{3}(c + l)$.

Digitized by Google

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
10.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{max} = 1/12\ Pl$ (absolutes Maximum). $M_C = 1/24\ Pl$ (relatives Maximum).	$P = 12\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{12\,k_b}$.
11.		$B = P$. $M = \frac{P}{3}\frac{x^3}{l^2}$. $M_{max} = \frac{Pl}{3}$.	$P = 3\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{3\,k_b}$.
12.		$A = \frac{1}{3}P$; $B = \frac{2}{3}P$. $M = \frac{P}{3}x\left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right)$. $M_{max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}Pl$ $= 0{,}128\ Pl$.	$P = \frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{k_b W}{l}$ $= 7{,}794\frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{7{,}794\,k_b}$
13.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^3}{3l^3}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{12}$.	$P = 12\frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{12\,k_b}$.
14.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$. $M_{max} = \frac{Pl}{6}$.	$P = 6\frac{k_b W}{l}$ $W = \frac{Pl}{6\,k_b}$.*

*) Ist die Lastbegrenzung im Falle 14 statt eines Dreieckes eine Parabel, deren Scheitel über Trägermitte liegt, so ist

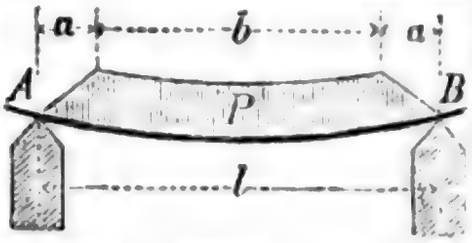
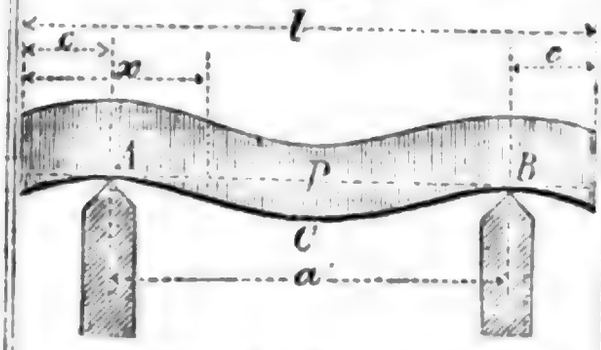
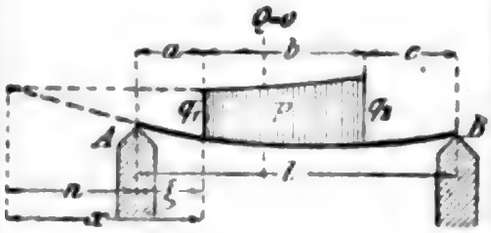
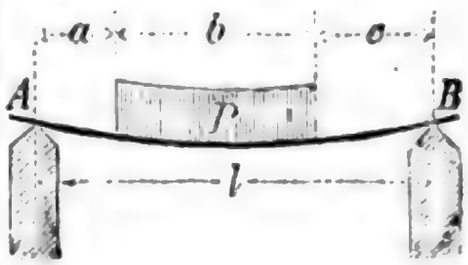
$$P = 6{,}4\frac{k_b W}{l} \quad \text{und} \quad W = \frac{5}{32}\frac{Pl}{k_b}.$$

Digitized by Google

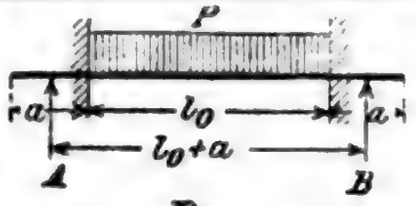
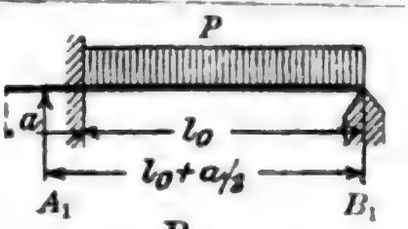
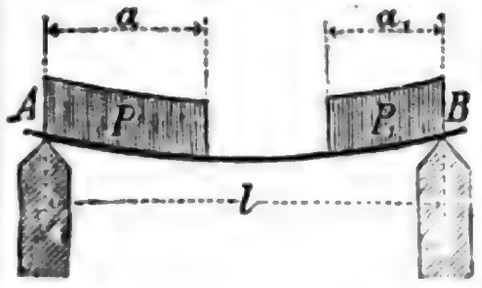
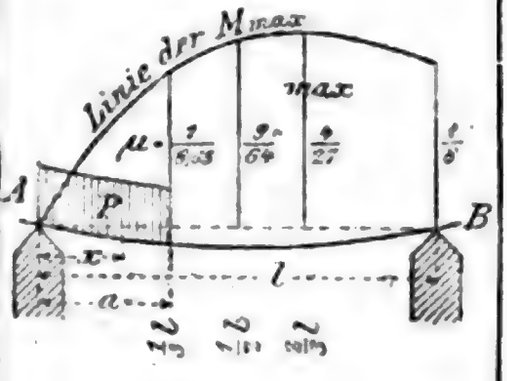
Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x^3}{l^3} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{384} = \frac{1}{16}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei A und B.
Erklärung der Abbildung für Nr. 10. Parabel I: Momentenlinie für freie Auflagerung in A und B. (Fall 8, S. 548.) Parabel II: dgl. für feste Einspannung in A und B. (Fall 10, S. 550.) Parabel III: dgl. für die dem kleinsten M_{max} entsprechende Art der Einspannung in A und B; hierfür ist $M_A = M_B = M_C = \frac{1}{16} Pl$.		Wendepunkte für $x = \frac{1}{2}l(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}})$, also bei $x_1 = 0{,}7887\,l$ und $x_2 = 0{,}2113\,l$.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{15} = \frac{2}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{180}\left(7\frac{x}{l} - 10\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^5}{l^5}\right)$.	Größte Durchbiegung für $x = l\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = 0{,}5193\,l$: $f = \frac{Pl^3}{EJ}\frac{2 + 5\sqrt{\frac{8}{15}}}{225} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = 0{,}01304\frac{Pl^3}{EJ}$. *)	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt für $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}l\sqrt{3} = 0{,}5774\,l$.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{3l^3}{320} = \frac{9}{40}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$.	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60} = \frac{1}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.

*) Da die Werte von M_{max} und f für den Fall 12 mit den entsprechenden Werten für den Fall 8 (S. 548 u. 549) fast genau übereinstimmen, so können bei Ermittlung von M_{max} und f derartige „Dreiecklasten“ und „Trapezlasten“ (parallele Seiten des Lastfeldes winkelrecht zur Trägerrichtung) für gewöhnliche Fälle als gleichmäßig verteilte Lasten angesehen werden. Die Auflagerdrücke hingegen weichen bis um $\frac{1}{6}$ der Gesamtlast von den nach Fall 8 ermittelten Werten ab.

Digitized by Google

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B	Größtes Biegungsmoment: $M_{max} = W k_b$
15.		$A = B = \frac{P}{2}$. Für $b = 0$ Fall 14 (S. 550).	$W k_b = \frac{8a^2 + 3b(4a + b)}{24(a + b)} P$.
16.	**Kragträger.**  Gefährliche Querschnitte in A, B und C. Wendepunkte für $x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - cl}$. $M_A = M_B$ mit entgegengesetztem Vorzeichen wie M_C.	$A = B = \frac{P}{2}$.	Für AB: $M_x = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l}\right)$; für $x \gtrless c$: $M_x = -\frac{Px^2}{2l}$. Die absoluten Größtwerte $M_A = M_B = \frac{Pc^2}{2l}$ und (für die Trägermitte) $M_C = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{4} - c\right)$ sind gleich für $c = (\sqrt{1/2} - 1/2)l = 0{,}207\,l$, u. zw. $M_A = M_C = M_{max} = 0{,}021\,447\,Pl \sim 1/47\,Pl$; dies ist (für die verschiedenen Werte von c) das relativ kleinste M_{max}, so daß alsdann $W = \frac{Pl}{47 k_b}$ und $P = 47\frac{k_b W}{l}$; d. h., die Tragkraft ist fast 6 mal so groß als im Falle 8 (S. 548), wenn $a = 0{,}586\,l$.
17. *)	 $P = \frac{q_1 + q_2}{2} b$; $n = \frac{q_1 b}{q_2 - q_1}$.	$A = \frac{P}{l}\left(c + \frac{b}{3}\frac{q_2 + 2q_1}{q_2 + q_1}\right)$; $B = P - A$. M_{max} für $Q = 0$. Dabei ist: $A = \frac{q_1 \lambda \xi}{2n} = q_1 \frac{x^2 - n^2}{2n}$.	$W k_b = \frac{1}{3} A \left(3a + 2\xi - \frac{\xi n}{\lambda}\right)$. worin: $\lambda = x + n$, $\xi = x - n$; $x = \sqrt{n^2 + \frac{2nA}{q_1}}$.
		Für $q_1 = q_2$ ist: $A = \frac{P(2c + b)}{2l}$; $B = \frac{P(2a + b)}{2l}$. Ist außerdem $a = c$, so ist: $A = B = \frac{P}{2}$.	Für $q_1 = q_2$ ist: $W k_b = A\left(a + \frac{bA}{2P}\right)$. Ist außerdem $a = c$, so ist: $W k_b = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4}\right)$.

Digitized by Google

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B	Größtes Biegungsmoment $M_{max} = Wk_b$
17a.	 $M = \frac{P}{8}(l_0 + 2a)$.	Berücksichtigung der Auflagerlänge von gleichmäßig belasteten Trägern auf Mauern; gemäß preuß. Minist.-Best. vom 31. 1. 1910. Bei B_1 Einzelstütze.	 $M = \frac{P}{8}(l_0 + a)$. $A_1 \sim B_1 = \frac{P}{2}$
18. *)		$A = \frac{P(2l-a)+P_1 a_1}{2l}$; $B = \frac{P_1(2l-a_1)+Pa}{2l}$.	Für $A < P$: $Wk_b = \frac{A^2 a}{2P}$; für $B < P_1$: $Wk_b = \frac{B^2 a_1}{2P_1}$. Ist $P = P_1$, $a = a_1$ und $l - 2a = b$, so ist $A = B = P$ und $Wk_b = \frac{1}{2}Pa = \frac{1}{4}P(l-b)$.
19. *)		$A = \frac{P(2l-a)}{2l}$; $B = \frac{Pa}{2l}$. M_{max} für $x = a\left(1 - \frac{a}{2l}\right) < a$.	$M_{max} = Wk_b = \frac{P}{2}a\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2 = \mu Pl$, worin $\mu = \frac{1}{2}\frac{a}{l}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2$. $\mu_{max} = \frac{4}{27}$ für $a = \frac{2}{3}l$; dann ist $x = \frac{4}{9}l$.

20. Krangleisträger (Abb. 26).

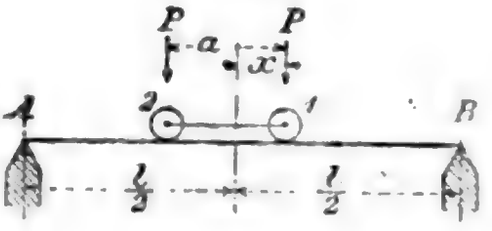
2 gleiche Lasten P im unveränderlichen Abstande a; x veränderlich, u. zw. zwischen 0 und $\frac{1}{2}l$.

Die Formeln gelten nur, falls beide Lasten P auf der Länge l stehen.

$$A = P\left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{a}{l}\right);$$

$$B = P\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{a}{l}\right).$$

Abb. 26.



*) Ausführliche Tafeln der im Hochbau oft vorkommenden Belastungsfälle 17, 18, 19 und ähnlicher s. J. Labes, Tafeln zur Bestimmung der Querschnitte gewalzter eiserner Träger usw. Berlin 1893. Wilhelm Ernst & Sohn. — Den allgemeinen Fall 17 s. Zentralbl. Bauv. 1909 S. 560.

Digitized by Google

$$M_1 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} + \frac{2x}{l}\frac{a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right);$$

$$M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2} + \frac{2x}{l}\frac{3a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right).$$

$M_{1\max}$ für $x = {}^1/_4\, a$. ($M_{2\max}$ für $x = {}^3/_4\, a$.)

$$M_{\max} = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 = \frac{P}{2l}\left(l - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Für $x = 0$ (oder $x = a$) ist

$$M_1 \text{ (oder } M_2) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right);\quad M_2 \text{ (oder } M_1) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2}\right).$$

Für $x = \frac{a}{2}$ ist $\quad M_1 = M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right).$

$a : l$	$A_{\max}$	$M_{1\max}$	M_2 für $x = {}^1/_4\, a$	Bemerkung
0	2,0 P	0,50000 Pl	0,50000 Pl	Ist
0,1	1,9 „	0,45125 „	0,44625 „	$a : l > 2 - \sqrt{2} = 0{,}586$,
0,2	1,8 „	0,40500 „	0,38500 „	so ist der absolute
0,3	1,7 „	0,36125 „	0,32625 „	Größtwert von M_1 stets
0,4	1,6 „	0,32000 „	0,24000 „	$= {}^1/_4\, Pl$,
0,5	1,5 „	0,28125 „	0,15625 „	wobei die Last 1 in
0,586	1,414 „	0,25000 „	0,07850 „	Trägermitte steht.
0,667	1,333 „	(0,22222 „)	0	

Zur näherungsweisen Berechnung der größten Durchbiegung des Krangleisträgers nehme man die Lasten symmetrisch zur Trägermitte an und wende die Formeln für Fall 6 sinngemäß an. Es ergibt sich

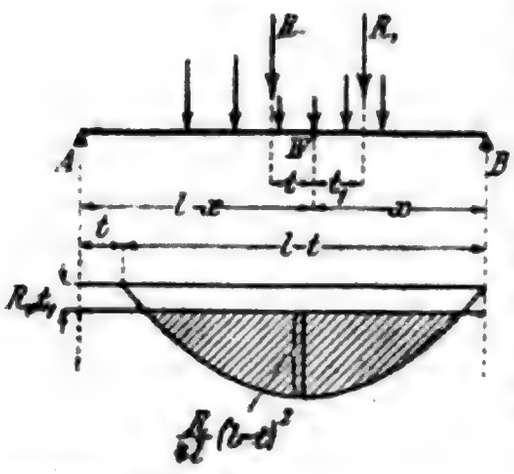
$$f = f_1 + f_2 = \frac{P}{48\,EJ}(l - a)\left[(a + l)^2 + l^2\right].$$

Zeichnerische Bestimmung der Momente für den allgemeinen Belastungsfall.*) Das Moment unter der beliebigen Last IV der fahrenden Lastengruppe in Abb. 27 ist

$$M_x = \frac{R}{l}\left\{(l - t) - x\right\}x - R_1\, t_1;$$

darin ist R die Mittelkraft aller Kräfte der Lastengruppe, R_1 diejenige der rechts von IV liegenden Kräfte.

Abb. 27.



Das erste Glied der Gleichung ergibt eine Parabel, deren Länge $= (l - t)$ und deren Bogenhöhe $= \frac{R}{4\,l}\left\{l - t\right\}^2$.

Das zweite Glied stellt eine Gerade, parallel zur Abszissenachse, dar.

Die schraffierte Fläche in Abb. 27 gibt den Verlauf der Maximalmomente unter der Last IV der fahrenden Lastengruppe an und ist so lange gültig, als letztere in ihrer Gesamtheit sich zwischen den beiden Auflagern A und B bewegt. Was für die Momente unter

*) Nach W. L. André, Die Statik des Kranbaues, 2. Aufl. 1913 S. 55 ff. u. S. 1 ff.

Digitized by Google

dem Kraftangriff von IV gilt, gilt auch für die Momente unter jeder der übrigen Lasten, woraus zu schliefsen ist, dafs die Maximalmomente des ganzen Trägers sich aus einzelnen Parabelbogen zusammensetzen, deren Abmessungen leicht durch die allgemeine Gleichung für M_x bestimmt werden können.

Sonderfälle:

1. Der Träger werde befahren von zwei gleichen Lasten P, P im Abstande a: Konstruktion zweier Parabeln, deren Länge $\left(l-\frac{a}{2}\right)$ und deren Bogenhöhe $\frac{P}{2l}\left\{l-\frac{a}{2}\right\}^2$ (Abb. 28), der tiefste Punkt der Kurve liegt um $^1/_4\,a$ aus der Mitte. Ist a gröfser als $^1/_2\,l$, so erzeugt die Last P allein in der Herzspitze noch den Scheitelbogen einer Parabel von der Höhe $\frac{Pl}{4}$ und der Länge l. Ein gewisser Grenzfall tritt bei $b=0{,}586\,l$ ein, wo die Ordinate $\frac{P}{2l}\left\{l-\frac{a}{2}\right\}^2$ im Abstande $^1/_4\,a$ aus der Mitte sich auf $\frac{Pl}{4}$ vermindert.

Abb. 28.

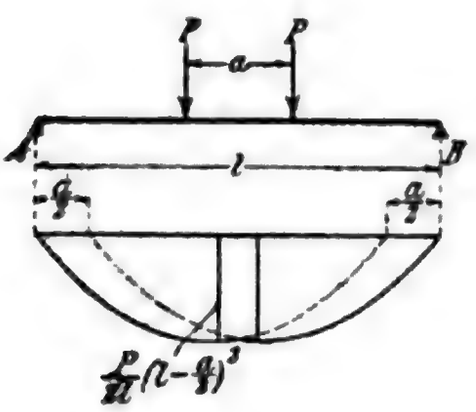
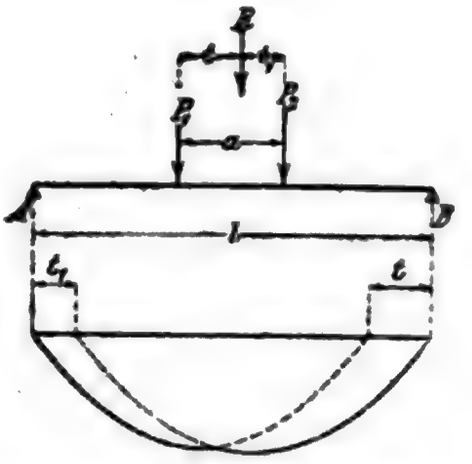


Abb. 29.



2. Der Träger werde befahren von zwei ungleichen Lasten P_1 und P_2. Konstruktion zweier Parabeln, deren eine, vom linken Auflager ausgehend, die Länge $(l-t)$ und die Bogenhöhe $\frac{R}{4l}\{l-t\}^2$ hat, während die andere, vom rechten Auflager ausgehend, die Länge $(l-t_1)$ und die Bogenhöhe $\frac{R}{4l}\{l-t_1\}^2$ besitzt (Abb. 29).

Hierin ist $R=P_1+P_2$, und die Werte t und t_1 betragen

$$t=\frac{P_2\,a}{R} \quad \text{und} \quad t_1=\frac{P_1\,a}{R}.$$

20a. Massiv unterstützte Kranglcisschiene. Bezeichnen J und W das Trägheits- und Widerstandsmoment des Querschnittes einer von einer Einzellast P (in kg) befahrenen, durch Mauerwerk fortlaufend unterstützten Kranlaufschiene in cm^4 bzw. cm^3,

Digitized by Google

b die Breite des Schienenfufses in cm,
E und E_m die Elastizitätsmafse des Schienenstoffes bzw. der massiven Unterlage, beide in gleichem Mafse,

so ist nach W. L. Andrée, Die Statik des Kranbaues, 2. Aufl. 1913 S. 48 ff. angenähert die Biegungsbeanspruchung der Laufschiene unter der Last P (in kg/qcm):

$$\sigma = 0{,}50 \frac{\sqrt[4]{P^3}}{W\eta}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und die gröfste Pressung der massiven Unterlage (in kg/qcm)

$$k = 0{,}28 \frac{\sqrt[4]{P^3}}{b} \eta, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

worin der Wert η aus der Gleichung

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{2}{3} \frac{E_m}{E} \frac{b^3 k}{J}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

zu entnehmen ist. In Gl. (3) ist k zunächst versuchsweise anzunehmen, worauf die Rechnung mit dem aus Gl. (2) sich ergebenden genaueren Werte, falls erforderlich, zu wiederholen ist.

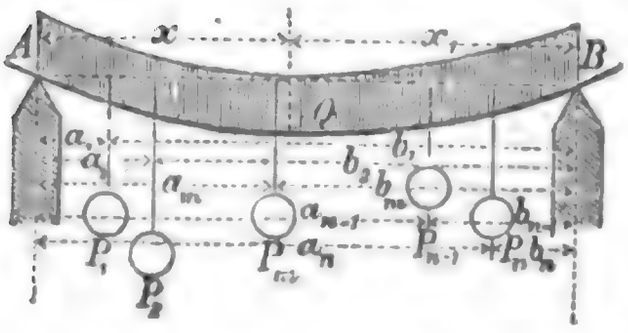
Mehrfache Belastung. Ist ein Träger durch mehrere der auf S. 546 bis 553 aufgeführten Belastungen gleichzeitig beansprucht, so addieren sich die Biegungsmomente sowie die Ordinaten der elastischen Linien der einzelnen Belastungsfälle; aus den Summen sind die Werte von $M_{max} = Wkb$ und f_{max} nebst den zugehörigen Werten von x zu ermitteln. In Nr. 21 bis 23 sind für einige häufiger vorkommende Fälle mehrfacher Belastung die Ergebnisse angeführt, indessen wird man meist vorziehen, M_{max} unmittelbar durch Ansetzen der Momentengleichung in bezug auf den gefährlichen Querschnitt zu bestimmen (S. 525 und das Beispiel auf S. 526).

21. **Fall 3 mehrfach, außerdem Fall 8** (Abb. 30). Die Auflagerdrücke sind

$$A = \Sigma\left(\frac{Pb}{l}\right) + \frac{Q}{2}, \qquad B = \Sigma\left(\frac{Pa}{l}\right) + \frac{Q}{2}.$$

Ist $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_{m-1} < A$ und gleichzeitig $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m > A$,

Abb. 30.



so liegt der **gefährliche Querschnitt** zwischen P_{m-1} und P_m; sein Abstand vom Auflager A ist bestimmt durch die Formel

$$x = \left(A - \sum_1^{m-1} P\right) : \frac{Q}{l};$$

es wird

$$M_{max} = Wkb = \sum_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{2l} x^2.$$

Ist dagegen $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m < A < \sum_1^{m} P + \frac{Q}{l} a_m$, so liegt der gefährliche Querschnitt in P_m, d. h., es ist $x = a_m$, und es wird

Digitized by Google

$$M_{max} = Wk_b = \sum_1^{m-1} Pa + P'_m a_m + \frac{Q}{l} a_m^2,$$

worin $P'_m = A - \left[\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m \right]$ (Querkraft in P_m).

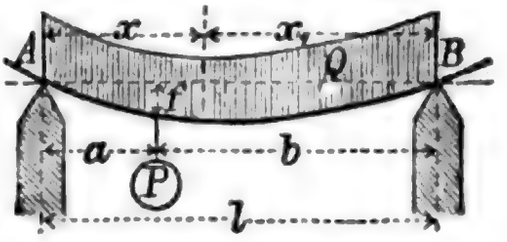
Ist (in Abb. 30) $Q = 0$, so fällt der gefährliche Querschnitt in den Angriffpunkt der Einzellast P_m, wenn

$\sum_1^{m-1} P < \Sigma \left(\frac{Pb}{l}\right) < \sum_1^{m} P$; es wird $M_{max} = Wk_b = \sum_1^{m-1} Pa + P'_m a_m$,

worin $P'_m = \Sigma \left(\frac{Pb}{l}\right) - \sum_1^{m-1} P$ (Querkraft in P_m).

22. **Fall 3 und 8 zugleich** (Abb. 31).

Abb. 31



Es sei $a < b$.

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Bezeichnet x_1 den Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B, so ist, wenn

α) $\frac{P}{Q} < \frac{b-a}{2a}$:

$$x_1 = \frac{Bl}{Q} = \frac{P}{Q}a + \frac{l}{2},$$

$$M_{max} = Wk_b = B\frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2Q}.$$

β) $\frac{P}{Q} > \frac{b-a}{2a}$:

$$x_1 = b,$$

$$M_{max} = Wk_b = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}.$$

Durchbiegung im Angriffpunkte von P:

$$f = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab} Q\right)\frac{a^2 b^2}{3EJl}.$$

Im **Sonderfalle** $a = b = \frac{1}{2}l$ [Fall 2 und 8 zugleich] wird

$$A = B = \tfrac{1}{2}(P + Q), \qquad M_{max} = Wk_b = \tfrac{1}{8}(2P + Q)l,$$

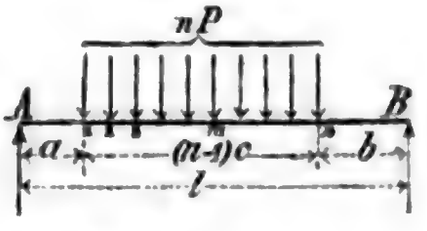
$$x_1 = \tfrac{1}{2}l \text{ und } f_{max} = \frac{(P + \frac{5}{8}Q)}{EJ}\frac{l^3}{48}.$$

23. Frei aufliegender Träger, durch n **gleiche Einzellasten** P belastet, die in $n-1$ **gleichen Abständen** c angreifen (Abb. 32).

$$A = \frac{nP}{l}\left(b + \frac{n-1}{2}c\right),$$

$$B = \frac{nP}{l}\left(a + \frac{n-1}{2}c\right).$$

Abb. 32.



Der gefährliche Querschnitt liegt im Angriffpunkte der m^{ten} Last, wenn

$$P > mP - A > 0,$$

so dafs $M_{max} = Wk_b = Aa + (m-1)(A - \frac{1}{2}mP)c.$

Digitized by Google

Für den **Sonderfall** $a = b$ wird $A = B = {}^1/_2 n P$. Teilen hierbei die Angriffpunkte der n Kräfte P die Freilänge l in $n_1 = n + 1$ gleiche Teile von der Länge $(l : n_1) = a = b$, so ist,

wenn n_1 eine gerade Zahl: $M_{max} = W k_b = \frac{n_1}{8} Pl$,

wenn n_1 eine ungerade Zahl: $M_{max} = W k_b = \frac{n_1^2 - 1}{8 n_1} Pl$.

Für	$n_1 =$	3	4	5	6	7
ergeben sich die Koeffizienten von Pl:		${}^1/_8$	${}^1/_2$	${}^3/_8$	${}^3/_4$	${}^6/_7$.

f. Querschnitt-Ermittlung für Walzträger mit Rücksicht auf Durchbiegung.

Die **Durchbiegung** f eines Trägers soll zur möglichsten Beschränkung der dynamischen Wirkungen und zur Sicherung eines guten Auflagers auch unter der gröfsten Last meist einen bestimmten Bruchteil der Freilänge l nicht überschreiten; im Hochbau nimmt man erfahrungsgemäfs $f \leqq {}^1/_{600}$ bis ${}^1/_{400}$, i. M. ${}^1/_{500}\, l$,*) im Brückenbau gewöhnlich $f \leqq {}^1/_{1000}\, l$.**)

Bei **Flufseisenträgern** mit $E = 2\,150\,000$ kg/qcm von beliebigem, aber überall gleichem Querschnitt ist in den am häufigsten vorkommenden Belastungsfällen 2 (S. 546) und 8 (S. 548) stets $f \leqq {}^1/_{500}\, l$ bzw. ${}^1/_{1000}\, l$, sofern der für die zulässige Spannung k_b berechnete Trägerquerschnitt eine Höhe h besitzt, deren Verhältnis zur Freilänge l **gröfser** ist als der Wert ζ in nachstehender Tafel.

Liefert die allgemeine Formel $M = W k_b$ einen Träger von **geringerer** Höhe als ζl, so ist mit Rücksicht auf die Durchbiegung f der Trägerquerschnitt aus der aus Spalte 6 der Tafel S. 546, 547 ff. sich ergebenden Formel $J = c P l^2$

zu berechnen, worin J das Trägheitsmoment des Querschnitts in **cm⁴**, P die Last in **t**, l die Freilänge in **m** bezeichnet und der Zahlenwert c (entsprechend f und k_b) der folgenden Tafel zu entnehmen ist.

Gröfste Durchbiegung		$f = {}^1/_{500}\, l$			$f = {}^1/_{1000}\, l$		
Zulässige Spannung k_b		750	1000	1200	750	1000	1200
Fall 2, S. 546.	$1 : \zeta = l : h =$	34,4	25,8	21,5	17,2	12,9	10,8
	$c =$	48,4			96,9		
Fall 8, S. 548.	$1 : \zeta = l : h =$	27,5	20,6	17,2	13,8	10,3	8,6
	$c =$	30,3***)			60,6		

*) Nach einer Entscheidung des preufs. Minist. d. öff. Arbeiten (Beton u. Eisen 1911 S. 225) genügt der Nachweis dieser Durchbiegung für solche Träger von über 7 m Länge, die das Gebäude in der Längs- und Querrichtung aussteifen und an Stelle der sonst vorhandenen Längs- und Querwände treten.

**) Bei Deckenträgern zwischen massiven Deckenfeldern, insbesondere bei Betondecken, ergibt sich wegen der Verbundwirkung gewöhnlich ein viel kleineres f als das rechnungsmäfsig ermittelte.

***) Eine Tafel der Werte $J = 30{,}3\, Pl^2$ für $P = 1$ t und $l = 100$ bis 1500 cm findet sich in F. Boerner, Stat. Tabellen usw., 4. Aufl. 1912 S. 84.

Digitized by Google

Ist z. B. für einen über die Freilänge $l = 7{,}5$ m gleichmäßig belasteten Flußeisen-Hochbauträger die für $k_b = 1200$ sich ergebende Querschnitthöhe kleiner als $^1/_{17{,}6} \cdot 7{,}5 = 43{,}6$ cm, so ist der Querschnitt besser aus der Formel $J = 30{,}3\,Pl^2$ zu berechnen. (Vgl. ferner die Beispiele 2 und 3 auf S. 560 ff.)

Für andere Belastungsfälle als Fall 8 und 2 berechne man J nach Fall 8 und multipliziere den erhaltenen Wert mit einem Koeffizienten ϱ, der beträgt

für Fall 1	$\varrho = \frac{128}{5}$	für Fall 9	$\varrho = \frac{384}{925}$	für Fall 7	$\varrho = \frac{48}{5}$
„ „ 3	$\varrho = \frac{8}{5}$	„ „ 10	$\varrho = \frac{1}{5}$		

g. Beispiele.

Bemerkung: In den nachstehenden Beispielen sind für die Träger gewalzte deutsche Normal-I-Profile und Flußeisen mit $k_b = 1200$ kg/qcm vorausgesetzt.

Beispiel 1. Ein Freiträger von 1,50 m Freilänge ist nach Abb. 33 belastet mit 900 + 450 + 800 + 150 = 2300 kg. Das Träger-Eigengewicht werde vernachlässigt. Auflagerlänge vorläufig zu 26 cm angenommen.

In C ist erforderlich: $W = \frac{800 \cdot 50 + (0{,}5 : 1{,}5) \cdot 900 \cdot 25}{1200} = 40$ cm³,

in B:

$$W = \frac{800 \cdot 163 + 150 \cdot 43 + 900 \cdot (^1/_2 \cdot 150 + 13) + 450 \cdot (^1/_3 \cdot 100 + 13)}{1200} = \frac{236\,750}{1200} = 197 \text{ cm}^3.$$

Für AC wird gewählt I Nr. 11 mit $W = 43{,}5$ cm³. — Für BC kann je nach Umständen gewählt werden:

2 I Nr. 15 mit $W = 2 \cdot 98 = 196$ cm³, oder 1 I Nr. 20 mit $W = 214$ cm³, oder 3 I Nr. 13 mit $W = 3 \cdot 67 = 201$ cm³, oder (nach Abb. 34) 2 I Nr. 14 und 1 I Nr. 11 mit

Abb. 33.

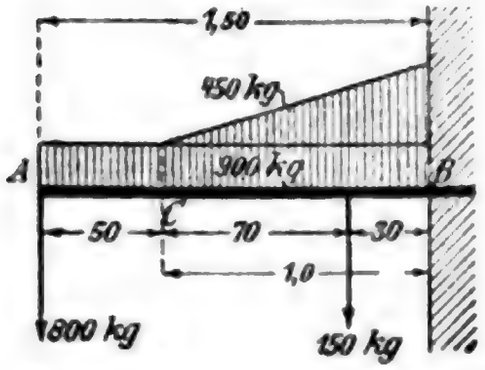
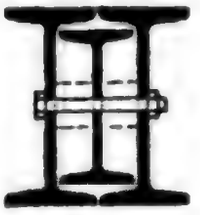
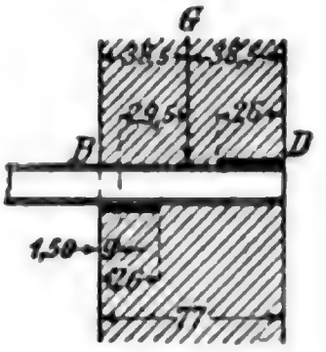


Abb. 34.



2 I Nr. 14
+ 1 I Nr. 11.

Abb. 35.



$W = 2 \cdot 81{,}9 + ^{11}/_{14} \cdot 43{,}5 = 197{,}9$ cm³. [Da das schwächere I Nr. 11 sich hierbei nur ebensoviel durchbiegen kann wie die beiden stärkeren I Nr. 14, mithin das schwächere I-Eisen nicht voll beansprucht wird, so ist sein $W = 43{,}5$ cm³ im Verhältnis der Profilhöhen vermindert eingeführt.]

Die Gesamtlast 2300 kg greift im Abstande $\frac{207\,000}{2300} = 90$ cm vor der Kante B an.

Da eine Bewegung des Trägers ausgeschlossen sein soll, so muß 1) das Drehbestreben des Trägers durch das Moment einer genügenden Gegenlast (durch das sog. Stabilitätsmoment, S. 170) aufgehoben werden und 2) ein für die Last und Gegenlast genügendes Trägerauflager vorhanden sein. Nimmt man die Drehachse auf $^1/_3$ der Plattenbreite (26 : 3 = rd. 9 cm) von der Kippkante B an, so ist das Lastmoment (Kippmoment)

$$M = 207\,000 + 9 \cdot 2300 = 227\,700 \text{ cmkg}.$$

Wirkt die Gegenlast am Hebelarme 38,5 − 9 = 29,5 cm, so ist der Nachweis einer Gegenlast $G > 227\,700 : 29{,}5 = 7720$ kg erforderlich.

Die 26 cm breite und 39 cm lange Unterlagplatte bei B (Abb. 35) beansprucht das sie unterstützende Hartbrandsteinmauerwerk in Kalkzementmörtel im Mittel mit

$$k = \frac{2300 + 7720}{26 \cdot 39} = 10 \text{ kg/qcm},$$

was nach Tafel 8. (S. 506), zulässig ist. Deckplatte bei D 26 . 39 cm.

Digitized by Google

Richtiger ist es, die beiden Platten entsprechend den bei B und D auftretenden Kantenpressungen zu bemessen. Wählt man beide Platten 39 cm lang und ihre Breite so, dafs sie mindestens zusammen die Wanddicke 77 cm ausmachen, so sind die Kantenpressungen

bei B

$$k_1 = \frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \cdot \left(2 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right) = 2{,}57 + 8{,}43 = 11{,}00 \text{ kg/qcm},$$

bei D

$$k_2 = -\frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right) = -2{,}57 + 6{,}90 = 4{,}33 \text{ kg/qcm}.$$

Die kleinsten Plattenbreiten ergeben sich

für Platte B zu $\frac{11{,}0}{11{,}0 + 4{,}33} \cdot 77 = 55$ cm, für Platte D zu $77 - 55 = 22$ cm.

Eine genauere Rechnung ergibt, dafs die Plattenbreiten zweckmäfsig $B = 42$, $D = 35$ cm bei 39 cm Länge gewählt werden; die Kantenpressungen werden dann bei B 8,4, bei D 7,0 kg/qcm, und die Drehachse liegt nicht 9, sondern 14 cm von der Kippkante B entfernt.

Beispiel 2. Gewalzte Träger einer **massiven Decke** von ungewöhnlicher Stützweite. Freilänge = 10,5 m; Teilung = 1,95 m. Deckeneigengewicht (einschl. Träger) = 400 kg/qm; Nutzlast = 250 kg/qm. Auflagerlänge je 26 cm. Es liegt der Belastungsfall 17 a (S. 553), vor. Belastung

$$P = (10{,}5 \cdot 1{,}95) \text{ qm} \cdot 650 \text{ kg/qm} = 13\,325 \text{ kg}.$$

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung

$$W = \frac{13\,325\,(1050 + 2 \cdot 26)}{8 \cdot 1200} = 1531 \text{ cm}^3,$$

so dafs I Nr. 42½ mit $W = 1740$ cm³ noch genügen würde. Soll aber die gröfste Durchbiegung kleiner sein als $^1/_{500}$ der Freilänge, also $f < 1050 : 500 = 2{,}1$ cm, so ist nach S. 559 I Nr. 42½ zu schwach, denn die Höhe $h = 42{,}5$ cm ist kleiner als $\zeta l = 1050 : 17{,}2 = 61$ cm. Daher ist in diesem Falle erforderlich ein Trägheitsmoment

$$J = 30{,}3 \cdot 13{,}3 \cdot 10{,}5^2 = 44\,435 \text{ cm}^4;$$

gewählt I Nr. 45 mit $J = 45\,852$ cm⁴. Nach S. 549 wird für I Nr. 47½

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{13\,325 \cdot 1050^3}{2\,150\,000 \cdot 45\,852} = 2{,}0 \text{ cm};$$

hiervon ist eine Durchbiegung $\frac{400}{650} \cdot 2{,}0 = 1{,}2$ cm beständig vorhanden.

Unterlagplatten 26 · 26 cm genügen für ½ · 13 325 = 6660 kg Auflagerdruck.

Beispiel 3. Die beiden Träger eines 1 m breiten **Laufsteges** (im Bühnenraume eines Theaters) liegen 12 m frei.

Gröfste zufällige Last in Brückenmitte: eine Beleuchtungsvorrichtung mit 3 Mann zur Bedienung, zusammen höchstens 450 kg; hiervon kommen auf jeden der beiden Träger ½ · 450 = 225 kg.

Eigengewicht des Steges für 1 m:

1)	Träger (geschätzt) 2 · 42 =	84 kg
2)	Bohlenbelag, 4 cm st., 1,0 · 1,0 · 0,04 = 0,04 cbm zu 650 kg/cbm =	26 „
3)	Geländer, Befestigungsschrauben usw., rd.	8 „
	zus.	118 kg

Auf jeden Träger entfällt an Eigengewicht $12{,}0 \cdot \frac{118}{2} =$ . . . . . 708 kg.

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung [Sonderfall 22 auf S. 557]

$$W = \frac{(^1/_2 \cdot 708 + 225) \cdot 1200}{4 \cdot 1200} = 146 \text{ cm}^3,$$

so dafs I Nr. 18 mit $W = 161$ cm³ genügen würde. Soll aber die gröfste Durchbiegung kleiner sein als $^1/_{800}$ der Freilänge, also $f < 2{,}4$ cm, so ist nach S. 558 erforderlich:

$$J = (30{,}3 \cdot 0{,}708 + 48{,}4 \cdot 0{,}225) \cdot 12{,}0^2 = 4657 \text{ cm}^4;$$

es ist also zu wählen I Nr. 25 mit $J = 4966$ cm⁴.

Die Durchbiegung hierbei wird $f = \frac{1200}{500} \cdot \frac{4657}{4966} =$ rd. 2,3 cm;

hiervon ist eine Durchbiegung $\frac{^5/_8 \cdot 708}{^5/_8 \cdot 708 + 225} \cdot 2{,}3 = 1{,}5$ cm

beständig vorhanden.

Digitized by Google

Für I Nr. 18 würde die gröfste Durchbiegung geworden sein

$$f = \frac{1200}{500}\,\frac{4657}{1446} = 7{,}8 \text{ cm}.$$

n. Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung.

Sind bei einem Träger die gröfsten Werte der Biegungsspannung

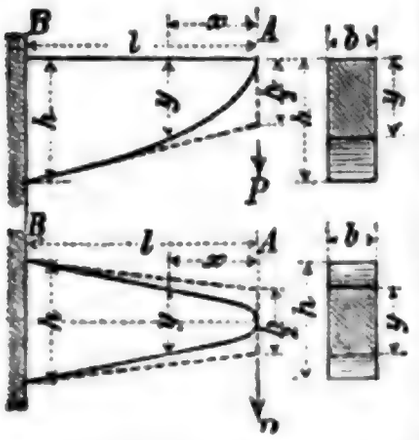
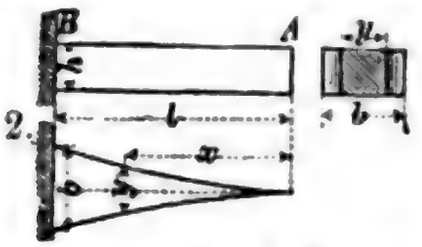
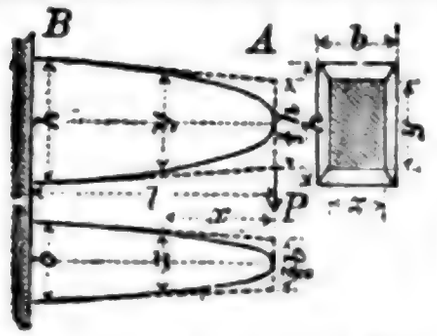
$$\sigma_{max}\ (= k_b) = M : W$$

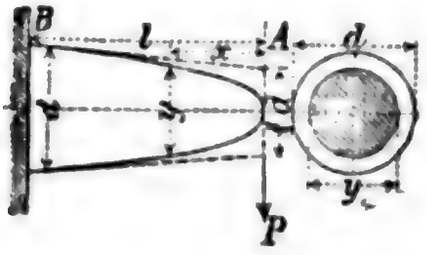
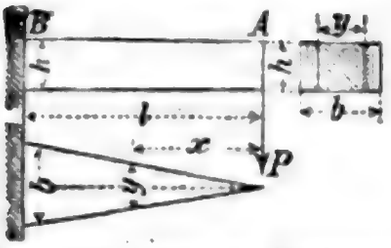
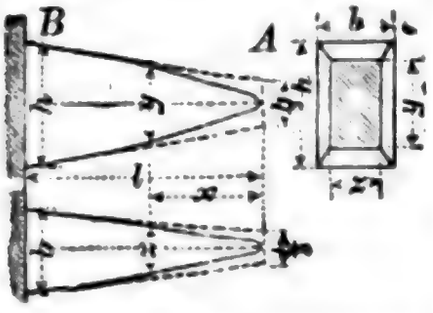
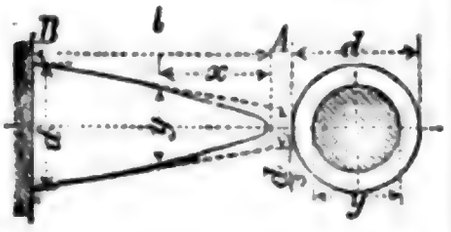
in jedem Querschnitt gleich, so nennt man den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (S. 526). Für solche Träger sind im folgenden einige brauchbare Formen angegeben.

Die punktierten Linien des Längsschnittes geben dessen durch Tangenten **angenäherte Form** an.

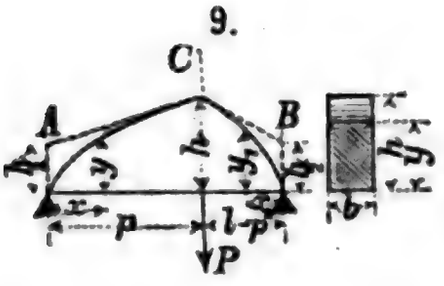
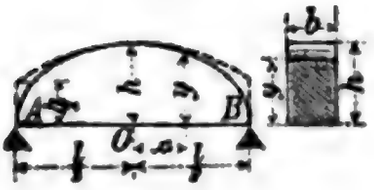
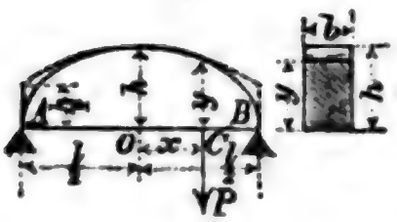
In den Fällen 5, 9, 10 und 11 kann, ähnlich wie in 1, die x-Achse auch als Symmetrieachse des Längsschnittes angenommen werden.

Ein Träger, der nur durch ein auf die Länge l unveränderliches Biegungsmoment beansprucht wird (S. 548, Fall 6), muſs bei gleichem Widerstande überall denselben Querschnitt haben.

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnittabmessungen
Die Last P greift am Ende des Trägers an.			
1 a) 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	1 a). Obere Begrenzung: Gerade; untere Begrenzung: gemeine Parabel.	$y^2 = \frac{6P}{bk_b}x.$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{bk_b}}.$
1 b)		1 b). Gemeine Parabel. (S. 102.)	Durchbiegung in A: $f = \frac{8P}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3.$
2.  [Elastische Linie ein Kreisbogen.]	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gerade Linie.	$y = \frac{6P}{h^2k_b}x.$ $b = \frac{6Pl}{h^2k_b}.$ Durchbiegung in A: $f = \frac{6P}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3.$
3. 	Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten: $z : y = \alpha$.	Kubische Parabel. (S. 103.)	$y^3 = \frac{6P}{\alpha k_b}x.$ $z = \alpha y.$ $h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{\alpha k_b}}.$ $b = \alpha h.$

	Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnittabmessungen
4.		Kreise vom Durchmesser y.	Kubische Parabel. (S. 108.)	$y^3 = \frac{32\,P}{\pi k_b} x.$ $d = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{\pi k_b}}.$
	Last Q gleichmäßig über den Träger verteilt.			
5.		Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Gerade Linie.	$y = x\sqrt{\frac{3\,Q}{b\,l\,k_b}}.$ $h = \sqrt{\frac{3\,Ql}{b\,k_b}}.$
6.	 [Elastische Linie ein Kreisbogen.]	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gemeine Parabel. (S. 102.)	$y = \frac{3\,Q}{l\,k_b}\frac{x^2}{h^2}.$ $b = \frac{3\,Ql}{k_b h^2}.$ Durchbiegung in A: $f = \frac{3P}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3.$
7.		Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten $z : y = \alpha.$	Semikubische Parabel. (S. 103.)	$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha k_b}\frac{x^2}{l}.$ $z = \alpha y.$ $h = \sqrt[3]{\frac{3\,Ql}{\alpha k_b}}.$ $b = \alpha h.$
8.		Kreise vom Durchmesser y.	Semikubische Parabel. (S. 103.)	$y^3 = \frac{16\,Q}{\pi l k_b} x^2.$ $d = \sqrt[3]{\frac{16\,Ql}{\pi k_b}}.$

Digitized by Google

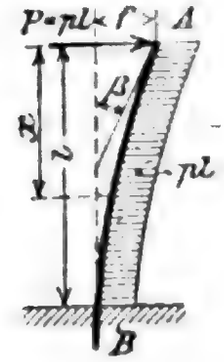
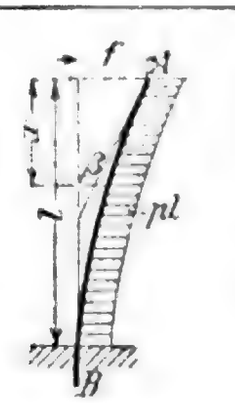
Länge- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längsschnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnittabmessungen
Die Last P wirkt in C.			
9. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Zwei gemeine Parabeln. (S. 102.)	$y^2 = \frac{6P(l-p)}{blk_b} x.$ $y_1^2 = \frac{6Pp}{blk_b} x_1.$ $h = \sqrt{\frac{6P(l-p)p}{blk_b}}.$
Last Q gleichmäßig über den Träger verteilt.			
10. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse. (S. 97.)	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Ql}{4bk_b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{4bk_b}}.$ Durchbiegung in Q: $f = \frac{1}{64}\frac{Ql^3}{EJ} = \frac{3}{16}\frac{Q}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3$ [1])
Lage des Angriffpunktes C der Last P veränderlich.			
11. 	(Wandernde Einzellast.) Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse. (S. 97.)	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Pl}{2bk_b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3Pl}{2bk_b}}.$

[1]) Bei ausgeführten Blechträgern von nahezu gleichem Widerstande gegen Biegung setze man nach R. Land

$$f = \frac{1}{70}\frac{Ql^3}{EJ} = \frac{6}{35}\frac{Q}{bE}\left(\frac{l}{h}\right)^3.$$

Digitized by Google

I. Träger von kleinstem Biegungswinkel am Ende und von kleinster Durchbiegung.[1])

Belastungsfall	Bedingung	l … d … x … y	l … b … y … x … h-konst	l … b … y … x … b-konst
1.	f_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $d' = {}^5/_6\, d$	$y = b\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $b' = {}^1/_2\, b$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $h' = {}^3/_4\, h$
	β_{min}	$y = d$ $d' = d$	$y = b$ $b' = b$	$y = h$ $h' = h$
	Diese Werte gelten auch für den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (S. 526).			
2. 	f_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}291}$ $d' = 0{,}71\, d$	$y = b\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}846}$ $b' = 0{,}154\, b$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}44}$ $h' = 0{,}56\, h$
	β_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}131}$ $d' = 0{,}87\, d$	$y = b\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}382}$ $b' = 0{,}618\, b$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{0{,}203}$ $h' = 0{,}797\, h$
3.	f_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d' = {}^2/_3\, d$	$y = b\,\frac{x}{l}$ $b' = 0$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h' = {}^1/_2\, h$
	β_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $d' = {}^5/_6\, d$	$y = b\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $b' = {}^1/_2\, b$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $h' = {}^3/_4\, h$
4. 	f_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d' = {}^1/_2\, d_0$	$y = b\left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}$ $(b' = -{}^1/_2\, b)$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{3/4}$ $h' = {}^1/_4\, h$
	β_{min}	$y = d\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d' = {}^2/_3\, d$	$y = b\,\frac{x}{l}$ $b' = 0$	$y = h\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h' = {}^1/_2\, h$

[1]) Nach G. Kull, Dingler Pol. J. 1906 S. 481 und gemäfs unmittelbarer Angabe des Verfassers.

Digitized by Google

k. Träger auf mehreren Stützen.
(Durchlaufende Träger.)

1. Biegungsmomente über den Stützpunkten.

Bedeuten (Abb. 36)

M_{r-1}, M_r, M_{r+1} die Momente über den drei beliebigen, aufeinander folgenden Stützen $r-1$, r, $r+1$ (positiv, wenn das Moment eine Durchbiegung des Trägers nach unten verursacht),

y_{r-1}, y_r, y_{r+1} die beobachteten Höhen der Stützpunkte $r-1$, r, $r+1$ unter einer beliebigen Wagerechten,

l_r, l_{r+1} die Stützweiten der r^{ten} und $r+1^{\text{ten}}$ Oeffnung,

J_r, J_{r+1} die Trägheitsmomente der Querschnitte des Trägers auf diesen Oeffnungen,

L_r, R_r das statische Moment der einfachen Lastmomentenfläche der r^{ten} Oeffnung, bezogen auf die linke bzw. rechte Auflagersenkrechte dieser Oeffnung, so ist

$$6E\left(\frac{y_r-y_{r-1}}{l_r}+\frac{y_r-y_{r+1}}{l_{r+1}}\right)=M_{r-1}\frac{l_r}{J_r}+2M_r\left(\frac{l_r}{J_r}+\frac{l_{r+1}}{J_{r+1}}\right)+M_{r+1}\frac{l_{r+1}}{J_{r+1}}+6\frac{L_r}{l_rJ_r}+\frac{6R_{r+1}}{l_{r+1}J_{r+1}} \quad (1)$$

(Dreimomentengleichung; vgl. Bd. III S. 126 ff.).

Die Belastung der Oeffnungen kann dabei stetig oder durch Einzellasten erfolgen.

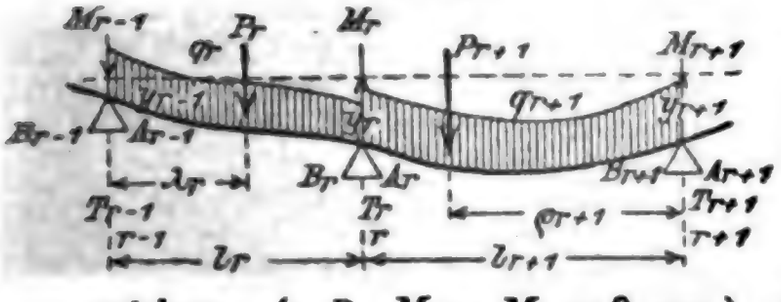
Für einen Träger von unveränderlichem Querschnitt, der nur durch Lasten beansprucht wird, die auf den einzelnen Oeffnungen gleichmäfsig verteilt sind, erhält man, wenn q_r die gleichmäfsig verteilte Last auf die Längeneinheit der Oeffnung r bedeutet, die **Clapeyronsche Gleichung:**

$$6EJ\left(\frac{y_r-y_{r-1}}{l_r}+\frac{y_r-y_{r+1}}{l_{r+1}}\right)=M_{r-1}l_r+2M_r(l_r+l_{r+1})+M_{r+1}l_{r+1}+\tfrac{1}{4}(q_rl_r^3+q_{r+1}l_{r+1}^3). \quad (2)$$

Liegen sämtliche Stützen gleich hoch, so geht die Gleichung (2) über in

$$M_{r-1}l_r+2M_r(l_r+l_{r+1})+M_{r+1}l_{r+1}=-\tfrac{1}{4}(q_rl_r^3+q_{r+1}l_{r+1}^3). \quad (3)$$

Abb. 36.



Sind n Felder, also $n+1$ Stützen vorhanden, so lassen sich $n-1$ Gleichungen von der Form (1), (2) oder (3) aufstellen; es können dann aus diesen und den beiden Gleichungen, die die Befestigungen der Enden des Trägers kennzeichnen (z. B. $M_0=M_n=0$ usw.), die $n+1$ Momente über den $n+1$ Stützen berechnet werden.

Digitized by Google

2. Stützendrücke.

1. Es seien

$A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ die von den jeweilig rechts gelegenen Oeffnungen 1 bis n herrührenden Anteile der Gesamtstützendrücke,

$B_1, B_2 \ldots B_n$ die von den jeweilig links gelegenen Oeffnungen 1 bis n herrührenden Anteile der Gesamtstützendrücke,

$T_0, T_1 \ldots T_n$ die Gesamtstützendrücke, so dafs also

$$T_0 = A_0, \quad T_1 = A_1 + B_1 \ldots, \quad T_n = B_n \text{ ist.}$$

Dann ist $$A_r = \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} + \frac{q_{r+1} l_{r+1}}{2} + \frac{\Sigma P_{r+1} \varrho_{r+1}}{l_{r+1}}$$

und $$B_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{q_r l_r}{2} + \frac{\Sigma P_r \lambda_r}{l_r};$$

mithin der **Gesamtstützendruck** der Stütze r:

$$T_r = \frac{q_r l_r + q_{r+1} l_{r+1}}{2} - M_r \left(\frac{1}{l_{r+1}} + \frac{1}{l_r} \right) + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{M_{r-1}}{l_r} + \frac{\Sigma P_{r+1} \varrho_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{\Sigma P_r \lambda_r}{l_r}.$$

Beispiel.

Träger frei aufliegend auf drei Stützen in gleichen Abständen l. Belastung der einen Oeffnung = 0, der anderen gleichmäfsig durch q kg/cm (Abb. 37)

$$M_0 = M_2 = 0.$$

Nach Gleichung (3) ist daher

$$4 M_1 l = -\tfrac{1}{4} q l^3,$$

woraus

$$M_1 = -\tfrac{1}{16} q l^2 = -0{,}0625\, q l^2.$$

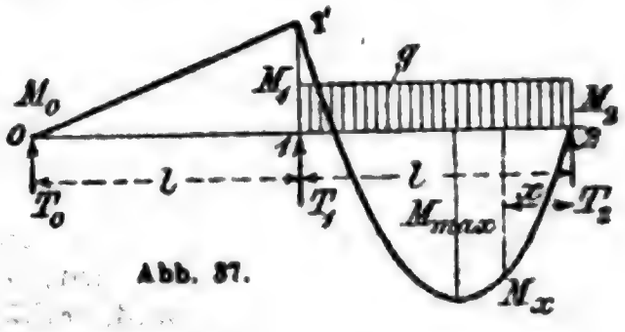


Abb. 37.

$$T_0 = + \frac{M_1}{l} = -\tfrac{1}{16} q l.$$

$$T_1 = \frac{q l}{2} - \frac{2 M_1}{l} = \frac{q l}{2} + \tfrac{1}{8} q l = \tfrac{5}{8} q l.$$

$$T_2 = \frac{q l}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{q l}{2} - \tfrac{1}{16} q l = \tfrac{7}{16} q l.$$

$$M_x = + T_1 x - \frac{q x^2}{2} = \tfrac{7}{16} q l x - \tfrac{1}{2} q x^2.$$

$M = 0$ für $x = 0$ und $x = \tfrac{7}{8} l$.

M_{max} für $\tfrac{7}{16} q l - q x = 0$, also $x = \tfrac{7}{16} l$.

$$M_{max} = \tfrac{1}{2} (\tfrac{7}{16})^2 q l^2 = \tfrac{49}{512} q l^2 = 0{,}0957\, q l^2.$$

Es ergibt sich daher die in Abb. 37 eingetragene Momentenlinie 0 1' 2. Da $M_{max} > M_1$ (absol.), so ist M_{max} für die Querschnittbestimmung mafsgebend.

2. Legt man bei einem Träger von der Länge $2l$ cm, der mit q kg/cm gleichmäfsig belastet ist und durch drei [gleich hohe und gleich weit (d. h. um je l cm) voneinander entfernte] Stützen getragen wird, die **Mittelstütze tiefer** als die beiden Aufsenstützen, u. zw. um das Mafs

$$f = 0{,}0131 \frac{q l^4}{E J} \text{ (in cm)},$$

so wird dadurch seine Tragfähigkeit auf das 1,457fache erhöht.

In diesem Fall erreicht die Tragfähigkeit ihren Gröfstwert, da das Moment über der Mittelstütze gleich ist dem gröfsten Moment in den einzelnen Oeffnungen:

$$M_1 = M_{1\,max} = 0{,}0858\, q l^2, \qquad T_0 = 0{,}4142\, q l, \qquad T_1 = 1{,}1716\, q l.$$

Digitized by Google

Durchlaufende Träger

auf gleich hohen und gleich weit voneinander entfernten Stützen.
Belastung gleichmäfsig über den ganzen Träger verteilt.

Werte	Anzahl der Stützen							Einheiten
	3	4	5	6	7	8	9	
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	ql
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	„
T_2	.	.	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	„
T_3	.	.	.	.	1,0192	1,0070	1,0103	„
T_4	.	.	.	.	.	.	0,9948	„
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	ql^2
M_2	.	.	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	„
M_3	.	.	.	.	0,0865	0,0845	0,0850	„
M_4	.	.	.	.	.	.	0,0825	„
$M_{1\max}$	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	„
$M_{2\max}$	.	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	„
$M_{3\max}$	.	.	.	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	„
$M_{4\max}$	.	.	.	.	.	0,0405	0,0412	„
x_1	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	l
x_2	.	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	„
x_3	.	.	.	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	„
x_4	.	.	.	.	.	0,5000	0,5026	„
ξ_1	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	„
ξ_2	.	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	„
	.	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	„
ξ_3	.	.	.	0,1964	0,1960	0,1962	0,1960	„
	.	.	.	0,8036	0,7850	0,7897	0,7880	„
ξ_4	.	.	.	.	.	0,2153	0,2150	„
	.	.	.	.	.	0,7847	0,7900	„

In vorstehender Tafel bezeichnen
T_0, T_1 . . . die Stützendrücke,
M_1, M_2 . . . die (negativen) Momente über den Stützen,
$M_{1\max}$, $M_{2\max}$ . . . die gröfsten Momente in den einzelnen Oeffnungen,
x_1, x_2 . . . die Entfernungen der Momente $M_{1\max}$ . . . von den nächsten links liegenden Stützen,
ξ_1, ξ_2 . . . die Entfernungen der Wendepunkte der elastischen Linien von diesen Stützen,
l die Stützweite jeder Oeffnung,
q die Belastung f. d. Längeneinheit jeder Oeffnung.

Da alles in bezug auf die Mitte des Trägers symmetrisch ist, sind die Angaben nur bis zur Mitte durchgeführt.

Die Werte der T, M, $M_{\max}$, x und ξ nähern sich mit wachsender Stützenzahl den entsprechenden Werten von Fall 10 S. 550 für die Mittelöffnungen; für die Endöffnungen stimmen sie bei 3 Stützen mit Fall 9 S. 548 überein.

Digitized by Google

Ueber die Berechnung durchlaufender Träger mit **veränderlicher Belastung**, insbesondere auch über das zeichnerische Berechnungsverfahren, III. Bd., Abschn. Statik der Baukonstruktionen, S. 96 ff.*)

E. Drehungsfestigkeit.

Der zu betrachtende Querschnitt des prismatischen Stabes wird durch ein Kräftepaar beansprucht, dessen Ebene winkelrecht zur Stabachse steht. — Es bezeichne

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares in cmkg,
$G = 1 : \beta = {}^5/_{13}\, E = 0{,}385\, E$ das Gleitmafs in kg/qcm (S. 485),
τ_{max} die gröfste im Querschnitte auftretende Schubspannung in kg/qcm,
k_d die zulässige Drehungsspannung des Stoffes in kg/qcm,
l die Länge des auf Verdrehung beanspruchten Stabes in cm,
V seinen Rauminhalt in ccm,
ϑ den verhältnismäfsigen Verdrehungswinkel zweier um 1 cm voneinander abstehenden Stabquerschnitte unter der Einwirkung von M_d, gemessen in cm als Bogen vom Halbmesser 1 cm.

Der Mittelpunkt (Nullpunkt) der Verdrehungsbogen, d. h. der Querschnittpunkt, der eine Verschiebung durch das Moment M_d nicht erfährt, in dem also die Schubspannung $= 0$ wird, ist der Schwerpunkt des Querschnittes.

a. Zulässiges Drehmoment.

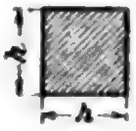
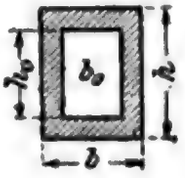
Für eine zulässige Drehungsspannung k_d des Stoffes darf das Drehmoment M_d für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte nicht überschreiten.**) Die Formeln 5—11 sind nur annähernd genau.***)

Werte von k_d (in kg/qcm) S. 503.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
1		$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d$	τ_{max} in den Punkten des Umfanges Im Abstande ρ von der Achse ist $\tau = \frac{2\rho}{d} \tau_{max}$
2		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k_d$ $M_d \sim 1{,}6\, d_m^3 \delta\, k_d$	τ_{max} in den Punkten des äufseren Umfanges $d_m = {}^1/_2 (D + d)$ $\delta = {}^1/_2 (D - d)$

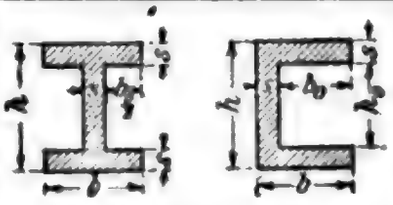
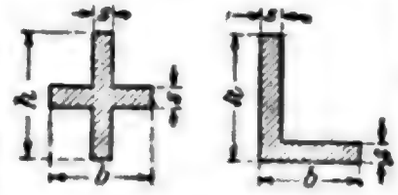
*) Winklersche Zahlen für Streckenlasten, Deutsche Bauz. 1912 S. 155.
**) Abweichende Ergebnisse einer Untersuchung von Autenrieth über Querschnitte mit Mittelpunkt, Z. d. V. d. I. 1901 S. 1099.
***) Genauere Untersuchungen, insbesondere über die Spannungsverteilung auf die Querschnitte auf Grund von Versuchen mit Lamellen aus Seifenlösung, H. Anthes, Dingler. Pol. J. 1907 S. 342.

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
3		$M_d = \frac{\pi}{16} b^2 h k_d$ $(h > b)$	τ_{max} in den Endpunkten der kleinen Achse b In den Endpunkten der grofsen Achse h ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{b h^2}$
4		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ $(h_0 : h = b_0 : b;\ h > b)$	τ_{max} in den Endpunkten der kleinen Achse b In den Endpunkten der grofsen Achse h ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d h}{b h^3 - b_0 h_0^3}$
5		$M_d = \frac{2}{9} b^2 h k_d$ *) $(h > b)$	τ_{max} in den Mitten der Seiten h In den Mitten der Seiten b ist $\tau = \frac{9 M_d}{2 b h^2}$ In den Querschnittecken $\tau = 0$
6		$M_d = \frac{2}{9} h^3 k_d$ *)	τ_{max} in den Mitten der Seiten In den Querschnittecken $\tau = 0$
7		$M_d = \frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ *) $(h_0 : h = b_0 : b)$	τ_{max} in den Mitten der Seiten h In den Querschnittecken $\tau = 0$
8		$M_d = \frac{b^3}{20} k_d$ (τ_{max} wie bei 7.)	Die Drehungsfestigkeit des dreieckigen und trapezförmigen Querschnittes läfst sich auf den Rechteckquerschnitt von derselben Höhe zurückführen. Die in die Gleichung unter b einzuführende Breite b erhält man dabei, indem man von dem Schwerpunkt S des Trapezes oder Dreiecks Winkelrechte SE, SF auf die Seiten fällt und durch die Fufspunkte EF Parallelen zur Achse zieht. Diese sind die Seiten des Ersatzrechteckes
9		$M_d = \frac{b^3}{1{,}09} k_d$ (τ_{max} wie bei 7.)	

*) Statt $\frac{9}{2}$ ist nach de Saint Venant genauer zu setzen $\psi = 3 + \frac{2{,}6}{4{,}5 + h : b}$ (C. Bach Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl. S. 317).

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
10		$M_d = \frac{2}{9} s^3 (h + 2b_0)\, k_d$ *)	Für den C-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geqq 0{,}2\,h$ und b_0 nicht erheblich größer als s.
11		$M_d = \frac{2}{9} s^3 (h + b - s)\, k_d$ *)	Für den L-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geqq 0{,}2\,h$.

Der Faktor von k_d in den vorstehenden Gleichungen für M_d heißt **das Widerstandsmoment gegen Drehung** und wird mit W_d bezeichnet. Für kreisförmige und kreisähnliche Querschnitte ist (ähnlich wie für Biegungsfestigkeit, S. 524):

$$W_d = \frac{J_p}{e},$$

worin $J_p = J_x + J_y$ das polare Trägheitsmoment des Querschnittes (S. 191 ff.) und e den Abstand des am weitesten von der Längs-Schwerachse (Nullachse) des Stabes entfernten Querschnittpunktes bezeichnet.

Für eckige Querschnittformen trifft dieser Satz nicht zu.

b. Verdrehungswinkel.

Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel, d. h. der zum Halbmesser 1 cm gehörige Verdrehungsbogen zweier 1 cm voneinander abstehenden Querschnitte, ist

$$\vartheta = \zeta \frac{J_x + J_y}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G} = \zeta \frac{J_p}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G}.$$

Der Wert ζ hierin ist nach F. Grashof:

$\zeta = 1$ für kreisförmige und kreisringförmige Querschnitte,
$\zeta = 1{,}2$ für quadratische und elliptische Querschnitte,
$\zeta = 1{,}2$ bis $1{,}5$ für mehr längliche, rechteckige Querschnitte.

Der Verdrehungswinkel ψ für die ganze Stablänge l (Verdrehung der Endquerschnitte gegeneinander) beträgt

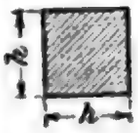
$$\psi = l\vartheta.$$

Nach Versuchen von C. Bach **) hat ϑ für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte. Diese Werte entsprechen (abweichend von Grashof) für elliptische Querschnitte $\zeta = 1$ und für alle rechteckigen Querschnitte $\zeta = 1{,}2$.

Für größere Verdrehungen sind die in der Richtung der Längsfasern entstehenden Normalspannungen zu berücksichtigen; hierüber Goetzke, Z. d. V. d. I. 1909 S. 933.

*) Fußnote von S. 569.
**) Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl. S. 317.

Digitized by Google

Nr.	Querschnitt	Verhältnismäßiger Verdrehungswinkel ϑ, wenn bekannt ist: Drehmoment M_d in cmkg	Verhältnismäßiger Verdrehungswinkel ϑ, wenn bekannt ist: Größte Schubspannung τ_{max} in kg/qcm	Arbeit A der Drehung in cmkg
1		$\vartheta = \frac{M_d}{G J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{d}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau^2_{max}}{G} V$
2		$\vartheta = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{D}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{D^2 + d^2}{D^2} V$
3		$\vartheta = \frac{16}{\pi} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = \frac{\tau_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^3}$	$\frac{1}{8} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
4		$\vartheta = 8{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$ *)	$\vartheta = 0{,}8 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$ *)	$\frac{4}{45} \frac{\tau^2_{max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
5		$\vartheta = 7{,}2 \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 1{,}6 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{h}$	$\frac{8}{45} \frac{\tau^2_{max}}{G} V$
6		$\vartheta = 46{,}2 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2{,}31 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{b}$	
7		$\vartheta = 0{,}967 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 0{,}9 \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{b}$	

Nach B. de Saint Venant**) ist näherungsweise, u. zw. auch für stark vom Rechteck und Kreise abweichende Querschnitte, wie z. B. I-Profile:

$$\vartheta = 40 \frac{J_p}{F^4} \frac{M_d}{G},$$

worin F den Querschnitt in qcm bedeutet. (Der genaue Wert der Unveränderlichen schwankt je nach der Querschnittform nur zwischen 38,5 und 42,68.)

*) Statt des Koeffizienten 3,6 ist nach Versuchen von Bretschneider (Z. d. V. d. I. 1913 S. 253) genauer zu setzen $\psi' = 3{,}645 - 0{,}06 \frac{h}{b}$ $\left(\text{für } \frac{h}{b} = 1 \text{ bis } 6\right)$; statt 0,8 entsprechend $\frac{2}{9} \psi'$. (Vgl. ferner Goetzke, Z. d. V. d. I. 1909 S. 935.)

**) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1879.

Digitized by Google

F. Zusammengesetzte Festigkeit.

Im folgenden bedeutet

l die Länge des Stabes in cm,
F den Querschnitt des Stabes in qcm,
S den Schwerpunkt des Stabquerschnittes,
J_{I} das gröfste äquatoriale Trägheitsmoment von F in cm^4,
J_{II} das kleinste „ „ „ „ „ „
P die den Stab auf Zug oder Druck beanspruchende Kraft (Achsialkraft) in kg,
Q die den Stab auf Abscheren beanspruchende Kraft (Querkraft) in kg,
M das Biegungsmoment in cmkg,
E das Elastizitätsmafs in kg/qcm (S. 482),
m ($= {}^{10}/_{3}$) das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (S. 481).

a. Beanspruchung durch Normalspannungen.

Zug (oder Druck) und Biegung.

I. Der Baustoff ist gegen Zug und gegen Druck widerstandsfähig.

Das Biegungsmoment M und die Achsialkraft P lassen sich auf eine Kraft P zurückführen, die in einem Punkte A der Kraftlinie (im Abstande $p = M : P$ vom Schwerpunkte) angreift, so dafs $M = Pp$.

1. Bestimmung der Nullinie für den Angriffpunkt A.

α) **Nach Mohr,** mit Benutzung der Haupt-Trägheitshalbmesser a und b: Auf den Hauptachsen des Querschnittes SI mit J_{I} und SII

Abb. 38.

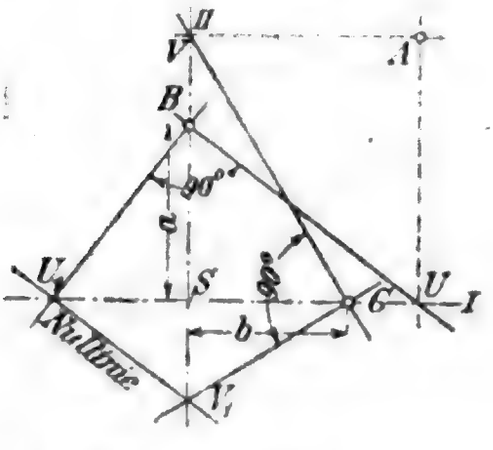
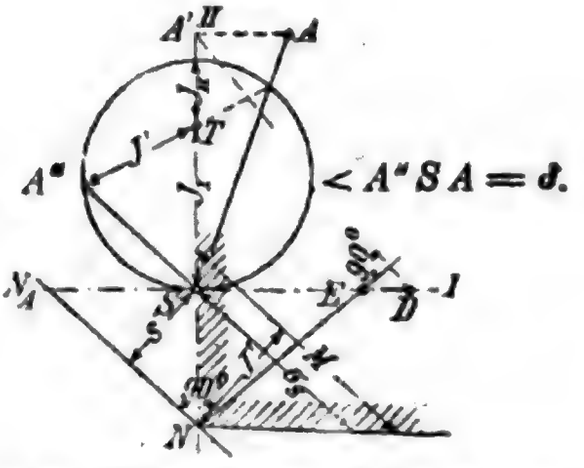


Abb. 39.



mit J_{II} (Abb. 38) trage man die Strecken $SC = b$ und $SB = a$ ab, verbinde C mit dem Fufspunkte V des von A auf SII, B mit dem Fufspunkte U des von A auf SI gefällten Lotes, errichte in B eine Winkelrechte auf BU, in C eine Winkelrechte auf CV, so schneiden diese die Achsen SI und SII in zwei Punkten U_1 und V_1 der Nullinie.

Digitized by Google

β) Nach R. Land,*) mit Benutzung des Trägheitskreises (Abb. 39). Die Nullinie ist parallel zu der durch den Schwerpunkt S gehenden, der Kraftlinie SA zugeordneten Achse SA'' und hat von dieser den Abstand $s = J' : Fp$. Die Lage der Nullinie wird zweckmäfsig durch ihren Schnitt N mit einer Hauptachse bestimmt. Man zeichne den Trägheitskreis so, dafs er eine durch S gehende Hauptachse berührt, z. B. die Achse SI, wobei der Trägheitshauptpunkt T auf der anderen Hauptachse SII liegt. Trage auf SI die festen Strecken $SE = J_I : n$ und $SD = n : F$ ab, beide im Zeichnungsmafsstabe des Querschnittes, wobei n eine passend gewählte Gröfse dritter Ordnung (z. B. $n = 100$ cm³). Ziehe AA' parallel SI, EN winkelrecht zu DA', dann ist die Nullinie NN_A parallel SA''. — Dieses Verfahren ist besonders zweckmäfsig bei der nachstehenden Spannungsermittlung unter 2.

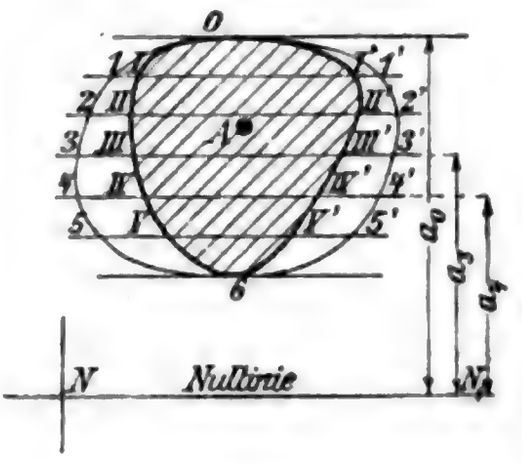
3) Die Umkehrung der unter α) und β) gegebenen Verfahren liefert zu einer gegebenen Nullinie den entsprechenden Angriffpunkt A.

Häufig genügt auch die Bestimmung mittels der sog. **wirksamen Fläche.** Diese Fläche erhält man, wenn die parallel zur Nullinie genommenen Schnittlängen des Querschnittes auf diesen Parallelen im Verhältnis ihres Abstandes von der Nullinie verkleinert aufgetragen und die Endpunkte verbunden werden; die am weitesten von der Nullinie entfernte Schnittlänge bleibt dabei unverändert.

So ergibt sich für den Querschnitt 0 1 2 3 4 5 6 5′ ... 0 in Abb. 40 die wirksame Fläche 0 I I I 6 I I I′ 0 (gestrichelt), wenn man z. B. $III\,III' = \frac{a_3}{a_0} \cdot (3\,3')$, $IV\,IV' = \frac{a_4}{a_0} \cdot (4\,4')$ macht usw.

Der **Schwerpunkt** A der wirksamen Fläche (beispielsweise zeichnerisch zu ermitteln) ist dann der zur Nullinie NN_1 gehörige Angriffpunkt.

Abb. 40.



2. Spannungsermittlung. Die Spannung σ_s im Schwerpunkte ist unabhängig von der Lage des Angriffpunktes (also auch von der Gröfse des Momentes $M = Pp$), es ist $\sigma_s = P : F$, mit dem Sinne von P (d. h. Druckspannung, wenn P eine Druckkraft), also σ_s gleich der mittleren Spannung des Querschnittes.

Die Spannungen ergeben sich zu $\sigma = \frac{M}{J'} y$, worin, wie früher (S. 529) und nach Abb. 39, $J' = J : \sin \delta = TA''$ und y den Abstand eines Querschnittpunktes von der vorher gezeichneten Nullinie NN_A bedeutet. Die **zeichnerische Spannungsverteilung** kann daher ähnlich wie nach Abb. 23 (S. 530) geschehen, wobei der Nullpunkt der Spannungsfläche auf der neuen Nullinie liegen mufs. Die **Grenzspannung** σ_{max} kann aus der zeichnerischen Spannungsverteilung abgegriffen werden, oder sie berechnet sich zu

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J'} e, \quad \text{worin } e = y_{max}.$$

*) R. Land, Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 552 ff. (Sonderdruck zu beziehen durch Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.)

Digitized by Google

Ohne Zeichnung der Nullinie ergeben sich (mittels des Trägheitskreises) die Grenzspannungen σ_{max} und σ_{min} wie folgt:

Zeichne die der Kraftlinie SA zugeordnete Schwerachse SA'' (Abb. 39) (oder SN in Abb. 23, S. 530), d. i. die Nullinie bei Beanspruchung durch das Moment Pp allein, und nenne die beiderseits von SA'' gemessenen gröfsten Abstände eines Randpunktes von F nach der Seite von A (P) hin e_1 mit Vorzeichen von P (bei Zugkraft +, sonst —), nach der anderen Seite hin e_2 mit anderem Vorzeichen, dann ist

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e_1, \quad \sigma_{min} = \sigma_0 + \sigma_2 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e_2,$$

wo σ_{max} der gröfsere und σ_{min} der kleinere der beiden ermittelten Werte ist.

Bestimmung der Grenzspannungen σ_{max} und σ_{min} mit Hülfe der Kernpunkte unter **5.** S. 576.

3. Beziehungen zwischen Angriffpunkt und Nullinie. Wandert der Angriffpunkt der Kraft P auf einer Geraden AA_1, so drehen sich die zugehörigen Nullinien um einen Punkt N, der der Angriffpunkt für die als Nullinie betrachtete Gerade AA_1 ist, und umgekehrt. Man nennt Angriffpunkt und zugehörige Nullinie einander zugeordnet.

4. Der Kern des Querschnittes*) ist die Fläche, innerhalb deren der Angriffpunkt A der Kraft liegen mufs, wenn der Querschnitt F ausschliefslich Spannungen von einerlei Vorzeichen erfahren soll. Liegt A aufserhalb des Kernes, so entstehen sowohl Zug- als Druckspannungen; liegt A auf der **Kerngrenze**, so ergeben sich Randspannungen bis zum Werte null, ohne dafs sie das Vorzeichen wechseln. Die Kerngrenze ist daher die Linie, die der Angriffpunkt A beschreibt, wenn die Nullinie alle möglichen den Querschnitt berührenden Lagen annimmt, oder, entsprechend **3.**: Beschreibt der Angriffpunkt A die Umhüllungslinie (nicht zu verwechseln mit der Umrifslinie) des Querschnittes, so umhüllen die zugehörigen Nullinien den Kern; jeder Ecke E der Umhüllungslinie entspricht also eine gerade Grenzlinie e des Kernes, u. zw. ist die Richtung von e zugeordnet der Richtung des Polstrahles vom Schwerpunkte S nach der Ecke E. Umgekehrt entspricht jeder Geraden H der Querschnittumhüllung eine Ecke h des Kernes, u. zw. haben H und Sh zugeordnete Richtungen.

Die **Kernpunkte** für eine Kraftlinie sind die Schnittpunkte der Kerngrenze mit der Kraftlinie. Der Abstand r (in cm) jedes Kernpunktes vom Schwerpunkte S heifst die **Kernweite** (Widerstandshalbmesser); es ist allgemein

$$r = \frac{W'}{F} = \frac{W}{F \sin \vartheta},$$

wo W, W', ϑ und F die Bedeutung von S. 530 u. 572 haben.

Der Kern ist hiernach polarähnlich der W'-Fläche (S. 531) mit S als Pol und dem Ähnlichkeitsverhältnis $1 : F$.

---

*) Theorie des Kernes auf Grund des allgemeinen Spannungsgesetz $s = \alpha_0 \sigma^n$, Engefser, Z. d. V. d. I. 1898 S. 903.

Digitized by Google

Für eine Hauptachse des Querschnittes als Kraftlinie ist die Kernweite $r = W : F$.

Das **Verzeichnen des Kernes** erfolgt nach einem der beiden Verfahren unter **1.** oder mit Hülfe der „wirksamen Fläche" (S. 573); am einfachsten berechnet man r für die Kernpunkte einer Hauptachse, konstruiert mittels der bekannten Hauptträgheitsmomente J_I, J_{II} den Trägheitskreis (S. 195) und hiermit die den Ecken der Querschnittumhüllung zugeordneten Richtungen der Kernseiten. Abb. 41 zeigt z. B. die Ermittlung des Kernes für ein **Trapez.**

Abb. 41.

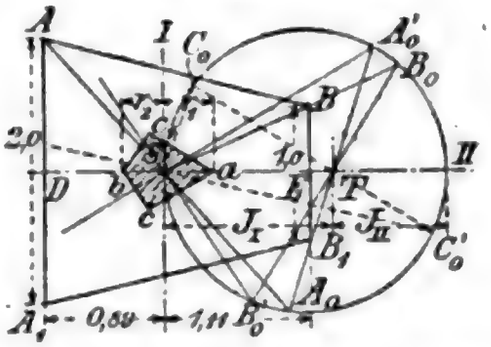


Abb. 41: $F = 3$ qcm, $J_I = 0{,}963$ cm⁴, $J_{II} = 0{,}629$ cm⁴, $W_1 = 0{,}963 : 0{,}89 = 1{,}08$ cm³, $W_2 = 0{,}963 : 1{,}11 = 0{,}87$ cm³, $r_1 = 1{,}08 : 3{,}0 = 0{,}36$ cm, $r_2 = 0{,}87 : 3{,}0 = 0{,}29$ cm. Richtung von ac (parallel $A_0' S$) zugeordnet AS, von bc (parallel $S B_0'$) zugeordnet BS. Probe: Richtung Sc muß zugeordnet sein der Richtung AB ($S C_0'$ parallel AB).

Näherungsweise ist $Sb = \frac{1}{3} SD$, $Sa = \frac{1}{3} SE$.

Kern und geringste Kernweite r_{min} einiger Querschnitte.

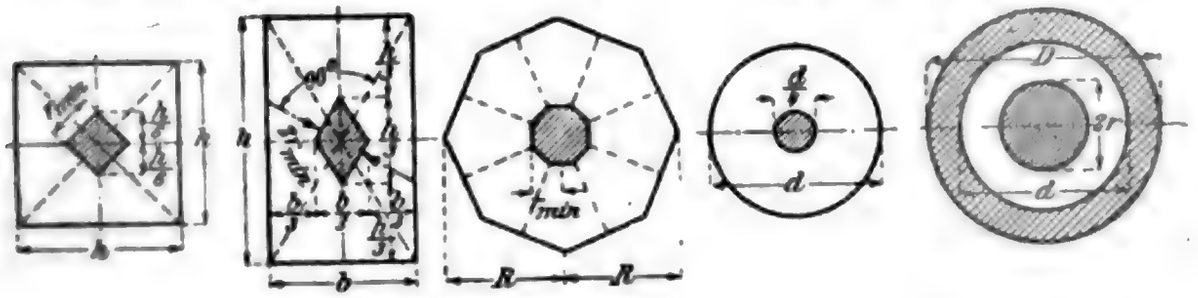
Quadrat (Abb. 42). $r_{min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}1179\, h$

Diagonalen des Kernes $= \frac{1}{3} h$.

Rechteck (Abb. 43). $r_{min} = \frac{b h}{6 \sqrt{b^2 + h^2}}$.

Diagonalen des Kernes $= \frac{1}{3} h$ und $\frac{1}{3} b$.

Abb. 42. Abb. 43. Abb. 44. Abb. 45. Abb. 46.

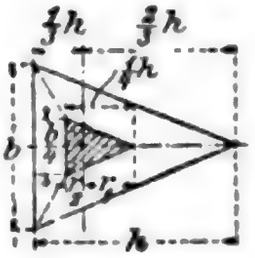


Dreieck, gleichschenkliges (Abb. 47).

$r_1 = \frac{1}{6} h$, $r_2 = \frac{1}{12} h$.

Kern ein ähnliches Dreieck, Grundlinie $= \frac{1}{4} b$, Höhe $= \frac{1}{4} h$.

Abb. 47.



Achteck (Abb. 44). $r_{min} = 0{,}2256\, R$.

Kreis (Abb. 45). $r = \frac{1}{8} d =$ konst.

Hohles Quadrat (äußere Seite $= H$, innere Seite $= h$). Kern ein Quadrat, ähnlich wie in Abb. 42.

$$r_{min} = \frac{H}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right] = 0{,}1179\, H \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

Digitized by Google

Hohles Achteck [Halbmesser der beiden umliegenden Kreise = R_a und R_i, Wandstärke $= 0{,}9239\ (R_a - R_i)$].

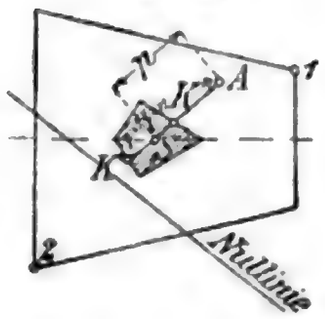
Kern ein Achteck, ähnlich wie in Abb. 44.

$$r_{min} = 0{,}2256\, R_a \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2\right].$$

Kreisring (Abb. 46). $r = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \text{konst.}$

5. Bestimmung der Grenzspannungen mittels der Kernpunkte. Sind die Kernpunkte K', K'' für eine gegebene Kraftlinie AS (Abb. 48) bekannt, so bestimmen sich die Grenzspannungen σ_{max}, σ_{min} des Querschnittes (S. 573) wie folgt.

Abb. 48.



Bezeichnen $M' = P \cdot \overline{AK'}$ und $M'' = P \cdot \overline{AK''}$ die Momente der Kraft P (in A), bezogen auf die Kernpunkte, W' und W'' die Widerstandsgrößen für die der Kraftlinie zugeordnete Nullinie (S. 530), so ist

$$\sigma_{max} \text{ und } \sigma_{min} = M' : W' \text{ und } M'' : W''.$$

Bei symmetrischen Querschnitten ist stets

$$\sigma_{max} = M' : W',\ \sigma_{min} = M'' : W''.$$

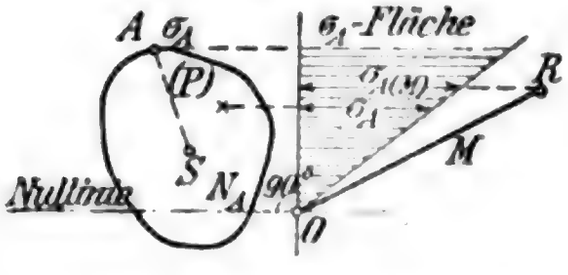
Für W' und W'' darf nach 4. gesetzt werden Fr' bzw. Fr'', wenn r' und r'' die Kernweiten auf der Kraftlinie bezeichnen; da ferner $AK' = p + r'$, $AK' = p - r''$, so erhält man auch

$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{p}{r'}\right)\frac{P}{F}, \qquad \sigma_{min} = \left(-1 + \frac{p}{r''}\right)\frac{P}{F}.$$

Die Vorzeichen von σ sind mit Hülfe der Nullinie zu bestimmen. In Abb. 48 ist z. B. für eine Druckkraft P σ_{max} (in 1) Druck, σ_{min} (in 2) Zug, da 1 auf der nämlichen Seite, 2 auf der entgegengesetzten Seite der Nullinie liegt wie A.

6. Gegenseitigkeit der Spannungen, nach R. Land.*) Sind A und B zwei beliebige Querschnittpunkte, so erzeugt eine Kraft P in A eine Spannung in B, die gleich ist der Spannung in A, erzeugt von P in B. (Hieraus folgen die Beziehungen unter 3.)

Abb. 49.



7. Einflufsfläche einer Spannung.*) Trägt man für einen beliebigen Spannungszustand die Spannungen σ in ihren Angriffpunkten als Längen winkelrecht zum Querschnitt auf, so bilden ihre Endpunkte eine Ebene, die sog. **Spannungsfläche**, die durch seitliche Projektion dargestellt werden kann (Abb. 49).

Trägt man anderseits die veränderlichen Werte σ_A eines festen Punktes A bei wandernder Kraft $P = 1$ t in deren Angriffpunkten

*) Z. f. B. 1892 S. 564.

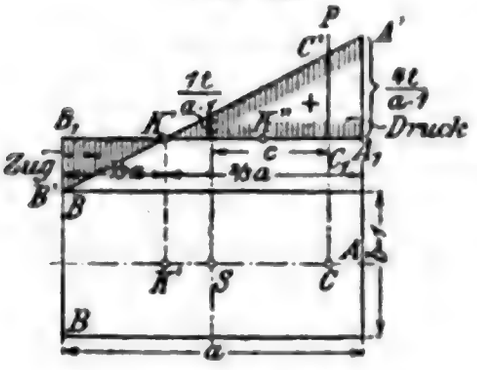
Digitized by Google

auf, so entsteht die **Einflufsfläche** für σ_A, oder kurz die σ_A-Fläche. Aus 6. folgt hiernach:

Die Einflufsfläche der Spannung σ_A ist gleich der Spannungsfläche für die feste Kraft $P = 1$ t in A. Diese Spannungsfläche kann nach Abb. 39 (S. 572) gezeichnet werden, wobei $M = 1$ t . SA ist.

Wirkung eines Momentes M cmt $= (M$ cm) . (1 t). Trägt man vom Nullpunkte O der σ_A-Fläche aus OR gleich und parallel M cm ab (Abb. 49), so gibt die zu R gehörige Ordinate die Spannung $\sigma_A(M)$, erzeugt durch das Moment M. Man kann hiernach für die bloſse Wirkung von Momenten die σ_A-Fläche parallel mit sich verschieben, so daſs der Nullpunkt O auf S fällt, wobei die Spannungsfläche die Lage von Abb. 23 (S. 530) erhält.

Abb. 50.



8. Rechteck. Die Einflufsfläche einer Randspannung σ_A für Rechtecke von der Länge a, der Breite $b = 1$ m kann vorteilhaft bei Mauer- und Gewölbequerschnitten benutzt werden (Abb. 50). Krafteinheit sei 1 t. Die gerade Grenzlinie $A'K'B'$ der σ_A-Fläche, bezogen auf A_1B_1, geht durch den zu A gehörigen Kernpunkt K' ($K'A_1 = {}^2/_3\,a$) und schneidet bei S die Ordinate $\sigma_s = 1$ t: a . 1 und bei dem Randpunkte A die Ordinate 4 t: a . 1 ab, die nach einem σ-Mafsstabe aufzutragen sind.

Eine in dem beliebigen Punkte C angreifende Kraft P (in t) erzeugt alsdann eine Randspannung in A:

$$\sigma_A = + P \,.\, \overline{C_1 C'}.$$

Eine $+$-Spannung in A entsteht nur, solange P auf der Strecke $AK' = {}^2/_3\,a$ angreift.

Rechnerisch ergibt sich für die Randspannungen (gröfsten Kantenpressungen):

$$\sigma_A = \frac{6\,M_k'}{a^2} \quad \text{und} \quad \sigma_B = \frac{6\,M_k''}{a^2},$$

worin M_k' und M_k'' die Momente von P, bezogen auf die Kernpunkte K' und K'', sind. Greift die Kraft P in C an (auf AS, Abb. 50), und setzt man die Exzentrizität (Abweichung vom Schwerpunkte) $SC = c$, so ist auch

$$\left.\begin{matrix}\sigma_A \\ \sigma_B\end{matrix}\right\} = \sigma \begin{matrix}\text{max} \\ \text{min}\end{matrix} = \frac{P}{a^2}\,(a \pm 6c) = \frac{P}{a}\left(1 \pm \frac{6c}{a}\right).$$

Soll der Querschnitt nur Druckspannungen erhalten, so mufs $6c : a < 1$, also $c < {}^1/_6\,a$ sein, d. h. die Kraft P mufs im mittleren Drittel $K'K''$ der Querschnittlänge angreifen.

Da beim Rechteckquerschnitte ab

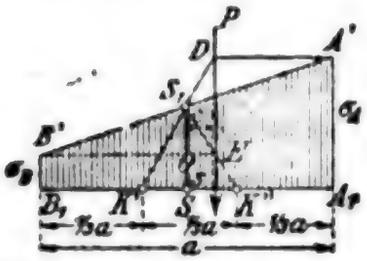
$$\frac{\sigma_A}{\sigma_s} = 1 + \frac{6c}{a} = \left(\frac{a}{6} + c\right) : \frac{a}{6},$$

so ergibt sich folgendes einfache zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der Randspannungen (Abb. 51):

Digitized by Google

Man trägt im Schwerpunkte S die mittlere Spannung $\sigma_s = P : a = SS_1$ winkelrecht zu $A_1 B_1$ auf, zieht $K' S_1$ bis zum Schnitte D mit der Richtung der angreifenden Kraft P, dann DA' parallel $B_1 A_1$ und die Schlufslinie $A' S_1 B'$, so sind die Ordinaten der Spannungslinie $A' B'$ (gestrichelte Fläche $A' S_1 B' B_1 A_1$) die durch P erzeugten Querschnittspannungen; $A_1 A'$ und $B_1 B'$ sind die Randspannungen.

Abb. 51.

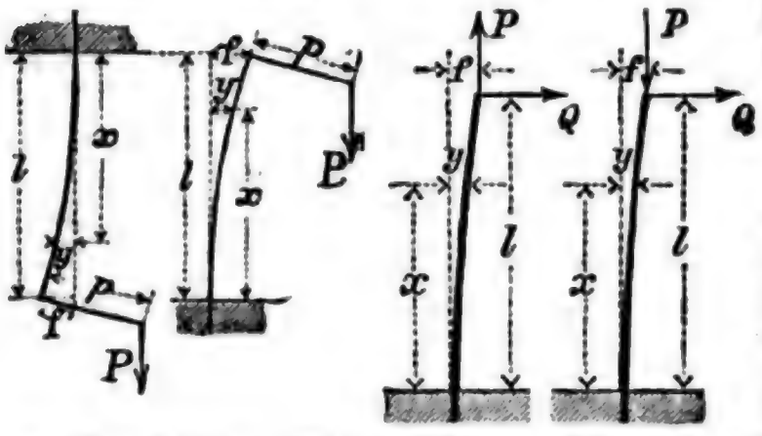


Auch findet man B' mittels der durch den Schnittpunkt E von SK'' mit P gelegten Parallelen EB' zu $A_1 K_1$. — Das vorstehende Verfahren gilt entsprechend für eine aufserhalb des Kernpunktabstandes $K' K''$ auf der Mittellinie angreifende Kraft.

9. Bei **langen Stäben,** die eine merkliche Ausbiegung durch die lotrechte Kraft P erfahren (Abb. 52 u. 53), ergibt sich

Benennung	bei exzentr. Zug (Abb. 52)	bei exzentr. Druck (Abb. 53)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{p}{\mathfrak{Cof}\, \omega l} (\mathfrak{Cof}\, \omega x - 1)$	$y = \frac{p}{\cos \omega l} (1 - \cos \omega x)$
Gröfste Ausbiegung	$f = p \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, \omega l}\right)$	$f = p \left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1\right)$
Biegungsmoment	$M_x = P p \frac{\mathfrak{Cof}\, \omega x}{\mathfrak{Cof}\, \omega l}$ Für $x = l$ ist $M_{max} = P p$	$M_x = P y \frac{\cos \omega x}{\cos \omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{max} = \frac{P p}{\cos \omega l}$
Gröfste Spannungen	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \pm \frac{p f}{W}\right)$	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \mp \frac{p F}{W \cos \omega l}\right)$

Abb. 52. Abb. 53. Abb. 54. Abb. 55.



Die Bedeutung der Hyperbelfunktion $\mathfrak{Cof}$ S. 64. Die Gröfse ω hat den Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

worin J (in cm⁴) das Trägheitsmoment des Querschnittes F, bezogen auf die winkelrecht zur Biegungsebene stehende Schwerlinie von F. W ist das zu J gehörige Widerstandsmoment in cm³.

Näherungsformeln ergeben sich, wenn man in den vorstehenden Formeln setzt

$$\mathfrak{Cof}\, \omega l = 1 + \frac{P l^2}{2EJ} \quad \text{und} \quad \cos \omega l = 1 - \frac{P l^2}{2EJ}.$$

10. Statt der exzentrisch angreifenden Kraft P (unter **9.**) seien eine zentrisch angreifende Achsialkraft P und eine am Stabende wirkende Querkraft Q vorhanden (Abb. 54 u. 55). Bedeutung der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Tg}$ S. 64. Gröfse ω wie vorstehend unter **9.**

Digitized by Google

Benennung	Zugkraft P (Abb. 54)	Druckkraft P (Abb. 55)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P}\left(x - \frac{1}{\omega}\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega l - \mathfrak{Sin}\,\omega(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$	$y = \frac{Q}{P}\left(-x + \frac{1}{\omega}\frac{\sin\omega l - \sin\omega(l-x)}{\cos\omega l}\right)$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P}\left(l - \frac{\mathfrak{Tg}\,\omega l}{\omega}\right)$	$f = \frac{Q}{P}\left(\frac{\operatorname{tg}\omega l}{\omega} - l\right)$
Biegungsmoment	$M_x = \frac{Q}{\omega}\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{max} = \frac{Q}{\omega}\mathfrak{Tg}\,\omega l$	$M_x = \frac{Q}{\omega}\frac{\sin\omega(l-x)}{\cos\omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{max} = \frac{Q}{\omega}\operatorname{tg}\omega l$
Größte Spannungen	$\sigma\frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{max}}{W}$	$\sigma\frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{max}}{W}$

11. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, in der Mitte durch die Einzellast $2Q$ belastet und außerdem durch die Achsialkraft $\pm P$ beansprucht (Abb. 56 u. 57). Hierfür gelten ohne weiteres die Formeln unter **10.**

Abb. 56.

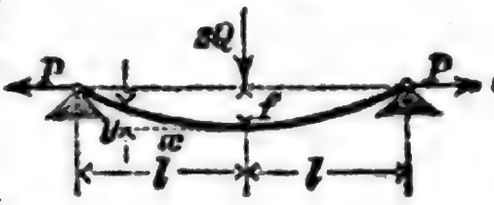
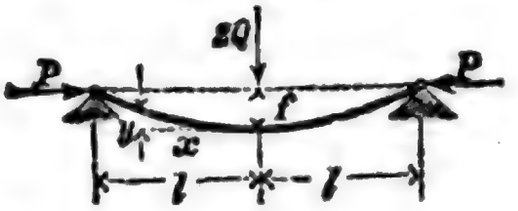


Abb. 57.



12. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, durch die auf die Länge $2l$ gleichmäßig verteilte Kraft $2Q$ belastet und außerdem durch die Achsialkraft $\pm P$ beansprucht (Abb. 58 u. 59 auf S. 580).

Benennung	Zugkraft P (Abb. 58)	Druckkraft P (Abb. 59)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P}\left(\frac{x^2}{2l} - \frac{1}{l\omega^2}\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega x - 1}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$	$y = \frac{Q}{P}\left(-\frac{x^2}{2l} + \frac{1}{l\omega^2}\frac{1-\cos\omega x}{\cos\omega l}\right)$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P}\left[\frac{l}{2} - \frac{1}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)\right]$	$f = \frac{Q}{P}\left[-\frac{l}{2} + \frac{1}{l\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right)\right]$ *)
Biegungsmoment	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\omega x}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$ Für $x = 0$ ist $M_{max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2}\left(\frac{\cos\omega x}{\cos\omega l} - 1\right)$ Für $x = 0$ ist $M_{max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(\frac{1}{\cos\omega l} - 1\right)$
Größte Spannungen	$\sigma\frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{max}}{W}$	$\sigma\frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{max}}{W}$

*) Nach H. Kayser (Zentralbl. Bauv. 1910 S. 304) ist auch $f = \frac{M_0}{P_k - P}$, worin $M_0 = \frac{Ql}{2}$ das Biegungsmoment durch $2Q$ in Balkenmitte, P die achsiale Druckkraft und $P_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$ die Knickkraft des Stabes bedeutet.

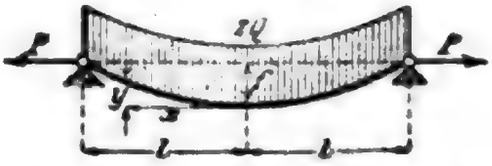
Digitized by Google

Bemerkung. Der Wert $M_{max} = \frac{Q}{l\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\omega l}\right)$ nähert sich bei längeren Stäben sehr schnell dem Grenzwerte $M_0 = \frac{Q}{l\omega^2}$, entsprechend einer größten Biegungsspannung $\sigma_{max} = \frac{M_0}{W} = \frac{Q}{l}\frac{E}{P}\frac{J}{W} = q\frac{E}{P}e$, wenn q die Belastung für 1 cm Stablänge und e den Abstand der am stärksten gezogenen Faser von der Nullinie bedeutet.

Der Grenzwert σ_{max} ist die Biegungsspannung, die der Stab erleiden würde, wenn er — ohne jede Steifigkeit — nach der parabolischen Kettenlinie frei durchhängen könnte. Diese Grenzspannung ist unabhängig von der Stützweite $2l$.*)

Abb. 58.

Abb. 59.



13. Stab mit vollkommen eingespannten Enden auf zwei Stützen, in der Mitte durch die Einzellast $2Q$ und außerdem durch eine Achsialkraft $\pm P$ beansprucht (Abb. 60 u. 61).**)

Abb. 60.

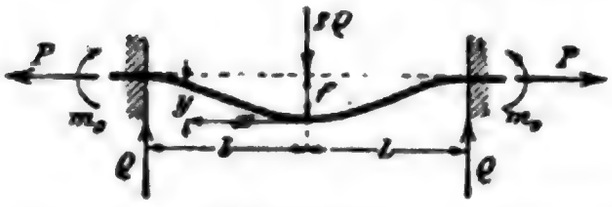
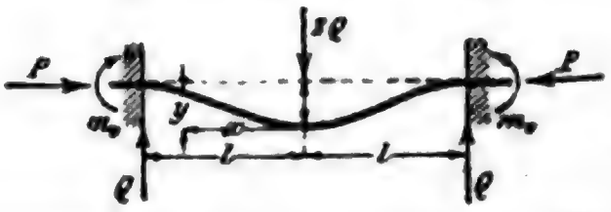


Abb. 61.



Benennung	Zugkraft P (Abb. 60)	Druckkraft P (Abb. 61)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P\omega}\cdot\left[(\mathfrak{Cof}\,\omega x - 1)\,\mathfrak{Tg}\,\frac{l\omega}{2} - \mathfrak{Sin}\,\omega x + \omega x\right]$	$y = \frac{Q}{P\omega}\cdot\left[-(\cos\omega x - 1)\,\mathrm{tg}\,\frac{l\omega}{2} + \sin\omega x - \omega x\right]$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P\omega}\left[l\omega - 2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{l\omega}{2}\right]$	$f = \frac{Q}{P\omega}\left[2\,\mathrm{tg}\,\frac{l\omega}{2} - l\omega\right]$
Biegungsmoment	$M_x = \frac{Q}{\omega}\left[\mathfrak{Tg}\,\frac{l\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega x - \mathfrak{Sin}\,\omega x\right]$ Für $x = 0$ und $x = l$ ist $M_{max} = m_0 = \pm\frac{Q}{\omega}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{l\omega}{2}$	$M_x = \frac{Q}{\omega}\left[\mathrm{tg}\,\frac{l\omega}{2}\cos\omega x - \sin\omega x\right]$ Für $x = 0$ und $x = l$ ist $M_{max} = m_0 = \pm\frac{Q}{\omega}\,\mathrm{tg}\,\frac{l\omega}{2}$
Größte Spannungen	Wie unter II.	

II. Der Baustoff ist nur gegen Druck (nicht gegen Zug) widerstandsfähig.

Diese ungünstige Annahme wird der Sicherheit wegen bei gewöhnlichem Mauerwerk gemacht, bei dem keine Zugübertragung durch den Mörtel, sondern ein Klaffen der Fugen zu erwarten ist und das durch wagerechte Kräfte (Winddruck, Erddruck usw.) beansprucht

*) Z. d. V. d. I. 1897 S. 855 ff.
**) J. Arnovlević, Oesterr. Wochenschr. f. ö. B. 1907 Heft 22.

Digitized by Google

wird. (Bei bestem Klinkermauerwerk in Zementmörtel mit $k = 20$ bis 30 kg/qcm erscheint eine Zugbeanspruchung k_z bis 2,5 kg/qcm mitunter noch zulässig.) Man setzt hierbei voraus, dafs, sofern die Druckkraft P aufserhalb des Kernes des Querschnittes angreift, der gedrückte Teil des Querschnittes (der wirksame Querschnitt) von dem vollständig unwirksamen Teile durch eine gerade Nullinie getrennt ist und die Druckspannungen im Verhältnis der Entfernungen von dieser Nullinie wachsen.

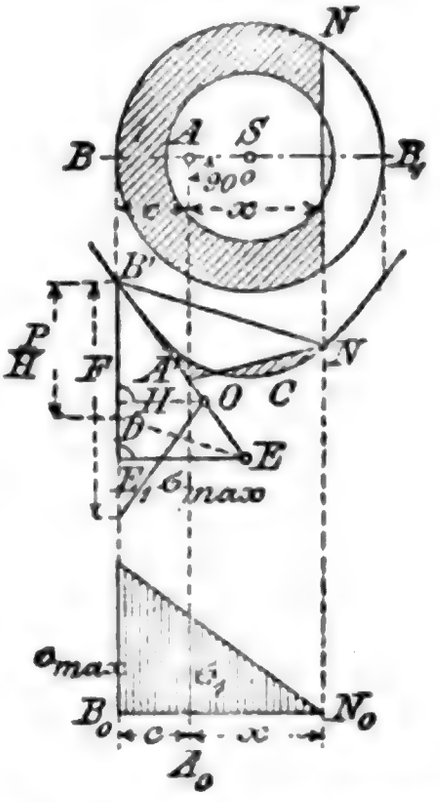
Der Spannungskörper bildet einen Keil (Abb. 62), dessen Kante N_0 die Nullinie und dessen Höhe die gröfste Randspannung σ_{max} ist. N_0 und σ_{max} sind so zu bestimmen, dafs der Inhalt des Spannungskeiles $= P$ ist und dafs seine lotrechte Schwerlinie mit P zusammenfällt.

Bezeichnet S_1 das statische Moment und J_1 das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnitteiles F_1, bezogen auf die Nullinie NN, so ist der Abstand des Angriffpunktes A der Kraft P von der Nullinie

$$x = J_1 : S_1$$

und die auf der Achse BB_1 gemessene Länge des wirksamen Querschnitteiles $= c + J_1 : S_1$, wenn c den Abstand des Punktes A von der nächsten Querschnittkante B bedeutet.

Abb. 62.



Beliebiger Querschnitt. Der Angriffpunkt A der Druckkraft P liege auf einer Hauptachse BSB_1 des Querschnittes (Abb. 62). Nach dem **Verfahren von Mohr***) zeichne man die zum gegebenen (Gesamt-) Querschnitte F als Belastungsfläche gehörige Seillinie für eine Kraftrichtung winkelrecht zu BB_1 mit der (beliebigen) Polweite H, ziehe A_1A' winkelrecht zu BB_1 bis zum Schnitte A' mit der Endtangente an B' und alsdann die Gerade $A'N$ derart, dafs das Dreieck $B'NA'$ gleich ist der Fläche $B'NC$ (zwischen Seillinie und $B'N$), oder dafs die beiden gestrichelten Flächen einander gleich sind. Dann ist die Gerade durch N, winkelrecht zu BB_1, die gesuchte Nullinie. Macht man nun

$$B'D = P : H = \text{Kraft} : \text{Fläche}$$

(H im Mafsstabe von F für den Kräfteplan zu messen), DE parallel $B'N$, so ist die Randspannung in B $\sigma_{max} = EE_1$ (winkelrecht zu $B'D$), u. zw. ist EE_1 zu messen wie $P : H$.

Die mittlere Spannung $\sigma_m = P : F_1$ des wirksamen Querschnitteiles F_1 findet sich als die Spannung in dessen Schwerpunkt; der Abstand dieses Schwerpunktes von NN ist bekanntlich $y = S_1 : F_1$. σ_1 (in Abb. 62) ist die Spannung im Angriffpunkte A der Kraft P; man erhält

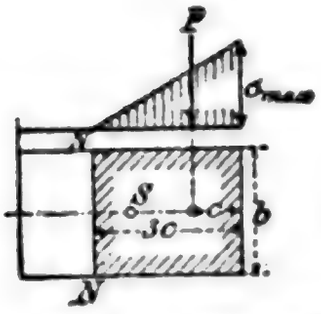
$$\sigma_1 = \frac{x}{y}\,\sigma_m = \frac{x}{y}\,\frac{P}{F_1} = \frac{Px}{S_1}.$$

*) O. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete d. techn. Mechanik. 2. Aufl. 1913 S. 275. Wilhelm Ernst & Sohn. Ein ähnliches einfaches Verfahren von P. Grosche (mit durchgeführtem Beispiel) Zentralbl. Bauv. 1911 Nr. 68 S. 432.

Digitized by Google

Rechteck (Abb. 63). Greift P auf einer Hauptachse im Abstande c von der nächsten Kante an, so verteilt sich der Druck auf die Länge $3c$ (Nullinie $= NN$), und an der Kante ist

Abb. 63.



$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3bc}.$$

Ferner ist (im Abstande $1{,}5c$ von der Kante) $\sigma_m = {}^1/_2\,\sigma_{max}$ und die Spannung im Angriffpunkte von P $\sigma_1 = {}^2/_3\,\sigma_{max}$.

Hohlquadrat. Preufs. Z. Arch. u. Ing.-Wes. 1903 S. 425.

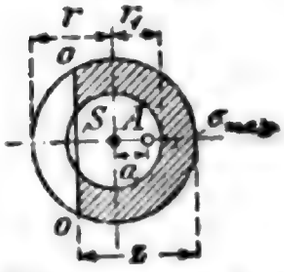
Kreis. Nach P. Neumann*) ist angenähert

$$\sigma_{max} = \left(0{,}372 + 0{,}056\,\frac{c}{r}\right)\frac{P}{c\sqrt{rc}},$$

worin r den Halbmesser des Kreises und c den kleinsten Abstand des Kraftpunktes vom Kreisumfange bedeutet.

Ferner ergibt sich nach Keck**) angenähert der Abstand der Nullinie vom Umfangspunkte (B) aus

Abb. 64.



$$\frac{c+x}{c} = 2{,}33 + 0{,}58\left(\frac{c}{r}\right)^2.$$

Kreisring (Abb. 64). Ist r der äufsere, r_1 der innere Halbmesser, σ die mittlere Druckspannung, die die Querschnittfläche $\pi\,(r^2 - r_1^2)$ durch die Druckkraft P erfahren würde, a die Abweichung der Druckkraft vom Mittelpunkte (Exzentrizität), z der Abstand der Nullinie vom entferntesten Randpunkte, σ_{max} die Pressung in letzterem, so ergeben für verschiedene Verhältnisse $a : r$ und $r_1 : r$ die beiden folgenden Tafeln**) die Lage der Nullinie (Werte $z : r$) und die gröfste Randpressung (Werte $\sigma_{max} : \sigma$).

1. Werte $z : r$ (Lage der Nullinie).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r}$ 0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$\frac{a}{r}$
0,25	2,00	.	.	.	.	.	.	0,25
0,30	1,82	.	.	.	.	.	.	0,30
0,35	1,66	1,89	1,98	.	.	.	.	0,35
0,40	1,51	1,75	1,84	1,93	.	.	.	0,40
0,45	1,37	1,61	1,71	1,81	1,90	.	.	0,45
0,50	1,23	1,46	1,56	1,66	1,78	1,89	2,00	0,50
0,55	1,10	1,29	1,39	1,50	1,62	1,74	1,87	0,55
0,60	0,97	1,12	1,21	1,32	1,45	1,58	1,71	0,60
0,65	0,84	0,94	1,02	1,13	1,25	1,40	1,54	0,65
0,70	0,72	0,75	0,82	0,93	1,05	1,20	1,35	0,70
0,75	0,59	0,60	0,64	0,72	0,85	0,90	1,15	0,75
0,80	0,47	0,47	0,48	0,52	0,61	0,77	0,94	0,80
0,85	0,35	0,35	0,35	0,36	0,42	0,55	0,72	0,85
0,90	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,32	0,49	0,90
0,95	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,25	0,95

*) Zentralbl. Bauv. 1901 S. 371. **) Keck, Z. hann. Arch. u. Ing.-Ver. 1889 S. 627. Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1902 S. 1821.

Digitized by Google

Bemerkung. Für kleinere Werte von $a:r$ als entsprechend $z:r=2$ und darüber liegt A im Querschnittkern.

Für folgende Werte von $a:r$ wird $z:r=1$, d. h., die Nullinie geht durch den Mittelpunkt, oder die tragende Fläche des Querschnittes ist ein Halbkreis.

$\frac{r_1}{r} =$	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{a}{r} =$	0,589	0,631	0,654	0,682	0,713	0,743	0,786

angenähert $\frac{a}{r} = 0{,}5 + 0{,}25\,\frac{r_1}{r}$.

2. Werte $\sigma_{max} : \sigma$ (Randspannung).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r} =$ 0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$\frac{a}{r}$
0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
0,05	1,20	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10	0,05
0,10	1,40	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,20	0,10
0,15	1,60	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30	0,15
0,20	1,80	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40	0,20
0,25	2,00	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50	0,25
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60	0,30
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70	0,35
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80	0,40
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90	0,45
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00	0,50
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17	0,55
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26	0,60
0,65	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42	0,65
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64	0,70
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89	0,75
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27	0,80
0,85	21,08	15,55	13,12	10,43	7,16	4,50	3,77	0,85
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71	0,90
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72	0,95
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,00

Andere Hohlquerschnitte Landmann, Tabellen zur Bestimmung der Randspannungen von Fabrikschornsteinen, Wiesbaden 1904, Kreidel.

b. Beanspruchung durch Schubspannungen.

(Schub und Drehung.)

Der Querschnitt des Stabes werde durch eine Schubkraft Q und durch ein Drehmoment M_d beansprucht. In einem beliebigen Teilchen des Querschnittes erzeugt Q die Schubspannung τ_s (nach S. 519 ff. zu ermitteln) und M_d die Schubspannung τ_d (nach S. 568 ff. zu ermitteln). Durch Zusammensetzung von τ_s und τ_d nach dem Parallelogramm erhält man die wirklich in dem Querschnitteilchen (und winkelrecht dazu) herrschende Schubspannung τ; es darf in keinem Punkte $\tau > k_d$ sein.

c. Beanspruchung durch Normal- und Schubspannungen.

Wird irgend ein Querschnitteilchen eines Stabes durch eine Normalspannung σ und eine Schubspannung τ beansprucht, so sind beide

Digitized by Google

nach S. 527 zu einer idealen Hauptspannung σ_1 zusammenzusetzen, u. zw. ist insbesondere für $m = {}^{10}/_{3}$

$$\sigma_1 = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0 \tau)^2};$$

der Querschnitt ist so zu bemessen, dafs für keinen Punkt $\sigma_1 > k_n$.

Hierbei bedeutet $\alpha_0 = k_n : 1{,}3\,k_s$ das Beanspruchungsverhältnis, unter k_n (gleich k_z, k oder k_b) die zulässige Normalspannung und unter k_s (gleich k_s oder k_d) die zulässige Schubspannung verstanden, wobei die Arten der Festigkeit zu beachten sind, auf die der Stab beansprucht wird.

1. Zug (oder Druck) und Schub.

Die äufseren Kräfte ergeben für den Querschnitt F eine Achsialkraft P und eine Schubkraft Q.

P erzeugt eine überall gleiche Normalspannung $\sigma = \pm P : F$, Q dagegen Schubspannungen, deren gröfste, τ_{max}, nach den Formeln auf S. 520 u. 521 zu ermitteln ist (τ_{max} tritt meist in der Schwerachse auf). Die gröfste ideale Hauptspannung im Querschnitte wird

$$\sigma \overset{\max}{\underset{\min}{\;}} = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha_0^2\,\tau^2_{max}} \lessgtr k_s \text{ bzw. } k,$$

wenn $\alpha_0 = k_z : 1{,}3\,k_s$ bzw. $\alpha_0 = k : 1{,}3\,k_s$.

2. Biegung und Schub.

Der Querschnitt werde beansprucht durch ein Biegungsmoment M, das die Normalspannungen σ erzeugt, und durch eine Schubkraft Q, die in der Ebene des Biegungsmomentes liegt und die Schubspannungen τ erzeugt.

Es ist alsdann die oben unter **c.** gegebene Hauptgleichung mit $\alpha_0 = k_b : 1{,}3\,k_s$ anzuwenden, u. zw. sind für σ und τ diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung σ_1 am gröfsten wird.

Bei dem **Freiträger** von der Länge l, Fall 1. S. 546, berücksichtige man für die Spannungsermittlung, wenn $\alpha_0 = 1$:

1) für den Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d
nur die Biegungsbeanspruchung, falls . . . $l > 0{,}25\,d$,
nur die Schubbeanspruchung, falls . . . . $l \lessgtr 0{,}25\,d$;

2) für den Rechteckquerschnitt von der Höhe h (parallel zu Q) tritt an die Stelle von $0{,}25\,d$ der Wert $0{,}325\,h$.

Die **Durchbiegung** f eines in der Mitte mit P belasteten Stabes (Fall 2, S. 546) beträgt mit Rücksicht auf den Einfluss der Schubkraft

für den kreisförmigen Querschnitt

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{\frac{1}{4}\pi d^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 0{,}77\right],$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{bh}\left[0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78\right],$$

für den I-förmigen Querschnitt*)

$$f = \frac{P}{E}\,\frac{l}{h\,\delta}\left[\frac{l^2\,\delta}{24\,W} + 0{,}65\right],$$

worin h die Höhe, δ die Stegdicke in cm, W das Widerstandsmoment in cm³.
(Bestimmung von E aus Biegeversuchen.)

3. Zug (oder Druck) und Drehung.

Hierfür gilt das vorstehend unter **1.** Gesagte, wenn statt der Schubkraft Q das Drehmoment M_d und statt k_s der Wert k_d gesetzt wird.

*) R. Land, Einfluss der Schubkräfte usw., Z. f. B. 1894 S. 611 ff. — Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1888 S. 222 ff.

Digitized by Google

4. Biegung und Drehung.

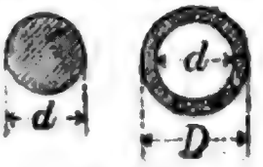
Der Querschnitt werde durch ein Biegungsmoment M und ein Drehmoment M_d beansprucht; die Ebene von M schneide den Querschnitt winkelrecht, die Ebene von M_d die Stabachse winkelrecht. M erzeugt in jedem Querschnitteilchen eine Normalspannung σ, M_d daselbst eine Schubspannung τ, die beide wie oben angegeben, zu ermitteln sind. Es ist dann die unter **c.** (S. 584) gegebene Hauptgleichung mit $\alpha_0 = k_b : 1{,}3\,k_d$ anzuwenden, und zwar sind für σ und τ diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung σ_1 am gröfsten wird.

1. **Kreis- und Kreisringquerschnitt** (Abb. 65 u. 66). Hier fallen die Punkte für σ_{max} und τ_{max} zusammen.

Bedeutet W das erforderliche Widerstandsmoment, also (S. 537)

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right],$$

Abb. 65. Abb. 66.



so bestimme man

$$M_i = 0{,}35\,M + 0{,}65\,\sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2} = \xi M,$$

und daraus $W = M_i : k_b$.

Tafel der Werte $\xi = 0{,}35 + 0{,}65\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 M_d}{M}\right)^2}$ *)

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ
0,01	1,00003	0,26	1,02161	0,51	1,07967	0,76	1,16636
0,02	1,00013	0,27	1,02328	0,52	1,08266	0,77	1,17027
0,03	1,00029	0,28	1,02500	0,53	1,08569	0,78	1,17425
0,04	1,00052	0,29	1,02679	0,54	1,08878	0,79	1,17831
0,05	1,00081	0,3	1,02862	0,55	1,09183	0,8	1,18241
0,06	1,00118	0,31	1,03051	0,56	1,09485	0,81	1,18653
0,07	1,00160	0,32	1,03246	0,57	1,09804	0,82	1,19067
0,08	1,00208	0,33	1,03447	0,58	1,10129	0,83	1,19487
0,09	1,00263	0,34	1,03654	0,59	1,10461	0,84	1,19895
0,1	1,00324	0,35	1,03866	0,6	1,10803	0,85	1,20309
0,11	1,00390	0,36	1,04085	0,61	1,11147	0,86	1,20728
0,12	1,00464	0,37	1,04308	0,62	1,11491	0,87	1,21151
0,13	1,00544	0,38	1,04535	0,63	1,11835	0,88	1,21584
0,14	1,00632	0,39	1,04768	0,64	1,12189	0,89	1,22015
0,15	1,00727	0,4	1,05007	0,65	1,12525	0,9	1,22449
0,16	1,00828	0,41	1,05250	0,66	1,12876	0,91	1,22884
0,17	1,00933	0,42	1,05500	0,67	1,13234	0,92	1,23321
0,18	1,01045	0,43	1,05755	0,68	1,13600	0,93	1,23762
0,19	1,01164	0,44	1,06014	0,69	1,13969	0,94	1,24207
0,2	1,01287	0,45	1,06278	0,7	1,14343	0,95	1,24655
0,21	1,01417	0,46	1,06544	0,71	1,14720	0,96	1,25103
0,22	1,01553	0,47	1,06816	0,72	1,15009	0,97	1,25553
0,23	1,01697	0,48	1,07095	0,73	1,15481	0,98	1,26007
0,24	1,01846	0,49	1,07381	0,74	1,15866	0,99	1,26468
0,25	1,02001	0,5	1,07672	0,75	1,16250	1,0	1,26924

*) Mitgeteilt von Ingenieur W. Prollius, Duisburg. — Eine einfache zeichnerische Ermittlung des Wertes ξ von G. Ziehn findet sich „Zeitschr. f. gewerbl. Unterricht" 1910 S. 269.

Digitized by Google

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ
1,01	1,27386	1,56	1,55442	2,11	1,86774	2,66	2,19714
1,02	1,27850	1,57	1,55900	2,12	1,87362	2,67	2,20323
1,03	1,28314	1,58	1,56538	2,13	1,87950	2,68	2,20933
1,04	1,28782	1,59	1,57190	2,14	1,88538	2,69	2,21542
1,05	1,29250	1,6	1,57642	2,15	1,89127	2,7	2,22151
1,06	1,29722	1,61	1,58194	2,16	1,89709	2,71	2,22761
1,07	1,30196	1,62	1,58746	2,17	1,90292	2,72	2,23371
1,08	1,30672	1,63	1,59298	2,18	1,90876	2,73	2,23982
1,09	1,30150	1,64	1,59853	2,19	1,91460	2,74	2,24592
1,1	1,31630	1,65	1,60409	2,2	1,92044	2,75	2,25202
1,11	1,32110	1,66	1,60965	2,21	1,92644	2,76	2,25813
1,12	1,32592	1,67	1,61521	2,22	1,93244	2,77	2,26425
1,13	1,33078	1,68	1,62079	2,23	1,93843	2,78	2,27036
1,14	1,33566	1,69	1,62639	2,24	1,94444	2,79	2,27648
1,15	1,34058	1,7	1,63200	2,25	1,95044	2,8	2,28259
1,16	1,34550	1,71	1,63762	2,26	1,95638	2,81	2,28872
1,17	1,35043	1,72	1,64324	2,27	1,96232	2,82	2,29485
1,18	1,35537	1,73	1,64886	2,28	1,96827	2,83	2,30097
1,19	1,36033	1,74	1,65448	2,29	1,97423	2,84	2,30710
1,2	1,36533	1,75	1,66012	2,3	1,98019	2,85	2,31323
1,21	1,37055	1,76	1,66576	2,31	1,98615	2,86	2,31937
1,22	1,37530	1,77	1,67142	2,32	1,99211	2,87	2,32551
1,23	1,38043	1,78	1,67708	2,33	1,99809	2,88	2,33164
1,24	1,38547	1,79	1,68276	2,34	2,00407	2,89	2,33778
1,25	1,39051	1,8	1,68844	2,35	2,01005	2,9	2,34392
1,26	1,39550	1,81	1,69412	2,36	2,01603	2,91	2,35007
1,27	1,40078	1,82	1,69982	2,37	2,02201	2,92	2,35622
1,28	1,40580	1,83	1,70552	2,38	2,02800	2,93	2,36238
1,29	1,41092	1,84	1,71123	2,39	2,03400	2,94	2,36853
1,3	1,41608	1,85	1,71693	2,4	2,04000	2,95	2,37468
1,31	1,42125	1,86	1,72265	2,41	2,04601	2,96	2,38084
1,32	1,42643	1,87	1,72837	2,42	2,05202	2,97	2,38700
1,33	1,43162	1,88	1,73409	2,43	2,05802	2,98	2,39317
1,34	1,43682	1,89	1,73985	2,44	2,06403	2,99	2,39933
1,35	1,44202	1,9	1,74561	2,45	2,07005	3,0	2,40549
1,36	1,44722	1,91	1,75137	2,46	2,07608	3,01	2,41166
1,37	1,45246	1,92	1,75713	2,47	2,08211	3,02	2,41783
1,38	1,45772	1,93	1,76289	2,48	2,08813	3,03	2,42401
1,39	1,46300	1,94	1,76867	2,49	2,09416	3,04	2,43018
1,4	1,46831	1,95	1,77445	2,5	2,10018	3,05	2,43635
1,41	1,47363	1,96	1,78025	2,51	2,10622	3,06	2,44253
1,42	1,47895	1,97	1,78602	2,52	2,11227	3,07	2,44871
1,43	1,48427	1,98	1,79182	2,53	2,11831	3,08	2,45489
1,44	1,48959	1,99	1,79763	2,54	2,12436	3,09	2,46107
1,45	1,49491	2,0	1,80345	2,55	2,13040	3,1	2,46725
1,46	1,50027	2,01	1,80927	2,56	2,13646	3,11	2,47344
1,47	1,50563	2,02	1,81509	2,57	2,14251	3,12	2,47963
1,48	1,51101	2,03	1,82091	2,58	2,14857	3,13	2,48582
1,49	1,51641	2,04	1,82675	2,59	2,15463	3,14	2,49201
1,5	1,52182	2,05	1,83259	2,6	2,16069	3,15	2,49820
1,51	1,52723	2,06	1,83843	2,61	2,16676	3,16	2,50440
1,52	1,53265	2,07	1,84428	2,62	2,17284	3,17	2,51060
1,53	1,53809	2,08	1,85014	2,63	2,17891	3,18	2,51680
1,54	1,54353	2,09	1,85600	2,64	2,18499	3,19	2,52300
1,55	1,54898	2,1	1,86186	2,65	2,19106	3,2	2,52920

Digitized by Google

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ
3,21	2,53541	3,66	2,81620	4,11	3,09944	4,56	3,38444
3,22	2,54162	3,67	2,82247	4,12	3,10576	4,57	3,39079
3,23	2,54782	3,68	2,82875	4,13	3,11208	4,58	3,39714
3,24	2,55403	3,69	2,83502	4,14	3,11840	4,59	3,40349
3,25	2,56024	3,7	2,84129	4,15	3,12471	4,6	3,40984
3,26	2,56646	3,71	2,84757	4,16	3,13103	4,61	3,41620
3,27	2,57267	3,72	2,85385	4,17	3,13735	4,62	3,42255
3,28	2,57889	3,73	2,86012	4,18	3,14368	4,63	3,42890
3,29	2,58510	3,74	2,86640	4,19	3,15000	4,64	3,43526
3,3	2,59132	3,75	2,87268	4,2	3,15632	4,65	3,44161
3,31	2,59754	3,76	2,87896	4,21	3,16264	4,66	3,44797
3,32	2,60377	3,77	2,88525	4,22	3,16897	4,67	3,45432
3,33	2,61000	3,78	2,89153	4,23	3,17529	4,68	3,46068
3,34	2,61622	3,79	2,89782	4,24	3,18162	4,69	3,46704
3,35	2,62245	3,8	2,90410	4,25	3,18794	4,7	3,47339
3,36	2,62868	3,81	2,91039	4,26	3,19427	4,71	3,47975
3,37	2,63491	3,82	2,91668	4,27	3,20060	4,72	3,48611
3,38	2,64116	3,83	2,92297	4,28	3,20693	4,73	3,49247
3,39	2,64739	3,84	2,92925	4,29	3,21326	4,74	3,49882
3,4	2,65362	3,85	2,93554	4,3	3,21959	4,75	3,50518
3,41	2,65986	3,86	2,94183	4,31	3,22592	4,76	3,51154
3,42	2,66610	3,87	2,94813	4,32	3,23226	4,77	3,51790
3,43	2,67234	3,88	2,95442	4,33	3,23859	4,78	3,52427
3,44	2,67858	3,89	2,96072	4,34	3,24492	4,79	3,53063
3,45	2,68482	3,9	2,96701	4,35	3,25125	4,8	3,53699
3,46	2,69106	3,91	2,97331	4,36	3,25759	4,81	3,54335
3,47	2,69731	3,92	2,97961	4,37	3,26392	4,82	3,54972
3,48	2,70355	3,93	2,98591	4,38	3,27026	4,83	3,55608
3,49	2,70980	3,94	2,99220	4,39	3,27660	4,84	3,56245
3,5	2,71604	3,95	2,99850	4,4	3,28293	4,85	3,56881
3,51	2,72229	3,96	3,00480	4,41	3,28927	4,86	3,57518
3,52	2,72854	3,97	3,01111	4,42	3,29561	4,87	3,58155
3,53	2,73480	3,98	3,01741	4,43	3,30195	4,88	3,58792
3,54	2,74105	3,99	3,02372	4,44	3,30829	4,89	3,59428
3,55	2,74730	4,0	3,03002	4,45	3,31463	4,9	3,60065
3,56	2,75356	4,01	3,03633	4,46	3,32097	4,91	3,60702
3,57	2,75982	4,02	3,04264	4,47	3,32732	4,92	3,61339
3,58	2,76608	4,03	3,04894	4,48	3,33366	4,93	3,61976
3,59	2,77234	4,04	3,05525	4,49	3,34001	4,94	3,62613
3,6	2,77860	4,05	3,06156	4,5	3,34635	4,95	3,63250
3,61	2,78487	4,06	3,06787	4,51	3,35269	4,96	3,63887
3,62	2,79113	4,07	3,07419	4,52	3,35905	4,97	3,64525
3,63	2,79740	4,08	3,08050	4,53	3,36540	4,98	3,65162
3,64	2,80366	4,09	3,08682	4,54	3,37174	4,99	3,65800
3,65	2,80993	4,1	3,09313	4,55	3,37809	5,0	3,66437

Beispiel. Es sei $M_d = 21\,240$ cmkg, $M = 29\,500$ cmkg, $\alpha_0 = 1$.

Dann ist $$\frac{\alpha_0 M_d}{M} = 0{,}72;$$

dem entspricht nach der Tafel $\xi = 1{,}15099$.

Mithin ergibt sich $M_i = 1{,}15099 \cdot 29\,500 = 33\,954{,}5$ cmkg.

2. Elliptischer Querschnitt (Abb. 67). Das Biegungsmoment M werde zerlegt in M_1 mit der Achse 1 und M_2 mit der Achse 2.

Digitized by Google

Die genaue Ermittlung der gröfsten Hauptspannung ist umständlich. Zur Querschnittbestimmung genügt es indessen, h und b aus den beiden Gleichungen zu berechnen:

Abb. 67.

$$\frac{\pi}{32} b h^2 k_b \geqq M_i' = 0{,}35\, M_1 + 0{,}65 \sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\frac{\pi}{32} b^2 h k_b \geqq M_i'' = 0{,}35\, M_2 + 0{,}65 \sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

worin $\alpha_0 = k_b : 1{,}3\, k_d$.

Zur Ermittlung von M_i' und M_i'' kann die Tafel der Werte ξ auf S. 585 ff. dienen.

Für $M_1 = 0$ tritt die gröfste Spannung in den Endpunkten der Achse b ein; in allen übrigen Fällen findet sich die gröfste Spannung in einem Umfangspunkte zwischen 1 und 2, Abb. 67.

3. **Rechteckquerschnitt** (Abb. 68). M_1 und M_2 haben dieselbe Bedeutung wie vorstehend unter 2; es gilt hier

Abb. 68.

$$\tfrac{1}{6} b h^2 k_b \geqq M_i' = 0{,}35\, M_1 + 0{,}65 \sqrt{M_1^2 + (\tfrac{3}{2} \alpha_0 M_d)^2},$$

$$\tfrac{1}{6} b^2 h k_b \geqq M_i'' = 0{,}35\, M_2 + 0{,}65 \sqrt{M_2^2 + (\tfrac{3}{2} \alpha_0 M_d)^2}.$$

Zur Ermittlung von M_i' und M_i'' kann die Tafel der Werte ξ auf S. 585 ff. dienen.

Nachzurechnen ist, ob

$$\frac{M_1}{\frac{1}{6} b h^2} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} b^2 h} \lessgtr k_b \text{ (S. 528).}$$

Für die gröfste Spannung gilt das unter 2. Gesagte.

III. Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe.

A. Normalspannungen.

Die Mittellinie des Stabes sei eine ebene Kurve, ihre Ebene der geometrische Ort der Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie der Richtungslinien der äufseren Kräfte. Diese mögen für den betrachteten Querschnitt QQ eine Normalkraft und ein Biegungsmoment ergeben.

Es bezeichnet (Abb. 69)

P die Normalkraft im Schwerpunkte S des Querschnitts, in kg; positiv oder negativ, je nachdem sie als Zug oder Druck wirkt,

M das Biegungsmoment in cmkg; positiv oder negativ, je nachdem es die Krümmung verstärkt oder abschwächt,

F den Querschnitt des Stabes in qcm,

r den ursprünglichen Krümmungshalbmesser der Stab-Mittellinie im Schwerpunkte von QQ in cm,

ϱ denselben unter der Wirkung von P und M in cm,

Digitized by Google

σ die Normalspannung in kg/qcm, die durch P und M im Abstande y von der winkelrecht zur Mittelebene stehenden Hauptachse von QQ erzeugt wird; dabei ist y positiv oder negativ, je nachdem der Abstand vom Schwerpunkte S aus vom Krümmungspunkte O weg oder nach diesem hin zu messen ist,
E das Elastizitätsmafs in kg/qcm.

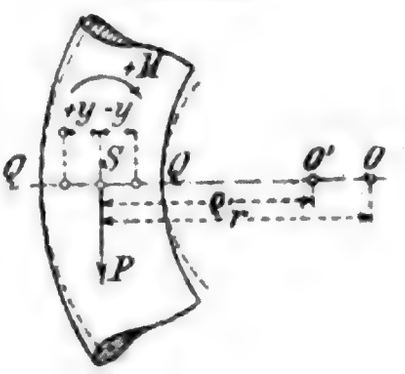
Dann ist die **Normalspannung**

$$\sigma = \left(P + \frac{M}{r}\right)\frac{1}{F} + \frac{My}{\varkappa F r\,(r+y)},$$

worin $$\varkappa = -\frac{1}{F}\int \frac{y\,dF}{r+y},$$

also ein nur von Querschnitt und Krümmung abhängiger Wert ist.*) Das Integral erstreckt sich über den ganzen Querschnitt.

Abb. 69.



Setzt man $$-r^2\int \frac{y\,dF}{r+y} = \varkappa F r^2 = J_0,$$

so ergibt sich auch $$\sigma = \left(P + \frac{M}{r}\right)\frac{1}{F} + \frac{Mr}{J_0}\,\frac{y}{r+y}.$$

Die Spannungen wachsen also nicht, wie bei dem geraden Stabe, proportional dem Abstande der Fasern von der Schwerachse.

Ist der Krümmungshalbmesser r gegenüber y sehr grofs, so wird $J_0 = J$, d. i. gleich dem äquatorialen Trägheitsmomente des Querschnittes (in cm^4), bezogen auf die Schwerachse S winkelrecht zu QQ.

Die Spannung σ ist null, wenn

$$y = -\left(1 + \frac{Pr}{M}\right)\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,r;$$

die **Nullinie** geht also bei krummen Stäben nur dann durch den Schwerpunkt S des Querschnittes, wenn $1 + \frac{Pr}{M} = 0$ oder $M = -Pr$, d. h. wenn der Querschnitt durch eine Einzellast beansprucht wird, die durch den Krümmungsmittelpunkt O geht und winkelrecht zum Querschnitte gerichtet ist.

Schubspannung. Durch eine aufser P und M vorhandene Schubkraft Q entstehen Schubspannungen τ, die sich nach der Formel für τ auf S. 520 ermitteln, wenn dort $\varkappa F(r \pm y)^2$ statt J gesetzt wird.

Krümmungshalbmesser ϱ. Angenähert ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\varkappa F r^2}$, worin $\varkappa F r^2 = J_0$ und, wenn r gegenüber y sehr grofs ist, statt J_0 J zu setzen ist.

Bei grofsem r berechnen sich also Spannung σ und Aenderung der Krümmung nahezu wie bei geraden Stäben.

---

*) Ueber die Bedeutung und zeichnerische Bestimmung von $\varkappa$ s. Bantlin, Z. d. V. d. I. 1901 S. 164. Ueber die Berechnung von σ mit Berücksichtigung der durch die Querkräfte erzeugten Normalspannungen und Formänderungen s. C. Pfleiderer, Z. d. V. d. I. 1907 S. 209.

Digitized by Google

Wert $\varkappa = \frac{J_0}{F r^2}$ für verschiedene Querschnitte:

Für das **Rechteck** (Höhe $h = 2e$ in Richtung von y gemessen) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{r}{h} \ln \frac{2r+h}{2r-h} = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots$$

Für den **Kreis** (Halbmesser e) und die **Ellipse** (Halbachse in der Stabebene $= e$) ist

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots.$$

Für das symmetrische **Trapez** (Parallelseiten b_1 und b_2, wobei $b_2 < b_1$, Höhe h, Schwerpunkt-Abstände von b_1 und b_2 e_1 und e_2) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{(b_1+b_2)\,h}\left\{\left[b_2 + \frac{b_1-b_2}{h}(e_2+r)\right]\ln\frac{r+e_2}{r-e_1} - (b_1-b_2)\right\}$$

Für das gleichschenklige **Dreieck** (Grundlinie b, Höhe h) ist

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{h}\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{r}{h}\right)\ln\frac{r+{}^2/_3 h}{r-{}^1/_3 h} - 1\right].$$

Nach C. Pfleiderer*) ergeben sich näherungsweise die **Randspannungen** σ_a, σ_i des Querschnittes $Q\,Q$ (Abb. 69) aus

$$\sigma_a = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}(1-m_a), \qquad \sigma_i = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}(1+m_i),$$

σ_a liegt vom Krümmungsmittelpunkt des Stabes am weitesten, σ_i am nächsten; W bezeichnet das Widerstandsmoment des Querschnittes für die entsprechende Querschnittseite. m_a und m_i sind aus folgender Tafel (Bezeichnungen wie oben) zu entnehmen:

Querschnitt	m_a	m_i
Kreis und Ellipse	$\dfrac{0{,}6}{\frac{r}{e}+0{,}2}$	$\dfrac{0{,}6}{\frac{r}{e}-0{,}88}$
Trapez, gleichschenkliges. $e_2 : e_1 = \varepsilon > 1$	$\dfrac{0{,}6\,\varepsilon - 0{,}14}{\frac{r}{e_1}+(\varepsilon-1)(13-4\varepsilon)\,0{,}16}$	$\dfrac{0{,}2\,\varepsilon+0{,}3}{\frac{r}{e_1}-0{,}9+0{,}06\,\varepsilon}$
Rechteck. $\varepsilon = 1 \cdot e_1 = e_2 = {}^1/_2 h$	$\dfrac{0{,}23}{\frac{r}{h}}$	$\dfrac{0{,}25}{\frac{r}{h}-0{,}45}$
Dreieck, gleichschenkliges. $\varepsilon = 2 \cdot 2e_1 = e_2 = {}^2/_3 h$	$\dfrac{1{,}06}{\frac{3r}{h}+0{,}8}$	$\dfrac{0{,}7}{\frac{3r}{h}-0{,}78}$

Ueber ein Verfahren von R Baumann zur Bestimmung der **Formänderung** einfach gekrümmter Stäbe s. Z. d. V. d. I. 1910 S. 1675; über die Formänderung krummer Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre A. Bantlin, Z. d. V. d. I. 1910 S. 45; ferner Th. v. Kármán, Z. d. V. d. I. 1911 S. 1889; H. Lorenz, Dingler Pol. J. 1912 S. 577.

*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1507.

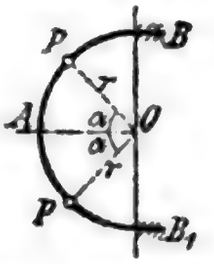
Digitized by Google

B. Normal- und Schubspannungen.*)

Die Mittellinie des Stabes sei eine Halbkreislinie BAB_1 (Abb. 70) in wagerechter Ebene, an den Endpunkten B und B_1 des Durchmessers BB_1 fest eingespannt; die lotrechte Belastung erfolge unmittelbar auf der Mittellinie des Stabes (**Balkonträger**).

In jedem Stabquerschnitte tritt dann ein Biegungsmoment M_b und ein Drehmoment M_d auf.

Abb. 70.



1. Belastung durch zwei symmetrisch angreifende Einzellasten. (Abb. 70.)

Bezeichnet

P jede der beiden Einzellasten in kg,

r den Halbmesser der Stab-Mittellinie in cm,

α den die Lage der Einzelkräfte in bezug auf die Symmetrielinie OA bestimmenden Zentriwinkel,

so ist im Punkte A

das Biegungsmoment $M_{b\,(a)} = \frac{2}{\pi} Pr \left[\cos\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha\right]$,

das Drehmoment $M_{d\,(a)} = 0$;

in den Punkten B und B_1

das Biegungsmoment $M_{b\,(b)} = Pr\cos\alpha$,

das Drehmoment $M_{d\,(b)} = \frac{2}{\pi} Pr \left[\frac{\pi}{2} - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha\right]$.

Zur Berechnung des Querschnittes sind M_b und M_d (in cmkg) nach S. 585 zu einem M_i zusammenzusetzen. $M_{i\,\max}$ in B und B_1.

Für den I-förmigen Querschnitt ist annähernd $W_b = W_d$; das erforderliche W_b ist nahezu

$$W_b = 1{,}12\,\frac{Pr\cos\alpha}{k_b}\ \text{cm}^3,$$

also um 12% größer als ohne Rücksicht auf das Drehmoment.

2. Gleichförmig verteilte Belastung. (Abb. 71.)

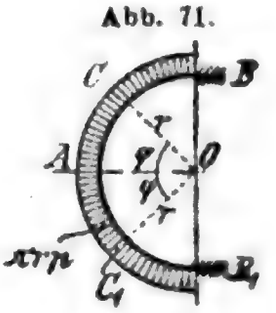
Bezeichnet

p die Belastung auf 1 cm Länge des Stabes in kg,

r den Halbmesser der Stab-Mittellinie in cm,

so ist für einen beliebigen Punkt C (und C_1), entsprechend dem Zentriwinkel φ,

Abb. 71.



das Biegungsmoment $M_b = pr^2\left(1 - \frac{4}{\pi}\cos\varphi\right)$,

das Drehmoment $M_d = pr^2\left(\varphi - \frac{4}{\pi}\sin\varphi\right)$.

Für $\varphi = 0$ ist $M_{b\,(a)} = pr^2\left(1 - \frac{4}{\pi}\right)$; $\qquad M_{d\,(a)} = 0$.

*) Nach M. Koenen, Deutsche Bauz. 1885 S. 607.

Digitized by Google

Für $\varphi = 90^0$ ist $M_{b\,(b)} = M_{max} = pr^2$;

$$M_{d\,(b)} = pr^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) = 0{,}32\,pr^2 \text{ (als absolutes Maximum).}$$

Für $\varphi = 38^0\,14'$ ergibt sich $M_{d\,(min)} = -0{,}12\,pr^2$, für $\varphi = 65^0$ wiederum $M_d = 0$.

Gröfste Beanspruchung bei B und B_1. Zur Berechnung des Querschnittes sind M_b und M_d nach S. 585 zu einem M_i zusammenzusetzen.

Für den I-förmigen Querschnitt (vgl. 1.) ist annähernd das erforderliche

$$W_b = 1{,}12\,\frac{p\,r^2}{k_b}\ \text{cm}^3.$$

3. Für **andere** Belastungsfälle können mit Hülfe von **1.** und **2.** die Werte von M_b und M_d ermittelt werden.

IV. Festigkeit der Federn.

Allgemeines.

Federn werden als vollkommen elastisch (innerhalb der Elastizitätsgrenze σ_e beansprucht) und dem Hookeschen Gesetze folgend (innerhalb der Proportionalitätsgrenze σ_p beansprucht) vorausgesetzt.

Es bedeutet

P die zulässige Belastung (Tragfähigkeit) der Feder in kg,
f die Durchbiegung, entsprechend der Belastung P oder der zulässigen Spannung k_b oder k_d in cm,
l die Länge der Feder in cm,
n die Anzahl der Blätter oder der Windungen,
V den Rauminhalt der Feder in ccm,
k_b die zulässige Spannung für Biegung in kg/qcm,
k_d die zulässige Spannung für die Drehung in kg/qcm.

Die Gröfsen E und G S. 482 u. 485; die übrigen Bezeichnungen (in cm) sind aus den Abbildungen zu entnehmen.

Die **Arbeit** in cmkg, die von einer Feder bei ihrer Durchbiegung von null bis f aufgenommen wird (die sog. „Federungsarbeit"), ist

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{c}\,\frac{k_b^2}{E}\,V \text{ (S. 484).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Kraft P, proportional der Durchbiegung der Feder, stetig von null bis P gewachsen ist. c bedeutet einen Wert, der nur von der Form der Feder abhängt; er gibt das Verhältnis der Rauminhalte (des Stoffverbrauches) bei verschiedenen Federn gleichen Stoffes an, die bei gleicher Arbeit die gleiche Beanspruchung erfahren. — Federn gleicher Grundform und gleichen Stoffes haben daher bei gleicher Beanspruchung und gleicher Federungsarbeit gleiches Gewicht.

Digitized by Google

Die **Schwingungszeit** T (in sk) einer (gewichtlos gedachten) Feder ist gleich der eines einfachen Kreispendels, dessen Länge gleich ist der durch die Belastung P erzeugten Durchbiegung f (in m):

$$T = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \quad \text{(S. 189)}.$$

a. Biegungsfedern.

1. Gerade Biegungsfedern.

[Fall 1 S. 546. Tafel für $\frac{1}{6} b h^2$ und $\frac{1}{12} b h^3$ S. 542 ff.]

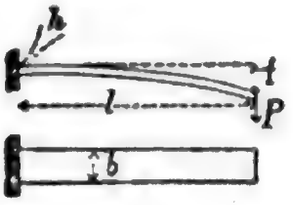
α) Rechteckfeder (Abb. 72).

$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{3} = 4 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{18} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Abb. 72.



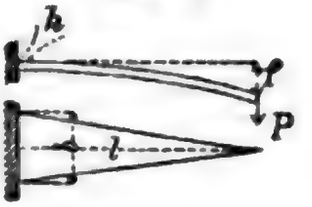
β) Dreieckfeder (Abb. 73). Sie bildet einen Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (S. 526 u. 561). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (S. 533).

$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{2} = 6 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Abb. 73.



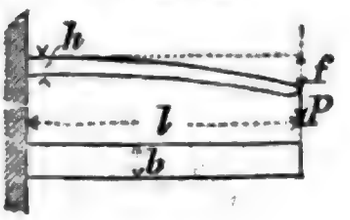
γ) Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschärft (Abb. 74). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (S. 533).

$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{2} = 6 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{9} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Abb. 74.



2. Zusammengesetzte Biegungsfedern.

Legt man mehrere der unter **1.** genannten Blattfedern aufeinander, so erhält man ein **Blattfederwerk**. Hauptbedingungen für ein gutes Blattfederwerk sind:

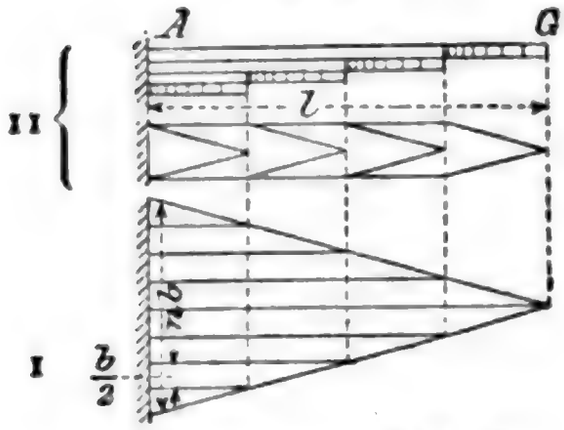
Digitized by Google

1) dafs es möglichst einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung bilde,

2) dafs es bei der Biegung nicht klaffe, d. h., dafs sich die Blätter nicht voneinander entfernen; die elastische Linie mufs daher ein Kreisbogen sein.

Wie aus dem unter **1.** Gesagten hervorgeht, erfüllt nur das erste der folgenden Federwerke diese beiden Bedingungen; die anderen Federwerke erfüllen nur die Bedingung 2).

Abb. 75.

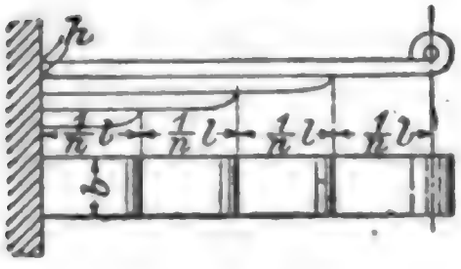


α) **Geschichtete Dreieckfeder.** Wenn man die Dreieckfeder (Abb. 75 I) in eine gerade Anzahl $2n$ gleich breiter Streifen (hier acht Streifen von der Breite $^1/_2 b$) zerschnitten denkt und die Streifen so zusammenfügt, dafs sie den Körper Abb. 75 II bilden, so erhält man ein zweckmäfsiges Blattfederwerk, das dieselbe Tragfähigkeit hat, wie die Dreieckfeder von der Fufsbreite nb, wobei n die Anzahl der Blätter (der Lagen) bezeichnet. Es ist also

$$P = n \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \quad \text{mithin } n = \frac{Pl}{^1/_6 b h^2 k_b}.$$

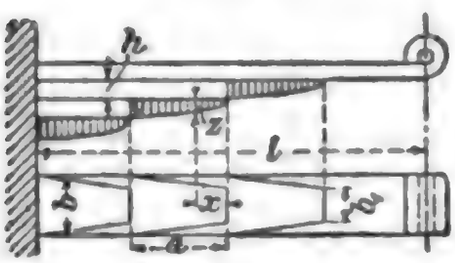
β) **Geschichtete Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschärft.** Anstatt die Enden der einzelnen Federlagen dreieckig zu machen, schärft man sie nach der kubischen Parabel (S. 103 und oben, unter 1. *γ*) zu, so dafs die Lagen überall gleiche Breite haben (Abb. 76).

Abb. 76.



γ) **Trapezfeder mit Zuschärfung.** Die Enden der einzelnen Federlagen sind trapezförmig. Dabei mufs aufserdem eine Zuschärfung eintreten, die sich aus folgender Formel (Bezeichnungen Abb. 77) ergibt:

Abb. 77.



$$s = \frac{h}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_1}{b}\left(\frac{a}{x} - 1\right)}}.$$

δ) In der Regel sind zwei Federwerke von einer der betrachteten Formen durch den Federbund vereinigt; sie erhalten hierbei im unbelasteten Zustande eine **kreisförmige Krümmung** mit dem Pfeil p_0 (in cm). Durch die am Federbunde angreifende (ruhende) Belastung $2P$ (in kg) verringert sich der Pfeil p_0 auf p (in cm); die Durchbiegung des Federwerkes ist mithin (in cm): $f = p_0 - p$.

Digitized by Google

Tragfedern der Eisenbahnfahrzeuge.

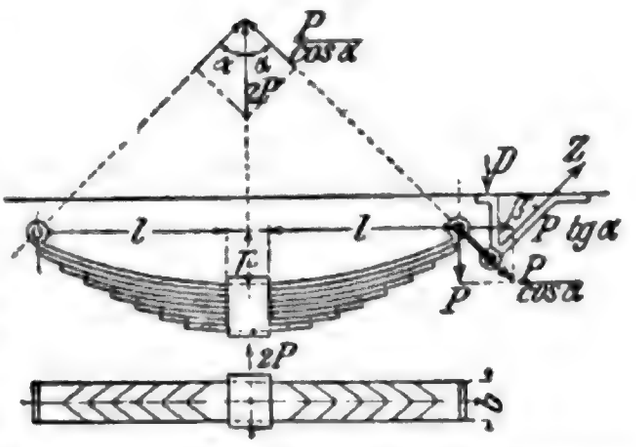
Die am Federbunde angreifende Last $2P$ (in kg) ergibt in den geneigten Gehängen je eine Zugkraft $P:\cos\alpha$; diese zerlegt sich in die lotrechte Kraft P und die wagerechte Kraft $P\operatorname{tg}\alpha$, die zusammen ein Biegungsmoment $M = P(l + p\operatorname{tg}\alpha)$ hervorrufen (Abb. 78, achtlagige preufs. Normalfeder für Güterwagen). Da die unter 2, α angegebenen Gleichungen auch für gekrümmte Federn anwendbar sind, so ist mit den Bezeichnungen von S. 592

die Tragkraft $2P = 2n\,\frac{bh^2}{6}\,\frac{k_b}{l + p\operatorname{tg}\alpha}$

und die Durchbiegung

$$f = 6\,\frac{r}{n\,b\,h^3}\,\frac{P(l + p\operatorname{tg}\alpha)}{E} = \frac{r}{h}\,\frac{k_b}{E}.$$

Abb. 78.



Für p kann hierin angenähert p_0 gesetzt werden (genau $p = p_0 - f$).

Die oberste Federlage hat aufser der Biegungsspannung die Zugkraft $P\operatorname{tg}\alpha$ sowie die Querkraft P aufzunehmen, die dort eine zusätzliche Normalspannung $\sigma = P\operatorname{tg}\alpha : bh$ bzw. eine Schubspannung τ erzeugen, die nach S. 520 zu ermitteln ist.

Bei der Bestimmung der Anzahl n der Federlagen für ein vorhandenes Federblatt ist auf die durch die Federschwingungen während der Fahrt hervorgerufene Mehrbelastung der Feder Rücksicht zu nehmen. Es empfiehlt sich hierfür (zumal, wenn der Einfluss der Spannungen σ und τ unbeachtet bleiben soll) in der vorstehenden Formel für die Tragkraft $2P$ (ruhende Belastung) k_b niedrig zu wählen (S. 504).

Federbock (Abb. 78). Ist D die Druckkraft in der Stütze und Z die Zugkraft in der Strebe, so ergibt sich

$$D = P(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) \text{ und } Z = \frac{P\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}.$$

8. Gewundene Biegungsfedern.

[Tafel für $\frac{1}{6}bh^2$ und $\frac{1}{12}bh^3$ S. 542 ff.; Tafel für $\frac{1}{32}\pi d^3$ und $\frac{1}{64}\pi d^4$ S. 539.]

Die Belastung dieser Federn besteht in einem reinen Kräftepaar Pr $\left(\text{oder } \frac{P}{2}\cdot 2r\right)$, mit dem die in der Federmitte oder -achse liegende Spindel beim Aufziehen der Feder gedreht oder nach dem Aufziehen festgehalten wird.

Das setzt voraus, dafs auch das äufsere Ende der Feder eingespannt ist. Es kommt dann das Moment der Einspannstelle für die Berechnung in Betracht, und dieses gilt für alle Federquerschnitte bis zur äufsersten Einspannstelle hin als Biegungsmoment (Abb. 79 u. 81).

Abb. 79.
(Feder gestreckt.)

Abb. 80.

Ist dagegen das äufsere Federende gelenkig befestigt, so dafs dort nur die reine Zugkraft P ausgeübt werden kann, so liegt der gefährliche Querschnitt in der äufsersten Windung dem Angriffpunkte von P gegenüber, und das der Berechnung zugrundezulegende Biegungsmoment ist dann nicht Pr, sondern $= Pa \sim P.2r$. In diesem Falle (Abb. 80) wachsen die Biegungsbeanspruchungen der einzelnen Federquerschnitte für die Spiralfeder von 0 bis auf den doppelten des auf S. 596 angegebenen günstigsten Wertes, der bei einem reinen Kräftepaar Pr eintritt. In diesem Falle gelten natürlich auch die angegebenen Werte für f und A nicht; f hat vielmehr nur den halben Formelwert, A $^1/_4$ des Formelwertes.*)

*) A. Föppl, Vorles. über techn. Mechanik. 1905, Bd. III, Festigkeitslehre.

Digitized by Google

In der Praxis ist es erwünscht, den ersten Fall auszuführen, was wohl möglich erscheint.

l ist die Länge der gestreckt gedachten Feder.

Beide Federenden in den Fällen α bis γ fest eingespannt.

α) Spiralfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 81).*)

Abb. 81.

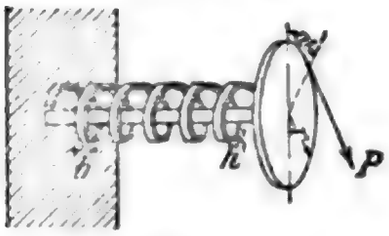
$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

β) Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 82).

Abb. 82.



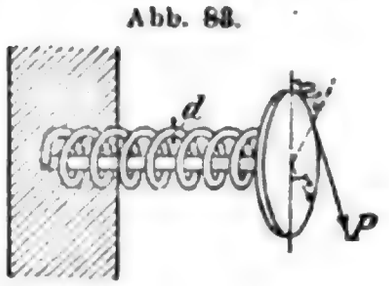
$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{b h^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

γ) Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte (Abb. 83).

Abb. 83.



$$P = \frac{\pi d^3}{32} \frac{k_b}{r}; \qquad J = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} l r^2 = \frac{64}{\pi} \frac{P l r^2}{E d^4} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_b}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8} \frac{k_b^2}{E} V.$$

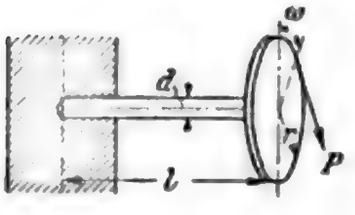
b. Drehungsfedern.

1. Gerade Drehungsfedern.

Beanspruchung ausschließlich durch das Kräftepaar Pr.

α) Gerade Drehungsfeder mit kreisförmigem Querschnitte (Abb. 84).

Abb. 84.



$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{k_d}{r} = 0{,}1963 \frac{d^3}{r} k_d;$$

$$f = r\omega = \frac{32 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} V.$$

*) Theorie der Bourdonfeder, insbesondere auch der von elliptischem Querschnitte H. Lorenz, Z. d. V. d. I. 1910 S. 1863.

Digitized by Google

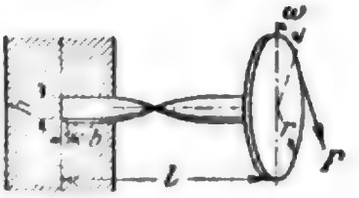
β) Gerade Drehungsfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 85). Es bezeichnet ξ das Verhältnis $b:h$.

$$P=\frac{2}{9}\,b^2h\,\frac{k_d}{r};$$

$$f=r\omega=3{,}6\,r^2l\,\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\,\frac{P}{G}=0{,}8\,rl\,\frac{b^2+h^2}{bh^3}\,\frac{k_d}{G};$$

$$A=\frac{Pf}{2}=\frac{4}{45}\,(\xi^2+1)\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

Abb. 85.



Für den quadratischen Querschnitt ($\xi=1$) ist A am größten.

2. Gewundene Drehungsfedern.

In den Abb. 86 bis 89 bedeutet r den mittleren Halbmesser, dieses Maß reicht also bis zur Mitte des Federquerschnittes. n ist die Anzahl der Windungen.

α) Zylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte*) (Abb. 86).

$$P=\frac{\pi d^3}{16}\,\frac{k_d}{r}=0{,}1963\,\frac{d^3}{r}\,k_d;$$

$$f=\frac{64\,nr^3}{d^4}\,\frac{P}{G}=\frac{4\pi nr^3}{d}\,\frac{k_d}{G};$$

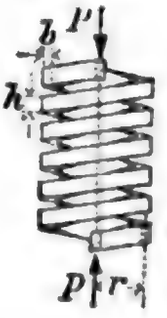
$$A=\frac{Pf}{2}=\frac{1}{4}\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

Abb. 86.

β) Zylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 87). $\xi<1$ bezeichnet das Verhältnis $b:h$.

b ist also stets die kleinere Rechteckseite, gleichgiltig, ob sie $\perp$ oder $\parallel$ zur Achse liegt.

Abb. 87.



$$P=\frac{2}{9}\,b^2h\,\frac{k_d}{r};$$

$$f=7{,}2\,\pi nr^3\,\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}\,\frac{P}{G}=1{,}6\,\pi nr^3\,\frac{b^2+h^2}{bh^3}\,\frac{k_d}{G};$$

$$A=\frac{Pf}{2}=\frac{4}{45}\,(\xi^2+1)\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ($\xi=1$) ist A am größten.

Nach Versuchen von C. Bach mit vorzüglichem gehärteten Federstahl von $G=840000$ und $K_d=14000$ ist in der ersten Formel für f statt des Faktors 7,2 der allgemeinere Wert

$$\psi=8{,}35-0{,}3\,\frac{h}{b}$$

zu setzen, sofern $h:b=1$ bis 6 und h (bei den Versuchsfedern senkrecht zur Achse liegend) $<0{,}6\,r$ ist (S. 571, Fußnote). Dementsprechend ist dann statt 1,6 der Wert $^8/_9\,\psi$ und (in der Formel für A) statt $^4/_{45}$ der Wert $^1/_{11}\,\psi$ zu setzen.

---

*) Eine Tafel der Tragfähigkeit und Durchbiegung dieser Feder findet sich Z. d. V. d. I. 1891 S. 1398, wobei $k_d=4500$ kg/qcm (für guten, gehärteten Federstahl bei nicht wesentlich veränderlicher Belastung) und $G=750000$ kg/qcm angenommen ist. — Ueber den Einfluß der Steigung der Schraube auf P s. Röver, Z. d. V. d. I. 1913 S. 1906. Hiernach erhält der Ausdruck für P den Abminderungsfaktor $\left(1-\frac{d}{2r}\right)$.

γ) Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitte*) (Abb. 88.)

l ist die Länge der gestreckt gedachten Feder, d der Durchmesser des Federquerschnittes. r nimmt stetig bis auf null ab.

Abb. 88.

$$P = \frac{\pi d^3}{16}\frac{k_d}{r} = 0{,}1963\,\frac{d^3}{r}\,k_d;$$

$$f = \frac{16}{\pi}\frac{r^2 l}{d^4}\frac{P}{G} = 16\,n\,\frac{r^3}{d^4}\frac{P}{G}$$

$$= \frac{r l}{d}\frac{k_d}{G} = \pi n\,\frac{r^2}{d}\frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8}\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

δ) Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 89). $\xi < 1 = b:h$.

Abb. 89.

$$P = \frac{2}{9}\frac{b^3 h}{r}\,k_d;$$

$$f = 1{,}8\,r^3 l\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G} = 1{,}8\,\pi n r^3\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G}$$

$$= 0{,}4\,r\,l\,\frac{b^2+h^2}{b\,h^3}\frac{k_d}{G} = 0{,}4\,\pi n r^3\,\frac{b^2+h^2}{b\,h^3}\frac{k_d}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{2}{45}(\xi^3+1)\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ($\xi = 1$) ist A am größten.

Hinsichtlich der Seite b und der Koeffizienten 1,8, 0,4 und $^2/_{45}$ gilt Entsprechendes, wie das unter β. auf S. 597 Gesagte. Statt 1,8 ist z. B. allgemeiner $^1/_6\,\psi$ zu setzen.

ε) **Kegelstumpffeder gemäfs γ) oder δ)** mit den Halbmessern r und r_0, wobei $r > r_0$. Es gelten die unter γ) und δ) für die Tragfähigkeit P gegebenen Formeln gleichfalls; für die Ermittlung der Durchbiegung f ist (in den ersten und zweiten Ausdrücken von f) statt r^2 zu setzen $r^2 + r_0^2$ und statt l oder $\pi n r$ zu setzen $\pi n\,(r + r_0)$.

Bemerkung: Die Formeln für die gewundenen Biegungsfedern (s. 3) und für die Drehungsfedern gelten mit hinreichender Annäherung nur dann, wenn die Querschnittmafse klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie und bei kleiner Ganghöhe der Schraubenlinie.

Kegelstumpffedern der Westfälischen Stahlwerke zu Bochum.

Nr.	Gesamthöhe der Feder belastet H_1 mm	Gesamthöhe der Feder unbelastet H mm	Durchmesser kleinster innerer $2r_0 - b$ mm	Durchmesser gröfster äufserer $2r + b$ mm	Querschnitts- breite h mm	Querschnitts- dicke b mm	Gröfste Belastung P kg	Gewicht kg
1	145	210	50	170	140	13	9000	20
2	170	310	95	265	155	15	7000	45
3	180	240	54	180	145	12	6000	19,5
4	205	265	52,5	170	180	10	6000	19,8
5	160	225	54	157	145	20	5400	15,5

*) Ausführliche Berechnung der Kegelfedern s. V. Meyer, Z. d. V. d. I. 1900 S. 1791

Digitized by Google

Nr.	Gesamthöhe der Feder belastet H_1 mm	Gesamthöhe der Feder unbelastet H mm	Durchmesser kleinster innerer $2r_0 - b$ mm	Durchmesser gröfster äufserer $2r + b$ mm	Querschnitts- breite h mm	Querschnitts- dicke b mm	Gröfste Belastung P kg	Gewicht kg
6	180	240	56	165	145	10	5000	17,2
7	160	230	54	165	145	10	5000	17
8	170	240	74	180	160	10	5000	19,5
9	165	255	53	165	152	8,5	5000	17,5
10	160	230	62	175	145	10	4800	17
11	160	270	60	180	145	10	4600	21
12	65	112	55	185	60	15	4500	9,8
13	145	230	45	140	130	9	4500	11
14	125	200	45	128	120	8	4500	8,5
15	145	230	55	148	130	8,5	4500	12,5
16	205	270	54	145	155	8	4000	13,5
17	140	220	53	165	130	9,5	4000	14
18	140	193	50	140	110	9	3600	7,8
19	190	245	57	152	127	9	3500	11,5
20	75	102	62	165	70	15	3500	8,5
21	165	255	48	145	160	7,25	3500	14,8
22	105	185	52	190	80	12	3500	13
23	100	185	50	164	95	10	3500	12,5
24	155	250	54	160	145	7,5	3500	15,3
25	150	260	52	144	140	7	3500	12
26	150	235	46	134	134	7	3400	10,2
27	120	140	18	70	105	6	3300	2,5
28	180	225	43	125	130	7,5	3200	9
29	140	240	58	157	135	7,5	3200	12
30	155	220	53	146	120	8	3000	12,2
31	75	155	55	194	70	12	3000	11
32	65	125	86	180	55	13	3000	7,2
33	110	245	62	173	100	8	3000	13
34	160	250	54	154	150	7	3000	14
35	135	250	84	165	130	7,5	3000	10,5
36	100	180	50	178	95	10	2800	11,5
37	90	185	44	180	80	10,5	2800	10,5
38	95	195	50	215	90	12	2800	18,5
39	165	273	54	150	160	6,8	2750	15
40	100	175	58	150	88	8	2700	7,8
41	110	187	43	135	100	8	2700	7,8
42	105	200	80	200	95	10	2600	14,5
43	155	240	52,5	152,5	146	7	2600	13,3
44	185	330	57	180	145	7,5	2600	25,58
45	145	240	82	165	130	7,5	2500	12,8
46	75	182	65	213	70	11,7	2500	14,5
47	120	195	54	160	110	8	2500	11,4
48	125	160	38	110	100	7	2500	5,5
49	180	240	50	132	130	6,75	2500	9,6
50	150	242	54	130	130	6	2500	10
51	165	255	53	150	130	7	2400	12,4
52	135	240	60	126	130	6	2400	8
53	120	185	54	160	105	8	2200	12
54	185	327	52	164	145	6,5	2100	16,5
55	137	265	60	145	130	6	2000	11

Digitized by Google

Nr.	Gesamthöhe der Feder belastet H_1 mm	Gesamthöhe der Feder unbelastet H mm	Durchmesser kleinster innerer $2r_0 - b$ mm	Durchmesser größter äußerer $2r + b$ mm	Querschnitts- breite h mm	Querschnitts- dicke b mm	Größte Belastung P kg	Gewicht kg
56	130	220	38	120	90	6	2000	5,5
57	135	215	52	132	120	6	1900	7,3
58	165	296	51	149	162	5,5	1800	18
59	75	100	30	85	70	6	1750	2
60	110	195	47	140	105	6	1750	8
61	140	200	52	120	100	6	1700	6,3
62	140	220	55	132	130	6	1500	9
63	115	160	35	93	70	6	1500	3,3
64	70	125	56	137	45	9	1500	3
65	85	183	38	170	75	8	1500	9
66	155	195	30	100	110	5	1500	4,5
67	60	79	48	114	55	7	1200	2,2
68	54	100	53	90	52	4,5	700	1
69	120	158	25	80	115	3	700	2,12
70	80	120	27	70	75	3	550	1,4
71	16	30	32	70	14	4	80	0,25

Für diese 71 Nummern sind Wickeldorne vorrätig.

V. Festigkeit der Platten und Gefäfse.

(Bei Benutzung sämtlicher Gleichungen
ist die Schlufsbemerkung auf S. 609 zu beachten.)

a. Ebene Platten.

Es bezeichnet

s die Dicke der Platte in cm,

f ihre Durchbiegung in der Mitte in cm,

σ_{max} die gröfste in der Platte auftretende Normalspannung in kg/qcm,

k_b die zulässige Biegungsspannung des Stoffes in kg/qcm,

E das Elastizitätsmafs in kg/qcm.

Ferner seien φ und ψ Zahlen, die von F. Grashof*) für die beiden Grenzfälle

a) die Platte liegt am Umfange frei, also unabgedichtet auf,

b) die Platte ist am Umfange fest eingespannt,

---

*) F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit; Berlin 1878.
Eine genauere Theorie der dicken Platten, insbesondere der Betonplatten, mit brauchbaren Ergebnissen, ermittelt mit Hilfe einfach unendlicher Reihen, findet sich in H. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen (und Kreis-) Platten. 1913, R. Oldenbourg. Vgl. ferner A. Danusso u. H. v. Bronneck, Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten usw., 1913, Wilh. Ernst & Sohn. Für dünne Behälterböden s. besonders: Ph. Forchheimer, Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden, Z. f. B. 1894 S. 45 ff. Als erweiterter Sonderdruck in 2. Aufl. Berlin 1909. Wilhelm Ernst & Sohn.

Digitized by Google

rechnerisch bestimmt worden sind, nach Versuchen von C. Bach*) aber aufser von der Befestigungsweise der Platte am Umfange noch von der Gröfse der Kraft abhängen, mit der die Platte zum Zwecke der Abdichtung gegenüber der Druckflüssigkeit angepreßt wird, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Platte da, wo sie die Dichtung berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagerstelle stützt, usw.

Die Fälle 3. und 6. sind nach F. Grashof, die übrigen sämtlich nach C. Bach angegeben.

1. Kreisförmige Platte, durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäfsig belastet** (Abb. 90 u. 91).

$$\sigma_{max} = \varphi \frac{r^2}{s^2} p \leqq k_b;$$

$$f = \psi \frac{r^4}{s^3} \frac{p}{E}.$$

Abb. 90.

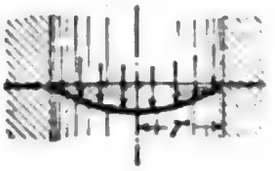


Abb. 91.

Je nachdem die Auflagerung am Umfange sich von der in Abb. 91 dargestellten entfernt oder sich ihr nähert, ergibt sich für Gufseisen, solange σ_{max} in Plattenmitte auftritt,

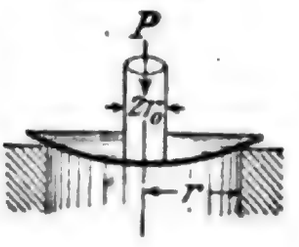
$$\varphi = 0{,}8 \text{ bis } 1{,}2; \qquad \psi = 0{,}17 \text{ bis } 0{,}60.$$

Für zähes Flufseisen ist

im Falle von Abb. 90 (σ_{max} am Umfange) $\varphi = 0{,}50$, mindestens $= 0{,}45$,
„ „ „ „ 91 (σ_{max} in Plattenmitte) $\varphi = 0{,}75$, „ $= 0{,}67$,
„ „ die Einspannung am Umfange so weit nachgiebig ist, dafs die Beanspruchungen in Plattenmitte und am Umfange gleich grofs ausfallen . . . . . $\varphi = 0{,}38$, mindestens $= 0{,}33$.

2. Kreisförmige Platte, in der Mitte durch die Kraft P kg **belastet** und **am Umfange frei aufliegend** (Abb. 92). Die Kraft P ist auf die Kreisfläche πr_0^2 gleichmäfsig verteilt.

Abb. 92.

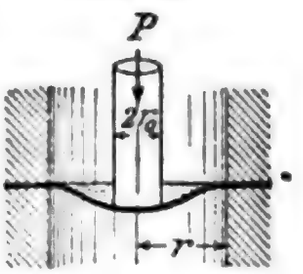


$$\sigma_{max} = \frac{3}{\pi} \varphi \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right) \frac{P}{s^2} \leqq k_b;$$

$$f = \psi \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E}.$$

Dabei ist $\varphi = 1{,}5$ (Gufseisen); $\psi = 0{,}4$ bis $0{,}5$.

Abb. 93.



3. Kreisförmige Platte, wie unter 2., jedoch **am Umfange fest eingespannt** (Abb. 93).

$$\sigma_{max} = \frac{1{,}365}{\pi} \frac{P}{s^2} \ln \frac{r}{r_0} \leqq k_b;$$

$$f = \frac{0{,}6825}{\pi} \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E} = 0{,}22 \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E}.$$

4. Elliptische Platte, am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäfsig belastet** (ähnlich wie Abb. 90

*) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl.; Berlin 1911.

Digitized by Google

u. 91). Große Achse $= 2a$, kleine Achse $= 2b$, Achsenverhältnis $b : a = \xi < 1$.

$$\sigma_{max} = \varphi \frac{b^2}{s^2} \frac{2p}{1+\xi^2} \lessgtr k_b,$$

worin $\varphi = 0{,}67$ bis $1{,}13$ (Gußeisen unter 1.).

Für $\xi = 1$ (Kreis) ergibt sich hieraus $\sigma_{max} = \varphi \frac{b^2}{s^2} p$ (unter 1.).

Weiteres unter 7.

5. Elliptische Platte, am Umfange frei aufliegend **und in der Mitte** mit P kg **belastet.** Bezeichnungen wie unter 4.

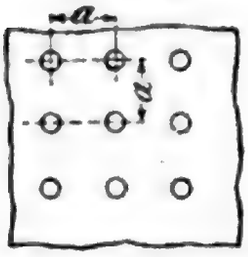
$$\sigma_{max} = \frac{8}{5\pi} \varphi \frac{8+4\xi^2+3\xi^4}{3+2\xi^2+3\xi^4} \xi \frac{P}{s^2} \lessgtr k_b,$$

worin $\varphi = 1{,}50$ bis $1{,}67$ (Gußeisen).

Für $\xi = 1$ (Kreis) ergibt sich hieraus $\sigma_{max} = \frac{3}{\pi} \varphi \frac{P}{s^2}$ (unter 2., wenn $r_0 = 0$).

6. Die (unbegrenzte) **Platte** ist durch den Druck p kg/qcm **gleichmäßig belastet und in Punkten gehalten,** die sie in quadratische Felder von der Seite a teilen (Abb. 94).

Abb. 94.



Für jedes einzelne Feld ist

$$\sigma_{max} = 0{,}2275 \frac{a^2}{s^2} p \lessgtr k_b; \qquad f = 0{,}0284 \frac{a^4}{s^3} \frac{p}{E}.$$

7. Rechteckige Platte, am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck p kg/qcm **gleichmäßig belastet.***)

a und $b < a$ sind die Seiten der rechteckigen Platte; $b : a = \xi < 1$; c die Länge des Lotes von einer Ecke auf die Diagonale d.

Bei Annahme der Einspannung der Platte nach der Diagonale wird, wie für die Ellipse:

$$\sigma_{max} = \varphi \frac{(1/2\, b)^2}{s^2} \frac{2p}{1+\xi^2} = \varphi \frac{c^2 p}{2 s^2} \lessgtr k_b;$$

mithin für $b = a$, $\xi = 1$ (quadratische Platte)

$$\sigma_{max} = 0{,}25\, \varphi \frac{a^2}{s^2} p \lessgtr k_b.$$

In diesen Formeln ist $\varphi = 0{,}75$ bis $1{,}13$ (Gußeisen, unter I., S. 601).

Für $b = \infty$ (zweiseitige Auflagerung der Platte) ergibt sich nach S. 550 Fall 10 und S. 548 Fall 8 der Koeffizient von $\frac{a^2}{s^2} p$ zu 0,50 bis 0,75, die Plattenformel 7 würde dafür 0,5 φ, also insbesondere für Gußeisen 0,375 bis 0,565 ergeben.

---

*) De Laharpe, Notes et formules de l'ingénieur, gibt für die Fälle 7 und 8 folgende Formeln:

Fall 7: $\sigma_{max} = 0{,}92 \frac{b^2}{s^2} \frac{p}{(1+\xi^2)^2}$; $f = 0{,}19 \frac{b^4}{s^3} \frac{p}{E(1+\xi^2)^2}$.

Fall 8: $\sigma_{max} = 2{,}28 \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \frac{p}{s^2}$; $f = 0{,}46 \frac{b^2}{s^3} \frac{p\xi}{E(1+\xi^2)^2}$.

Nach Tandy A. Bryson (Eng. News 1911 S. 366) ist für Fall 7:

$$\sigma_{max} = \frac{0{,}75}{1+2{,}55\,\xi} \frac{b^2}{s^2} p.$$

Bei Einspannung der Platte ist darin statt 0,75 die Zahl 0,5 zu setzen.

Digitized by Google

Verbundplatten (aus Eisenbeton) von der Länge a und Breite b mit winkelrecht sich kreuzenden Eiseneinlagen können, wenn $a < 1{,}5\,b$, berechnet werden mit $M_{max} = \frac{p\,b^2}{12}$, d. i. $\sigma_{max} = 0{,}5\,\frac{b^2}{s^2}\,p$ (Preufs. Minist.-Best.).

Zu 4 und 7. Nach neueren Versuchen von C. Bach*) ist für **Flufseisen** die Zahl φ zu wählen

bei der elliptischen Platte (4) $\varphi = 0{,}43$ bis $0{,}55$ (max $= 0{,}86$),
„ „ rechteckigen „ (7) $\varphi = 0{,}56$ „ $0{,}75$ („ $= 1{,}13$).

Die eingeklammerten Gröfstwerte, entsprechend dem Zustande freier Auflagerung (beim Balken Fall 8, S. 548), sind nur ausnahmsweise zu verwenden; meist gilt der Mittelwert (0,55 bzw. 0,75), entsprechend vollkommener Einspannung (beim Balken Fall 10, S. 550). Der kleinste Wert von φ entspricht dem Einspannungszustande, bei dem das Biegungsmoment in Plattenmitte gleich ist dem am Plattenrande (entspr. $M_{max} = {}^1/_{16}\,p\,l^2$ beim Balken, Fall 10, S. 551, Bem. in erster Spalte).

Trapezplatten sind schätzungsweise durch rechteckige zu ersetzen.

8. Rechteckige Platte, am Umfange frei aufliegend und **in der Mitte** durch die Kraft P kg **belastet.***)

a und $b < a$ sind die Seiten der rechteckigen Platte; $b : a = \xi < 1$; c die Länge des Lotes von einer Ecke auf die Diagonale d.

Mit derselben Annahme wie bei 7. wird:

$$\sigma_{max} = 1{,}5\,\varphi\,\frac{\xi}{1+\xi^2}\,\frac{P}{s^2} = 1{,}5\,\varphi\,\frac{c}{d}\,\frac{P}{s^2} \leqq k_b,$$

worin $\varphi = 1{,}75$ bis $2{,}00$ (Gufseisen).

Für $b = a$, $\xi = 1$ (quadratische Platte) erhält man

$$\sigma_{max} = 0{,}75\,\varphi\,\frac{P}{s^2} \leqq k_b.$$

b. Ebene Zylinderböden mit Krempung.**)

Die gröfste Normalspannung im Boden ist

$$\sigma_{max} = p\left\{\varphi\,\frac{\varrho}{s} + \varphi_1\left[\frac{r - 0{,}5\,\varrho\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)}{s}\right]^2\right\},$$

worin (in cm) s die Bodendicke, ϱ den inneren Wölbungshalbmesser der Krempung und r den inneren Halbmesser des Bodens bzw. des anschliefsenden Hohlzylinders bedeutet; p ist der innere Ueberdruck in kg/qcm.

Die Werte von φ und φ_1 sind für **flufseiserne**, in Hohlzylinder eingenietete Böden: $\varphi = 0{,}5$ und $\varphi_1 = 0{,}33$ bis $0{,}38$ (je nach der Nachgiebigkeit des Zylinders und der Nietverbindung); für **gufseiserne**, angegossene Böden $\varphi = \varphi_1 = 0{,}8$.

*) Z. d. V. d. I. 1906 S. 1940.

**) C. Bach, Z. d. V. d. I. 1897 S. 1224 ff.

Digitized by Google

c. Gewölbte Böden mit Flammrohren.

(Nach C. Bach und Pfleiderer.)

Bei einem eingenieteten Flammrohr (Abb. 95 u. 96) tritt die gröfste Biegungsspannung σ_b in der Krempung auf, und es wird

$$\sigma_b \doteq 0{,}45\, p \frac{r_a - r_i}{s^2}\left(r_a - r_i - 2e + \frac{5e^2}{h+2e}\right).$$

Abb. 95.

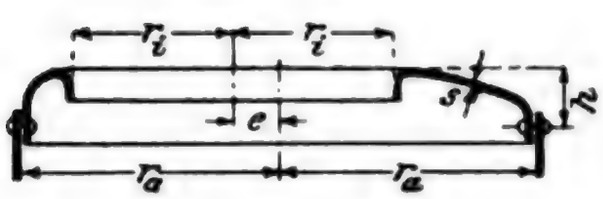
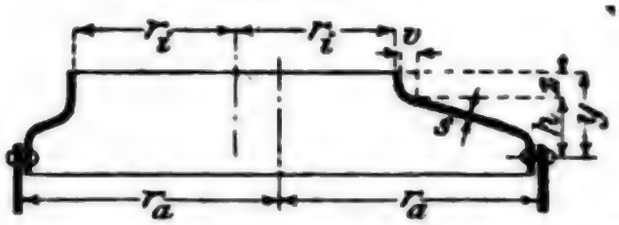


Abb 96.



Bei Zweiflammrohrböden mit eingenieteten Flammrohren (Abb. 97 u. 98) wird

$$\sigma_b = 0{,}22\, p \frac{r_a - 1{,}5\, r_i}{s^2}\left(r_a - r_i - 2e + \frac{5e^2}{h+2e}\right).$$

Hierin bedeutet p den inneren Ueberdruck in kg/qcm; die übrigen Bezeichnungen ergeben sich aus den Abb 95 bis 98. Zur Ermittlung von h kann gewählt werden $v = 1{,}5$ bis $2\,s$.

Bei zähem Flufseisen darf hier σ_b Werte bis 1500 kg/qcm erreichen.

Abb 97.

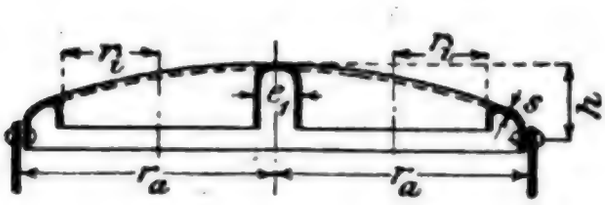
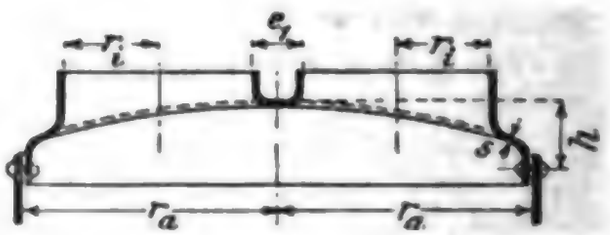


Abb. 98.



d. Hohlzylinder.*)

Es bezeichnet

r_i den inneren Halbmesser in cm,
r_a den äufseren Halbmesser in cm,
} $s = r_a - r_i = \xi 2 r_i = \xi D_i$ die Wandstärke in cm,
k_z die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
k die zulässige Druckspannung des Stoffes in kg/qcm,
$m = {}^{10}/_{3}$ das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung.

I. Innerer Ueberdruck p_i in kg/qcm. Es ist

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k_z + (m-2)\, p_i}{m k_z - (m+1)\, p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\, p_i}{k_z - 1{,}3\, p_i}}, \quad \ldots (1)$$

wobei die gröfste Beanspruchung an der Innenfläche des Hohlzylinders in der Richtung des Umfanges auftritt. In der Richtung der Zylinder-

*) Untersuchungen von W. Krüger über die Anstrengung dickwandiger Hohlzylinder unter Innendruck. s. Z. d. V d. I. 1909 S. 1406. Hiernach ist bei gufseisernen Hohlzylindern die tatsächliche Spannungsverteilung gleichmäfsiger, als die Bachsche Formel ergibt.

Digitized by Google

Werte $\xi = \frac{s}{D_i}$ zur Berechnung der Wandstärken von Rohren mit innerem Drucke.*)

p_i kg/qcm	k_z in kg/qcm									
	100	140	180	200	300	400	500	600	800	1000
10	0,0467	0,0324	0,0248	0,0223	0,0146	0,0109	0,0087	0,0072	0,0054	0,0039
12	0,0572	0,0394	0,0301	0,0269	0,0176	0,0131	0,0104	0,0087	0,0065	0,0052
14	0,0681	0,0467	0,0355	0,0317	0,0207	0,0154	0,0122	0,0102	0,0076	0,0060
16	0,0795	0,0541	0,0410	0,0366	0,0238	0,0176	0,0140	0,0116	0,0087	0,0069
18	0,0915	0,0618	0,0467	0,0416	0,0269	0,0199	0,0158	0,0130	0,0097	0,0077
20	0,1040	0,0697	0,0525	0,0467	0,0301	0,0223	0,0176	0,0146	0,0109	0,0087
25	0,1383	0,0906	0,0675	0,0599	0,0383	0,0281	0,0223	0,0184	0,0137	0,0109
30	0,1775	0,1134	0,0835	0,0738	0,0467	0,0342	0,0269	0,0223	0,0165	0,0131
35	0,2231	0,1383	0,1003	0,0885	0,0554	0,0403	0,0317	0,0261	0,0193	0,0154
40	0,2773	0,1657	0,1187	0,1040	0,0644	0,0467	0,0366	0,0301	0,0223	0,0176
45	0,3431	0,1962	0,1383	0,1206	0,0738	0,0532	0,0416	0,0342	0,0252	0,0199
50	0,4258	0,2303	0,1594	0,1383	0,0835	0,0599	0,0467	0,0383	0,0281	0,0223
55	0,5345	0,2686	0,1822	0,1572	0,0936	0,0667	0,0519	0,0425	0,0311	0,0246
60	0,6871	0,3132	0,2071	0,1775	0,1040	0,0738	0,0572	0,0467	0,0342	0,0269
65	0,9256	0,3647	0,2344	0,1994	0,1150	0,0810	0,0626	0,0510	0,0373	0,0293
70	1,3856	0,4258	0,2644	0,2231	0,1264	0,0885	0,0681	0,0554	0,0403	0,0317
80		0,5929	0,3351	0,2773	0,1508	0,1040	0,0795	0,0644	0,0467	0,0366
90		0,8881	0,4258	0,3431	0,1775	0,1206	0,0915	0,0738	0,0532	0,0416
100		1,6213	0,5488	0,4258	0,2071	0,1383	0,1040	0,0835	0,0599	0,0467
110			0,7303	0,5345	0,2401	0,1572	0,1172	0,0936	0,0667	0,0519
120			1,0411	0,6871	0,2773	0,1775	0,1311	0,1040	0,0738	0,0572
130			1,7962	0,9256	0,3196	0,1994	0,1457	0,1150	0,0810	0,0626
140				1,3856	0,3685	0,2231	0,1612	0,1264	0,0885	0,0681
150				3,1056	0,4258	0,2490	0,1775	0,1383	0,0961	0,0738
160					0,4946	0,2773	0,1949	0,1508	0,1040	0,0795
180					0,6871	0,3431	0,2332	0,1775	0,1206	0,0915
200					1,0411	0,4258	0,2773	0,2071	0,1383	0,1040
220					1,1322	0,5345	0,3288	0,2401	0,1572	0,1172
240						0,6871	0,3903	0,2773	0,1775	0,1311
260						0,9256	0,4656	0,3196	0,1994	0,1457
280						1,3856	0,5607	0,3685	0,2231	0,1612
300						3,1056	0,6871	0,4258	0,2490	0,1775
320							0,8672	0,4946	0,2773	0,1949
340							1,1557	0,5792	0,3085	0,2134
360							1,7430	0,6871	0,3431	0,2332

achse ist die Beanspruchung des Stoffes (durch die Kraft $\pi r_i^2 p_i$) viel kleiner; für den Fall geringer Wandstärken nur halb so grofs, als winkelrecht dazu.

Es sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_i < (k_z : 1{,}3)$ oder $(p_i : k_z) < 0{,}77$.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bemerkung. Ist der Hohlzylinder durch Vernietung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

*) Mitgeteilt von H. Fahlenkamp in Schalke i. W.

Digitized by Google

Beispiel. Ein gufseiserner Preßzylinder von 36 cm Kolbendurchmesser und 40 cm innerer Weite soll zur Hebung einer Brückenlast von 224 t benutzt werden. Wie groß muß für $k_z = 600$ kg/qcm die Wandstärke s sein?

Bei 36 cm Durchmesser hat die Kolbenfläche rd. 1018 qcm Inhalt, so daß die Wasserspannung $p_i = 224\,000 : 1018 = 220$ kg/qcm beträgt, also $p_i : k_z = 220 : 600 = 0{,}367$, d. i. $< 0{,}77$. Nach vorstehender Tafel ist $\xi = 0{,}2401$ für $p_i = 220$ und $k_z = 600$, mithin die erforderliche Wandstärke $s = 0{,}2401 \cdot 40 = 9{,}6$ cm.

Formel (2) würde den zu geringen Wert $s = 20 \cdot 0{,}367 = 7{,}3$ cm ergeben.

Berechnung der Wandstärke zylindrischer **Dampfkessel** mit innerem Ueberdrucke s. „Allgemeine polizeiliche Bestimmungen über die Anlegung von Landdampfkesseln vom 17. 12. 1908. II. Bd. S. 67 ff.

Gegen Innendruck bewehrte Hohlzylinder.*) Hohlzylinder, die hohen Innendruck auszuhalten haben (Ringgeschütze), können aus hohlzylindrischen Schichten so hergestellt werden, daß vor Einwirkung des Innendruckes die äußeren Zylinder die inneren zusammendrücken. Dies geschieht durch Warmaufziehen je des äußeren Zylinders auf den kalten inneren. Dadurch wird die Widerstandsfähigkeit des Baustoffes besser ausgenutzt. Es sei

f_1 die achsiale Querschnittfläche des Innenzylinders auf 1 cm Höhe in qcm,

f_2 der Querschnitt der Schrumpfringe auf 1 cm Höhe des Zylinders in qcm,

p der innere Ueberdruck in kg/qcm,

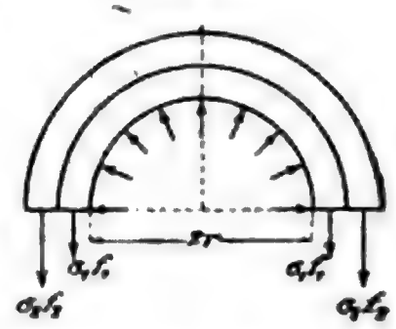
σ_1 die Spannung im Hohlzylinder in kg/qcm,

σ_2 die Spannung in den Schrumpfringen in kg/qcm.

Der Durchmesser $2r$ des Innenzylinders (Abb. 99) sei im Verhältnis zur Wandstärke s_1 so groß, daß gleichmäßige Verteilung der Spannungen über die Querschnitte vorausgesetzt werden darf. Dann ergibt sich

$$f_2 = r \frac{p}{\sigma_1 \frac{f_1}{f_2} + \sigma_2}.$$

Abb. 99.



Für $\sigma_1 = 250$ (Gußeisen) und $\sigma_2 = 1000$ (Schweißeisen) wird z. B., wenn $f_1 = f_2$, $r = 100$ cm, $p = 75$ at,

$$f_1 = f_2 = 100 \cdot \frac{75}{250 + 1000} = 6 \text{ qcm},$$

also $s_1 = 60$ mm.

Liegen die Schrumpfringe dicht nebeneinander, so ist auch $s_2 = 60$ mm. Andernfalls ist s_2 entsprechend größer zu wählen.

Daß σ_1 und σ_2 in Wirklichkeit die angenommenen Werte 250 und 1000 nicht überschreiten, muß durch entsprechendes Aufziehen der Schrumpfringe oder des Schrumpfzylinders bewirkt werden. Hierzu dient folgende Rechnung: Es sei noch

R der äußere Halbmesser des Innenzylinders vor dem Aufziehen der Schrumpfringe,

$R(1 - \psi)$ der innere Halbmesser der Schrumpfringe vor ihrem Aufziehen,

α_1 und α_2 die Dehnungszahlen des Baustoffes des Innenzylinders und der Schrumpfringe,

---

*) Nach C. Bach, Die Maschinenelemente. 10. Aufl. 1908. S. 846.

Digitized by Google

ε_1 die spezifische Zusammendrückung des Hohlzylinders im erkalteten Zustande, jedoch vor der Einwirkung von p,

ε_2 die spezifische Dehnung der Schrumpfringe wie vor,

dann ist $$\psi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

und $$\psi = \alpha_2 \sigma_2 - \alpha_1 \sigma_1,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\psi}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{f_1}{f_2}}.$$

Beispiel. Für $\sigma_1 = 250$, $\alpha_1 = 1:1\,000\,000$ (Gufseisen), $\sigma_2 = 1000$, $\alpha_2 = 1:2\,000\,000$ (Schmiedeisen), $f_1 = f_2$ wird $\psi = \frac{250}{1\,000\,000} - \frac{1000}{2\,000\,000} = \frac{1}{4000}$,

mithin $\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{4000}}{1 + \frac{1\,000\,000}{2\,000\,000} \cdot 1} = \frac{1}{6000}$; $\varepsilon_2 = \psi - \varepsilon_1 = \frac{1}{4000} - \frac{1}{6000} = \frac{1}{12\,000}$.

Die Druckspannung im Hohlzylinder vor Eintritt der Flüssigkeitspressung ist

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{1}{6000} : \frac{1}{1\,000\,000} = 167 \text{ kg/qcm},$$

die Zugspannung im Schrumpfring vor Eintritt der Flüssigkeitspressung

$$\sigma'' = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{1}{12\,000} : \frac{1}{2\,000\,000} = 167 \text{ kg/qcm}.$$

p veranlafst daher für sich im Hohlzylinder eine Zugspannung von $\sigma_1 + \sigma' = 250 + 167 = 417$, in den Schrumpfringen eine solche von $1000 - 167 = 833$ kg/qcm.

Der berechnete Unterschied ψ ist sehr gering. Der Durchmesserunterschied beträgt z. B. hier nur $2 \cdot 1060 \cdot \frac{1}{4000} = 0{,}53$ mm.

Dieser Wert mufs einen Zuschlag erfahren, der von der Oberflächenbeschaffenheit des Hohlzylinders und der Schrumpfringe abhängt. Bei zähem Baustoffe für die Schrumpfringe darf dieser Zuschlag reichlich sein, da der Baustoff eine bleibende Streckung verträgt und der Innenzylinder durch starkes Aufschrumpfen nur mehr zusammengedrückt wird, so dafs bei wirksamem p seine Zugbeanspruchung nur niedriger gehalten wird.

Der Temperaturunterschied beim Warmaufziehen mufs mindestens $t = \frac{\psi}{\alpha_w}$ betragen, wobei α_w der Wärmedehnungskoeffizient des Schrumpfringes ist.

Es wird z. B. für $\psi = \frac{1060 - 1058}{1060} = \frac{2}{1060}$; $t = \frac{2}{1060} : \frac{1}{80\,000} = 151^\circ$ C.

Ist die Wandstärke der Hohlzylinder im Verhältnis zum Durchmesser grofs, so mufs die Rechnung auf die Ungleichmäfsigkeit der Spannungsverteilung über die Zylinderwand eingehen.*)

2. Aeufserer Ueberdruck p_a in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{mk}{mk - (2m-1)p_a}} = r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1{,}7\,p_a}} \quad \ldots \quad (3)$$

*) Hierüber C. Bach, Elastizität u. Festigkeit, 6. Aufl. S. 529. Ferner Engng. 1909, II. Bd. S. 567, Zeichnerische Darstellung von Prof. Kaisers Theorie der Berechnung der Kräfte und Spannungen in Ringgeschützen, von A. Bremberg. — Prof. Kaiser, Konstruktion der gezogenen Geschützrohre, 2. Aufl. 1900.

Digitized by Google

Nach Maßgabe der Gleichung (3) sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_i < (k : 1{,}7)$ oder $(p_a : k) < 0{,}59$ ist.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r_a \frac{p_a}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

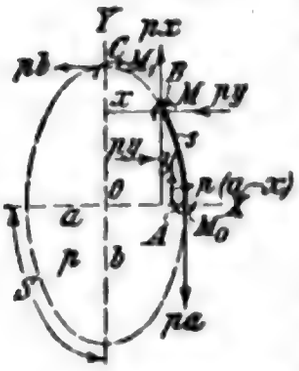
Die Bemerkung unter 1. (s. o.) gilt auch hier.

Der günstige Einfluß der Zylinderböden und etwaiger Quernähte ist in den Formeln unter 1. und 2. nicht berücksichtigt. Schätzungsweise kann die Berücksichtigung durch Wahl einer höheren zulässigen Spannung erfolgen; dabei ist der Einfluß um so größer, je kürzer der Zylinder im Vergleiche zum Durchmesser ist.

Berechnung der Wandstärke von Hohlzylindern mit äußerem Ueberdrucke, bei denen ein Eindrücken der Wandung zu befürchten ist (Dampfkessel-Flammrohre), nach C. Bach, „Allgem. poliz. Bestimmungen über die Anlegung von Landdampfkesseln" vom 17. 12. 1908, II. Bd. S. 67 ff.

3. Ovale Hohlzylinder.*) Hat der auf Innen- oder Außendruck beanspruchte Hohlzylinder ovalen Querschnitt mit den Halbachsen a und b (in cm), so sind bei den Bezeichnungen der Abb. 100, wenn p den Flüssigkeitsdruck in kg/qcm bedeutet, die Biegungsmomente (in cmkg) in den Enden der Achsen $2b$ und $2a$:

Abb. 100.



$$M_0 = \frac{p a^2}{2} - \frac{p}{2S} J_x - \frac{p}{2S} J_y,$$

$$M_1 = M_0 - \frac{p}{2}(a^2 - b^2),$$

worin J_x und J_y die Trägheitsmomente des Bogens AC in bezug auf die X-Achse bzw. auf die Y-Achse in cm³ sind und S die Länge des Bogens AC in cm ist.

Ferner ergeben sich die elastische Verschiebung δ_y des Punktes C in der Richtung der Y-Achse, und die elastische Verschiebung δ_x des Punktes A in der Richtung der X-Achse:

$$\delta_y = \frac{1}{EJ} \int_0^S M x \, ds, \qquad \delta_x = \frac{1}{EJ} \int_0^S M y \, ds,$$

worin E das Elastizitätsmaß des Baustoffes in kg/qcm, J das Trägheitsmoment der Wandung für 1 cm Länge und M, das veränderliche Biegungsmoment, aus der Gleichung

$$M = M_0 - \frac{p a^2}{2} + \frac{p x^2}{2} + \frac{p y^2}{2}$$

zu entnehmen ist. (Weiteres die in der Fußnote genannte Quelle.)

Für den korbbogenförmigen Querschnitt, bestehend aus 2 Halbkreisen und 2 geraden, tangentialen Verbindungsstücken, ergibt sich, daß z. B. bei einer Abweichung des Rohres von der kreisrunden Form um 5 % der zulässige Flüssigkeitsdruck auf etwa $^1/_3$ sinkt. Ist das Achsenverhältnis = 2, so beträgt der zulässige Flüssigkeitsdruck nur noch $^1/_{10}$ des bei kreisrunder Form zulässigen Druckes.

*) Nach M. Westphal, Z. d. V. d. I. 1909 S. 383.

Digitized by Google

e. Hohlkugeln.

Bezeichnungen wie unter **d.** (S. 604).

1. Innerer Ueberdruck p_i in kg/qcm. Es ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2\,m k_z + 2\,(m-2)\,p_i}{2\,m k_z - (m+1)\,p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0{,}4\,p_i}{k_z - 0{,}65\,p_i}} \quad . \quad . \quad (5)$$

Nach Maſsgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_i < (k_z : 0{,}65)$ oder $(p_i : k_z) < 1{,}54$ ist.

Die gröſste Zugbeanspruchung tritt an der Innenfläche in der Richtung des Umfanges auf.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2}\, r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Bemerkung. Ist die Hohlkugel durch Vernietung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

2. Aeuſserer Ueberdruck p_a in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2\,mk}{2\,mk - 3\,(m-1)\,p_a}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1{,}05\,p_a}} \quad . \quad . \quad (7)$$

Nach Maſsgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür $p_a < (k : 1{,}05)$ oder $(p_a : k) < 0{,}95$ ist.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2}\, r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Bemerkung unter **1.** (s. o.) gilt auch hier.

Bemerkung zu a bis e.

Ebene, aus genügend zähem Stoffe bestehende **Platten,** die sich unter Einwirkung der Belastung durchgebogen haben, besitzen in diesem gewölbten Zustande eine gröſsere Widerstandsfähigkeit als in ihrer ursprünglichen ebenen Form.

Wird eine **Platte** oder ein **Gefäſs** abgenutzt, z. B. durch Abrosten usw., so ist die berechnete Wandstärke um einen der Abnutzung entsprechenden Betrag zu vergröſsern. Verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Aufstellung, auf Temperaturunterschiede usw. eine gröſsere Wandstärke, als die vorstehenden Gleichungen geliefert haben, so sind diese Rücksichten ebenfalls bestimmend.

Digitized by Google

5. ABSCHNITT.

Stoffkunde.

I. Allgemeines.

A Chemische Elemente und Verbindungen.

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht †)	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Aluminium	Al	27,1 *)	—
Tonerde	Al_2O_3	10 ,10	53,03 Al
Tonerdehydrat	$Al(OH)_3$	156,25	34,68 Al
Kali-Alaun	$K_2SO_4 + Al_2(SO_4)_3 + 24\,H_2O$	949,11	5,72 Al
Antimon	Sb	120,2 *)	—
Antimontrisulfid	Sb_2S_3	3,6, 1	71,42 Sb
Antimonpentasulfid	Sb_2S_5	400,75	59,99 Sb
Arsen	As	74,96 *)	—
Arsenige Säure	As_2O_3	197,92	75,75 As
Arsentrisulfid (Auripigment)	As_2S_3	24[illegible],13	6 ,91 As
Barium	Ba	137,37 *)	—
Bariumoxyd (Baryt)	BaO	153,37	89,57 Ba
Bariumsuperoxyd	BaO_2	160,37	90,35 Ba O
Schwefels. Baryt (Schwerspat)	$BaSO_4$	233,44	65,71 Ba O
Kohlensaurer Baryt	$BaCO_3$	197,37	77,71 Ba O
Beryllium	Be	9,1 *)	—
Blei	Pb	207,10 *)	—
Bleioxyd	PbO	223,10	92,82 Pb
Bleimennige	Pb_3O_4	685,30	90,73 Pb
Schwefelblei (Bleiglanz)	PbS	239,17	86,[illegible]8 Pb
Schwefelsaures Blei	$PbSO_4$	303,17	73,57 PbO
Chlorblei	$PbCl_2$	278,02	74,54 Pb
Bor	B	11,0 *)	—
Borsäure	B_2O_3	70,0	31,43 B
Brom	Br	79,92 *)	—
Bromsilber	AgBr	18[illegible],8	42,55 Br
Calcium	Ca	40,07 *)	—
Calciumchlorid	$CaCl_2$	111,01	36,12 Ca
Calciumkarbid	CaC_2	64,09	62,51 Ca
Calciumoxyd (gebr. Kalk, Aetzk.)	CaO	56,09	71,49 Ca
Calciumoxydhydrat (gel. Kalk)	$Ca(OH)_2$	74,11	75,68 CaO
Kohlensaurer Kalk (Kalkspat)	$CaCO_3$	100,09	56,06 CaO
Schwefelsaurer Kalk (Anhydrit)	$CaSO_4$	136,16	41,21 CaO

†) Bezogen auf Sauerstoff = 16,00. — *) Internationale Atomgewichte.

Digitized by Google

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Cadmium	Cd	112,40*)	—
Chlor	Cl	35,46*)	—
Chlorsilber	AgCl	143,34	24,73 Cl
Chlorwasserstoff (Salzsäure)	HCl	36,468	97,25 Cl
Chrom	Cr	52,0*)	—
Chromoxyd	Cr_2O_3	152,0	68,47 Cr
Eisen	Fe	55,84*)	—
Eisenoxyd (Eisenglanz)	Fe_2O_3	159,70	69,96 Fe
Schwefelsaures Eisenoxydul (Eisenvitriol)	$FeSO_4 + 7H_2O$	277,03	25,88 FeO
Fluor	F	19,0*)	—
Fluorcalcium (Flußspat)	CaF_2	78,00	48,70 F
Gold	Au	197,2*)	—
Jod	J	126,92*)	—
Jodsilber	AgJ	234,80	54,05 J
Kalium	K	39,10*)	—
Kalihydrat (Kaliumhydroxyd)	KOH	56,11	69,68 K
Chlorkalium (Sylvin)	KCl	74,56	52,48 K
Schwefelsaures Kali	K_2SO_4	174,27	54,08 K_2O
Salpetersaures Kali (Salpeter)	KNO_3	101,11	54,34 K_2O
Kohlensaures Kali (Pottasche)	K_2CO_3	138,20	68,11 K_2O
Doppeltchromsaures Kali	$K_2Cr_2O_7$	294,20	31,98 K_2O
Cyankalium	KCN	65,11	69,27 K
Kobalt	Co	58,97*)	—
Kohlenstoff	C	12,00*)	—
Kohlenoxyd	CO	28,00	42,86 C
Kohlensäure	CO_2	44,00	27,27 C
Azetylen	C_2H_2	26,02	92,24 C
Kupfer	Cu	63,57*)	—
Kupferoxyd	CuO	79,57	79,90 Cu
Schwefelkupfer	CuS	95,64	66,64 Cu
Schwefelsaures Kupferoxyd (Kupfervitriol)	$CuSO_4 + 5H_2O$	249,74	31,87 CuO
Lithium	Li	6,94*)	—
Magnesium	Mg	24,32*)	—
Magnesiumoxyd	MgO	40,32	60,36 Mg
Schwefels. Magnesia (Bittersalz)	$MgSO_4 + 7H_2O$	246,50	16,37 MgO
Mangan	Mn	54,93*)	—
Mangansuperoxyd	MnO_2	86,93	63,19 Mn
Schwefelmangan (Manganblende)	MnS	87,00	63,15 Mn
Natrium	Na	23,00*)	—
Natronhydrat (Natron)	NaOH	40,01	57,41 Na
Schwefelsaures Natron (Glaubersalz)	Na_2SO_4	142,07	43,68 Na_2O
Kohlensaures Natron (Soda)	Na_2CO_3	106,00	57,96 Na_2O
Salpetersaures Natron (Chilisalpeter)	$NaNO_3$	85,01	72,85 Na_2O
Borsaures Natron (Borax)	$Na_2B_4O_7 + 10H_2O$	382,16	16,16 Na_2O
Chlornatrium (Kochsalz)	NaCl	58,46	39,4 Na

*) Internationale Atomgewichte.

Digitized by Google

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular-Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Nickel	Ni	58,68 *)	—
Nickeloxyd	NiO	74,68	78,58 Ni
Phosphor	P	31,04 *)	—
Phosphorsaurer Kalk	$Ca_3P_2O_8$	310,35	45,77 P_2O_5
Platin	Pt	195,2 *)	—
Kaliumplatinchlorid	K_2PtCl_6	486,16	48,45 Pt
Quecksilber	Hg	200,6 *)	—
Quecksilberoxyd (Präzipitat)	HgO	216,6	92,55 Hg
Schwefelquecksilber (Zinnober)	HgS	232,67	86,17 Hg
Quecksilberchlorür (Kalomel)	HgCl	235,46	84,03 Hg
Quecksilberchlorid (Sublimat)	$HgCl_2$	270,92	73,83 Hg
Radium	Ra	226,4 *)	—
Sauerstoff	O	16,00 *)	—
Schwefel	S	32,07 *)	—
Schwefelsäure	H_2SO_4	98,09	32,69 S
Schwefelwasserstoff	H_2S	34,09	94,10 S
Silber	Ag	107,88 *)	—
Silicium	Si	28,3 *)	—
Kieselsäure (Quarz)	SiO_2	60,3	47,02 Si
Stickstoff	N	14,01 *)	—
Ammoniak	NH_3	17,03	82,27 N
Ammoniumchlorid (Salmiak)	NH_4Cl	53,50	31,84 NH_3
Salpetersäure	HNO_3	63,02	25,40 N
Strontium	Sr	87,63 *)	—
Kohlensaurer Strontian	$SrCO_3$	147,63	70,18 SrO
Schwefelsaurer Strontian	$SrSO_4$	183,70	56,42 SrO
Tantal	Ta	181,5 *)	—
Wasserstoff	H	1,008 *)	—
Wasser	H_2O	18,016	11,19 H; 88,81 O
Wismut	Bi	208,0 *)	—
Wismutoxyd (Wismutocker)	Bi_2O_3	464,0	89,68 Bi
Schwefelwismut (Wismutglanz)	Bi_2S_3	512,2	81,25 Bi
Wolfram	W	184,0 *)	—
Zink	Zn	65,37 *)	—
Zinkoxyd (Zinkweiß)	ZnO	81,37	80,35 Zn
Kohlensaures Zinkoxyd (Zinkspat)	$ZnCO_3$	125,37	64,92 ZnO
Schwefelsaures Zinkoxyd (Zinkvitriol)	$ZnSO_4 + 7H_2O$	287,55	28,31 ZnO
Schwefelzink (Zinkblende)	ZnS	97,44	67,10 Zn
Zinn	Sn	119,0 *)	—
Zinnsäure (Zinnstein)	SnO_2	151,0	78,81 Sn

*) Internationale Atomgewichte

Digitized by Google

B. Spezifische Gewichte.

Das **spezifische Gewicht** oder **Einheitsgewicht** σ eines Körpers ist das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers.

Bei **Gasen** gilt die Angabe des spez. Gewichtes für 0^0 und 760 mm Quecksilberdruck und wird i. d. R. auf das Gewicht trockener Luft oder das Gewicht des Wasserstoffes bezogen. Die auf S. 618 angegebenen Zahlen sind mit 14,44 zu multiplizieren, wenn man sie auf Wasserstoff beziehen will.

Ist V (oder V') der Rauminhalt eines Körpers (oder Gases) in cdm (l),

G (oder G') das Gewicht eines Körpers (oder Gases) in kg,

so ist $$G = V\sigma \quad \text{und} \quad G' = 0{,}001\,293\, V'\sigma',$$

d. h., 1 cdm des Körpers wiegt σ kg, 1 ccm des Körpers wiegt σ g, eine Körperschicht von 1 qm Fläche und 1 mm Höhe wiegt σ kg, 1 cbm des Körpers wiegt $1000\ \sigma$ kg $= \sigma$ Tonnen (t), 1 l des Gases wiegt $0{,}001\,293\ \sigma'$ kg $= 1{,}293\ \sigma'$ g, 1 cbm des Gases wiegt $1{,}293\ \sigma'$ kg.

Das mittlere spez. Gewicht der Erde (von König, Krigar-Menzel und Richarz nach dem Jollyschen Wagungsverfahren bestimmt) ist 5,505, und hiermit das Gesamtgewicht der Erde etwa $5960 \cdot 10^{18}$ t = 5960 Trillionen Tonnen.

Die nachfolgend angegebenen Werte von σ und σ' sind Mittelwerte oder Grenzzahlen.

a. Spezifische Gewichte fester Körper.

Wasser (bei 4^0) $= 1$.

Aetzkali, trocken	2,1	Bergkristall, rein	2,6
Aetznatron		Bernstein	1,0 — 1,1
mit 22,2 % H_2O	2,0	Beton	1,80— 2,45
Alabaster	2,3 — 2,8	Bimsstein, natürl.	0,37— 0,9
Alaun, Kali-	1,71	„ Wiener	2,2 — 2,5
Aluminium, chem. r.	2,6	Bittersalz, kristall.	1,7 — 1,8
„ gehämmert	2,75	„ wasserfrei	2,6
„ gegossen	2,56	Blätterkohle	1,2 — 1,5
Aluminiumbronze	7,7	Blei	11,25—11,37
Amalgam, natürl.	13,7 —14,1	„ flüssig	10,64
Anthrazit	1,4 — 1,7	Bleiglätte, künstl.	9,3 — 9,4
Antimon	6,62	„ natürl.	7,83— 7,98
Antimonglanz	4,6 — 4,7	Bleiglanz	7,3 — 7,6
Apatit	3,16— 3,22	Bleiweifs	6,7
Arsen	5,7 — 5,8	Bleizucker	2,4
Arsenige Säure	3,69— 3,72	Blutlaugensalz, gelb	1,83
Asbest	2,1 — 2,8	Bolus	2,2 — 2,5
Asbestpappe	1,2	Bor	2,53
Asphalt (Erdpech)	1,1 — 1,5	Borazit	2,9 — 3,0
Basalt	2,7 — 3,2	Borax	1,7 — 1,8
Baumwolle, lufttrock.	1,47— 1,50	Brauneisenstein	3,40— 3,95

Digitized by Google

Braunkohle	1,2 — 1,5
Braunstein (Pyrolusit)	3,7 — 4,6
Bronze (bei 7,9 bis 14% Zinngehalt)	7,4 — 8,9
Butter	0,94— 0,95
Cadmium	8,65
Calcium	1,85
Calciumcarbid	2,26
Chilisalpeter	2,26
Chlorbarium, kristall.	3,7
Chlornatrium, gesott.	2,15— 2,17
Chromgelb	6,0
Chroms. Kali, dopp.	2,7
Deltametall	8,6
Diamant	3,5 — 3,6
Dolomit	2,9
Eis	0,88— 0,92
Eisen, chemisch rein	7,88
Eisenvitriol	1,80— 1,98
Elfenbein	1,83— 1,92
Erde,*) lehmig, fest gestampft, frisch	2,0
„ „ trocken	1,6 — 1,9
Erde, mager, trocken	1,34
Fahlerze	4,36— 5,36
Feldspat (Orthoklas)	2,53— 2,58
Fette	0,92— 0,94
Feuerstein	2,6 — 2,8
Flachs, lufttrocken	1,5
Flufseisen	7,85
Flufsspat	3,1 — 3,2
Flufsstahl	7,86
Gabbro	2,9 — 3,0
Galmei	4,1 — 4,5
Gerste, geschüttet	0,69
Gips, gebrannt	1,81
„ gegossen, trocken	0,97
„ gesiebt	1,25
Glanzkohle	1,2 — 1,5
Glas, Fenster-	2,4 — 2,6
„ Flaschen-	2,6
„ Flint-	3,15— 3,90
„ grünes	2,64
„ Kristall-	2,9 — 3,0
„ Spiegel- od. Kron-	2,45— 2,72
Glaubersalz	1,4 — 1,5
Glimmer	2,65— 3,20
Glockenmetall	8,81
Gneis	2,4 — 2,7
Gold, gediegen	19,33
„ gegossen	19,25
„ gehämmert	19,30—19,35
Granat	3,4 — 4,3
Granit	2,51— 3,05
Graphit	1,9 — 2,3
Grauspiefsglanz	4,6 — 4,7
Grobkohle	1,2 — 1,5
Gummi, arabisches	1,31— 1,45
„ (Kautschuk), roh	0,92— 0,96
Gummifabrikate	1,0 — 2,0
Gummigutt	1,2
Gufseisen	7,25
„ flüssig	6,9 — 7,0
Guttapercha	0,96— 0,99
Hafer, geschüttet	0,43
Hanffaser, lufttrocken	1,5
Harz	1,07

Holzarten:	lufttr.	frisch
Ahorn	0,53—0,81	0,83—1,05
Akazie	0,58—0,85	0,75—1,00
Apfelbaum	0,66—0,84	0,95—1,26
Birke	0,51—0,77	0,80—1,09
Birnbaum	0,61—0,73	0,96—1,07
Buchsbaum	0,91—1,16	1,20—1,26
Ebenholz	1,26	—
Eberesche	0,69—0,89	0,87—1,13
Eiche	0,69—1,03	0,93—1,28
Erle	0,42—0,68	0,63—1,01
Esche	0,57—0,94	0,70—1,14
Fichte (Rottanne)	0,35—0,60	0,40—1,07
Guajak (Pockholz)	1,17—1,39	—
Hickory	0,60—0,90	—
Kiefer (Föhre)	0,31—0,76	0,38—1,08
Kirschbaum	0,76—0,84	1,05—1,13
Lärche	0,47—0,56	0,81
Linde	0,32—0,59	0,58—0,87
Mahagoni	0,56—1,06	—
Nufsbaum	0,60—0,81	0,91—0,91
Pappel	0,39—0,59	0,61—1,07
Pechkiefer (Pitchpine)	0,83—0,85	—
Pflaumenbaum	0,68—0,90	0,87—1,17
Roskastanie	0,58	—
Rotbuche	0,66—0,83	0,85—1,11
Steineiche	0,71—1,07	—
Tanne (Weifstanne)	0,37—0,75	0,77—1,23
Teakholz	0,9	—
Ulme (Rüster)	0,56—0,82	0,78—1,18
Weide	0,49—0,50	0,79
Weifsbuche	0,62—0,82	0,92—1,25
Zeder	0,57	—

*) S. auch III. Bd. 8. 168.

Digitized by Google

Holzkohle, lufterfüllt	0,4
„ luftfrei	1,4 — 1,5
Holzpflasterung	0,69— 0,72
Hornblende	3,0
Isolierbims	0,38
Jod	4,95
Kalium	0,865
Kalk, gebrannt, gesch.	0,9 — 1,3
„ gelöscht	1,15— 1,25
Kalkmörtel, trocken	1,60— 1,65
„ frisch	1,75— 1,80
Kalksandsteine	1,89— 1,92
Kalkspat	2,6 — 2,8
Kalkstein	2,46— 2,84
Kanonengut	8,44
Kaolin (Porzellanerde)	2,2
Kartoffel	1,06— 1,13
Kautschuk, roh	0,92— 0,96
Kies	1,8 — 2,0
Kieselerde	2,66
Kieselsäure, kristall.	2,6
„ amorph	2,2
Knochen	1,7 — 2,0
Kobalt	8,42
„ pulverig	bis 9,5
Kobaltglanz	6,0 — 6,1
Kochsalz, gesotten	2,15— 2,17
Koks im Stück	bis 1,4
Kolophonium	1,07
Kork	0,24
Korkstein, weifser	0,25
„ schwarzer	0,56
Korund	3,9 — 4,0
Kreide	1,8 — 2,6
Kunstsandstein	2,0 — 2,1
Kupfer, gegossen	8,30— 8,92
„ gewalzt	8,9 — 9,0
„ gehämmert	8,9 — 9,0
„ -Draht	8,93— 8,95
„ elektrolyt.	8,9 — 8,95
„ flüssig	8,22
Kupferglanz	5,5 — 5,8
Kupferkies	4,1 — 4,3
Kupfervitriol, krist.	2,2 — 2,3
Lagermetall, Weifsmet.	7,1
Lava, basaltisch	2,8 — 3,0
„ trachytisch	2,0 — 2,7
Leder, gefettet	1,02
„ trocken	0,86
Lehm, trocken	1,5 — 1,6
„ frisch gegraben	1,67— 1,85
Leim	1,27
Linoleum in Rollen	1,15— 1,30
Magnesia	3,2
Magnesit	3,0
Magnesium	1,74
Magneteisenstein	4,9 — 5,2
Magnetkies	4,54— 4,64
Malachit	3,7 — 4,1
Mangan	7,42
Manganerz, rot	3,46
„ schwarz	3,9 — 4,1
Marmor, gewöhnlicher	2,52— 2,85
„ carrarischer	2,72
Meerschaum	0,99— 1,28
Mehl, lose	0,4 — 0,5
„ zus. gepreſst	0,7 — 0,8
Melaphyr	2,6
Mennige, Blei-	8,6 — 9,1
Mergel	2,3 — 2,5
Messing, gewalzt (je nach Zinkgeh.)	8,52— 8,62
„ gegossen (je nach Zinkgeh.)	8,4 — 8,7
„ gezogen (je nach Zinkgeh.)	8,43— 8,73
Mühlstein-Quarz	1,25— 1,60
Naphthalin	1,15
Natrium	0,978
Neusilber	8,4 — 8,7
Nickel, gegossen	8,35
„ gewalzt	8,6 — 8,9
Ocker	3,5
Papier	0,70— 1,15
Paraffin	0,87— 0,91
Pech	1,07— 1,10
Phenol (bei 0°)	1,08— 1,09
Phosphor, gelb-weifs	1,82
„ rot	2,20
„ kristall.	2,34
Phosphorbronze	8,8
Platin, gehämmert	21,3 —21,5
„ gegossen	21,15
Polierschiefer	2,1
Porphyr	2,6 — 2,9
Porzellan	2,3 — 2,5
Pottasche	2,26
Preſskohle (Brikett)	1,25
Quarz	2,5 — 2,8
Roggen, geschüttet	0,68— 0,79

Digitized by Google

Roheisen, weifses	7,0 — 7,8
„ graues	6,7 — 7,6
Roteisenstein	4,5 — 4,9
Salmiak	1,5 — 1,6
Salpeter, Kali-	1,95— 2,08
Sand, fein und trocken	1,40— 1,65
„ fein und feucht	1,90— 2,05
„ grob	1,4 — 1,5
Sandstein	2,2 — 2,5
Schafwolle, lufttrock.	1,32
Schamottesteine	1,85— 2,2
Schiefer	2,65— 2,70
Schiefspulver, lose	0,9
„ gestampft	1,75
Schlacke, Hochofen-	2,5 — 3,0
Schmirgel	4,0
Schnee, lose	0,125
Schwefel, amorph.	1,93
„ kristall.	1,96 und 2,07
„ gediegen	2,07
Schwefelkies (Pyrit)	4,9 — 5,2
Schweifseisen	7,8
„ als Draht	7,60— 7,75
Schweifsstahl	7,86
Schwerspat	4,5
Serpentin	2,4 — 2,7
Silber, gegossen	10,42—10,53
„ gehämmert	10,5 —10,6
„ flüssig	9,51
Soda, geglüht	2,5
„ kristallisiert	1,45
Spateisenstein	3,7 — 3,9
Speckstein	2,6 — 2,8
Speifskobalt	6,4 — 7,3
Stärke im Stück	1,53
Stahl	7,85— 7,87
Steinkohle im Stück	1,2 — 1,5
Steinsalz	2,28— 2,41
Strontianit	3,7
Strontium	2,54
Syenit	2,6 — 2,8
Talg	0,90— 0,97
Talk	2,7
Ton	1,8 — 2,6
Tonschiefer	2,76— 2,88
Topas	3,51— 3,57
Torf, Erd-	0,64
„ Pech-	0,84
Torfstreu, gepreſst	0,21— 0,23
Trachyt	2,6 — 2,8
Trafs, gemahlen	0,95
Tuffstein im Stück	1,3
„ als Ziegel	0,8 — 0,9
Wachs	0,95— 0,98
Walrat	0,88— 0,94
Weifsmetall	7,1
Weizen, geschüttet	0,7 — 0,8
Wismut, gediegen	9,80
„ gegossen	9,82
„ flüssig	10,055
Wolfram	19,1
Zemente	0,82— 1,95
Ziegel, gewöhnl.	1,4 — 1,6
„ Klinker	1,7 — 2,0
Ziegelmauerwerk.	
volles, frisch	1,57— 1,63
„ trocken	1,42— 1,46
Zink, gegossen	6,86
„ gewalzt	7,13— 7,20
„ flüssig	6,48
Zinkblende	3,9 — 4,2
Zinkchlorid	2,75
Zinkspat (Galmei)	4,1 — 4,5
Zinkvitriol, kristall.	2,04
Zinn, gehämm. o. gewalzt	7,3 — 7,5
„ gegossen	7,2
„ flüssig	7,025
Zinnstein	6,4 — 7,0
Zinnober	8,12
Zucker, weifser	1,61

Digitized by Google

b. Spezifische Gewichte von Flüssigkeiten.

Name der Flüssigkeit	Spez. Gew.	bei °C
Aceton	0,79	20°
Aether (Aethyläther)	0,74	0°
Aldehyd	0,80	0°
Alkohol (wasserfrei)	0,79	15°
Amylalkohol	0,81	20°
Anilin	1,04	0°
Anisöl	1,00	16°
Baldrianöl	0,97	16°
Baumwollsamenöl	0,93	15°
Benzin	0,68—0,70	15°
Benzol	0,90	0°
Bernsteinöl	0,80	15°
Bier	1,02—1,04	—
Brom	3,19	0°
Buttersäure	0,96	15°
Chlornatrium, 14 vH NaCl	1,10	15°
„ 26 „ „	1,20	15°
Chloroform	1,48	18°
Eiweifs	1,04	15°
Glyzerin (wasserfrei)	1,26	0°
„ mit 50 vH H_2O	1,13	0°
Harzöl	0,96	15°
Holzgeist	0,80	0°
Kalilauge, 12 vH KOH	1,10	15°
„ 31 „ „	1,30	15°
„ 63 „ „	1,70	15°
Kampferöl	0,91	—
Karbolsäure, roh	0,95—0,97	15°
Kienöl	0,85—0,86	15°
Klauenfett	0,92	15°
Kokosnufsöl	0,93	15°
Kreosotöl	1,04—1,10	15°
Kupfervitriol, mit 15 vH $CuSO_4 + 5 H_2O$	1,10	15°
„ 28 „ „ + „	1,15	15°
Lavendelöl	0,88	16°
Leinöl, gekochtes	0,94	15°
Methylalkohol	0,81	4°
Milch	1,03	15°
Mineralschmieröle	0,90—0,93	20°
Mohnöl	0,92	15°
Naphtha, Petroleum-	0,76	19°
Natronlauge, mit 13 vH NaOH	1,15	15°
„ 22 „ „	1,25	15°
„ 66 „ „	1,70	15°
Oelsäure	0,90	15°
Olivenöl, (Baumöl, Provenceröl)	0,92	15°
Palmöl	0,91	15°
Petroleumäther	0,67	15°
Petroleum, Leucht-	0,79—0,82	15°
Photogen	0,78—0,85	15°
Quecksilber	13,5956	0°
Rapsöl, rohes	0,92	15°
„ raffiniertes	0,91	15°
Rizinusöl	0,97	15°
Rüböl, rohes	0,92	15°
„ raffiniertes	0,91	15°
Salpetersäure, mit 25 vH HNO_3	1,15	15°
„ 40 „ „	1,25	15°
„ 91 „ „	1,50	15°
Salzsäure, 10 vH HCl	1,05	15°
„ 40 „ „	1,20	15°
Schwefelkohlenstoff	1,29	15°
Schwefelsäure, mit 7,5 vH H_2SO_4	1,05	15°
„ 27 „ „	1,20	15°
„ 50 „ „	1,40	15°
„ 87 „ „	1,80	15°
„ rauchende	1,89	15°
Schweflige Säure (verdichtet)	1,49	−20°
Seewasser	1,02— 1,03	15°
Specköl	0,92	15°
Teer, Steinkohlen-	1,20	—
Terpentinöl	0,87	16°
Tran	0,92—0,93	15°
Wasser (destilliert)	1,00	4°
Wein, Rhein-	0,99—1,00	—
Zinkvitriol, mit 17 vH $ZnSO_4 + 7 H_2O$	1,10	15°
„ 55 „ „	1,40	15°
Zitronenöl	0,84	16°

Digitized by Google

Mit Hülfe der Tafel auf S. 372 erhält man durch Bildung von $1 : V_t$ das spez. Gewicht des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Aräometer. Sind n die Aräometergrade, σ_l und σ_g die spez. Gewichte von Flüssigkeiten, leichter oder schwerer als Wasser, so ist bei dem Aräometer nach

Baumé (bei 12,5° C) . . . . . $\sigma_l = \frac{145{,}88}{145{,}88 + n}$ und $\sigma_g = \frac{145{,}88}{145{,}88 - n}$;

Beck („ 12,5° „) . . . . . $\sigma_l = \frac{170}{170 + n}$ und $\sigma_g = \frac{170}{170 - n}$;

Brix („ 15,6° „) . . . . . $\sigma_l = \frac{400}{400 + n}$ und $\sigma_g = \frac{400}{400 - n}$.

Spez. Gewichte und Mischungsverhältnisse des wässerigen Alkohols (nach Brix).

Spez. Gewicht	0,999	0,993	0,987	0,981	0,976	0,971	0,966	0,959	0,952	0,944
100 R.-T. Alkohol-R.-T.	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45
enthalten Wasser-R.-T.	99,06	95,31	90,71	86,10	81,71	77,23	72,71	68,11	63,41	58,50
Spez. Gewicht	0,934	0,924	0,913	0,902	0,890	0,877	0,864	0,850	0,834	0,816
100 R.-T. Alkohol-R.-T.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
enthalten Wasser-R.-T.	53,70	48,72	43,66	38,56	33,38	28,14	22,82	17,42	11,88	6,15

Die vorstehenden Angaben gelten für eine Temperatur von $15^5/_9$°. Dividiert man die Alkohol-R.-T. durch das zugehörige spez. Gewicht und multipliziert mit 0,7946, so erhält man die entsprechenden Alkohol-G.-T.

c. Spezifische Gewichte von Gasen und Dämpfen

bei 0° und 760 mm Q.-S. (Vgl. S. 613.)

Trockene atmosphärische **Luft = 1.**

Aetherdampf	2,586	Leuchtgas	0,34 bis 0,45
Aethylen	0,974	Quecksilberdampf	6,94
Alkoholdampf	1,601	Salzsäuregas	1,25
Ammoniak	0,592	Sauerstoff	1,1056
Azetylen	0,91	Schwefeldampf	6,617
Chlor	2,423	Schwefelkohlenstoff	2,644
Chlorwasserstoff	1,2612	Schwefelwasserstoff	1,175
Flufssäure	2,37	Schweflige Säure	2,250
Grubengas (Sumpfgas)	0,559	Stickstoff	0,9714
Kohlenoxyd	0,9673	Wasserdampf	0,6233
Kohlensäure	1,5291	Wasserstoff	0,06927

Das spez. Gewicht der **trockenen Luft** ist nach Regnault bei einer Temperatur von 0° und einem Drucke von 760 mm Q.-S., bezogen auf destilliertes Wasser von 4°, 0,001 293 187 oder $\sim 1 : 773$ (S. 403).

Gewichte von 1 cbm Dampf in kg S. 416.

Das Gewicht von 1 cbm **Rauchgas** mittlerer Zusammensetzung beträgt etwa $1{,}25 - 0{,}0027\,t$ in kg, wenn t die Temperatur in °C ist. Da jedoch die Zusammensetzung der Rauchgase je nach dem verbrannten Brennstoffe und der mehr oder weniger reichlichen Luftzuführung sehr wechselt, so empfiehlt sich die genauere Berechnung auf Grund der Gasanalyse (S. 468 ff.).

C. Gewichte geschichteter Körper.

1 cbm wiegt kg:

Aepfel	300	Beton mit Granitbrocken	2200
Basalt	3200	Birnen und Pflaumen	350
Beton mit Ziegelbrocken	1800	Braunkohlen, lufttrocken und	
„ „ Kalksteinbrocken	2000	in Stücken	650 bis 780

Digitized by Google

Buchenholz in Scheiten	400
Chilisalpeter, aufgeschüttet	1000
Eichenholz in Scheiten	420
Fettkalk, gebrannt und pulverig	500
Fichtenholz in Scheiten	320
Formsand, aufgeschüttet	1200
„ eingestampft	1650
Granit	2700
Gras und Klee	350
Holzkohlen von weichem Holze	150
„ „ hartem „	220
Kalk- und Bruchsteine	2000
Kartoffeln	650—700
Kohlen, Zwickauer	770—800
„ oberschlesische	760—800
„ niederschlesische	820—870
„ Saar-	720—800
„ Ruhr-	800—860
Koks, Gas-	360—470
„ Zechen-	380—530
Mist und Guano	750—950
Mörtel (Kalk und Sand)	1700—1800
Nadelholz in Scheiten	330
Rüben	570—650
Sand, Lehm, Erde, trocken	1600
„ „ „ nafs	2000
Schnee, frisch gefallen	80—190
„ feucht und wässerig	200—800
Schwemmsteine, rheinische	850
Siedesalz (NaCl), grobkörnig	745
„ „ feinkörnig	785
Steinsalz (NaCl), gemahlen	1015
Ton, Kies, trocken	1800
„ „ nafs	2000
Torf, lufttrocken	325—410
„ feucht	550—650
Trafs, gemahlen	950
Wasserkalk, gepulvert	550
Weifstannenholz in Scheiten	340
Ziegelsteine, gewöhnliche	1375—1500
„ Klinker	1600—1800

1 Ladung von 10000 kg (200 Ztr.) enthält cbm:

Brauneisenstein	3,0—3,5
Braunkohlen, lufttrocken und in Stücken	12,8—15,4
Buchenholz in Scheiten	25,0
Eichenholz in Scheiten	23,8
Fichtenholz in Scheiten	31,3
Flufskies, trocken	3,7—4,3
„ nafs	3,5—4,0
Flufssand, feucht	5,7
Formsand, aufgeschüttet	8,3
„ eingestampft	6,1
Holzkohlen von weichem Holze	66,7
„ „ hartem „	45,5
Kalk, gebrannt	7,7—8,4
Kalk- und Bruchsteine	5,0
Kartoffeln	13,7—14,3
Kohlen, Zwickauer	12,5—13,0
„ oberschlesische	12,5—13,2
„ niederschlesische	11,5—12,2
„ Saar-	12,5—13,9
„ Ruhr-	11,6—12,5
Koks, Gas-	21,3—27,8
„ Zechen-	18,9—26,3
Lehm, frisch gegraben	6,0
Mörtel (Kalk und Sand)	5,6—5,9
Nadelholz in Scheiten	30,3
Preskohlen	9,0—10,0
Rüben	15,4—17,5
Schlacken und Koksasche	16,7
Schwefelkies	3,0
Schwemmsteine (rheinische)	11,8
Spateisenstein	3,0—3,3
Steinsalz (NaCl), gemahlen	9,8
Teer, Steinkohlen-	8,3
Ton, trocken	5,6
„ nafs	5,0
Torf, lufttrocken	24,4—30,8
„ feucht	15,4—18,2
Trafs, gemahlen	10,5
Weifstannenholz in Scheiten	29,4
Ziegelsteine, gewöhnliche	6,7—7,3
„ Klinker	5,6—6,3

44 engl. Kub. F. geschütteter **Steinkohlen** wiegen etwa 1000 kg, also 100 engl. Kub. F. rd 2270 kg, oder 1 cbm rd. 803 kg. Nach Stevens und Döring gehen in 1 cbm Schiffs-Laderaum 896 kg Steinkohlen.

Digitized by Google

II. Metalle.

A. Allgemeines.

I. Maße und Gewichte.

a. Gewicht von 1000 m Draht in kg.

Spez. Gew.: Draht aus Flußeisen 7,85*), Kupfer 9,00**), Messing 8,55***).

Dicke mm	Flußeisen u. Flußstahl kg	Kupfer kg	Messing kg	Dicke mm	Flußeisen u. Flußstahl kg	Kupfer kg	Messing kg
0,14	0,121	0,139	0,132	1,4	12,08	13,86	13,16
0,16	0,158	0,181	0,172	1,6	15,78	18,10	17,19
0,18	0,200	0,229	0,218	1,8	19,98	22,90	21,76
0,20	0,247	0,283	0,269	2,0	24,66	28,28	26,86
0,22	0,298	0,342	0,325	2,2	29,84	34,21	32,50
0,24	0,355	0,407	0,387	2,5	38,53	44,18	41,97
0,26	0,417	0,478	0,453	2,8	48,33	55,42	52,65
0,28	0,483	0,554	0,526	3,1	59,25	67,93	64,53
0,31	0,592	0,679	0,645	3,4	71,27	81,71	77,63
0,34	0,713	0,817	0,776	3,8	89,03	102,1	96,97
0,37	0,844	0,968	0,919	4,2	108,76	124,7	118,46
0,40	0,964	1,131	1,050	4,6	130,46	149,6	142,09
0,45	1,248	1,431	1,360	5,0	154,14	176,7	167,88
0,50	1,541	1,767	1,679	5,5	186,50	213,8	203,13
0,55	1,865	2,138	2,031	6,0	221,95	254,5	241,76
0,60	2,219	2,545	2,418	6,5	260,48	298,6	283,71
0,70	2,885	3,464	3,142	7,0	288,51	346,4	314,24
0,80	3,946	4,524	4,298	7,6	356,11	408,3	387,87
0,90	4,994	5,726	5,439	8,2	411,70	475,3	448,41
1,00	6,165	7,069	6,715	8,8	477,45	547,4	520,02
1,10	7,460	8,553	8,125	9,4	544,75	624,6	593,37
1,20	8,876	10,18	9,667	10,0	616,54	706,9	671,51
1,30	10,419	11,95	11,348				

Bleidraht s. unter IV. Blei.

Bronzedraht unter VI. Metallegierungen.

*) S. 625.

**) Nach Angaben von C. Heckmann, Duisburg-Hochfeld, für hart gezogenen, ungeglühten Draht; für geglühten Draht weichen die Zahlen nur unbedeutend ab.

***) Das spez. Gew. des Messings nimmt mit dem Cu-Gehalt zu. Es beträgt bei 60 % Cu rd. 8,5, bei 72 % Cu rd. 8,6.

Digitized by Google

b. Gewichte von Metallplatten in kg/qm.

Stärke mm	Gufseisen	Schweifseisen	Flufseisen oder Flufsstahl	Kupfer	Messing	Bronze	Zink	Blei
1	**7,25**	**7,8**	**7,85**	**8,9**	**8,55**	**8,6**	**7,2**	**11,37**
2	14,50	15,6	15,70	17,8	17,10	17,2	14,4	22,74
3	21,75	23,4	23,55	26,7	25,65	25,8	21,6	34,11
4	29,00	31,2	31,40	35,6	34,20	34,4	28,8	45,48
5	36,25	39,0	39,25	44,5	42,75	43,0	36,0	56,85
6	43,50	46,8	47,10	53,4	51,30	51,6	43,2	68,22
7	50,75	54,6	54,95	62,3	59,85	60,2	50,4	79,59
8	58,00	62,4	62,80	71,2	68,40	68,8	57,6	90,96
9	65,25	70,2	70,65	80,1	76,95	77,4	64,8	102,33
10	72,50	78,0	78,50	89,0	85,50	86,0	72,0	113,70
11	79,75	85,8	86,35	97,9	94,05	94,6	79,2	125,07
12	87,00	93,6	94,20	106,8	102,60	103,2	86,4	136,44
13	94,25	101,4	102,05	115,7	111,15	111,8	93,6	147,81
14	101,50	109,2	109,90	124,6	119,70	120,4	100,8	159,18
15	108,75	117,0	117,75	133,5	128,25	129,0	108,0	170,55
16	116,00	124,8	125,60	142,4	136,80	137,6	115,2	181,92
17	123,25	132,6	133,45	151,3	145,35	146,2	122,4	193,29
18	130,50	140,4	141,30	160,2	153,90	154,8	129,6	204,66
19	137,75	148,2	149,15	169,1	162,45	163,4	136,8	216,03
20	145,00	156,0	157,00	178,0	171,00	172,0	144,0	227,40
21	152,25	163,8	164,85	186,9	179,55	180,6	151,2	238,77
22	159,50	171,6	172,70	195,8	188,10	189,2	158,4	250,14
23	166,75	179,4	180,55	204,7	196,65	197,8	165,6	261,51
24	174,00	187,2	188,40	213,6	205,20	206,4	172,8	272,88
25	181,25	195,0	196,25	222,5	213,75	215,0	180,0	284,25
26	188,50	202,8	204,10	231,4	222,30	223,6	187,2	295,62
27	195,75	210,6	211,95	240,3	230,85	232,2	194,4	306,99
28	203,00	218,4	219,80	249,2	239,40	240,8	201,6	318,36
29	210,25	226,2	227,65	258,1	247,95	249,4	208,8	329,73
30	217,50	234,0	235,50	267,0	256,50	258,0	216,0	341,10

Spez. Gew. vorstehender Metalle, bezogen auf:

Gufseisen	**1**	1,076	1,083	1,228	1,179	1,186	0,993	1,568
Schweifseisen	0,929	**1**	1,006	1,141	1,096	1,103	0,923	1,458
Flufseisen	0,924	0,994	**1**	1,134	1,089	1,096	0,917	1,448

Digitized by Google

c. Feinblech- und Drahtlehren.

Nr. der Lehre	Deutsche Millimeter-Drahtlehre mm	Deutsche Feinblechlehre mm	Dillinger Feinblechlehre mm	Westfälische Stift-Drahtlehre mm	Engl. Feinblech- und Drahtlehre mm	Französ. Feinblech- und Drahtlehre mm
0000	.	.	.	.	11,531	.
000	.	.	.	.	10,795	.
00	.	.	.	.	9,652	.
0	.	.	.	.	8,636	.
1	.	5,50	5,50	0,6	7,620	0,6
2	0,2	5,00	5,00	0,7	7,213	0,7
2/2	0,22	.	.	.	.	.
2/4	0,24	.	.	.	.	.
2/6	0,26	.	.	.	.	.
2/8	0,28	.	.	.	.	.
3	.	4,50	4,50	.	6,579	0,8
3/1	0,31	.	.	.	.	.
3/4	0,34	.	.	.	.	.
3/7	0,37	.	.	.	.	.
4	0,40	4,25	4,25	0,8	6,045	0,9
4/5	0,45	.	.	.	.	.
5	0,50	4,00	4,00	0,9	5,588	1,0
5/5	0,55	.	.	.	.	.
6	0,60	3,75	3,50	1,0	5,154	1,1
7	0,70	3,50	3,25	1,1	4,572	1,2
8	0,80	3,25	3,00	1,2	4,191	1,3
9	0,90	3,00	2,75	1,3	3,759	1,4
10	1,0	2,75	2,50	1,4	3,404	1,5
11	1,1	2,50	2,25	1,6	3,048	1,6
12	1,2	2,25	2,00	.	2,769	1,8
13	1,3	2,00	1,85	1,8	2,413	2,0
14	1,4	1,75	1,70	2,0	2,108	2,2
15	.	1,50	1,55	2,2	1,829	2,4
16	1,6	1,375	1,40	2,5	1,651	2,7
17	.	1,250	1,25	2,8	1,473	3,0
18	1,8	1,125	1,10	3,1	1,245	3,4
19	.	1,000	1,00	3,4	1,067	3,9
20	2,0	0,875	0,90	3,8	0,889	4,4
21	.	0,750	0,80	4,2	0,813	4,9
21½	.	0,688	0,70	.	.	.

Nr. der Lehre	Deutsche Millimeter-Drahtlehre mm	Deutsche Feinblechlehre mm	Dillinger Feinblechlehre mm	Westfälische Stift-Drahtlehre mm	Engl. Feinblech- und Drahtlehre mm	Französ. Feinblech- und Drahtlehre mm
22	2,2	0,625	0,60	4,6	0,711	5,4
22½	.	.	0,50	.	.	.
23	.	0,562	0,40	5,5	0,635	5,9
24	.	0,500	0,30	6,0	0,559	6,4
25	2,5	0,438	.	7,0	0,508	7,0
26	.	0,375	.	7,6	0,457	7,6
27	.	0,300	.	8,8	0,406	8,2
28	2,8	.	.	9,4	0,356	8,8
29	.	.	.	10,0	0,330	9,4
30	.	.	.	.	0,310	10,0
31	3,1	.	.	.	0,280	.
32	.	.	.	.	0,249	.
33	.	.	.	.	0,221	.
34	3,4	.	.	.	0,196	.
35	.	.	.	.	0,175	.
36	.	.	.	.	0,155	.
37	3,7	.	.	.	.	.
38	3,8					
39	3,9					
40	4,0					
42	4,2					
44	4,4					
46	4,6					
48	4,8					
50	5,0					
55	5,5					
60	6,0					
65	6,5					
70	7,0					
75	7,5					
80	8,0					
85	8,5					
90	9,0					
95	9,5					
100	10,0					

Bergische Drahtlehre.

Nr.	mm
Ketten	7,75
Schleppen	6,79
Grobrinken	6,00
Feinrinken	5,39
Malgen	4,72
Grobmemel	4,12
Mittelmemel	3,85
Feinmemel	3,25
Klinkmemel	3,00
Natel	2,65
Mittel	2,35
3 Schillinge	1,91
4 Schillinge	1,75
1 Band	1,55
2 „	1,37
3 „	1,25
4 „	1,10
5 „	0,95
6 „	0,89
7 „	0,84

Französ. Feinblech- und Drahtlehre.

Nr.	mm
P. 0	0,50
P. 1	0,46
P. 2	0,42
P. 3	0,37
P. 4	0,34
P. 5	0,30
P. 6	0,26
P. 7	0,27
P. 8	0,25
P. 9	0,23
P. 10	0,22
P. 11	0,20
P. 12	0,18
P. 13	0,17
P. 14	0,16
P. 15	0,15

Englische Lehre (B.W.G. = Birmingham wire gauge) in England, meist auch in Norddeutschland für Blech, Draht und Bandeisen, in Süddeutschland für Bandeisen. **Dillinger Lehre** benutzen die Werke von Dillingen und Hayange. **Französische Drahtlehre** (Jauge de Paris, 1857) in Frankreich allgemein für Draht und Drahtstifte, in Deutschland für Drahtstifte, in Süddeutschland meist auch für Draht. **Bergische Lehre** (älteste Lehre) nur noch in der Gegend von Altena und Iserlohn üblich.

Digitized by Google

II. Eigenschaften.*)

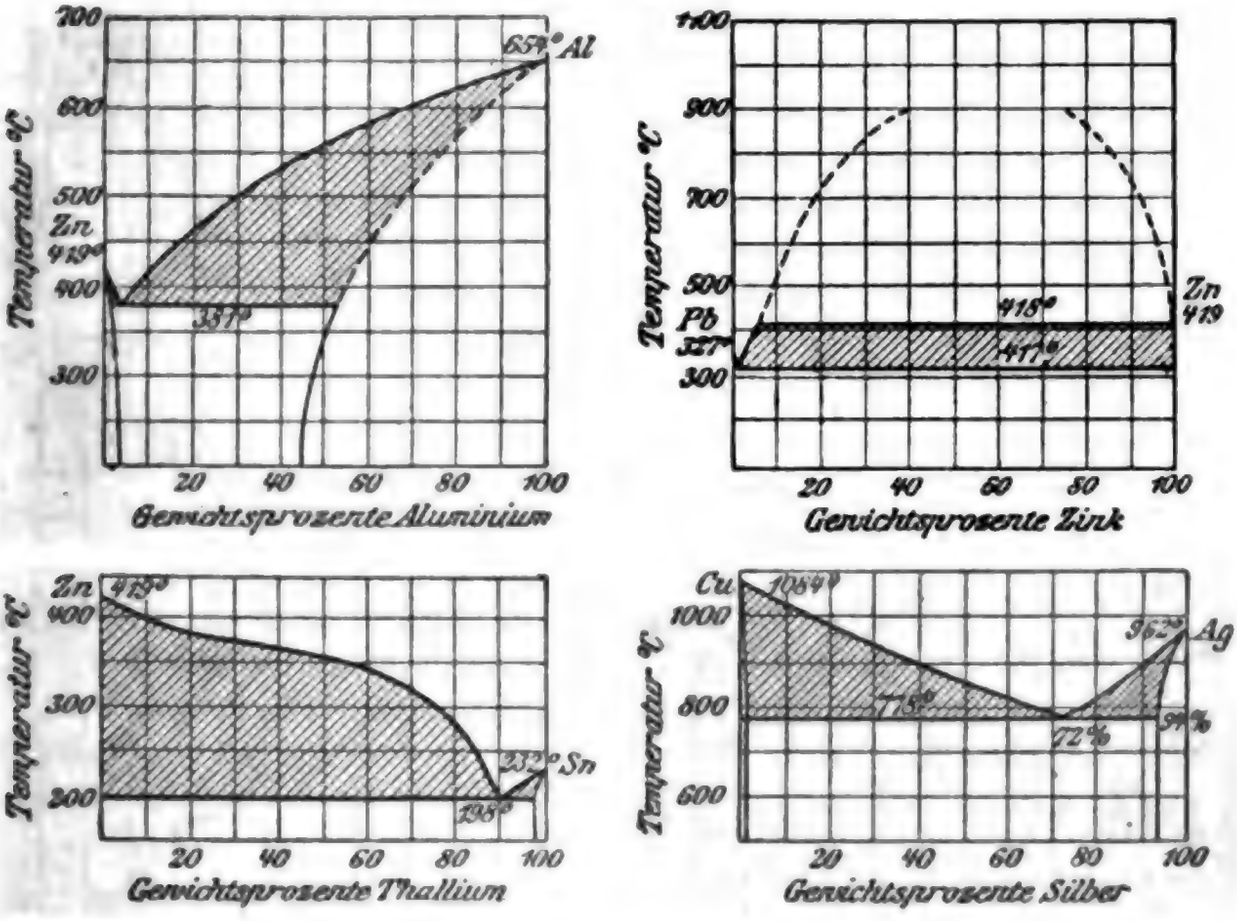
Innerer Aufbau. Im flüssigen Zustande sind die meisten Metalle gleichmäfsig ineinander gelöst, nur wenige (Blei-Eisen, Zink-Silber) bilden getrennte Schichten mit geringer gegenseitiger Löslichkeit.

Nach der Erstarrung bestehen die Metalle aus einem Haufwerk kleiner, durch Kohäsion verbundener Kristalle, die entweder chemisch gleichartig oder verschieden sind. Die Bestandteile einer Legierung sind dabei: 1. wie im flüssigen Zustande gleichmäfsig ineinander gelöst („feste Lösung", „Mischkristalle"), 2. nebeneinander gelagert, 3. chemisch verbunden.

Zustandsänderungen. Bei einigen Metallen und Legierungen zeigen sich beim Erhitzen und Abkühlen Unstetigkeiten in der Aenderung ihrer Eigenschaften bei bestimmten Temperaturen (kritische Punkte), hervorgerufen durch Aenderungen des inneren Aufbaues. Durch schnelle Abkühlung können Zustandsänderungen ganz oder teilweise unterdrückt werden (Härten des Stahles). Die so behandelten Metalle neigen dann insbesondere bei geringem Wiedererhitzen zu allmählicher innerer Umlagerung.

Zustandsbilder zeigen die Schmelzpunkte und kritischen Punkte für die verschiedenen chemischen Zusammensetzungen der Legierungen (Abb. 1 bis 12).**)

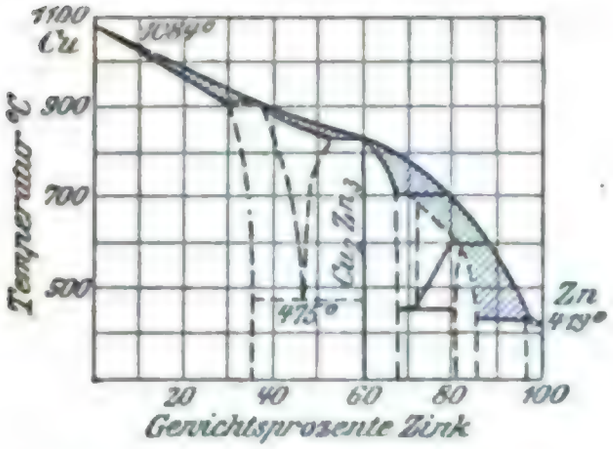
Abb. 1 bis 4.

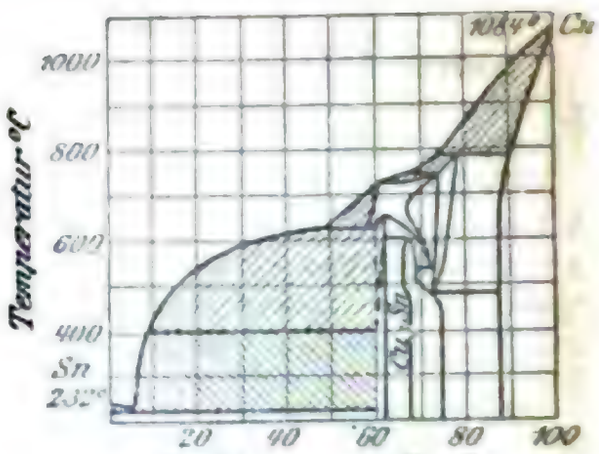


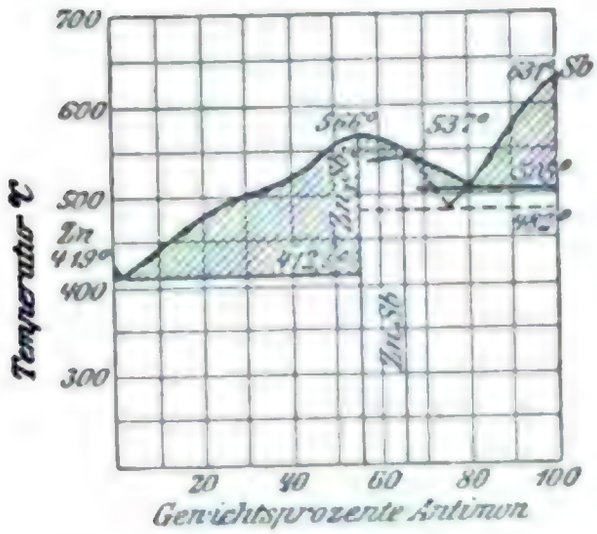
*) Vgl. Martens Heyn, Materialienkunde II. A.

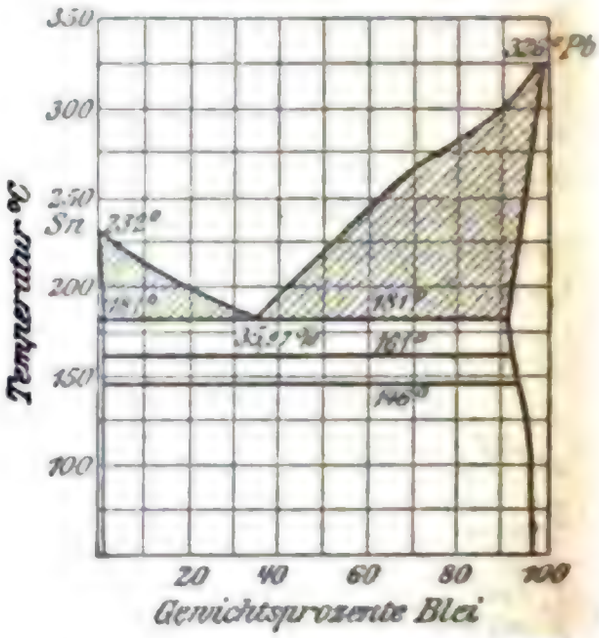
**) Vgl. S. 678 Z. 8 ff. Eine Zusammenstellung aller bisher ermittelten Zustandsbilder bringen: Bornemann, Die binären Metallegierungen; Guertler, Lehrbuch der Metallographie.

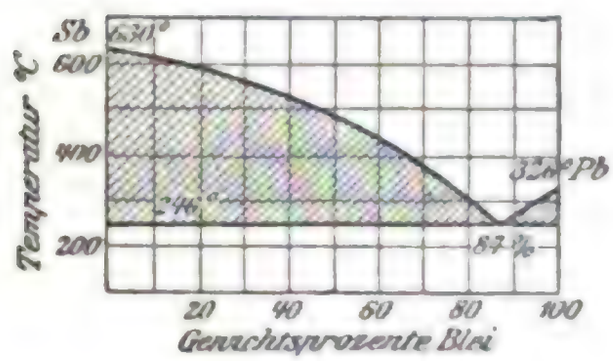
Digitized by Google

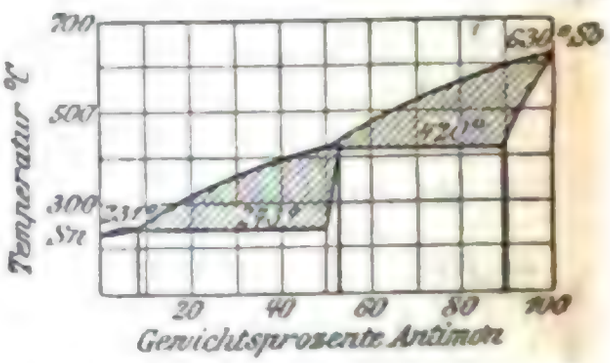


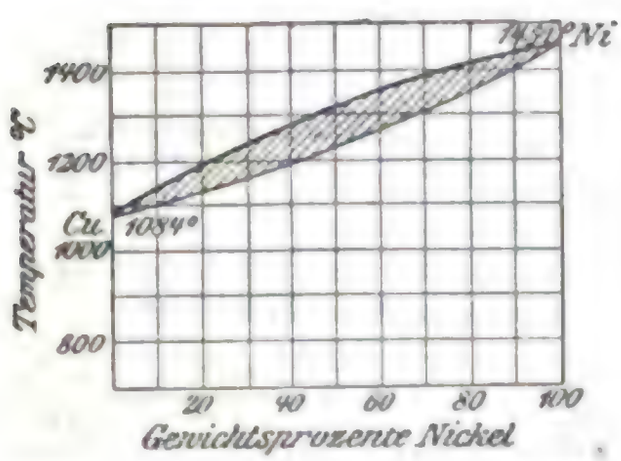












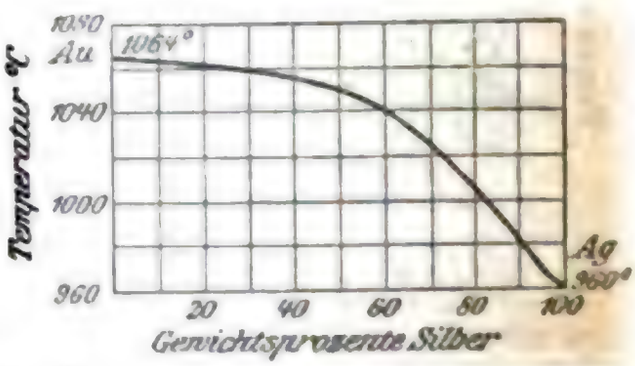


Abb. 5 bis 12.

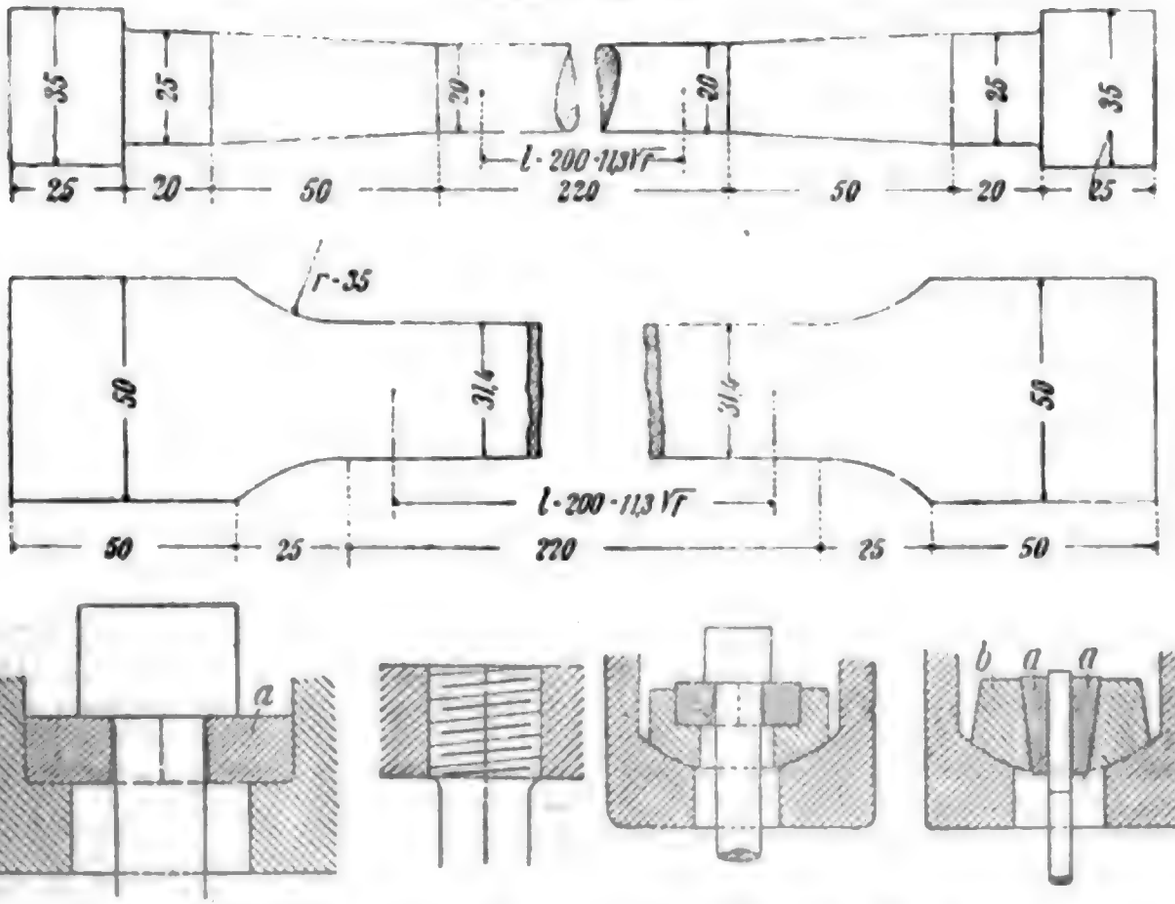
Digitized by Google

Kaltreckung. Durch Formänderung im kalten Zustande (Kaltreckung) werden Härte und Festigkeit der Metalle vermehrt, Dehnung und in geringem Maſse auch das Eigengewicht vermindert. Durch Erhitzen auf bestimmte Temperaturen (bei Flufseisen rd. 600°) werden die Folgen des Kaltreckens beseitigt.

III. Festigkeitsprüfung.

a) **Zugversuch.** An den normalen Stabformen, Rundstab Abb. 13 und Flachstab Abb. 14 sind zu unterscheiden: Versuchslänge L = Länge des prismatischen Teiles, Meſslänge l = zur Dehnungsmessung ab-

Abb. 13 bis 18.



gegrenzte Länge und Stabköpfe, zur Einspannung in die Festigkeitsprüfmaschine verstärkte Enden (Abb. 15 bis 18).

Wenn keine besonderen Vorschriften gegeben sind, wähle man im Anschluſs an den Normalrundstab mit $d = 20$ mm und $l = 200$ mm stets $l = 11{,}3\sqrt{f}$.

Dehnungsmessungen zwischen zwei Endmarken sind nur dann zuverlässig, wenn der Bruch im zweiten oder dritten Viertel der Meſslänge l liegt, sonst wird Dehnung zu klein gefunden.

b) **Druckversuch.** Die gebräuchlichste Probeform ist der Würfel. Seine Kantenlänge ist bei homogenem Stoff ohne Einfluſs auf das Ergebnis.

c) **Biegeversuch.** Probestäbe für Gufseisen nach den Vorschriften des Deutschen Verbandes für Materialprüfung der Technik. Durchmesser: 30 mm Durchm., Länge: 600 mm, in getrockneter Form stehend von unten gegossen.

Digitized by Google

B. Angaben über einzelne Metalle.

I. Eisen.*)

Spezifisches Gewicht 7,85 bis 7,88, sinkt mit steigendem Kohlenstoffgehalt; bei 1% Kohlenstoffgehalt 7,82. Spezifische Wärme S. 376, Wärmeleitfähigkeit 11,0 (Silber 100), Wärmeausdehnungszahlen S. 369, Strahlungszahlen S. 391, Schmelzpunkte S. 378, Festigkeitseigenschaften S. 487 u. 628, elektrische Leitfähigkeit nach Le Chatelie $10{,}53 \cdot 10^4$, nach Benedicks $13{,}1 \cdot 10^4$ (ein Draht von 1000 m Länge und 1 qmm Querschnitt hat $\sim 111\ \Omega$ Widerstand bei 0°).

Eisen ist magnetisch; bei Erhitzen über 770° wird es unmagnetisch. Kristallform: regulär. Zustandsänderungen s. unten.

1. Bestandteile und Einteilung.

a. Bestandteile.

Die Eigenschaften des technisch verwerteten Eisens werden durch die Art und die Mengen der Nebenbestandteile hervorgebracht. Die Nebenbestandteile bedingen neben dem Eisengehalt den Wert der Erze und die Verfahren der Verhüttung.

α) Absichtlich beigemischte Nebenbestandteile.

Kohlenstoff. Einteilung nach dem C-Gehalt s. u. Die Zerreifsfestigkeit wächst mit einem C-Gehalt von 0 bis $\sim 1{,}1$ % von ~ 30 kg/qmm

*) Ausführliche Angaben über die metallurgische Chemie des Eisens, Gewinnungs- und Weiterverarbeitungsverfahren, Hüttenmaschinen und Walzwerke s. „Hütte", Taschenbuch für Eisenhüttenleute; vgl. ferner Ledebur, „Handbuch der Eisenhüttenkunde", „Gemeinfafsliche Darstellung des Eisenhüttenwesens", herausgegeben vom Verein deutscher Eisenhüttenleute.

Beispiele von

Nach Mars „Die Spezialstähle". Stuttgart 1912. Daselbst noch

Stahlsorte	C	Mn	Ni	Cr	Wo	Va
Nickelstahl	0,05 bis 0,15		1 bis 2			
	0,05 bis 0,25		4 bis 6			
	0,20 bis 0,45		3 bis 4			
	0,3 bis 0,5		25 bis 28			
Manganstahl	0,3	1,3 bis 1,1				
Chrom-Nickel-Stahl	0,25 bis 0,45		2,5 bis 2,75	0,25 bis 0,50		
Chromstahl	0,3 bis 0,5	0,2		1,0 bis 1,5		
	0,8 bis 1,0	0,25		2 bis 4		
	0,85 bis 0,95	0,2		1,0 bis 1,3		
Wolframstahl	1,0 bis 1,2				0,6 bis 0,7	
	0,6 bis 0,65				5,0 bis 6,0	
	0,9 bis 0,65				8,0 bis 9,0	
Chrom-Wolfram-Stahl	1,2 bis 1,3			1	3	
	0,6 bis 0,8			5 bis 6	17 bis 19	0,1 bis 1,0

Die Stahlwerke bringen die Stähle als mit Buchstaben benannte Fabrikmarken unter Angabe in den Handel. Nach der Verwendung bezeichnet man die Stähle auch als: Konstruktionsstahl

Digitized by Google

auf ~ 100 kg/qmm, während gleichzeitig die Dehnung von ~ 30 % auf ~ 3 % abnimmt (s. auch Tafel auf S. 628). Der Schmelzpunkt sinkt bei einem C-Gehalt von 0 bis 4,2 % von 1510 auf 1130°. Einfluſs auf Härtbarkeit s. Tafel auf S. 628. Im schmiedbaren Eisen und weiſsen Roheisen ist der Kohlenstoff als Karbid Fe_3C enthalten („gebundener Kohlenstoff", entweicht als Gas beim Kochen des Eisens in Säuren), im grauen Roheisen gröſstenteils als Graphit (schwarzer Lösungsrückstand). Graphitbildung s. unten. Die Härte des Eisens wächst mit zunehmendem Gehalte an gebundenem Kohlenstoff.

Silizium vermindert die Gasentwicklung im Schmelzfluſs, bewirkt daher dichten Guſs, beeinträchtigt die Schmied- und Schweiſsbarkeit, fördert die Bildung von Graphit und Temperkohle im Eisen. Si-Gehalte s. u. Si vermindert die elektrische Leitfähigkeit, ohne die magnetische Weichheit zu verringern, daher Gehalte bis 1,5 % in „halblegierten" und bis 4 % in „legierten" Dynamoblechen.

Mangan bewirkt Abscheidung des Schwefels und Sauerstoffes aus dem Schmelzflusse, vermindert die Schweiſsbarkeit, erhöht die Festigkeit und Zähigkeit. Mangan übt eine härtende Wirkung aus (s. u.).

Nickel. Bewirkt als Zusatz zum Flufseisen Erhöhung der Festigkeit, Zähigkeit und Härte, dsgl. in Sonderstählen.

Hochprozentiger Nickelstahl und Manganstahl kann unmagnetisch hergestellt werden.

Chrom, Wolfram, Molybdän, Vanadium, Kobalt sind ebenso wie Mangan und Nickel Bestandteile der Sonderstähle, die, in bestimmten Mengen und bei bestimmtem Kohlenstoffgehalt allein oder gemeinsam zugesetzt, wertvolle Eigenschaften der Stähle im geglühten oder gehärteten Zustande erzeugen.

Sonderstählen.

sehr zahlreiche Angaben anders zusammengesetzter geeigneter Sorten.

Eigenschaften und Verwendung					
	σ_p	σ_b kg/qmm	ε_g %	ϕ %	
geglüht	25 bis 30	40 bis 45	30 bis 25	70 bis 60	nahtlose Rohre, Niete, Bleche im Einsatz gehärtete Maschinenteile und Autoteile, wie Zahnräder, Kettenräder usw.
gehärtet	50 bis 60	70 bis 80	15 bis 10	45 bis 40	
geglüht	35 bis 45	55 bis 65	25 bis 30	55 bis 45	
gehärtet		90 bis 100			
geglüht	40 bis 45	70 bis 75	16 bis 12	50 bis 45	Brückenbaustoff, Kanonenstahl, Wellen, Achsen, Zahnräder, Zapfen usw.
zäh vergütet	45 bis 55	75 bis 85	12 bis 8	60 bis 50	
hart	65 bis 75	85 bis 95	10 bis 6		

naturhart, unmagnetisch, rostfest. Ventile für Explosionsmotoren.

Radreifen, Kohlensäurelaschen. Ein geringer Mangangehalt ist in jedem Stahl vorhanden.

geschmiedet	35 bis 50	55 bis 75	25 bis 15	meist angewendeter Stahl für höchst beanspruchte Teile im Automobil- und Maschinenbau.
vergütet	60 bis 100	60 bis 100	12 bis 9	

Hand- und Preſsluftmeiſsel.
Lochdorne, Stempel, Kaltwalzen.
Kugellager.

Schmiedewerkzeuge, Spiralbohrer.
Magnete.
Warmzieh- und Preſsmatrizen.

Drehmesser.
Schnellarbeitsstahl für Drehmeiſsel, Spiralbohrer u. a.

des Verwendungszwecke- und der Fe tigkeitseigenschaften ohne Angabe der Zusammensetzung
Werkzeugstahl, Magnetstahl, Geschoſsstahl usw.

Digitized by Google

Härteskala.

Härte Nr.	C-Gehalt in vH	Festigkeit in kg für 1 qmm	Dehnung in vH auf 100 mm Stablänge	Benennung	Verwendungszweck
000	0,06	34 bis 36	30 bis 35	Weichstes Flußeisen, gutschweißbar, nicht härtbar	Draht, Fein- und Stanzbleche, gezogene Röhren.
00	0,09	36 bis 38	27 bis 32	Weiches Flußeisen, gut schweißbar, nicht härtbar	Bleche, gezogene und geschweißte Rohre, Draht, Drahtstifte, Niete.
0	0,12	38 bis 41	23 bis 29	Weiches Flußeisen, gut schweißbar, nicht härtbar	Bleche, gezogene und geschweißte Rohre, Draht, Drahtstifte, Niete, Schrauben, Bandeisen.
1	0,16	41 bis 44	21 bis 26	Flußeisen, schweißbar, nicht härtbar	Eisenbahnschwellen, Laschen, Maschinenteile, Bleche, Träger, Winkel-, Stab- und Formeisen jeglicher Art, Zaundraht, Drahtstifte, Ketten, Hacken, Spaten, Schaufeln.
2	0,20	44 bis 47	19 bis 23	Weicher Stahl, wenig härtbar	Eisenbahnschwellen, Schaufeln, Hufnägel, geknotete Springfedern.
3	0,25	47 bis 53	17 bis 22	Mittelweicher Stahl, härtbar	Achsen, Schmiedestücke, Radreifen, Velozipedrohre, Draht, Gabeln, Grubenschienen.
4	0,35	53 bis 60	14 bis 19	Mittelharter Stahl, gut härtbar	Gewehrläufe, Draht, Gußlaschen, Radreifen, Achsen, Pflugschare, Spaten, bessere Springfedern, Raspen, Griffstahl.
5	0,45	60 bis 68	11 bis 16	Zäher Werkzeugstahl	Schienen, Bandagen, Hämmer, Pflugschare, Sensen, Hacken, Spaten, Gabeln, Klingen, Scherenmesser, Ahlendraht, Holzfeilen, Raspen, beste Federn.
6	0,55	68 bis 76	9 bis 13	**Mittelharter Werkzeugstahl**	**Straßenbahnschienen, Radreifen, Matrizen, Hämmer, Kaltmeißel, Feilen, Pflugschare, Spaten, Gabeln, Sensen, Klingen, Döpper, Korsettstahl, Hartdraht, beste Federn, Seildraht.**
7	0,65	76 bis 84	6 bis 11	**Harter Werkzeugstahl**	**Radreifen f. elektrischen Betrieb, Gewehrläufe f. Militärgewehre, Geschosse, Sägenbleche, Meißel, Feilen, Steinbohrer, Kabeldraht, Förderseile.**
8	0,75	84 bis 92	3 bis 8	**Sehr harter Werkzeugstahl**	**Geschosse, naturharte Sägebleche, Kugeln für Kugelmühlen, Stempel, Regenschirmdraht.**
9	0,80	92 bis 100	2 bis 5	**Hartstahl**	**Hartwalzen, Gewindebohrer, Dreh- und Hobelstähle, Federmesser, Nadeln, Regenschirmdraht**

Digitized by Google

β) Schädliche Nebenbestandteile.

Sie beeinträchtigen die Festigkeitseigenschaften des Schmiedeisens, u. zw. um so mehr, je höher der Kohlenstoffgehalt ist.

Schwefel vermindert ferner die Schmied- und Schweifsbarkeit, macht das Eisen brüchig im rotwarmen Zustande (Rotbruch); zulässige Gehalte s. u.

Phosphor macht das Eisen im warmen und kalten Zustande spröde (Kaltbruch); zulässige Gehalte s. u.

Sauerstoff vermindert die Schmied- und Schweifsbarkeit, erzeugt Rotbruch.

Arsen wirkt ähnlich wie Phosphor.

Im Grauguſs zeigt sich die schädliche Wirkung erst bei bedeutend höheren Gehalten als im Schmiedeisen. Phosphor bewirkt, daſs der Guſs dünnflüssig und dicht wird.

b. Einteilung.

1. Roheisen. Nicht schmiedbar, spröde, beim Erhitzen plötzlich schmelzend. Kohlenstoffgehalt über 2,6 % (theoretische Grenze zwischen Roheisen und Schmiedeisen ist Punkt E_1 des Diagramms Abb. 19).

2. Graues Roheisen. Der gröſsere Teil des Kohlenstoffgehaltes wird infolge der Wirkung von Si nach der Erstarrung als Graphit ausgeschieden. Bruchfläche grau.

3. Weiſses Roheisen. Beinahe der gesamte Kohlenstoff ist infolge eines gröſseren Mangangehaltes gebunden. Bruchfläche weiſs. Härter, spröder als graues Roheisen.

„Meliertes", „graumeliertes", „halbiertes" Roheisen u. a. sind Sorten, die nach Zusammensetzung und Bruchaussehen zwischen 2. und 3. liegen. Für die Bewertung des Roheisens ist die Analyse maſsgebend, Beurteilung nach dem Bruchaussehen ist unzureichend.

4. Schmiedbares Eisen (Schmiedeisen). Schmiedbar und, wenn ausgeglüht, in gewöhnlicher Temperatur zäh und biegsam. Beim Erhitzen allmählich bis zum Schmelzen erweichend. Gehalt an C 0 bis 1,6 %, selten höher.

5. Fluſseisen und Fluſsstahl. Im flüssigen Zustande erzeugt. Schlackenfrei oder mit geringem Schlackengehalt.

6. Schweiſseisen und Schweiſsstahl. Im nichtflüssigen, teigartigen Zustande erzeugt, schlackenhaltig, aus zahlreichen einzelnen Teilen zusammengeschweiſst.

Als Stahl bezeichnet man härtbares Schmiedeisen. Härtbarkeit beginnt bei einem Kohlenstoffgehalt von 0,35 %. Nach anderer Festsetzung wird Schmiedeisen von einer Zerreiſsfestigkeit über 50 kg/qmm als Stahl bezeichnet.

Zwischen Roheisen und Schmiedeisen besteht ein allmählicher Uebergang der Eigenschaften, jedoch werden Eisensorten mit 1,6 bis 2,6 % C selten hergestellt.

Benennung der Eisensorten nach der Erzeugung und besondere Bezeichnungen einzelner Erzeugnisse s. u.

Anwendung der verschiedenen Kohlenstoffgehalte und Bezeichnung des Fluſseisens und Fluſsstahles nach Härtegraden s. „Härteskala" S. 628.

Digitized by Google

2. Zustandsänderungen und Wärmebehandlung.

a. Zustandsänderungen.

Bei der Erhitzung und Abkühlung verändert das Eisen oberhalb 700° seinen inneren Aufbau je nach dem Kohlenstoffgehalt bei verschiedenen Temperaturen (Diagramm Abb. 19).

Zustand der Eisen-Kohlenstoff-Legierungen in den Feldern des Diagramms.

Oberhalb AB_1 Schmelzfluſs.

AE_1B_1 Gemisch aus Schmelze und festen Kristallen. Gebiet der Seigerung.

AE_1SO feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen.

OSR feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen, darin ausgeschieden Kristalle reinen Eisens.

E_1STB_1 feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen, darin ausgeschieden Karbidkristalle.

RSV (Zustand der überwiegenden Menge alles schmiedbaren Eisens bei gewöhnlicher Temperatur) Kristalle reinen Eisens (Ferrit) zusammen mit einem feinlamellaren Gemenge (Perlit) von Karbid und reinem Eisen. (Anteil des Perlites wächst zwischen R und S von 0 auf 100 %.)

TSV Karbidkristalle (Zementit) zusammen mit Perlit.

Zustandsänderungen an den Linien des Diagramms.

AB_1 beginnende Erstarrung bzw. vollendete Schmelzung.

AE_1 vollendete Erstarrung bzw. beginnende Schmelzung.

OS Ausscheidung von reinem Eisen aus der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff.

E_1S Ausscheidung von Karbid Fe_3C aus der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff.

RST Umwandlung der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff in ein feinlamellares Gemenge von Karbid und Eisen.

Die Linie FE bezeichnet die Löslichkeit von Graphit und Temperkohle im festen Eisen bei langdauerndem Glühen.

Die **Graphitbildung** geht nach der Erstarrung vorzugsweise in einem engen Temperaturbereich vor sich (schraffierter Streifen des Diagramms), u. zw. um so reichlicher, je langsamer dieser Temperaturbereich durchlaufen wird. Ein Siliziumgehalt des Eisens befördert und beschleunigt die Graphitbildung, ebenso geringe Mengen von Aluminium. Der Graphitbildung entgegen wirken Mangan, ferner Schwefel.

Abscheidung von **Temperkohle** (fein verteilter, anscheinend amorpher, fester Kohlenstoff) findet im siliziumhaltigen, manganarmen weifsen Roheisen bei längerem Glühen in Temperaturen von 800° und höher statt.

Ungewollte Abscheidung von Temperkohle, insbesondere im Kern kaltgereckten Materials, kann Ursache von Brüchen werden (Schwarzbrüchigkeit).

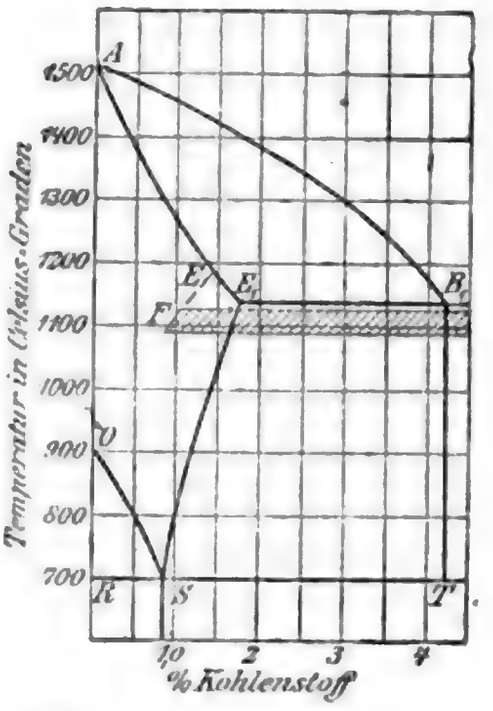
b. Wärmebehandlung.

Härten. Durch schnelles Abkühlen (Abschrecken) wird die Perlitbildung verhindert. Der Kohlenstoff bleibt in fester Lösung, sog.

Digitized by Google

„Härtungskohle". Das Material zeigt erhöhte Festigkeit, ist hart und spröde (innere Spannungen). Beste Härtetemperatur für reinen Kohlenstoffstahl von 1% C ~ 750°. Sonderbestandteile beeinflussen die Temperaturen und Geschwindigkeiten der Zustandsänderungen. Sonderstähle haben deshalb je nach Zusammensetzung besondere Härte- und Anlafstemperaturen und Härteverfahren.

Abb. 19.



Durch Anlassen (Erhitzen der abgeschreckten Stähle auf 100 bis 700°) werden die Sprödigkeit gemindert und die Festigkeit erhöht, die Ritzhärte vermindert; bei den höheren Anlafshitzen gewinnt das Material Zähigkeit.

Durch Härten in Oel (geschmolzenem Talg, geschmolzenem Blei), werden in einer Vornahme ähnliche Wirkungen erreicht wie durch Härten in Wasser mit nachfolgendem Anlassen.

Härterisse entstehen durch zu hohes Erhitzen oder zu schroffes Abschrecken, auch als Folge bereits vorhandener Spannungen. Daher ist mitunter Ausglühen vor dem Härten angezeigt.

Vergüten nennt man Gütevermehrung von Konstruktionsstahl durch Abschrecken und (meist weitgehendes) Anlassen.

Einsatzhärtung: Durch Glühen von Stahlwaren (weicher Kohlenstoffstahl oder Nickel- oder Chrom-Nickel-Stahl) in Kohlenstoff abgebenden Mitteln (Härtepulvern) findet eine Kohlung der äufsersten Oberfläche statt, wodurch diese mit gröfserer Härte versehen und hartbar wird, während das Innere zäh und dehnbar bleibt.

Ausglühen: Spannungen werden durch $^1/_2$stündiges Erhitzen oberhalb *OST* (Abb. 19) beseitigt Die Festigkeit des Stahles hängt von der Geschwindigkeit ab, mit der die Linie *RST* (Perlitbildung) bei der Abkühlung überschritten wird. Durch sehr langsame Abkühlung (1° in 2 Min. zwischen 750 und 650°) erlangt Stahl seine gröfstmögliche Weichheit und Dehnbarkeit; einmaliges kurzes Erhitzen auf 800° gibt solchem weichgeglühten Material die ursprünglichen Eigenschaften wieder.

Ueberhitzung. Durch längeres Erhitzen weit über die Linie *OST* (Abb. 19) werden die Festigkeitseigenschaften des Schmiedeisens verdorben (geringe Schlagfestigkeit). $^1/_2$stündiges Glühen bei 900° hebt bei weichem Material die schädliche Wirkung der Ueberhitzung auf. Stahl kann durch Härten mit nachfolgendem Glühen oder doppeltes Härten wieder brauchbar werden.

3. Die Erzeugung der verschiedenen Eisensorten und ihre Eigenschaften.

a. Roheisen.

Die für die Roheisenerzeugung in Betracht kommenden Erze werden in folgende Hauptgruppen eingeteilt:

Digitized by Google

Name	Eisen gebunden als		Eisengehalt der Verbindung	Eisengehalt des getrockneten Erzes	Bemerkungen
	Verbindung	Formel	%	%	
Spateisensteine	Eisenkarbonat	$FeCO_3$	48,27	33 bis 40	meist phosphorarm
Brauneisensteine	Eisenhydroxyd mit wechselndem Wassergehalt	$2Fe_2O_3 + \sim 3H_2O$	—	25 „ 62	„Minette" sind lothringische phosphorreiche Brauneisensteine
Roteisensteine	Eisenoxyd	Fe_2O_3	70	48 „ 63	
Magneteisensteine	Eisenoxyduloxyd	Fe_3O_4	72,4	60 „ 70	Hauptfundort Schweden

Roheisensorten.*)

Bezeichnung	C %	Si %	Mn %	P %	Bruchaussehen	Nebenbestandteile zusammen %	Eisengehalt %	Ungefähre Koksbedarf für 100 kg Roheisen kg
1. Puddelroheisen Lothring.-Luxemburg. Qualität	3,3—3,6	0,2— 0,8	0,3— 0,6	1,50—2,0	weifs halbiert	5,30— 7,0	94,70—93,0	90—120
2. Qualitätspuddeleisen	3,5—3,8	0,3— 1,0	3,0— 5,0	0,10—0,3	weifs halbiert	6,90—10,1	93,10—89,9	
3. Stahleisen	3,5—4,0	0,3— 1,0	3,0— 6,0	00,8—0,3	weifs	6,88—11,3	93,12—88,7	95—120
4. Thomaseisen	3,5	0,3— 1,0	1,0— 1,5	1,70—2,0	weifs halbiert bis weifs halbgrau	6,50— 8,0	93,50—92,0	90—115 aus Minetten bis 125
5. Bessemerroheisen	3,5	1,5— 2,0	1,0	0,1	grau	6,10— 6,6	93,90—93,4	110
6. Gießereiroheisen a) phosphorarm	4,0	2,0— 3,0	1,0	0,1	grau	7,10— 8,1	92,90—91,9	110—125
b) mittlerer Phosphorgehalt	4,0	2,0— 3,0	0,6	0,6	grau	7,20— 8,2	92,80—91,8	
c) mit hohem Phosphorgehalt	4,0	2,0— 3,0	0,5	1,7	grau	8,20— 9,2	91,80—90,8	
7. Spiegeleisen	4,0—5,0	1,3— 0,2	10,0—30,0	0,1	weifs	14,60—36,4	85,40—63,6	110—150 u. m.
8. Ferromangan (Eisenmangan)	5,0—7,5	1,3— 0,2	20,0—80,0	0,2	weifs	26,50—87,9	73,50—12,1	140—175
9. Ferrosilizium (Siliziumeisen)	1,6—0,8	12,0—16,0	1,0	0,1	meliert	14,70—17,9	85,30—82,1	250—300
10. Silikospiegel (Siliziumspiegel)	1,4	12,0	19,0	0,2	weifs	32,6	67,4	

*) Nach Osann.

Digitized by Google

Deutschland einschl. Luxemburg verhüttet ~ 60 % eigener Erze, 40 % werden (aus Schweden, Spanien, Algier, Rufsland u. a.) eingeführt.

Die Erze (mitunter brikettiert, geröstet oder magnetisch aufbereitet) werden mit Koks (in holzreichen Ländern mit Holzkohle) in Hochöfen fortläufig niedergeschmolzen (je nach der Reichhaltigkeit der Erze, der Gröfse des Ofens und der zu erblasenden Roheisensorte 90 bis 130 kg Koks für 100 kg Roheisen), wobei heifser Wind (600 bis 900°) in den Ofen geblasen wird. Tageserzeugung grofser deutscher Oefen 250 bis 400 t.

Die Schlacke wird vielseitig verwendet, u. a. a) granuliert für Mauerzwecke oder zur Schlackensteinherstellung, auch als Spülversatz; b) in Klötze gegossen, nach dem Erkalten zerschlagen als Packlage bei Wegebauten oder Kleinschlag bei Gleisen; c) zu Eisenportlandzement verarbeitet; d) in Würfel gegossen, die als Pflastersteine verwendet werden. Nicht benutzte Schlacke wird zur Halde gefahren.

Die aus Gebläsewind und Beschickung entstandenen, den Ofen verlassenden Gichtgase sind brennbar und werden zur Beheizung der Winderhitzer und nach umfangreicher Gasreinigung zur Krafterzeugung benutzt. Wärmewirtschaft eines Hochofenwerkes „Stahl u. Eisen" 1910 Nr. 16. Die Erzeugung der Gichtgase zu Kraftzwecken kann für ein Hüttenwerk wirtschaftlich wichtiger als die Roheisengewinnung sein. Die Erhitzung des Gebläsewindes geschieht in steinernen Winderhitzern (Cowper-Apparaten). In der Regel vier Winderhitzer für einen Hochofen. Die für den Hochofenbetrieb erforderlichen Koksmengen werden mitunter auf den Hüttenwerken selbst hergestellt (Verwendung der Abgase zur Krafterzeugung, Weiterverarbeitung der Destillationsprodukte).

Bei der Erzeugung von Thomasroheisen wird das in mehreren Hochöfen gewonnene Roheisen flüssig in Roheisenmischern (150 bis 1000 t Inhalt) angesammelt, wodurch die Unterschiede der einzelnen Abstiche ausgeglichen werden und zugleich eine Abscheidung des Schwefels stattfindet.

b. Schmiedbares Eisen.

1. Thomas-Flufseisen.

Das von den Mischern flüssig herangebrachte oder in grofsen Kupolöfen niedergeschmolzene Roheisen wird in birnenförmige, mit Dolomitmasse (basische Masse) ausgekleidete Gefäfse gegossen und darauf, durch den mit Düsen versehenen Boden, Wind von etwa 2 at Pressung durch das flüssige Metall hindurchgeblasen. Flüssiger Inhalt der Birnen 8 bis 25 t. Zusatz von gebranntem Kalk (~ 15 % des Roheisengewichts) zur Schlackenbildung. Durch den Wind werden die Nebenbestandteile Si, Mn, C und P verbrannt und dadurch vergast oder verschlackt, insbesondere geht der Phosphor in die Schlacke (Wert der Thomasschlacke als Düngemittel). Das fertig erblasene Eisen wird durch Zusätze mit dem gewünschten Gehalt an Kohlenstoff versehen (Rückkohlung) und in gufseisernen Formen zu Blöcken vergossen. Blasdauer eines Einsatzes 10 bis 12 Min., wobei die Temperatur des flüssigen Eisens von rund 1200 auf über 1600° steigt.

Zusammensetzung des Thomas-Flufseisens und -Flufsstahls: C 0,05 bis 0,55, S unter 0,08, P unter 0,08 (s. a. Härteskala).

Das Windfrischen in Birnen, die mit gemahlenem Sandstein oder Quarz (saure Masse) ausgefüttert sind (Bessemer- oder saures Ver-

Digitized by Google

fahren), verlangt phosphorarme Erze und wird daher in Deutschland nur auf wenigen Hüttenwerken betrieben.

2. Siemens-Martin-Flufseisen und -Stahl.

Roheisen wird mit Schrott (Schmiedeisenabfälle) in flachen Herdöfen mit Gas-Regenerativfeuerung eingeschmolzen und durch langsame Verbrennung der Nebenbestandteile unter Zuschlag von Kalk gefrischt. Das S.-M.-Verfahren kann auch ausschliefslich mit Schrotteinsatz als reiner Umschmelzprozefs durchgeführt werden oder als „Roheisen-Erz-Prozefs", wobei flüssig eingebrachtes Roheisen durch reine Eisenerze gefrischt wird. Bei Erzeugung von Sonderstahl wird dem flüssigen Metall durch Zusätze der gewünschte Gehalt an C, Mn, Ni, Cr u. a. gegeben.

Zusammensetzung des S.-M.-Flufseisens (s. a. Härteskala):

Weichstes Material	C 0,05,	P unter 0,03,		
Gewöhnliches weiches Material .	C 0,10,	P „	0,05,	Mn 0,4
Mittelhartes Material	C 0,15,	P „	0,08,	Mn 0,5
Sehr hartes „	C 0,8,	P „	0,08,	Mn 1,5.

Näheres über Kohlenstoffgehalt und Verwendungszwecke s. Härteskala S. 628.

3. Tiegelstahl.

Abgewogene Mengen reinen Schmiedeisens, zusammen mit etwa gewünschten Zusätzen (Ni, Cr, Wo, Mo, V usw.), werden nach der Analyse gattiert, in Tiegeln umgeschmolzen und darauf gemeinsam vergossen. Blasen- und schlackenfreies Erzeugnis von vorzüglichen Festigkeitseigenschaften.

Zusammensetzung: C, Mn und Sondermetalle nach Einsatz. Si meist nicht unter 0,25 %.

4. Elektro-Stahl.

Flüssiges oder kaltes Schmiedeisen als Einsatz wird auf basischem Futter mit einer stark kalkhaltigen Schlacke durch die Wärmewirkung des elektrischen Stromes hoch erhitzt. Weitgehende Beseitigung der schädlichen Bestandteile. Ruhiger Gufs. Bequemes Einführen der gewünschten Zusätze (Ni, Cr, Wo, Mo, V usw.); ebenmäfsiges Erzeugnis von vorzüglichen Eigenschaften, welches dem Tiegelstahl gleichzukommen scheint. Ofenarten: 1. Erhitzung durch Lichtbogen: Oefen von Héroult, Girod, Stassano, Nathusius u. a; 2. Erhitzung durch Induktionsstrom: Oefen von Kjellin und Röchling-Rodenhauser u. a.

5. Schweifseisen.

Roheisen wird in Berührung mit Sauerstoff abgebender Schlacke (Eisenoxyd) und auf ebensolchem Futter in Flammöfen (Puddelöfen) mit einem oder zwei Herden von 300 bis 500 kg Inhalt eingeschmolzen und von Hand mit eisernen Stangen gerührt (gepuddelt), bis durch Luft und Schlacke die Nebenbestandteile oxydiert sind. Dabei wird das Metall teigig. Es wird zu einzelnen Klumpen von $\sim$ 60 kg („Luppen") vereinigt und dieses zu „Rohschienen" ausgewalzt. Die Rohschienen werden nach dem Bruchaussehen sortiert und (mitunter auch mit alten Eisenabfällen) paketiert. Die Pakete schweifst man

Digitized by Google

zusammen und walzt sie weiter aus. Der Gehalt an Schwefel soll im Qualitätsschweifseisen nicht höher als 0,08, der Gehalt an Kupfer nicht höher als 0,35 sein. Die Festigkeit beträgt 34 bis 38 kg bei 12 bis 20 % Dehnung. Schweifseisen enthält bis 4 % Schlacke.

Zementstahl. Weiches Eisen (in der Regel Schweifseisen) wird mit Holzkohle in Glühkisten etwa 8 Tage geglüht und dabei durch Kohlenstoffaufnahme (C-Gehalt nach dem Zementieren 0,9 bis 1,5) zu Stahl. Dieser wird in der Regel als Einsatz für den Tiegelprozefs verwendet.

4. Formgebungsarbeiten.

(Ausführliche Angaben über Einrichtung und Betrieb der Walzwerke, Röhrenwalzwerke, Walzenzugmaschinen, Hülfsmaschinen, Zurichtemaschinen, Oefen, ferner über Hammer- und Prefswerke sowie über Eisengiefserei s. „Hütte, Taschenbuch für Eisenhüttenleute".)

I. Bildsame Formgebung.

a) Walzen.

1. Warm walzen: überwiegende Menge alles erzeugten schmiedbaren Eisens wie Schienen, Schwellen, Formeisen, Stabeisen, Walzdraht, Bleche.

2. Kalt walzen: Bandeisen und Bandstahl von 5 mm bis 0,05 mm Dicke.

Die Preise der kalt gewalzten Erzeugnisse wachsen beträchtlich mit abnehmender Dicke, da weitgehende Kaltreckung nur mittels eingeschalteter Glühungen möglich.

b) Ziehen.

1. Warm ziehen: Rohre.

2. Kalt ziehen: Draht unter 5 mm Querschnitt. Formeisen aller Stärken und Formen. Genaues Mafs, blanke Oberfläche.

Kalt gezogener Stahl wird auch als „Silberstahl", „Atlasstahl" usw. bezeichnet.

c) Schmieden oder Pressen.

1. Warm mittels Hämmern oder Pressen. Formgebung freihändig oder durch Gesenke. Schmiedestücke jeder Gröfse.

2. Kalt: Stanzen und Pressen von Blech, Bandeisen, Formeisen u. a.

II. Gießerei.

Schwindmafs für Grauguís 0,9 bis 1,35 %, für Stahlguís ~ 2 %.

a) Eisengiefserei.*)

Roheisen verschiedener Zusammensetzung und Stahlabfälle (auch brikettiert) werden in Kupolöfen (selten Flammöfen) umgeschmolzen und in Sandformen oder gufseisernen „Dauerformen" vergossen. Prüfung am besten durch die Biegeprobe.

Hartguís. Gufseisen besonderer Zusammensetzung wird in eiserne Formen gegossen. Dadurch erstarrt die äufsere Schale infolge der schnellen Abkühlung weifs und wird hart.

b) Stahlgiefserei.

Schmelzen von Schrott und feinem Roheisen im sauren oder basischen Martinofen oder elektrischen Ofen oder Frischen von reinem,

*) Zusammensetzung von Grauguís S. 636.

Digitized by Google

im Kupolofen geschmolzenem Roheisen in der kleinen Bessemerbirne und darauf Vergiefsen des Stahles in feuerfeste Formen.

Der Stahlformguſs (Stahl-Fassonguſs, Stahlguſs) wird mit Festigkeiten von 40 bis 100 kg hergestellt.

c) Tempergiefserei.

(Schmiedbarer Guſs, Weichguſs, Tempergufs, Temperstahlguſs). Aus Kupolöfen (Flammöfen, Tiegelöfen) wird silizium- und manganarmes Roheisen in Sandformen vergossen. Wegen seines geringen Siliziumgehaltes erstarrt es weifs. Die Guſswaren werden mit Sauerstoff abgebender Masse (Eisenerze) in Glühtöpfe verpackt und 4 bis 6 Tage geglüht (getempert). Dadurch werden sie entkohlt und infolgedessen weich, biegsam und schmiedbar. Festigkeit des Tempergusses 32 bis 36 kg, Dehnung 1 bis 1,5 %.

Zusammensetzung von Grauguſs.*)

	C %	Si %	Mn %	P %	S %	s_C**)
Geschirr- und Ofenguſs . .		~3	0,4—0,8	1 u. m.	< 0,1	0,9—1
Röhrenguſs		n. Wandst.	< 1	1 u. m.	< 0,12	0,9—1
Guſswaren mittlerer Festigkeit, leicht bearbeitbar (Maschinenguſs usw.) . .		" "	0,4—0,8	0,5—0,8	< 0,12	0,9—1
Maschinenguſs höherer Festigkeit:						
a) Lokomotivzylinder .	3,2—3,57	1—1,4	0,6—0,9	0,7—0,9	< 0,12	0,83
b) Dampf-, Gasmotoren-, Preſszylinder usw. .	2,9—3,2	0,81—1,5	0,3—0,7	0,2—0,6	< 0,12	0,76—0,8
Kokillenguſs	~3,5	1,6—2,5	0,8—1	< 0,1	< 0,1	0,9—1
Walzenguſs	2,0—3,4	0,5—0,8	0,6—1,2	< 0,5	< 0,1	0,71—0,83
Hartguſs	3,5—3,8	0,5—0,9	0,3—0,5	0,2—0,5	0,08—0,15	0,75—0,88
Dynamoguſs (nach West, Metallurgy of iron)	2,95	3,19	0,35	0,89	< 0,12	0,87
Säurebeständiger Guſs . .	3,2	1,7	0,8	0,15	0,03—0,04	0,85

5. Handelsfabrikate des Eisens.

Einteilung der Stahl- und Walzwerksprodukte.

(Aufgestellt vom Stahlwerksverband.)

Sämtliche Stahl- und Walzwerkserzeugnisse werden im Stahlwerksverband eingeteilt in zwei Hauptgruppen: Produkte A und Produkte B.

Produkte A.

a) Gruppe Halbzeug: Rohe und vorgewalzte Blöcke und Brammen, Knüppel und Platinen, Breiteisen und Puddelluppen;

*) Nach E. Heyn.

**) s_C = Sättigungsgrad für Kohlenstoff $= \frac{C}{4{,}26 - \frac{Si}{3{,}6}}$, worin C der Gehalt an Kohlenstoff, Si der Gehalt an Silizium in % ist.

Digitized by Google

b) Gruppe Eisenbahnoberbaumaterial: Eisenbahnschienen, auch Rillen- und sonstige Schienen, Eisenbahnschwellen, Laschen und Unterlagsplatten, Hakenplatten, Radlenker u. dgl.;
c) Gruppe Formeisen: I- und ⊔-Eisen von 80 mm Höhe und mehr, sowie Zoreseisen.

Anmerkung. Solche Artikel, welche irgend einen anderen Namen führen, aber auf den gleichen Walzenstraßen wie die vorbezeichneten Artikel hergestellt werden oder hergestellt werden können und ihrer Natur nach zu einem der obigen Fabrikate gehören, gleichgültig, ob es sich um bereits bekannte oder erst später zur Einführung gelangende Profile oder Sorten handelt, sind ebenfalls Produkte A und fallen unter die Gruppe, zu der sie nach Vorstehendem gehören.

Produkte B.

a) Gruppe Stabeisen: Universal- und Flacheisen, auch Röhrenstreifen und Weichenplatten, Rund- und Quadrateisen, sonstiges Stab- und Stabformeisen, Bandeisen sowie Klemmplatteneisen und Streckdraht;
b) Gruppe Walzdraht;
c) Gruppe Bleche: Grobbleche 5 mm dick und dicker. Feinbleche jeder Art unter 5 mm dick, Riffelbleche, Warzenbleche und Bleche mit sonstigem Walzmuster;
d) Gruppe Röhren;
e) Gruppe Guß- und Schmiedestücke: Eisenbahnachsen, Räder und Radreifen, Schmiedestücke, Stahlgußstücke, Stahlwalzen und alle anderen Stahlfabrikate, die nicht in einer anderen der vorstehenden Gruppen verrechnet werden.

Angaben über einige Erzeugnisse.

1. **Rohre aus Gußeisen oder Schmiedeisen**, s. 6. Abschn., Maschinenteile (unter „Rohre").

2. **Walzeisen.**

a) **Profileisen.** Winkeleisen (gleich- und ungleichschenklig, innen voll oder scharf), T-, I-, Z-, [-Eisen, Quadrant- und Belageisen, Handleisten- und Wulsteisen; +-, Sechskant-, Halbrund-, Oval-, Sprossen-, Schlagleisten-, Roststabeisen, Nageleisen (für Schienennägel) ⊢, Faßreifeneisen für eiserne Fässer I usw.

Den Eisenkonstruktionen sind die **Deutschen Normalprofile***) zugrunde zu legen, die in den folgenden Tafeln enthalten sind. In den Tafeln sind nur Fertigprofile aufgeführt; Vorprofile (Zwischenprofile) können u. Umst. durch veränderte Walzenstellung der Fertigprofile erhalten werden, werden jedoch nur bei L-Eisen geliefert.

Als Normallängen für Formeisen gelten die, in denen ein Profil ohne Aufpreis geliefert wird (4 bis 10 m bei [-Eisen, bei I-Eisen 4 bis 12 m). Die größten Längen schwanken zwischen 12 und 16 m, bei

(Fortsetzung S. 660.)

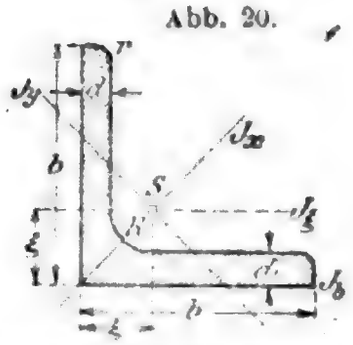
*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bau- und Schiffbauzwecken, gemeinschaftlich herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, vom Verein deutscher Eisenhüttenleute und vom Verein deutscher Schiffswerften. Erster Band: Normalprofile für Walzeisen zu Bauzwecken, 7. Aufl. 1908; Verlag der Buchhandlung der Aachener Hütten-Aktien-Gesellschaft Rothe Erde und Lith. Anstalt (Jos. Deterre) in Aachen (bis 1. Januar 1914 unverändert).

Digitized by Google

Deutsche Normalprofile für Walzeisen.*)

Bemerkung. Die in den Tafeln angegebenen **Gewichte** g in kg/m gelten für **Flufseisen** (spez. Gew. = 7,85).

Abb. 20.



1. Gleichschenklige Winkeleisen.

Normallängen = 4 bis einschl. 12 m.
Gröfste Längen = 12 bis 16 m.
Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke
$R = 1/3\ (d_{min} + d_{max})$.
Abrundungshalbmesser der Schenkelenden $r = 1/3\ R$ (auf halbe mm abgerundet).
Schwerpunktabstand $\xi \sim 1/4\ b + 0{,}36\ d$.
Vorprofile mit gleicher Schenkelbreite und 1 mm gröfserer Schenkelstärke werden gewalzt.

Profil-Nr.	Breite b mm	Stärke d mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Schwerpunktabstand ξ mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_ξ cm⁴	$J_x = max$ cm⁴	$J_y = min$ cm⁴	Profil-Nr.
1½	15	3	0,82	0,64	4,8	0,34	0,15	0,24	0,06	1½
		4	1,05	0,82	5,1	0,46	0,19	0,29	0,08	
2	20	3	1,12	0,88	6,0	0,79	0,39	0,62	0,15	2
		4	1,45	1,14	6,4	1,08	0,48	0,77	0,19	
2½	25	3	1,42	1,12	7,3	1,55	0,79	1,27	0,31	2½
		4	1,85	1,45	7,6	2,07	1,01	1,61	0,40	
3	30	4	2,27	1,78	8,9	3,60	1,81	2,85	0,76	3
		6	3,27	2,57	9,6	5,50	2,49	3,91	1,06	
3½	35	4	2,67	2,10	10,0	5,63	2,96	4,68	1,24	3½
		6	3,87	3,04	10,8	8,65	4,14	6,50	1,77	
4	40	4	3,08	2,42	11,2	8,34	4,48	7,09	1,86	4
		6	4,48	3,52	12,0	12,8	6,33	9,98	2,67	
		8	5,80	4,55	12,8	17,4	7,89	12,4	3,38	
4½	45	5	4,30	3,38	12,8	14,9	7,83	12,4	3,25	4½
		7	5,80	4,00	13,6	21,2	10,4	16,4	4,39	
		9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	19,8	5,40	
5	50	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	17,4	4,59	5
		7	6,56	5,15	14,9	29,1	14,6	23,1	6,02	
		9	8,24	6,47	15,6	37,9	17,9	28,1	7,67	
5½	55	6	6,31	4,95	15,6	32,7	17,3	27,4	7,24	5½
		8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	34,8	9,35	
		10	10,07	7,90	17,2	56,1	26,3	41,4	11,27	
6	60	6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,8	36,1	9,43	6
		8	9,03	7,09	17,7	57,4	29,1	46,1	12,1	
		10	11,07	8,69	18,5	72,7	34,9	55,1	14,6	

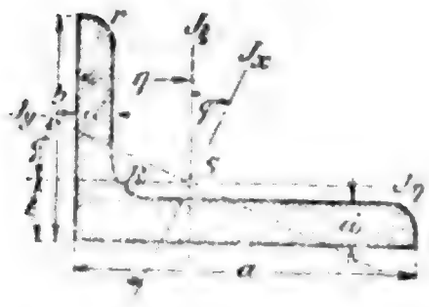
*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bauzwecken, s. Anm. S. 637.

Digitized by Google

Profil-Nr.	Breite b mm	Stärke d mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Schwerpunktabstand ξ mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_ξ cm⁴	$J_x = \max$ cm⁴	$J_y = \min$ cm⁴	Profil-Nr.
		7	8,70	6,83	18,5	63,2	33,4	53,0	13,8	
6½	65	9	10,98	8,62	19,3	82,2	41,3	65,4	17,2	6½
		11	13,17	10,34	20,0	101	48,8	76,8	20,7	
		7	9,4	7,38	19,7	78,8	42,4	67,1	17,6	
7	70	9	11,9	9,34	20,5	103	52,6	83,1	22,0	7
		11	14,3	11,23	21,3	127	61,8	97,6	26,0	
		8	11,5	9,03	21,3	111	58,9	93,3	24,4	
7½	75	10	14,1	11,07	22,1	140	71,4	113	29,8	7½
		12	16,7	13,11	22,9	170	82,4	130	34,7	
		8	12,3	9,66	22,6	135	72,3	115	29,6	
8	80	10	15,1	11,85	23,4	170	87,5	139	35,9	8
		12	17,9	14,05	24,1	206	102	161	43,0	
		9	15,5	12,17	25,4	216	116	184	47,8	
9	90	11	18,7	14,68	26,2	266	138	218	57,1	9
		13	21,8	17,11	27,0	317	158	250	65,9	
		10	19,2	15,07	28,2	329	177	280	73,3	
10	100	12	22,7	17,82	29,0	398	207	328	86,2	10
		14	26,2	20,57	29,8	468	235	372	98,3	
		10	21,2	16,64	30,7	439	239	379	98,6	
11	110	12	25,1	19,70	31,5	529	280	444	116	11
		14	29,0	22,77	32,1	618	319	505	133	
		11	25,4	19,94	33,6	627	341	541	140	
12	120	13	29,7	23,31	34,4	745	394	625	162	12
		15	33,9	26,61	35,1	863	446	705	186	
		12	30,0	23,55	36,4	870	472	750	194	
13	130	14	34,7	27,24	37,2	1020	540	857	223	13
		16	39,3	30,85	38,0	1173	605	959	251	
		13	35,0	27,48	39,2	1176	638	1014	262	
14	140	15	40,0	31,40	40,0	1363	723	1148	298	14
		17	45,0	35,33	40,8	1554	805	1276	334	
		14	40,3	31,64	42	1556	845	1343	347	
15	150	16	45,7	35,87	43	1794	949	1507	391	15
		18	51,0	40,04	44	2039	1052	1665	438	
		15	46,1	36,19	45	2033	1099	1745	453	
16	160	17	51,8	40,66	46	2322	1226	1945	506	16
		19	57,5	45,14	46	2564	1348	2137	558	

Digitized by Google

Abb. 21.



2. Ungleichschenklige Winkeleisen.*)

Normallängen = 4 bis 12 m.

Magazinlängen = 4 bis 14 m in Abstufungen von 250 mm.

Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke

$$R = {}^1/_2\,(d_{\min} + d_{\max}).$$

Abrundungshalbmesser der Schenkelenden

$$r = {}^1/_2\,R \text{ (auf halbe mm abgerundet).}$$

Vorprofile mit gleichen Schenkelbreiten und 1 mm gröfserer Schenkelstärke werden gewalzt.

i (in mm) ist der lichte Abstand zweier ungleichschenkligen ⌋⌊, wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich grofs (also gleich $2 J_\xi$) sind.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm b	a	d	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerp. ξ mm	η mm	$\operatorname{tg}\varphi$	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	$J_x = \max$ cm⁴	$J_y = \min$ cm⁴	Abstand i mm
Schenkelverhältnis $b:a = 1:1{}^1/_2$.													
2/3	20	30	3	1,42	1,11	4,9	9,9	0,4216	1,25	0,45	1,42	0,28	5,2
			4	1,85	1,45	5,4	10,3	0,4214	1,60	0,56	1,82	0,33	4,3
3/4½	30	45	4	2,87	2,25	7,4	14,8	0,4334	5,77	2,05	6,63	1,19	8,6
			5	3,53	2,77	7,8	15,2	0,4288	6,99	2,46	8,01	1,44	7,1
4/6	40	60	5	4,79	3,76	9,7	19,5	0,4319	17,3	6,21	19,8	3,66	11,0
			7	6,55	5,14	10,5	20,4	0,4275	22,9	7,99	26,3	4,63	9,0
5/7½	50	75	7	8,33	6,54	12,4	24,7	0,4304	46,3	16,4	53,1	9,58	13,1
			9	10,5	8,24	13,2	25,6	0,4272	57,2	20,1	65,4	11,9	11,2
6½/10	65	100	9	14,2	11,15	15,9	33,1	0,4101	141	46,0	160	26,8	19,5
			11	17,1	13,42	16,7	34,0	0,4074	167	55,1	189	32,9	17,7
8/12	80	120	10	19,1	14,99	19,5	39,2	0,4348	276	98,2	317	56,8	22,1
			12	22,7	17,82	20,2	40,0	0,4304	323	115	370	67,5	20,1
10/15	100	150	12	28,7	22,53	24,2	48,9	0,4361	649	232	747	134	27,3
			14	33,2	26,06	25,0	49,7	0,4339	743	264	854	153	26,1
Schenkelverhältnis $b:a = 1:2$.													
2/4	20	40	3	1,72	1,35	4,4	14,3	0,2575	2,80	0,48	2,96	0,31	14,6
			4	2,25	1,77	4,8	14,7	0,2528	3,58	0,60	3,78	0,40	13,4
3/6	30	60	5	4,29	3,37	6,8	21,5	0,2544	15,6	2,61	16,5	1,71	21,2
			7	5,85	4,59	7,6	22,4	0,2479	20,7	3,41	21,8	2,28	19,1
4/8	40	80	6	6,89	5,41	8,8	28,5	0,2568	45,0	7,63	47,6	4,99	28,9
			8	9,01	7,07	9,6	29,4	0,2518	57,6	9,62	60,8	6,41	26,9
5/10	50	100	8	11,5	9,03	11,2	35,9	0,2665	116	19,6	123	12,8	35,5
			10	14,1	11,07	12,0	36,7	0,2658	141	23,5	150	14,6	33,7
6½/13	65	130	10	18,6	14,60	14,5	46,5	0,2569	320	54,2	339	35,4	46,6
			12	22,1	17,35	15,3	47,5	0,2549	373	62,9	395	41,3	44,4
8/16	80	160	12	27,5	21,59	17,7	57,2	0,2686	719	122	762	79,4	57,8
			14	31,8	24,96	18,5	58,1	0,2679	822	139	875	86,0	55,7
10/20	100	200	14	40,3	31,64	21,8	71,2	0,2608	1653	283	1754	182	73,1
			16	45,7	35,87	22,6	72,0	0,2586	1862	316	1973	205	71,2

*) Siehe auch S. 646.

Digitized by Google

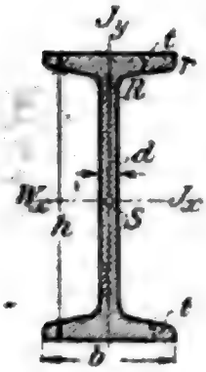


Abb. 22.

3. I-Eisen.

(Doppel-T-Eisen oder I-Eisen.)

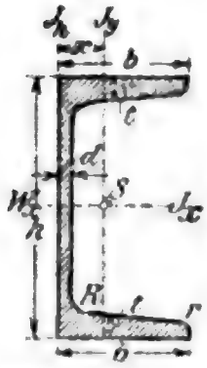
Normallängen = 4 bis 12 m.
Magazinlängen zwischen 4 bis 9 m Länge in Abstufungen von 200 mm, zwischen 9 bis 12 m von 250 mm.
Neigung der inneren Flanschflächen = 14 % (rd. 1 : 7).
Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch $R = d$.
Abrundungshalbmesser der inneren Flanschkanten $r = 0{,}6\,d$.
Die Flanschstärke t liegt im Abstande $^1/_4\,b$ beiderseits der Profilmitte, u. zw. ist $t \sim 1{,}5\,d$.
i (in mm) = Abstand zweier I, für d. die beiden Hauptträgheitsmom gleich grofs werden.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_y cm³	Widerstandsmoment W_x cm³	Abstand i mm	Profil-Nr.
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	6,29	77,8	3,00	19,5	6,14	8
9	90	46	4,2	6,3	9,00	7,07	8,78	117	3,82	26,0	6,94	9
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	12,2	171	4,88	34,2	7,74	10
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,66	16,2	239	6,00	43,5	8,52	11
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,15	21,5	328	7,41	54,7	9,29	12
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,64	27,5	436	8,87	67,1	10,1	13
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,37	35,2	573	10,7	81,9	10,8	14
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,01	43,9	735	12,5	98,0	11,6	15
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,90	54,7	935	14,8	117	12,4	16
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,78	66,6	1166	17,1	137	13,2	17
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,90	81,3	1446	19,8	161	14,0	18
19	190	86	7,2	10,8	30,6	24,02	97,4	1763	22,7	186	14,8	19
20	200	90	7,5	11,3	33,5	26,30	117	2142	26,0	214	15,6	20
21	210	94	7,8	11,7	36,4	28,57	138	2563	29,4	244	16,3	21
22	220	98	8,1	12,2	39,6	31,09	162	3060	33,1	278	17,1	22
23	230	102	8,4	12,6	42,7	33,52	189	3607	37,1	314	17,9	23
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,19	221	4246	41,7	354	18,7	24
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,01	256	4966	46,5	397	19,5	25
26	260	113	9,4	14,1	53,4	41,92	288	5744	51,0	442	20,2	26
27	270	116	9,7	14,7	57,2	44,90	326	6626	56,2	491	21,0	27
28	280	119	10,1	15,2	61,1	47,96	364	7587	61,2	542	21,8	28
29	290	122	10,4	15,7	64,9	50,95	406	8636	66,6	596	22,5	29
30	300	125	10,8	16,2	69,1	54,24	451	9800	72,2	653	23,3	30
32	320	131	11,5	17,3	77,8	61,07	555	12510	84,7	782	24,8	32
34	340	137	12,2	18,3	86,8	68,14	674	15695	98,4	923	26,3	34
36	360	143	13,0	19,5	97,1	76,22	818	19605	114	1089	27,8	36
38	380	149	13,7	20,5	107	84,00	975	24012	131	1264	29,4	38
40	400	155	14,4	21,6	118	92,63	1158	29213	149	1461	30,8	40
42½	425	163	15,3	23,0	132	103,62	1437	36973	176	1740	32,8	42½
45	450	170	16,2	24,3	147	115,40	1725	45852	203	2037	34,7	45
47½	475	178	17,1	25,6	163	127,96	2088	56481	235	2378	36,5	47½
50	500	185	18,0	27,0	180	141,30	2478	68738	268	2750	38,4	50
55*)	550	200	19,0	30,0	213	167,21	3488	99184	349	3607	42,4	55*)

*) $R = 0{,}6\,d$.

Digitized by Google

Abb. 23.



4. C-Eisen.

(E- oder U-Eisen).*)

Normallängen = 4 bis 10 m.
Magazinlängen mit Abstufungen von 200 mm zwischen 4 bis 9 m Länge und von 250 mm zwischen 9 bis 10 m.
Neigung der inneren Flanschflächen = 8 % (1 : 12,5).
Abrundungshalbmesser $R = t$ und $r = \frac{1}{2} t$ (auf halbe mm abgerundet).
Die Flanschstärke t liegt in der Mitte der Flanschbreite b.
i (in mm) ist der lichte Abstand zweier C, wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich groß (also gleich $2 J_x$) sind.

C-Eisen für allgemeine Zwecke.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerpunktes x mm	Trägheitsmoment J_h cm⁴	J_y cm⁴	J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_x cm³	Abstand i mm	Profil-Nr.
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	14,7	5,33	6,39	4,26	.	3
4	40	35	5	7	6,21	4,87	13,3	17,7	6,68	14,1	7,05	.	4
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	22,5	9,12	26,4	10,6	3,8	5
6½	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	14,2	32,3	14,1	57,5	17,7	15,4	6½
8	80	45	6	8	11,0	8,64	14,5	42,5	19,4	106	26,5	27,1	8
10	100	50	6	8,5	13,5	10,60	15,5	61,7	29,3	206	41,2	41,4	10
12	120	55	7	9	17,0	13,35	16,0	86,7	43,2	364	60,7	54,9	12
14	140	60	7	10	20,4	16,01	17,5	125	62,7	605	86,4	68,1	14
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,84	18,4	167	85,3	925	116	81,5	16
18	180	70	8	11	28,0	21,98	19,2	217	114	1354	150	94,7	18
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,28	20,1	278	148	1911	191	107,8	20
22	220	80	9	12,5	37,4	29,36	21,4	368	197	2690	245	120,5	22
24	240	85	9,5	13	42,3	33,21	22,3	458	248	3598	300	133,4	24
26	260	90	10	14	48,3	37,92	23,6	586	317	4823	371	146,0	26
28	280	95	10	15	53,3	41,84	25,3	740	399	6276	448	159,4	28
30	300	100	10	16	58,8	46,16	27,0	924	495	8026	535	172,4	30

C-Eisen für den Eisenbahnwagenbau.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Abstand d. Schwerpunktes x mm	Trägheitsmoment J_h cm⁴	J_y cm⁴	J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_x cm³	Abstand i mm	Profil-Nr.
10½	105	65	8	8	17,3	13,58	18,8	122	61,2	287	54,7	34,6	10½
11¾	117,5	65	10	10	22,6	17,74	19,1	160	77,1	447	76,1	42,7	11¾
14½	145	60	8	8	19,8	15,54	15,0	98,1	53,6	585	80,7	73,6	14½
23½	235	90	10	12	42,4	33,28	22,8	492	272	3429	292	127	23½
26	260	90	10	10	41,6	32,66	19,7	398	237	3900	300	148	26
30	300	75	10	10	42,8	33,60	15,0	241	145	4925	328	181	30

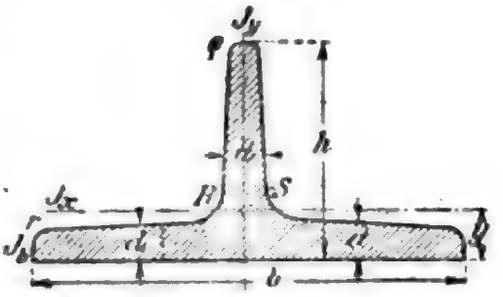
*) S. auch S. 650.

Digitized by Google

5. T-Eisen.

Normallängen = 4 bis 12 m.
Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.
Abrundungshalbmesser in den Winkelecken $R = d$,
Abrundungshalbmesser am Fufse $r = 1/2\,d$,
Abrundungshalbmesser am Stege $\rho = 1/4\,d$, jedoch r und ρ auf halbe mm abgerundet.
Neigungen bei breitfüfsigen T-Eisen: Steg je 4 %; Fufs je 2 %.
Neigungen bei hochstegigen T-Eisen: Steg und Fufs je 2 %.
Die Stärken d sind in den Abständen $1/2\,h$ bzw. $1/4\,b$ von aufsen gemessen.

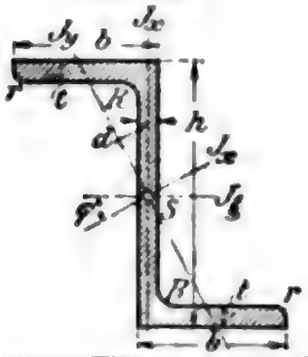
Abb. 24.



Profil-Nr.	Breite b mm	Höhe h mm	Stärke d mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Abstand des Schwerpunktes y mm	Trägheitsmoment J_b cm⁴	J_x cm⁴	J_y cm⁴
Breitfüfsige T-Eisen. $h : b = 1 : 2$.									
6/3	60	30	5,5	4,64	3,64	6,7	4,66	2,58	8,62
7/3½	70	35	6	5,94	4,66	7,7	8,01	4,49	15,1
8/4	80	40	7	7,91	6,21	8,8	13,9	7,81	28,5
9/4½	90	45	8	10,2	8,01	10,0	22,9	12,7	46,1
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	10,9	33,0	18,7	67,7
12/6	120	60	10	17,0	13,35	13,0	66,7	38,0	137
14/7	140	70	11,5	22,8	17,90	15,1	121	68,9	258
16/8	160	80	13	29,5	23,16	17,2	204	117	422
18/9	180	90	14,5	37,0	29,05	19,3	323	185	670
20/10	200	100	16	45,4	35,64	21,4	485	277	1000
Hochstegige T-Eisen. $h : b = 1 : 1$.									
2/2	20	20	3	1,12	0,88	5,8	0,76	0,38	0,20
2½/2½	25	25	3,5	1,64	1,29	7,3	1,74	0,87	0,43
3/3	30	30	4	2,26	1,77	8,5	3,35	1,72	0,87
3½/3½	35	35	4,5	2,97	2,33	9,9	6,01	3,10	1,57
4/4	40	40	5	3,77	2,96	11,2	10,0	5,28	2,58
4½/4½	45	45	5,5	4,67	3,67	12,6	15,5	8,13	4,01
5/5	50	50	6	5,66	4,44	13,9	23,0	12,1	6,06
6/6	60	60	7	7,94	6,23	16,6	45,7	23,8	12,2
7/7	70	70	8	10,6	8,32	19,4	84,4	44,5	22,1
8/8	80	80	9	13,6	10,68	22,2	141	73,7	37,0
9/9	90	90	10	17,1	13,42	24,8	224	119	58,5
10/10	100	100	11	20,9	16,41	27,4	336	179	88,3
12/12	120	120	13	29,6	23,24	32,8	684	366	178
14/14	140	140	15	39,9	31,32	38,0	1236	660	330

Digitized by Google

Abb. 25.



6. Z-Eisen.*)

Normallängen = 4 bis 10 m.

Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.

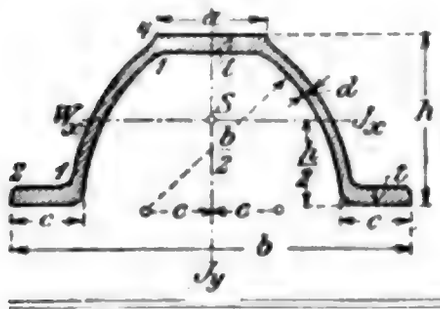
Abrundungshalbmesser am Stege $R = t$.

Abrundungshalbmesser an den Flanschen $r = 1/2\,t$ (auf halbe mm abgerundet).

Die inneren Flanschflächen sind den äußeren parallel.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Flanschstärke t mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	tg φ	Trägheitsmoment J_ξ cm⁴	J_η cm⁴	$J_x = \max$ cm⁴	$J_y = \min$ cm⁴
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	1,655	5,96	13,7	18,1	1,54
4	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	13,5	17,6	28,0	3,05
5	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	26,3	23,8	44,9	5,23
6	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	44,7	30,1	67,2	7,60
8	80	50	6	7	11,1	8,71	0,588	109,3	47,4	142	14,7
10	100	55	6,5	8	14,5	11,38	0,492	222	72,5	270	24,6
12	120	60	7	9	18,2	14,29	0,433	402	106	470	37,7
14	140	65	8	10	22,9	17,98	0,385	676	148	768	56,4
16	160	70	8,5	11	27,5	21,59	0,357	1053	211	1184	79,5
18	180	75	9,5	12	33,3	26,14	0,329	1599	270	1759	110
20	200	80	10	13	38,7	30,38	0,313	2299	357	2509	147

Abb. 26.



7. Belageisen.

Normallängen = 4 bis 12 m.
Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.
Der Schwerpunkt S liegt auf halber Höhe.
Abrundungen bei 1 mit Halbmesser = t.
Abrundungen bei 2 mit Halbmesser = d.
Abrundungen bei 3 mit Halbmesser = $d - 0{,}5$ mm.
Abrundungen bei 4 mit Halbmesser = $0{,}6\,d + 1{,}3$ mm.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite obere a mm	Breite untere b mm	Breite am Fuße c mm	Stegstärke d mm	Fuß- und Kopfstärke t mm	Querschnitt F cm²	Gewicht g kg/m	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_x cm³
5	50	33	120	21	3	5	6,74	5,29	86,4	23,3	9,21
6	60	38	140	24	3,5	6	9,33	7,32	164	47,3	15,6
7½	75	45,5	170	28,5	4	7	13,2	10,36	347	107	28,1
9	90	53	200	33	4,5	8	17,9	14,05	651	207	46,1
11	110	63	240	39	5	9	24,2	19,00	1272	420	75,9

*) S. auch Tafel auf S. 650. Vgl. A. Meyerhof, Biegungsspannungen der Z-Eisen, Z. d. V. d. I. 1891 S. 696. Hier findet sich eine ausführliche Tafel der Widerstandsmomente der Z-Eisen für verschiedene Biegungsebenen.

Digitized by Google

8. Quadranteisen.

Normallängen = 1 bis 10 m.

Magazinlängen = 5 bis 14 m in Abstufungen von 500 mm.

Abrundungshalbmesser $r = 0{,}12\ R$.

Abrundungshalbmesser $r_1 = 0{,}06\ R$.

Vorprofile mit 1 mm gröfseren Stärken werden gewalzt.

Abb. 27.

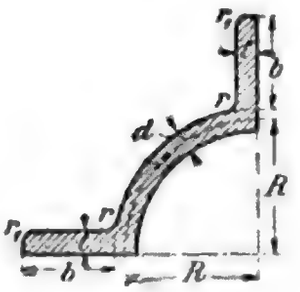
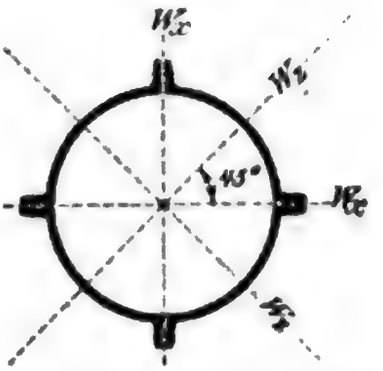


Abb. 28.



Profil-Nr.	Abmessungen in mm				Querschnitt des vollen Rohres	Gewicht des vollen Rohres	Trägheitsmoment des vollen Rohres	Widerstandsmoment des vollen Rohres	
	R	b	d	t	F cm²	g kg/m	J = konst. cm⁴	W_x = max cm³	W_x = min cm³
5	50	35	4	6	29,8	23,39	576	89.6	66,2
5	50	35	8	8	48,0	37,68	908	135	102
7½	75	40	6	8	54,8	43,10	2068	237	175
7½	75	40	10	10	80,0	62,96	2980	331	248
10	100	45	8	10	88,0	69,16	54.64	497	367
10	100	45	12	12	120,0	94,20	7480	664	495
12½	125	50	10	12	128.8	101,27	12156	917	675
12½	125	50	14	14	168,8	132,67	15780	1165	867
15	150	55	12	14	178,4	140,52	23636	1522	1120
15	150	55	18	17	250,4	195,47	32316	2029	1510

9. Handläufer-Eisen.

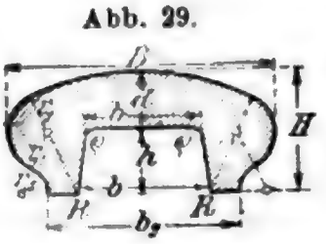
(Handleisten-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 8 m.

Grofste Längen = 12 bis 16 m.

Obere Abrundung mit dem Halbmesser $R = B$.

Abb. 29.



Profil-Nr.	Abmessungen in mm											Querschn. F cm²	Gewicht g kg/m
	B	H	b	h	R	d	r_1	r_2	ϱ	b_1	b_2		
4	40	18	20	10	40	8	6	4	2	18	30	4,17	3,27
6	60	27	30	15	60	12	9	6	3	27	45	9.43	7,40
8	80	36	40	20	80	16	12	8	4	36	60	16.7	13,11
10	100	45	50	25	100	20	15	10	5	45	75	26,0	20,41
12	120	54	60	30	120	24	18	12	6	54	90	37,7	29,59

Digitized by Google

Normalprofile für Schiffbaustahle.*)

10. Gleichschenklige Winkel zu Schiffbauzwecken.

(Vgl. Abb. 20 zu Tafel 1 auf S. 638.)

Hierzu gehören noch die in Tafel 1 auf S. 638 aufgeführten Profile.

S. P.	b	d	F	g	ξ	J_ξ	W_ξ	S. P.	b	d	F	g	ξ	J_ξ	W_ξ	S. P.	b	d	F	g	ξ	J_ξ	W_ξ
	mm		cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³		mm		cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³		mm		cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³
1½	13	2,5	0,70	0,55	4,7	0,14	0,14	6½	60	6	7,53	5,91	18,3	27,6	5,91	11	110	11	23,14	18,17	31,1	25	3,4
2	20	2,5	0,95	0,75	5,8	0,34	0,24		65	8	9,85	7,73	19,	36,4	7,92		110	13	27,	21,24	32,0	295,0	37,8
3	30	3	1,74	1,37	8,4	0,96	0,81		65	10	12,09	9,49	19,6	44,3	9,79		110	15	3 ,00	24,26	32,9	334,0	43,3
	30	5	2,78	2,18	9,3	1,00	0,91	7	70	8	10,64	8,35	20,1	47,4	9,6	12	120	10	23,18	18,21	37,1	374,0	36,2
3½	35	5	3,28	2,57	10,4	3,60	1,46		70	10	13,08	10,27	20,9	57,2	11,8		120	12	27,54	21,62	33,8	362,0	42,0
	40	5	3,70	2,08	11,6	5,50	1,91	7½	75	7	10,13	7,95	20,8	51,4	9,5		120	14	31,82	24,97	34,7	412,0	48,3
4	40	7	5,15	4,04	12,4	7,10	2,58		75	9	12,81	10,06	21,8	63,9	12,0		120	16	36,02	28,28	35,3	463,0	54,7
	45	6	5,09	4,00	13,2	9,21	2,86		75	11	15,40	12,09	22,4	75,8	14,4		130	11	27,60	21,67	35,9	4 6,0	46,4
4½	45	8	6,61	5,19	13,9	11,5	3,70		80	9	13,70	10,76	22,0	78,6	13,8	13	130	13	32, 2	25,37	36,	502,0	5 ,9
	50	6	5,69	4,47	14,5	12,6	3,56	8	80	11	16,50	12,95	23,0	93,3	16,5		130	15	36,96	29,01	37,6	5 ,0	61,5
5	50	8	7,41	5,82	15,1	16,0	4,58		80	13	19,22	15,09	24,4	108,0	19,4		130	17	41,52	32,59	38,5	6 2,0	6 ,1
	55	5	5,32	4,18	15,2	14,8	3,72		90	10	17,13	13,45	25,8	125,0	19,5	14	140	12	32,40	25,44	38,0	58 ,0	58,0
5½	55	7	7,23	5,72	16,	19,5	5,	9	90	12	20,29	15,93	26,5	14 ,0	23,1		140	14	37,48	29,42	39,4	68 ,0	66,2
	55	9	9,16	7,19	16,8	23,9	6,25		90	14	23,37	18,35	27,	163,0	26,0		140	16	42,48	33,35	40,2	748,0	75,0
	60	5	5,82	4,57	16,4	19,0	4,55		100	11	21,04	16,52	28,5	188,0	26,3	15	150	13	3 ,5	20,5	41,6	79 ,0	72,0
6	60	7	7,28	6,2	17,2	25,7	6,03	10	100	13	24,46	19,2	29,3	219,0	31,0		150	15	43, 2	33,77	42,4	9 ,0	82,7
	60	9	10,00	7,90	18,0	31,8	7,57		100	15	27,90	21,90	30,1	243,0	34,6		150	17	4 ,3	37,9	43,4	9 ,0	92,7
																16	160	1	49,11	38,55	45,5	11 ,0	101,4
																	200	18	54,35	43,06	40,4	128,0	113,2

11. Ungleichschenklige Winkel zu Schiffbauzwecken.

(Vgl. Abb. 21 zu Tafel 2 auf S. 640.)

Hierzu gehören noch die in Tafel 2 auf S. 640 aufgeführten Profile.

B	b	d	F	g	ξ	J_η	W_η	B	b	d	F	g	ξ	J_η	W_η	B	b	d	F	g	ξ	J_η	W_η
mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³
45	30	3	2,17	1,70	14,4	4,45	1,45	50	40	3	2,53	2,06	14,7	6,57	1,86	55	45	4	3,87	3,04	16,4	11,5	3,00
50	30	4	3,46	2,72	21,2	12,70	3,28	50	40	4	3,46	2,71	15,1	8,48	2,43	55	45	5	4,78	3,75	16,	14,	3,66
								50	40	5	4,27	3,35	15,5	10,3	2,99	55	45	6	5,67	4,45	17,0	16,3	4,34
45	35	3	2,53	1,83	13,5	4,69	1,49	60	40	4	3,87	3,04	19,3	14,1	3,46	65	45	4	4,27	3,35	20,4	18,2	4,08
45	35	4	3,06	2,40	13,9	6,05	1,93	60	40	6	5,67	4,45	19,9	20,1	5,01	65	45	6	6,27	4,92	21,1	25,9	5,99
45	35	5	3,77	2,96	14,3	7,33	2,39									65	45	8	8,20	6,43	21,8	33,1	7,96

*) Nach dem Verzeichnis herausgegeben durch das Schiffbaustahlkontor G. m. b. H. Essen/Ruhr. Ausgabe 1914.

B	b	d	F	g	ξ	J_ξ	W_ξ	F	b	d	B	g	ξ	J_η	W_η	B	b	d	F	g	ξ	J_η	W_η
mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm			cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³
60	50	5	5,28	4,15	17,9	18,4	4,38	110	75	8	14,27	11,20	35,9	174,0	23,20	150	90	11	25,34	19,89	49,7	580	58,17
65	50	5	5,55	4,36	19,9	23,1	5,12	110	75	10	17,01	13,84	36,8	211,0	28,44	150	90	12	27,51	21,60	50,2	628	62,93
65	50	7	7,61	5,97	20,6	30,9	6,96	110	75	12	20,87	16,38	36,6	247,0	33,65	150	90	14	31,79	24,96	50,9	718	72,45
65	50	9	9,59	7,53	21,3	38,0	8,70	120	75	8	15,07	11,83	39,2	222	27,48	160	90	10	24,15	18,96	53,5	637	59,81
75	50	5	6,05	4,75	24,0	34,3	6,73	120	75	10	18,61	14,61	40,0	270	33,75	160	90	12	28,71	22,54	54,2	750	70,80
100	50	6	8,69	6,83	35,0	89,0	13,69	120	75	12	22,07	17,32	40,7	314	39,60	160	90	14	33,29	26,05	54,9	859	81,73
65	55	5	5,80	4,56	19,2	24,0	5,24	130	75	8	15,87	12,46	43,6	275	31,83	170	90	9	22,74	17,85	57,5	684	61,09
65	55	7	7,96	6,25	19,9	32,0	7,10	130	75	9	17,75	13,93	44,0	307	35,05	170	90	10	25,15	19,75	57,9	753	67,17
65	55	9	10,01	7,88	20,8	39,4	8,85	130	75	10	19,61	15,40	44,1	335	38,09	170	90	12	29,91	23,48	58,7	887	79,70
75	55	5	6,20	4,93	23,1	35,6	6,86	130	75	12	23,27	18,27	45,0	393	43,24	170	90	14	34,59	27,16	59,4	1018	92,04
75	55	7	8,16	6,80	23,8	47,8	9,31	140	75	9	18,65	14,64	48,3	375	40,89	180	90	10	26,15	20,53	61,1	882	74,18
75	55	9	10,04	8,59	24,5	59,0	11,58	140	75	11	22,53	17,70	48,9	447	49,61	180	90	12	31,11	24,43	62,0	1039	88,05
90	60	6	8,71	6,84	28,7	71,5	11,66	140	75	13	26,37	20,70	51,4	517	58,35	180	90	14	35,99	28,26	62,8	1193	101,7
90	60	8	11,43	8,97	29,5	93,0	15,37	150	75	9	19,55	15,35	52,6	453	46,51	200	90	10	28,15	22,10	71,5	1175	91,4
90	60	10	14,07	11,05	30,2	111,2	18,60	150	75	11	23,95	18,80	53,5	542	56,17	200	90	12	33,51	26,33	72,3	1380	108,5
75	65	6	8,11	6,37	21,9	41,1	8,31	150	75	13	27,67	21,72	54,3	626	65,41	200	90	13	36,17	28,30	72,5	1493	117,0
75	65	8	10,63	8,3	22,7	56,3	10,96	170	75	8	19,11	15,00	61,2	578	53,13	200	90	14	38,79	30,45	73,1	1592	125,4
75	65	10	13,07	10,26	23,4	68,1	13,40	170	75	10	23,05	18,57	62,0	704	65,28	225	90	10	30,65	24,06	81,2	1624	112,9
85	65	6	8,31	6,84	25,1	62,6	10,57	170	75	12	28,11	22,07	62,8	828	77,24	225	90	12	36,51	28,66	81,9	1917	134,0
85	65	8	11,43	8,97	25,6	81,0	13,87	170	75	14	32,49	25,51	63,6	949	89,19	225	90	14	42,29	33,20	82,6	2210	155,9
85	65	10	14,07	11,05	27,3	97,2	16,84	100	90	9	16,45	12,91	20,1	157	22,14	250	90	10	33,15	26,03	91,4	2165	136,5
100	65	6	9,61	7,54	32,1	98,6	14,52	100	90	11	19,85	15,58	29,8	186	26,30	250	90	12	39,51	31,02	92,2	2559	162,2
100	65	8	12,63	9,92	32,5	127,0	18,80	100	90	13	23,17	18,19	30,5	214	30,79	250	90	14	45,79	35,95	92,9	2952	187,0
100	65	10	15,57	12,22	33,4	153,5	23,05	110	90	9	17,35	13,62	33,1	206	26,79	130	100	10	22,15	17,37	38,5	372	40,7
115	65	6	10,51	8,25	38,4	144,0	18,80	110	90	11	20,94	16,44	33,9	245	32,19	130	100	12	26,29	20,61	39,3	440	48,5
115	65	8	13,83	10,86	39,1	186,0	24,51	110	90	13	24,47	19,21	34,6	283	37,53	130	100	14	30,37	23,84	40,0	503	55,0
115	65	10	17,07	13,40	39,9	226,0	30,09	120	90	9	18,25	14,32	37,0	262	31,57	150	100	10	24,13	18,94	46,4	554	53,5
130	65	8	15,03	11,80	45,7	264,0	31,32	120	90	11	22,05	17,31	37,5	313	37,94	150	100	13	30,93	24,28	47,5	711	69,3
90	75	7	11,13	8,74	26,6	88,0	13,83	120	90	13	25,77	20,23	38,0	361	44,02	160	100	13	32,23	25,30	53,5	819	76,98
90	75	8	12,64	9,92	27,1	99,2	15,78	130	90	10	21,16	16,61	41,4	366	42,44	170	100	10	26,13	20,51	55,0	782	68,0
90	75	9	14,11	11,08	27,4	110,0	17,57	130	90	12	25,12	19,72	42,2	422	48,06	170	100	12	31,09	24,40	55,6	920	80,4
90	75	11	17,01	13,35	28,1	130,0	21,00	130	90	14	29,00	22,75	43,0	481	55,29	170	100	14	35,97	28,24	56,4	1054	92,8
100	75	7	11,87	9,32	30,6	118,0	17,00	140	90	10	22,16	17,39	44,7	434	45,54	170	115	11	30,32	23,80	52,1	804	75,0
100	75	9	15,05	11,81	31,4	147,0	21,43	140	90	12	26,32	20,66	45,9	518	58,04	170	115	13	35,54	27,90	52,9	1035	88,4
100	75	11	18,15	14,25	32,1	175,0	25,77	140	90	14	30,40	23,86	47,0	590	63,66	170	115	14	39,00	29,90	54,8	1092	94,7
								150	90	10	23,15	18,18	49,4	534	53,08	170	115	15	40,68	31,94	53,6	1175	101,0

Digitized by Google

12. Flachwulste zu Schiffbauzwecken (vgl. Abb. 30 S. 651).

y = Abstand des Schwerpunktes; $c = 0{,}2\,h - 1$ mm; $r = 0{,}07\,h$.

Zu den Profilen 13 bis 30 sind noch je 2 weitere vorgesehen, bei denen das Maß d um 1 mm bzw. 2 mm kleiner ist.

Prof.-Nr.	h mm	d mm	F cm²	g kg/m	y mm	J_x cm⁴	Prof.-Nr.	h mm	d mm	F cm²	g kg/m	y mm	J_x cm⁴	Prof.-Nr.	h mm	d mm	F cm²	g kg/m	y mm	J_x cm⁴
13	130	8	13,01	10,21	7,64	214,6	20	200	11	27,22	21,37	11,69	704,8	26	260	14	45,12	35,42	15,22	2984
14	140	8	13,81	10,84	8,17	264,6	22	220	12	32,69	25,66	12,87	1065	28	280	15	52,09	40,89	16,39	3997
16	160	9	17,78	13,96	9,34	445,0	24	240	13	38,65	30,34	14,04	1547	30	300	16	59,55	46,75	17,57	5245
18	180	10	22,25	17,47	10,52	704,8								32	320	17,5	65,24	51,02	18,02	6436

13. Wulstwinkel für Schiffbauzwecke (vgl. Abb. 31 S. 651).

Profil-Nr.	h mm	b mm	d mm	t mm	r_2 mm	F cm²	G kg/m	η cm	J_η cm⁴	W_η cm³	Profil-Nr.	h mm	b mm	d mm	t mm	r_2 mm	F cm²	G kg/m	η cm	J_η cm⁴	W_η cm³
13/6½	130	65	7,5	7,5	10,0	17,259	13,548	5,92	384,8	54,35	20/8½	200	85	10,0	10,0	13,5	33,051	25,945	9,19	1718	158,9
	130,2	65,5	8,0	7,7	—	18,041	14,162	5,91	398,8	56,13		200,2	85,5	10,5	10,2	—	34,223	26,865	9,15	1766	163,0
	130,4	66	8,5	7,9	—	18,823	14,776	5,91	412,9	57,91		200,4	86	11,0	10,4	—	35,395	27,785	9,18	1815	167,1
	130,6	66,5	9,0	8,1	—	19,609	15,393	5,91	427,0	59,72		200,6	86,5	11,5	10,6	—	36,571	28,708	9,18	1864	171,3
	130,8	67	9,5	8,3	—	20,395	16,010	5,91	441,2	61,53		200,8	87	12,0	10,8	—	37,747	29,631	9,18	1913	175,5
14/6½	140	65	7,5	7,5	10,5	18,271	14,343	6,48	472,3	62,80	22/7½	220	75	10,5	10,5	14,5	36,054	28,302	10,54	2266	192,5
	140,2	65,5	8,0	7,7	—	19,102	14,995	6,47	489,4	64,86		220,2	75,5	11,0	10,7	—	37,306	29,285	10,53	2267	197,3
	140,4	66	8,5	7,9	—	19,934	15,648	6,47	506,6	66,92		220,4	76	11,5	10,9	—	38,557	30,267	10,52	2329	202,2
	140,6	66,5	9,0	8,1	—	20,770	16,304	6,46	523,9	68,98		220,6	76,5	12,0	11,1	—	39,813	31,253	10,51	2391	207,1
	140,8	67	9,5	8,3	—	21,606	16,961	6,46	541,3	71,04		220,8	77	12,5	11,3	—	41,070	32,239	10,51	2453	212,0
15/7	150	70	8,0	8,0	11,0	20,660	16,218	6,85	610,8	74,94	22/8½	220	85	10,5	10,5	14,5	37,104	29,127	10,26	2308	196,6
	150,2	70,5	8,5	8,2	—	21,552	16,918	6,85	631,8	77,33		220,2	85,5	11,0	10,7	—	38,376	30,125	10,25	2371	201,5
	150,4	71	9,0	8,4	—	22,444	17,619	6,85	652,9	79,72		220,4	86	11,5	10,9	—	39,647	31,123	10,25	2434	206,4
	150,6	71,5	9,5	8,6	—	23,340	18,322	6,85	674,2	82,11		220,6	86,5	12,0	11,1	—	40,923	32,125	10,24	2497	211,3
	150,8	72	10,0	8,8	—	24,236	19,025	6,85	695,5	84,51		220,8	87	12,5	11,3	—	42,199	33,126	10,24	2561	216,3
16/7	160	70	8,5	8,5	11,5	22,792	17,892	7,36	758,2	87,75	23/9	230	90	11,0	11,0	15,0	40,683	31,936	10,68	2769	224,8
	160,2	70,5	9,0	8,7	—	23,734	18,631	7,35	783,3	90,39		230,2	90,5	11,5	11,2	—	42,015	32,982	10,67	2841	230,1
	160,4	71	9,5	8,9	—	24,676	19,371	7,35	808,4	93,03		230,4	91	12,0	11,4	—	43,347	34,027	10,67	2913	235,5
	160,6	71,5	10,0	9,1	—	25,622	20,113	7,35	833,7	95,72		230,6	91,5	12,5	11,6	—	44,683	35,076	10,67	2986	241,0
	160,8	72	10,5	9,3	—	26,568	20,856	7,35	859,1	98,41		230,8	92	13,0	11,8	—	46,019	36,125	10,67	3059	246,5
17/7½	170	75	8,5	8,5	12,0	24,324	19,094	7,79	919,2	99,80	24/9	240	90	11,5	11,5	15,5	43,873	34,440	11,23	3233	253,2
	170,2	75,5	9,0	8,7	—	25,326	19,881	7,78	949,3	102,4		240,2	90,5	12,0	11,7	—	45,255	35,525	11,22	3314	259,0
	170,4	76	9,5	8,9	—	26,328	20,667	7,78	979,5	105,8		240,4	91	12,5	11,9	—	46,637	36,610	11,22	3396	264,9
	170,6	76,5	10,0	9,1	—	27,334	21,457	7,78	1010	108,8		240,6	91,5	13,0	12,1	—	48,023	37,698	11,22	3477	270,8
	170,8	77	10,5	9,3	—	28,340	22,247	7,78	1040	111,8		240,8	92	13,5	12,3	—	49,409	38,786	11,22	3559	276,7

	170	85	8,5	8,5	12,0	25,174	19,762	7,54	903,7	101,9
	170,2	85,5	9,0	8,7	—	26,190	20,564	7,54	994,8	104,9
17/8½	170,4	86	9,5	8,9	—	27,218	21,366	7,54	1026	108,0
	170,6	86,5	10,0	9,1	—	28,244	22,172	7,54	1057	111,1
	170,8	87	10,5	9,3	—	29,270	22,977	7,55	1089	114,3
	180	75	9,0	9,0	12,5	26,785	21,026	8,34	1126	116,6
	180,2	75,5	9,5	9,2	—	27,837	21,852	8,33	1161	119,9
18/7½	180,4	76	10,0	9,4	—	28,889	22,678	8,33	1197	123,3
	180,6	76,5	10,5	9,6	—	29,945	23,007	8,33	1232	126,6
	180,8	77	11,0	9,8	—	31,001	23,336	8,33	1268	130,0
	180	85	9,0	9,0	12,5	27,635	21,733	8,09	1181	119,2
	180,2	85,5	9,5	9,2	—	28,757	22,574	8,09	1217	122,5
18/8½	180,4	86	10,0	9,4	—	29,829	23,416	8,09	1253	125,9
	180,6	86,5	10,5	9,6	—	30,915	24,260	8,09	1290	129,3
	180,8	87	11,0	9,8	—	31,991	25,105	8,09	1327	132,8
	190	75	9,5	9,5	13,0	29,359	23,047	8,09	1306	135,2
	190,2	75,5	10,0	9,7	—	30,461	23,912	8,09	1406	138,9
19/7½	190,4	76	10,5	9,9	—	31,563	24,777	8,80	1417	142,9
	190,6	76,5	11,0	10,1	—	32,669	25,645	8,85	1488	146,3
	190,8	77	11,5	10,3	—	33,775	26,513	8,85	1530	150,0
	190	85	9,5	9,5	13,0	30,309	23,793	8,63	1431	135,0
	190,2	85,5	10,0	9,7	—	31,431	24,673	8,63	1473	141,7
19/8½	190,4	86	10,5	9,9	—	32,553	25,554	8,63	1515	145,5
	190,6	86,5	11,0	10,1	—	33,679	26,438	8,63	1557	149,4
	190,8	87	11,5	10,3	—	34,805	27,322	8,64	1599	153,3
	200	75	10,0	10,0	13,5	32,051	25,160	9,41	1043	155,6
	200,2	75,5	10,5	10,2	—	33,203	26,064	9,45	1087	150,6
20/7½	200,4	76	11,0	10,4	—	34,355	26,969	9,45	1734	163,7
	200,6	76,5	11,5	10,6	—	35,511	27,870	9,44	1782	167,8
	200,8	77	12,0	10,8	—	36,667	28,784	9,44	1830	172,0

	250	90	13,0	12,0	16,0	47,179	37,039	11,30	3713	296,4
	250,2	90,5	12,5	12,2	—	45,613	38,161	11,79	3844	290,6
25/9	250,4	91	13,0	12,4	—	50,047	39,287	11,70	3935	297,0
	250,6	91,5	13,5	12,6	—	51,483	40,414	11,78	4027	303,3
	250,8	92	14,0	12,8	—	52,919	41,541	11,78	4119	309,7
	270	90	13,0	13,0	17,0	53,706	42,159	12,84	4908	346,6
	270,2	90,5	13,5	13,2	—	55,238	43,362	12,83	5020	353,9
27/9	270,4	91	14,0	13,4	—	56,770	44,564	12,83	5133	361,2
	270,6	91,5	14,5	13,6	—	58,306	45,770	12,82	5246	368,5
	270,8	92	15,0	13,8	—	59,842	46,976	12,82	5360	375,9
	280	90	13,5	13,5	17,5	57,348	45,018	13,40	5603	384,1
	280,2	90,5	14,0	13,7	—	58,930	46,260	13,39	5732	391,9
28/9	280,4	91	14,5	13,9	—	60,512	47,502	13,39	5857	399,8
	280,6	91,5	15,0	14,1	—	62,093	48,747	13,38	5982	407,6
	280,8	92	15,5	14,3	—	63,684	49,992	13,38	6108	415,5
	290	90	14,0	14,0	18,0	61,106	47,968	13,98	6379	424,7
	290,2	90,5	14,5	14,2	—	62,738	49,249	13,97	6516	432,9
29/9	290,4	91	15,0	14,4	—	64,370	50,530	13,96	6654	441,2
	290,6	91,5	15,5	14,6	—	66,006	51,815	13,95	6792	449,6
	290,8	92	16,0	14,8	—	67,642	53,099	13,95	6931	458,1
	300	95	14,5	14,5	18,5	65,707	51,580	14,30	7361	471,6
	300,2	95,5	15,0	14,7	—	67,399	52,908	14,36	7514	480,4
30/9½	300,4	96	15,5	14,9	—	69,090	54,236	14,37	7667	489,3
	300,6	96,5	16,0	15,1	—	70,780	55,567	14,37	7820	498,3
	300,8	97	16,5	15,3	—	72,482	56,898	14,36	7974	507,3

14. T-Wulstprofile zu Schiffbauzwecken (vgl. Abb. 32 S. 651).

Wulst nach einer Ellipse (Halbachsen: $a = 2\,d$, $b = d$) gebildet, mit anschliefsenden Tangenten für die Winkel $\alpha = 50°$. Neigung der inneren Flanschflächen = 8%: $t = 1{,}15\,d$. Abrundungshalbmesser: $R = 1\frac{1}{2}\,d$; $r = d$; $r_1 = \frac{1}{2}\,d$.

h	B	d	t	F	g	y	J_x	W_x	h	B	d	t	F	g	y	J_x	W_x	h	B	d	t	F	g	y	J_x	W_x
mm				cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	mm	cm⁴	cm³
150	120	9,0	11,0	31,02	24,82	93,0	960	103	**200**	130	11,0	12,5	42,70	33,52	120,0	2340	195	**260**	145	13,0	15,0	62,00	48,67	154,0	5704	370
165	120	10,0	11,5	34,10	26,77	101,0	1220	120	**220**	135	11,5	13,0	47,80	37,52	131,3	3171	242	**280**	150	14,0	16,0	71,00	55,74	163,3	7493	459
180	125	10,5	12,0	38,25	30,03	108,0	1684	156	**240**	140	12,0	14,0	53,30	41,84	143,1	4215	295	**300**	160	15,0	17,0	81,00	63,59	175,0	9860	563

T-Profile für Schiffbauzwecke siehe Tafel 5

aufserdem Profil Nr. 20/15 $b = 200$ $h = 150$ $d = 19$ $F = 63{,}91$ $g = 50{,}17$ $y = 11{,}19$ $J_x = 1062{,}32$.

Digitized by Google

15. E-Profile für Schiffbauzwecke (Abb. 23 zu Tafel 4 S. 642).

Hierzu gehören noch die in Tafel 4 auf S. 642 aufgeführten Profile.

h	b	d	t	F	g	J_x	W_x	h	b	d	t	F	g	J_x	W_x	h	b	d	t	F	g	J_x	W_x
mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³
140	80	10	13	33.0	25.64	696	142	200	90	14	17	55.43	43.51	3234	323	260	95	12,5	16	60.44	47.45	5908	462
140	80	11	13	34.45	27.04	1019	146	200	90	15	17	57.43	45.08	3302	330	260	95	13,5	16	63.04	49.40	6144	473
140	80	12	13	35.85	28.14	1041	149	200	90	16	17	59.43	46.65	3369	337	260	95	14,5	16	65.64	51.53	6290	484
140	80	13	13	37.25	29.24	1064	152	200	90	17	17	61.43	48.22	3436	343	260	95	15,5	16	68.20	53.57	6437	496
150	75	10	12	31.06	24.38	1041	139	220	95	14	17	59.62	46.81	4215	383	260	95	16	16	69.50	54.59	6510	501
150	75	11	12	32.56	25.56	1090	143	220	95	15	17	61.82	48.53	4304	391								
150	75	12	12	34.06	26.74	1098	146	220	95	16	17	64.02	50.26	4393	399	280	100	13	16,5	66.66	52.33	7635	545
150	85	11	14	38.25	30.02	1206	173	220	95	17	17	66.22	51.99	4482	407	280	100	14	16,5	69.46	54.53	7818	558
150	85	12	14	39.73	31.20	1324	177	240	100	15	18	68.05	53.42	5682	474	280	100	15	16,5	72.26	56.71	8000	571
150	85	13	14	41.25	32.38	1352	180	240	100	16	18	70.15	55.30	5708	483	280	100	16	16,5	75.06	58.93	8182	584
150	85	14	14	42.75	33.56	1380	183	240	100	17	18	72.85	57.19	5913	493	280	100	16,5	16,5	76.46	60.03	8273	591
								240	100	18	18	75.25	59.07	6028	503								
165	80	10	12	33.76	26.50	1380	167	200	85	11	14	43.05	34.50	2640	264	300	100	14	17	72.84	57.13	9365	624
165	80	11	12	35.41	27.80	1417	172	200	85	12	14	45.05	36.07	2707	271	300	100	15	17	75.84	59.54	9690	630
165	80	12	12	37.06	29.09	1455	176	200	85	13	14	47.05	37.64	2774	278	300	100	16	17	78.84	61.89	9815	654
165	90	12	15	44.20	34.70	1815	219	200	85	14	14	49.05	39.21	2840	284	300	100	17	17	81.84	64.24	10040	669
165	90	13	15	45.85	35.98	1843	223	220	90	11,5	15	50.22	39.42	3643	331	320	100	14	17,5	76.64	60.17	11162	698
165	90	14	15	47.50	37.26	1880	228	220	90	12,5	15	52.42	41.15	3734	339	320	100	15	17,5	79.84	62.68	11435	715
165	90	15	15	49.15	38.58	1918	233	220	90	13,5	15	54.62	42.88	3823	347	320	100	16	17,5	83.04	65.19	11708	732
								220	90	14,5	15	56.82	44.60	3912	355	320	100	17	17,5	86.24	67.70	11981	749
180	80	11	13	38.28	30.05	1817	202	220	90	15	15	57.92	45.47	3956	359	320	100	17,5	17,5	87.84	68.93	12217	758
180	80	12	13	40.08	31.47	1865	207																
180	80	13	13	41.88	32.88	1914	213	240	95	12	15,5	55.02	43.89	4855	405	340	100	14,5	18	82.06	64.42	13218	778
180	90	13	16	49.52	38.88	2306	266	240	95	13	15,5	58.32	45.78	4970	414	340	100	15,5	18	85.42	67.06	13545	797
180	90	14	16	51.32	40.29	2444	272	240	95	14	15,5	60.72	47.66	5085	424	340	100	16,5	18	88.86	69.76	13873	816
180	90	15	16	53.12	41.70	2463	277	240	95	15	15,5	63.12	49.55	5200	433	340	100	17,5	18	92.26	72.43	14200	836
180	90	16	16	54.92	43.11	2542	283	240	95	15,5	15,5	64.32	50.49	5258	438	340	100	18,0	18	93.96	73.76	14364	845

16. Z-Eisen für Schiffbauzwecke (Abb. 25 zu Tafel 6 S. 644).

(Vergleiche auch die in Tafel 6 auf S. 644 aufgeführten Profile.)

h	b	d	t	F	g	J_ξ	W_ξ	h	b	d	t	F	g	J_ξ	W_ξ	h	b	d	t	F	g	J_ξ	W_ξ
mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³	mm				cm²	kg/m	cm⁴	cm³
38	30	4	4	3.65	2,87	8,0	4,2	80	60	7	8,5	15,62	12,26	157	39,3	120	60	7	9	18,10	14,21	390	66,5
40	40	4,5	4,5	5.06	3,97	12,7	6,3	90	70	8	9,5	19,19	15,06	240	53,3	120	75	9	11	25,58	20,08	566	94,3
60	43	5	5	6.38	5.01	25,0	10,0	100	55	6,5	8	14,40	11,30	221	44,2	130	80	10	12	30,12	23,65	778	119,7
50	45	5	5	7.06	5.56	45,1	13,4	100	70	8	9,5	19,06	15,70	311	62,2	140	66	8	10	22,84	17,96	672	96,0
80	50	6	7	11.08	8.70	109	17,5	110	75	9	11	24.68	19.38	490	83,6								

Digitized by Google

Abb. 80.

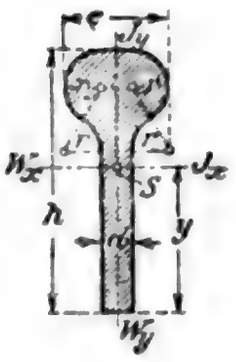


Abb. 81.

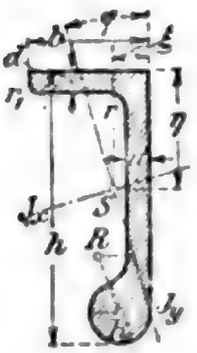
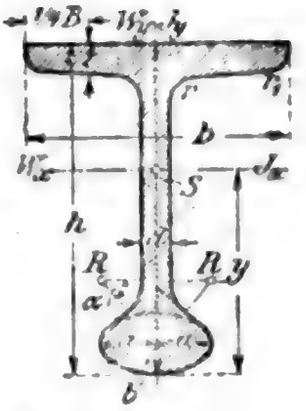


Abb. 82.



17. Einige Formelsen für Schiffbauzwecke.

1. Breitflanschige I-Profile (vgl. Abb. 33 S. 652).

Profil Nr.	h	b	d	F	g	J_y	J_x
	mm			cm^2	kg/m	cm^4	cm^4
18	180	180	8,5	59,9	47,0	1073	3512
20	200	200	8,5	70,4	55,3	1503	5171
22	220	220	9	82,6	64,8	2216	7379
24	240	240	10	96,8	76,0	3343	10260
25	250	250	10,5	105,1	82,5	3575	12066
26	260	260	11	115,6	90,7	4201	14358

2. Lukenprofile.

65 × 35 × 25 × 25 mm
82 × 45 × 32 × 30 „
110 × 55 × 45 × 35 „
145 × 68 × 60 × 40 mm
149,2 × 85,7 × 63,5 × 66,7 „

3. Halbrundprofile.

a) Scharfkantig.

30 × 8 mm
35 × 10 „
40 × 10 „
45 × 12 „
50 × 15 mm
55 × 15 „
60 × 15 „
65 × 16 „
75 × 18 mm
80 × 20 „
90 × 22 „

b) Mit abgerundeten Kanten.

50 × 9 — 12 mm
65 × 11 — 14 „
75 × 13 — 16 „
90 × 15 — 18 „

4. Hespenprofile.

20 × 7 × 3 — 5 mm
25 × 8 × 3 — 5 „
30 × 9 × 3 — 5 „
35 × 10 × 4 — 6 „
40 × 11 × 4 — 6 „
45 × 12 × 5 — 7 mm
50 × 13 × 5 — 7 „
60 × 15 × 6 — 8 „
70 × 17 × 7 — 9 „

5. Reelingprofile.

a) Rundrücken.

75 × 30 × 5,5
100 × 40 × 7
100 × 45 × 11
125 × 50 × 11

b) Flachrücken.

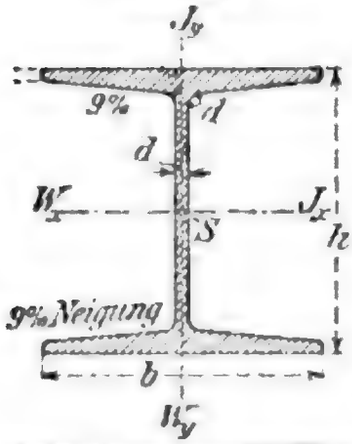
80 × 40 × 7
100 × 40 × 7
100 × 50 × 10
125 × 58 × 11
165 × 63 × 13
180 × 63 × 13

6. Jackstagprofil.

100 × 50 × 45 × 13 mm

Digitized by Google

Abb. 33.



Tafeln für Grey-Profile, Stab- und Flacheisen.

18. Breitflanschige Differdinger I-Grey-Profile

der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hütten-Aktiengesellschaft.

Die **Gewichte** g gelten für Flufseisen (spez. Gewicht = 7,85). Normallängen 2 bis 12 m. Magazinlängen 4 bis 15 m mit Abstufungen von 500 mm.

Neigung der inneren Flanschflächen = 9 % = rd. 1 : 11.

Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch gleich der Stegstärke d. An den Flanschkanten fehlen die Abrundungen.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Mittlere Flanschstärke mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_y cm³	Widerstandsmoment W_x cm³	Profil-Nr.
18 B	180	180	8,5	12,0	59,9	47,0	1 073	3 512	119	390	18 B
20 „	200	200	8,5	13,5	70,4	55,3	1 508	5 171	157	517	20 „
22 „	220	220	9,0	14,8	82,6	64,8	2 216	7 379	201	671	22 „
24 „	240	240	10,0	15,7	96,8	76,0	3 043	10 260	254	855	24 „
25 „	250	250	10,5	16,3	105,1	82,5	3 575	12 066	286	965	25 „
26 „	260	260	11,0	17,3	115,6	90,7	4 261	14 352	328	1 104	26 „
27 „	270	270	11,25	17,8	123,2	96,7	4 920	16 529	365	1 224	27 „
28 „	280	280	11,5	18,4	131,8	103,4	5 671	19 052	405	1 361	28 „
29 „	290	290	12,0	19,0	141,1	110,8	6 417	21 866	443	1 508	29 „
30 „	300	300	12,5	19,8	152,1	119,4	7 494	25 201	500	1 680	30 „
32 „	320	300	13,0	20,6	160,7	126,2	7 867	30 119	524	1 882	32 „
34 „	340	300	13,4	21,2	167,4	131,4	8 097	35 241	540	2 073	34 „
36 „	360	300	14,2	22,6	181,5	142,5	8 793	42 479	586	2 360	36 „
38 „	380	300	14,8	23,4	191,2	150,1	9 175	49 496	612	2 605	38 „
40 „	400	300	15,5	24,0	203,6	159,8	9 721	57 834	648	2 892	40 „
42½ „	425	300	16,0	25,4	213,0	167,0	10 078	68 249	672	3 212	42½ „
45 „	450	300	17,0	26,7	229,3	180,0	10 668	80 887	711	3 595	45 „
47½ „	475	300	17,6	27,7	242,0	190,0	11 142	94 811	743	3 992	47½ „
50 „	500	300	19,4	28,0	261,8	205,5	11 718	111 283	781	4 451	50 „
55 „	550	300	20,0	30,8	288,0	226,1	12 582	145 957	839	5 308	55 „
60 „	600	300	20,8	31,0	300,0	230,0	12 672	179 303	845	5 977	60 „
65 „	650	300	21,1	31,3	314,5	240,9	12 814	217 402	854	6 690	65 „
70 „	700	300	21,1	31,3	325,2	253,3	12 818	258 106	854	7 374	70 „
75 „	750	300	21,1	31,3	335,7	263,4	12 823	302 560	855	8 068	75 „
80 „	800	300	21,5	32,3	354,0	278,0	13 260	360 486	885	9 012	80 „
85 „	850	300	21,5	32,3	365,6	287,0	13 274	414 887	885	9 762	85 „
90 „	900	300	21,5	32,3	376,4	295,5	13 279	473 964	885	10 533	90 „
95 „	950	300	21,9	33,3	396,2	311,0	13 727	550 974	915	11 600	95 „
100 „	1000	300	21,9	33,3	407,2	319,7	13 732	621 287	915	12 425	100 „

Digitized by Google

19. Breitflanschige dünnstegige Differdinger I-Grey-Profile

der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hütten-Aktiengesellschaft.

Vergl. Abb. 33 zu Tafel 18.

Die **Gewichte** g gelten für Flufseisen (spez. Gewicht = 7,85). **Normallängen 2 bis 12 m. Magazinlängen 4 bis 15 m mit Abstufungen von 500 mm.**

Neigung der inneren Flanschflächen = 9 % = rd. 1 : 11.

Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch gleich der Stegstärke d. An den Flanschkanten fehlen die Abrundungen.

Profil-Nr.	Höhe h mm	Breite b mm	Stegstärke d mm	Mittlere Flanschstärke mm	Querschnitt F qcm	Gewicht g kg/m	Trägheitsmoment J_y cm⁴	Trägheitsmoment J_x cm⁴	Widerstandsmoment W_y cm³	Widerstandsmoment W_x cm³	Profil-Nr.
18 Bd	180	180	6,5	12,9	56,8	44,6	1 070	3 448	119	383	18 Bd
20 „	200	200	7,0	14,0	68,6	53,8	1 594	5 163	159	516	20 „
22 „	220	220	7,5	15,0	80,6	63,2	2 252	7 368	205	670	22 „
24 „	240	240	8,1	16,1	94,6	74,2	3 132	10 315	261	860	24 „
25 „	250	250	8,3	16,6	101,7	79,8	3 647	12 040	292	964	25 „
26 „	260	260	8,6	17,1	109,1	85,6	4 234	13 995	326	1 077	26 „
27 „	270	270	8,9	17,7	117,0	91,8	4 873	16 178	361	1 198	27 „
28 „	280	280	9,1	18,2	124,6	97,8	5 570	18 574	398	1 327	28 „
29 „	290	290	9,4	18,7	132,9	104,3	6 368	21 252	439	1 466	29 „
30 „	300	300	9,6	19,2	141,1	110,7	7 235	24 190	482	1 613	30 „
32 „	320	300	10,2	20,3	151,1	118,6	7 731	29 273	515	1 830	32 „
34 „	340	300	10,7	21,4	161,1	126,4	8 223	35 020	548	2 060	34 „
36 „	360	300	11,2	22,4	170,6	133 9	8 678	41 333	579	2 296	36 „
38 „	380	300	11,8	23,5	181,2	142,2	9 175	48 573	612	2 556	38 „
40 „	400	300	12,3	24,5	191,0	149,9	9 614	56 416	641	2 821	40 „
42½ „	425	300	12,9	25,8	203,9	160,1	10 203	67 501	680	3 177	42½ „
45 „	450	300	13,6	27,2	218,5	171,5	10 885	80 436	725	3 575	45 „
47½ „	475	300	14,3	28,5	232,3	182,8	11 408	94 812	765	3 992	47½ „
50 „	500	300	14,9	29,8	246,0	193,1	12 011	110 106	801	4 404	50 „
55 „	550	300	15,1	30,2	256,7	201,5	12 241	138 001	816	5 018	55 „
60 „	600	300	15,3	30,5	267,1	209,7	12 305	169 358	824	5 645	60 „
65 „	650	300	15,5	30,9	278,2	218,4	12 550	205 200	837	6 314	65 „
70 „	700	300	15,6	31,2	288,4	226,4	12 703	241 427	847	6 984	70 „
75 „	750	300	15,8	31,6	299,8	235,3	12 884	289 040	859	7 708	75 „
80 „	800	300	16,0	32,0	311,5	244,5	13 047	338 312	870	8 458	80 „
85 „	850	300	16,2	32,3	322,7	253,3	13 199	391 652	880	9 215	85 „
90 „	900	300	16,4	32,7	334,8	262,8	13 388	451 080	893	10 024	90 „
95 „	950	300	16,5	33,0	345,6	271,3	13 500	514 254	900	10 826	95 „
100 „	1000	300	16,7	33,4	358,0	281,0	13 681	584 658	912	11 693	100 „

Digitized by Google

19. Gewichtstafel

Gewicht von

1 cbm Stabeisen (Flufseisen) wiegt 7850 kg;

Dicke in mm	Breite in mm										
	10	12	14	16	16	18	20	22	24	25	26
1	0,079	0,094	0,110	0,118	0,126	0,141	0,157	0,173	0,188	0,196	0,204
2	0,157	0,188	0,220	0,236	0,251	0,283	0,314	0,345	0,377	0,393	0,408
3	0,236	0,283	0,330	0,353	0,377	0,424	0,471	0,518	0,565	0,589	0,612
4	0,314	0,377	0,440	0,471	0,502	0,565	0,628	0,691	0,754	0,785	0,816
5	0,393	0,471	0,550	0,589	0,628	0,707	0,785	0,864	0,942	0,981	1,020
6	0,471	0,565	0,650	0,707	0,754	0,848	0,942	1,036	1,130	1,178	1,225
7	0,550	0,659	0,769	0,824	0,879	0,989	1,000	1,200	1,319	1,374	1,429
8	0,628	0,754	0,879	0,942	1,005	1,130	1,256	1,382	1,507	1,570	1,633
9	0,707	0,848	0,989	1,000	1,130	1,272	1,413	1,554	1,696	1,766	1,837
10	0,785	0,942	1,099	1,178	1,256	1,413	1,570	1,727	1,884	1,963	2,042
11	0,864	1,036	1,209	1,295	1,382	1,554	1,727	1,900	2,072	2,159	2,245
12	0,942	1,130	1,319	1,413	1,507	1,696	1,884	2,072	2,261	2,355	2,449
13	1,021	1,225	1,429	1,531	1,633	1,837	2,041	2,245	2,449	2,551	2,653
14	1,099	1,319	1,539	1,649	1,758	1,978	2,198	2,418	2,638	2,748	2,857
15	1,178	1,413	1,649	1,766	1,884	2,120	2,355	2,591	2,826	2,944	3,061
16	1,256	1,507	1,758	1,884	2,010	2,261	2,512	2,763	3,014	3,140	3,266
17	1,335	1,601	1,868	2,002	2,135	2,402	2,669	2,936	3,203	3,336	3,470
18	1,413	1,696	1,978	2,120	2,261	2,543	2,826	3,109	3,391	3,533	3,674
19	1,492	1,790	2,088	2,237	2,386	2,685	2,983	3,281	3,580	3,729	3,878
20	1,570	1,884	2,198	2,355	2,512	2,826	3,140	3,454	3,768	3,925	4,082
21	1,649	1,978	2,308	2,473	2,638	2,967	3,297	3,627	3,956	4,121	4,286
22	1,727	2,072	2,418	2,591	2,763	3,109	3,454	3,799	4,145	4,318	4,490
23	1,806	2,167	2,528	2,708	2,889	3,250	3,611	3,972	4,333	4,514	4,694
24	1,884	2,261	2,638	2,826	3,014	3,391	3,768	4,143	4,522	4,710	4,898
25	1,963	2,355	2,748	2,944	3,140	3,533	3,925	4,318	4,710	4,905	5,103
26	2,041	2,449	2,857	3,062	3,266	3,674	4,082	4,490	4,898	5,103	5,307
27	2,120	2,543	2,967	3,179	3,391	3,815	4,239	4,663	5,087	5,299	5,511
28	2,198	2,638	3,077	3,297	3,517	3,956	4,396	4,836	5,275	5,495	5,715
29	2,277	2,732	3,187	3,415	3,642	4,098	4,553	5,008	5,464	5,691	5,919
30	2,355	2,826	3,297	3,533	3,768	4,239	4,710	5,181	5,652	5,888	6,123
31	2,434	2,920	3,407	3,650	3,894	4,380	4,867	5,354	5,840	6,084	6,327
32	2,512	3,014	3,517	3,768	4,019	4,522	5,024	5,526	6,029	6,280	6,532
33	2,591	3,109	3,627	3,886	4,145	4,663	5,181	5,699	6,217	6,476	6,735
34	2,669	3,203	3,737	4,004	4,270	4,804	5,338	5,872	6,406	6,673	6,939
35	2,748	3,297	3,847	4,121	4,396	4,946	5,495	6,045	6,594	6,869	7,144
36	2,826	3,391	3,956	4,239	4,522	5,087	5,652	6,217	6,782	7,065	7,348
37	2,905	3,485	4,066	4,357	4,647	5,228	5,809	6,390	6,971	7,261	7,552
38	2,983	3,580	4,176	4,475	4,773	5,369	5,966	6,563	7,159	7,458	7,756
39	3,062	3,674	4,286	4,592	4,898	5,511	6,123	6,735	7,348	7,654	7,959
40	3,140	3,768	4,396	4,710	5,024	5,652	6,280	6,908	7,536	7,850	8,164
41	3,219	3,862	4,506	4,828	5,150	5,793	6,437	7,081	7,724	8,046	8,368
42	3,297	3,956	4,616	4,946	5,275	5,935	6,594	7,253	7,913	8,243	8,572
43	3,376	4,051	4,726	5,063	5,401	6,076	6,751	7,426	8,101	8,439	8,776
44	3,454	4,145	4,836	5,181	5,526	6,217	6,908	7,599	8,290	8,634	8,980
45	3,533	4,239	4,946	5,299	5,652	6,359	7,065	7,772	8,478	8,831	9,185

Digitized by Google

für Flacheisen.

1 m in kg.

s. auch Abs. 3 der Anmerkung auf S. 659.

Breite in mm											Dicke in mm
28	30	32	34	35	36	38	40	42	44	45	
0,220	0,235	0,251	0,267	0,275	0,283	0,298	0,314	0,330	0,345	0,353	1
0,440	0,471	0,502	0,534	0,550	0,565	0,597	0,628	0,659	0,691	0,707	2
0,659	0,705	0,754	0,801	0,824	0,848	0,895	0,942	0,989	1,036	1,060	3
0,879	0,942	1,005	1,068	1,099	1,130	1,193	1,256	1,319	1,382	1,413	4
1,099	1,177	1,256	1,334	1,374	1,413	1,492	1,570	1,649	1,727	1,766	5
1,319	1,413	1,507	1,601	1,649	1,696	1,790	1,884	1,978	2,072	2,120	6
1,539	1,648	1,758	1,868	1,923	1,978	2,088	2,198	2,308	2,418	2,473	7
1,758	1,884	2,010	2,135	2,198	2,261	2,386	2,512	2,638	2,763	2,826	8
1,978	2,119	2,261	2,402	2,473	2,543	2,685	2,826	2,967	3,109	3,179	9
2,198	2,355	2,512	2,669	2,748	2,826	2,983	3,140	3,297	3,454	3,533	10
2,418	2,590	2,763	2,936	3,022	3,109	3,281	3,454	3,627	3,799	3,886	11
2,638	2,826	3,014	3,203	3,297	3,391	3,580	3,768	3,956	4,145	4,239	12
2,857	3,061	3,266	3,470	3,572	3,674	3,878	4,082	4,286	4,490	4,592	13
3,077	3,297	3,517	3,737	3,847	3,956	4,176	4,396	4,616	4,836	4,946	14
3,297	3,532	3,768	4,003	4,121	4,239	4,474	4,710	4,945	5,181	5,299	15
3,517	3,768	4,019	4,270	4,396	4,522	4,773	5,024	5,275	5,526	5,652	16
3,737	4,003	4,270	4,537	4,671	4,804	5,071	5,338	5,605	5,872	6,005	17
3,956	4,239	4,522	4,804	4,946	5,087	5,369	5,652	5,935	6,217	6,359	18
4,176	4,474	4,773	5,071	5,220	5,369	5,668	5,966	6,264	6,563	6,712	19
4,396	4,710	5,024	5,338	5,495	5,652	5,966	6,280	6,594	6,908	7,065	20
4,616	4,946	5,275	5,605	5,770	5,935	6,264	6,594	6,924	7,253	7,418	21
4,836	5,181	5,526	5,872	6,045	6,217	6,563	6,908	7,253	7,599	7,772	22
5,055	5,417	5,778	6,139	6,319	6,500	6,861	7,222	7,583	7,944	8,125	23
5,275	5,652	6,029	6,406	6,594	6,782	7,159	7,536	7,913	8,290	8,478	24
5,495	5,888	6,280	6,673	6,869	7,065	7,458	7,850	8,243	8,635	8,831	25
5,715	6,123	6,531	6,939	7,144	7,348	7,756	8,164	8,572	8,980	9,185	26
5,935	6,359	6,782	7,206	7,418	7,630	8,054	8,478	8,902	9,326	9,538	27
6,154	6,594	7,034	7,473	7,693	7,913	8,352	8,792	9,232	9,671	9,891	28
6,374	6,830	7,285	7,740	7,968	8,195	8,651	9,106	9,561	10,02	10,24	29
6,594	7,065	7,536	8,007	8,243	8,478	8,949	9,420	9,891	10,36	10,60	30
6,814	7,301	7,787	8,274	8,517	8,761	9,247	9,734	10,22	10,71	10,95	31
7,034	7,536	8,038	8,541	8,792	9,043	9,546	10,05	10,55	11,05	11,30	32
7,253	7,772	8,290	8,808	9,067	9,326	9,844	10,36	10,88	11,40	11,66	33
7,473	8,007	8,541	9,075	9,342	9,608	10,14	10,68	11,21	11,74	12,01	34
7,693	8,243	8,792	9,342	9,616	9,891	10,44	10,99	11,54	12,09	12,36	35
7,913	8,478	9,043	9,608	9,891	10,17	10,74	11,30	11,87	12,43	12,72	36
8,133	8,714	9,294	9,875	10,17	10,46	11,04	11,62	12,20	12,78	13,07	37
8,352	8,949	9,546	10,14	10,44	10,74	11,34	11,93	12,53	13,13	13,42	38
8,572	9,185	9,797	10,41	10,72	11,02	11,63	12,25	12,86	13,47	13,78	39
8,792	9,420	10,05	10,68	10,99	11,30	11,93	12,56	13,19	13,82	14,13	40
9,012	9,656	10,30	10,94	11,27	11,59	12,23	12,87	13,52	14,16	14,48	41
9,232	9,891	10,55	11,21	11,54	11,87	12,53	13,19	13,85	14,51	14,84	42
9,451	10,13	10,80	11,48	11,81	12,15	12,83	13,50	14,18	14,85	15,19	43
9,671	10,36	11,05	11,74	12,09	12,43	13,13	13,82	14,51	15,20	15,54	44
9,891	10,60	11,30	12,01	12,36	12,72	13,42	14,13	14,84	15,54	15,90	45

Digitized by Google

Dicke in mm	Breite in mm										
	46	48	50	52	54	55	56	58	60	62	64
1	0,361	0,377	0,393	0,408	0,424	0,432	0,440	0,455	0,471	0,487	0,502
2	0,722	0,754	0,785	0,816	0,848	0,864	0,879	0,911	0,942	0,973	1,005
3	1,083	1,130	1,177	1,225	1,272	1,295	1,319	1,366	1,413	1,460	1,507
4	1,444	1,507	1,570	1,633	1,696	1,727	1,758	1,821	1,884	1,947	2,010
5	1,805	1,884	1,962	2,041	2,119	2,159	2,198	2,276	2,355	2,433	2,512
6	2,167	2,261	2,355	2,449	2,543	2,591	2,638	2,732	2,826	2,920	3,014
7	2,528	2,638	2,747	2,857	2,967	3,022	3,077	3,187	3,297	3,407	3,517
8	2,889	3,014	3,140	3,266	3,391	3,454	3,517	3,642	3,768	3,894	4,019
9	3,250	3,391	3,532	3,674	3,815	3,886	3,956	4,098	4,239	4,380	4,522
10	3,610	3,768	3,925	4,082	4,239	4,318	4,396	4,553	4,710	4,867	5,024
11	3,972	4,145	4,317	4,490	4,663	4,749	4,836	5,008	5,181	5,354	5,526
12	4,333	4,522	4,710	4,898	5,087	5,181	5,275	5,464	5,652	5,840	6,029
13	4,694	4,898	5,102	5,307	5,511	5,613	5,715	5,919	6,123	6,327	6,531
14	5,055	5,275	5,495	5,715	5,935	6,045	6,154	6,374	6,594	6,814	7,034
15	5,416	5,652	5,887	6,123	6,358	6,476	6,594	6,829	7,065	7,300	7,536
16	5,778	6,029	6,280	6,531	6,782	6,908	7,034	7,285	7,536	7,787	8,038
17	6,139	6,400	6,672	6,939	7,206	7,340	7,473	7,740	8,007	8,274	8,541
18	6,500	6,782	7,065	7,348	7,630	7,772	7,913	8,195	8,478	8,761	9,043
19	6,861	7,159	7,457	7,756	8,054	8,203	8,352	8,651	8,949	9,247	9,546
20	7,222	7,536	7,850	8,164	8,478	8,635	8,792	9,106	9,420	9,734	10,05
21	7,583	7,913	8,243	8,572	8,902	9,067	9,232	9,561	9,891	10,221	10,55
22	7,944	8,290	8,635	8,980	9,326	9,499	9,671	10,017	10,36	10,707	11,053
23	8,305	8,666	9,028	9,389	9,750	9,930	10,111	10,472	10,83	11,194	11,56
24	8,666	9,043	9,420	9,797	10,174	10,36	10,55	10,927	11,30	11,681	12,058
25	9,028	9,420	9,813	10,21	10,598	10,79	10,99	11,383	11,78	12,168	12,56
26	9,389	9,797	10,21	10,613	11,021	11,23	11,43	11,838	12,25	12,654	13,062
27	9,750	10,17	10,60	11,021	11,445	11,66	11,87	12,293	12,72	13,141	13,565
28	10,11	10,55	10,99	11,43	11,869	12,09	12,31	12,748	13,19	13,628	14,067
29	10,47	10,93	11,38	11,84	12,293	12,52	12,75	13,204	13,66	14,114	14,57
30	10,83	11,30	11,78	12,25	12,717	12,95	13,188	13,659	14,13	14,601	15,072
31	11,19	11,68	12,17	12,654	13,141	13,38	13,63	14,114	14,60	15,088	15,574
32	11,56	12,06	12,56	13,062	13,565	13,82	14,067	14,570	15,07	15,574	16,077
33	11,92	12,43	12,95	13,471	13,989	14,25	14,501	15,025	15,54	16,061	16,579
34	12,28	12,81	13,35	13,878	14,413	14,68	14,95	15,48	16,01	16,548	17,082
35	12,64	13,19	13,74	14,287	14,84	15,11	15,386	15,936	16,49	17,035	17,584
36	13,00	13,57	14,13	14,695	15,26	15,54	15,826	16,391	16,96	17,521	18,086
37	13,36	13,94	14,52	15,103	15,684	15,98	16,265	16,846	17,43	18,008	18,589
38	13,72	14,32	14,92	15,512	16,11	16,41	16,705	17,301	17,90	18,495	19,091
39	14,08	14,70	15,31	15,92	16,532	16,84	17,144	17,757	18,37	18,981	19,594
40	14,44	15,07	15,70	16,33	16,956	17,27	17,584	18,212	18,84	19,468	20,096
41	14,81	15,45	16,09	16,74	17,38	17,70	18,024	18,667	19,31	19,955	20,598
42	15,17	15,83	16,49	17,144	17,804	18,13	18,463	19,123	19,78	20,441	21,101
43	15,53	16,20	16,88	17,553	18,23	18,57	18,903	19,578	20,25	20,928	21,603
44	15,89	16,58	17,27	17,961	18,652	19,00	19,342	20,033	20,72	21,415	22,106
45	16,25	16,96	17,66	18,369	19,076	19,43	19,782	20,489	21,20	21,902	22,608

Digitized by Google

Breite in mm											Dicke in mm
65	70	75	80	85	90	95	100	110	120	130	
0,510	0,549	0,589	0.628	0.667	0,707	0,746	0.785	0.864	0.942	1.021	1
1,021	1.099	1,177	1.256	1.335	1.413	1.492	1.570	1.727	1.884	2.041	2
1,531	1,648	1,766	1.884	2.002	2.120	2.237	2.355	2.591	2.826	3.062	3
2.041	2.198	2.355	2.512	2.669	2.826	2.983	3.140	3.454	3.768	4.082	4
2.551	2.747	2.944	3.140	3.330	3.532	3.729	3.925	4.317	4.710	5.103	5
3.062	3.297	3.532	3.768	4.003	4.239	4.474	4.710	5.181	5.652	6.123	6
3.572	3.846	4.121	4.396	4.671	4.946	5.220	5.495	6.044	6.594	7.144	7
4.082	4.396	4.710	5.024	5.338	5.652	5.966	6.280	6.908	7.536	8.164	8
4.592	4.945	5.299	5.652	6.005	6.358	6.712	7.065	7.771	8.478	9.185	9
5.103	5.495	5.887	6,280	6,672	7,065	7.457	7,850	8,635	9,420	10,21	10
5,613	6.044	6,476	6.908	7.340	7.771	8,203	8,635	9.498	10.36	11.23	11
6,123	6.594	7.065	7.536	8.007	8.478	8.949	9.420	10.36	11.30	12.25	12
6,633	7.143	7.654	8,164	8.674	9.184	9.695	10,20	11.23	12.25	13.27	13
7.144	7.693	8.242	8,792	9.341	9.891	10.44	10.99	12.09	13.19	14.29	14
7.654	8,242	8,831	9,420	10,01	10,60	11,19	11,77	12,95	14.13	15,31	15
8,164	8,792	9,420	10.05	10.68	11,30	11,93	12.56	13.82	15.07	16.33	16
8.674	9.341	10,01	10.68	11.34	12.01	12,68	13.35	14.68	16.01	17.35	17
9.185	9,891	10,60	11,30	12.01	12.72	13.42	14.13	15.54	16.96	18.37	18
9,695	10.44	11,19	11.93	12.68	13.42	14.17	14.92	16.41	17.90	19.39	19
10,21	10,99	11,78	12,56	13.35	14,13	14,92	15.70	17,27	18,84	20,41	20
10,72	11,54	12,36	13.19	14.01	14.84	15,66	16.49	18,13	19.78	21.43	21
11,23	12,09	12.95	13.82	14.68	15.54	16.41	17.27	19.00	20.72	22.45	22
11,74	12,64	13.54	14.44	15.35	16.25	17,15	18.06	19.86	21.67	23.47	23
12.25	13,19	14.13	15.07	16,01	16.96	17,90	18,84	20.72	22.61	24.49	24
12,76	13,74	14,72	15,70	16,68	17,66	18,64	19,63	21,59	23,55	25,51	25
13,27	14,29	15,31	16.33	17.35	18.37	19.39	20.41	22.45	24.49	26.53	26
13.78	14.84	15,90	16.96	18.02	19.08	20.14	21,20	23.31	25.43	27.55	27
14,29	15.39	16,49	17.58	18.68	19.78	20.88	21.98	24.18	26.38	28.57	28
14,80	15,94	17,07	18.21	19.35	20.49	21,63	22.77	25.04	27.32	29.60	29
15,31	16,49	17,66	18,84	20,02	21,20	22,37	23,55	25.91	28.26	30.62	30
15.82	17,04	18.25	19.47	20.68	21.90	23.12	24.34	26.77	29.20	31.64	31
16.33	17,58	18,84	20.10	21.35	22.61	23.86	25.12	27.63	30.14	32.66	32
16,84	18.13	19.43	20.72	22.02	23.31	24.61	25.91	28.50	31.09	33.68	33
17.35	18.68	20,02	21.35	22.69	24.02	25.36	26.69	29.36	32.03	34.70	34
17,86	19,23	20,61	21,98	23.35	24.73	26.10	27.48	30,22	32.97	35.72	35
18.37	19.78	21.20	22.61	24.02	25.43	26.85	28,26	31.09	33.91	36.74	36
18.88	20.33	21,78	23.24	24.69	26.14	27.59	29.05	31.95	34.85	37.76	37
19.39	20.88	22.37	23.80	25.36	26.85	28.34	29.83	32.81	35.80	38.78	38
19.90	21.43	22.96	24.49	26.02	27.55	29.08	30.62	33.68	36.74	39.80	39
20,41	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26	29,83	31,40	34.54	37.68	40,82	40
20,92	22,53	24,14	25,75	27.36	28.97	30.58	32.19	35.40	38.62	41.84	41
21.43	23,08	24.73	26.38	28.03	29.67	31.32	32.97	36.27	39.56	42.86	42
21,94	23,63	25,32	27,00	28.69	30.38	32.07	33.76	37.13	40.51	43.88	43
22,45	24,18	25,91	27.63	29.36	31.09	32.81	34.54	37.99	41.45	44.90	44
22,96	24,73	26,49	28,26	30,03	31.79	33.56	35.33	38,86	42,39	45.92	45

Digitized by Google

Dicke in mm	Breite in mm										Dicke in mm
	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	
1	1,099	1,178	1,256	1,335	1,413	1,492	1,570	1,649	1,727	1,806	1
2	2,198	2,355	2,512	2,669	2,826	2,983	3,140	3,297	3,454	3,611	2
3	3,297	3,533	3,768	4,004	4,239	4,475	4,710	4,946	5,181	5,417	3
4	4,396	4,710	5,024	5,338	5,652	5,966	6,280	6,594	6,908	7,222	4
5	5,495	5,887	6,280	6,673	7,065	7,458	7,850	8,243	8,635	9,028	5
6	6,594	7,065	7,536	8,007	8,478	8,949	9,420	9,891	10,362	10,83	6
7	7,693	8,242	8,792	9,342	9,891	10,44	10,99	11,54	12,089	12,64	7
8	8,792	9,420	10,05	10,68	11,30	11,93	12,56	13,19	13,816	14,44	8
9	9,891	10,60	11,30	12,01	12,72	13,42	14,13	14,84	15,543	16,25	9
10	10,99	11,77	12,56	13,35	14,13	14,92	15,70	16,49	17,270	18,06	10
11	12,09	12,95	13,82	14,68	15,54	16,41	17,27	18,13	18,997	19,86	11
12	13,19	14,13	15,07	16,01	16,96	17,90	18,84	19,78	20,724	21,67	12
13	14,29	15,31	16,33	17,35	18,37	19,39	20,41	21,43	22,451	23,47	13
14	15,39	16,48	17,58	18,68	19,78	20,88	21,98	23,08	24,178	25,28	14
15	16,49	17,66	18,84	20,02	21,20	22,37	23,55	24,73	25,905	27,08	15
16	17,58	18,84	20,10	21,35	22,61	23,86	25,12	26,38	27,632	28,89	16
17	18,68	20,02	21,35	22,69	24,02	25,36	26,69	28,02	29,359	30,69	17
18	19,78	21,20	22,61	24,02	25,43	26,85	28,26	29,67	31,086	32,50	18
19	20,88	22,37	23,86	25,36	26,85	28,34	29,83	31,32	32,813	34,30	19
20	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26	29,83	31,40	32,97	34,54	36,11	20
21	23,08	24,73	26,38	28,03	29,67	31,32	32,97	34,62	36,27	37,92	21
22	24,18	25,91	27,63	29,36	31,09	32,81	34,54	36,27	37,994	39,72	22
23	25,28	27,08	28,89	30,69	32,50	34,31	36,11	37,92	39,721	41,53	23
24	26,38	28,26	30,14	32,03	33,91	35,80	37,68	39,56	41,45	43,33	24
25	27,48	29,44	31,40	33,36	35,33	37,29	39,25	41,21	43,18	45,14	25
26	28,57	30,61	32,66	34,70	36,74	38,78	40,82	42,86	44,902	46,94	26
27	29,67	31,79	33,91	36,04	38,15	40,27	42,39	44,51	46,63	48,75	27
28	30,77	32,97	35,17	37,37	39,59	41,76	43,97	46,16	48,36	50,55	28
29	31,87	34,15	36,42	38,70	40,98	43,25	45,53	47,81	50,083	52,36	29
30	32,97	35,33	37,68	40,04	42,39	44,75	47,10	49,46	51,81	54,17	30
31	34,07	36,50	38,94	41,37	43,80	46,24	48,67	51,10	53,54	55,97	31
32	35,17	37,68	40,19	42,70	45,22	47,73	50,24	52,75	55,264	57,78	32
33	36,27	38,86	41,45	44,04	46,63	49,22	51,81	54,40	56,991	59,58	33
34	37,37	40,04	42,70	45,37	48,04	50,71	53,38	56,05	58,72	61,39	34
35	38,47	41,21	43,96	46,71	49,46	52,20	54,95	57,70	60,45	63,19	35
36	39,56	42,39	45,22	48,04	50,87	53,69	56,52	59,35	62,172	64,99	36
37	40,66	43,57	46,47	49,38	52,28	55,19	58,09	60,99	63,899	66,80	37
38	41,76	44,75	47,75	50,71	53,69	56,68	59,66	62,64	65,63	68,61	38
39	42,86	45,92	49,00	52,05	55,11	58,17	61,23	64,29	67,353	70,41	39
40	43,96	47,10	50,24	53,38	56,52	59,66	62,80	65,94	69,08	72,22	40
41	45,06	48,28	51,50	54,72	57,93	61,15	64,37	67,59	70,81	74,03	41
42	46,16	49,47	52,75	56,05	59,34	62,64	65,94	69,24	72,534	75,83	42
43	47,26	50,63	54,01	57,38	60,76	64,14	67,51	70,89	74,261	77,64	43
44	48,36	51,81	55,26	58,72	62,17	65,63	69,08	72,53	75,99	79,44	44
45	49,46	53,00	56,52	60,05	63,60	67,12	70,65	74,18	77,72	81,25	45

Digitized by Google

21. Gewichtstafel für Quadrat-, Sechskant- und Rundeisen.

1 cbm Stabeisen (Flufseisen) wiegt 7850 kg.

Dicke d mm	Gewicht in kg/m			Dicke d mm	Gewicht in kg/m			Dicke d mm	Gewicht in kg/m		
	□	⬡	○		□	⬡	○		□	⬡	○
5	0,196	0,170	0,154	50	19,625	16,995	15,413	180	254,340	220,265	199,758
6	0,283	0,245	0,222	52	21,226	18,383	16,671	185	268,666	232,634	211,010
7	0,385	0,333	0,302	54	22,801	19,824	17,978	190	283,315	245,419	222,570
8	0,502	0,435	0,395	56	24,618	21,320	19,335	195	298,496	258,506	234,438
9	0,636	0,551	0,499	58	26,407	22,870	20,740	200	314,000	271,932	246,615
10	0,785	0,680	0,617	60	28,260	24,474	22,195	205	329,896	288,927	259,100
11	0,950	0,823	0,746	62	30,175	26,133	23,700	210	346,185	299,805	271,893
12	1,130	0,979	0,888	64	32,154	27,846	25,253	215	362,866	314,251	284,994
13	1,327	1,149	1,042	66	34,105	29,614	26,856	220	379,940	329,037	298,404
14	1,539	1,332	1,208	68	36,298	31,436	28,509	225	397,406	344,164	312,122
15	1,766	1,530	1,387	70	38,465	33,312	30,210	230	415,265	359,631	326,148
16	2,010	1,740	1,578	72	40,694	35,243	31,961	235	433,516	375,437	340,483
17	2,269	1,965	1,782	74	42,987	37,228	33,762	240	452,160	391,583	355,126
18	2,543	2,203	1,998	76	45,342	39,267	35,611	245	471,196	408,068	370,077
19	2,834	2,454	2,226	78	47,759	41,361	37,510	250	490,625	424,894	385,336
20	3,140	2,719	2,466	80	50,240	43,509	39,458	255	510,446	442,060	400,904
21	3,462	2,998	2,719	85	56,716	49,118	44,545	260	530,660	459,565	416,779
22	3,799	3,290	2,984	90	63,585	55,067	49,940	265	551,266	477,411	432,963
23	4,153	3,596	3,261	95	70,846	61,355	55,643	270	572,265	495,597	449,456
24	4,522	3,916	3,551	100	78,500	67,983	61,654	275	593,656	514,022	466,257
25	4,906	4,249	3,853	105	86,546	74,951	67,973	280	615,440	532,988	483,365
26	5,307	4,596	4,168	110	94,985	82,260	74,601	285	637,616	552,193	500,783
27	5,723	4,956	4,495	115	103,816	89,908	81,537	290	660,185	571,738	518,508
28	6,154	5,330	4,834	120	113,040	97,896	88,781	295	683,146	591,623	536,542
29	6,602	5,717	5,185	125	122,656	106,224	96,334	300	706,500	611,848	554,884
30	7,065	6,118	5,549	130	132,665	114,891	104,195	305	730,246	632,413	573,534
32	8,038	6,961	6,313	135	143,066	123,899	112,364	310	754,385	653,318	592,493
34	9,075	7,859	7,127	140	153,860	133,247	120,841	315	778,916	674,563	611,759
36	10,174	8,811	7,990	145	165,046	142,934	129,627	320	803,840	696,148	631,334
38	11,335	9,817	8,903	150	176,625	152,962	138,721	325	829,156	718,071	651,218
40	12,560	10,877	9,865	155	188,596	163,320	148,123	330	854,865	740,336	671,409
42	13,847	11,992	10,876	160	200,960	174,036	157,834	335	880,966	762,940	691,909
44	15,198	13,162	11,936	165	213,716	185,084	167,852	340	907,460	785,885	712,717
46	16,611	14,385	13,046	170	226,865	196,471	178,179	345	934,346	809,170	733,834
48	18,086	15,663	14,205	175	240,406	208,198	188,815	350	961,625	832,793	755,258

Die angegebenen Dicken des Quadrat- und Sechskanteisens entsprechen dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.

Das Gewicht von Sechskanteisen beträgt das $2{,}5981 : \pi = 0{,}827$-fache (oder angenähert das $^{13}/_{16}$-fache) des Gewichtes von Rundeisen, welches den Durchmesser des umschriebenen Kreises des Sechskanteisens hat.

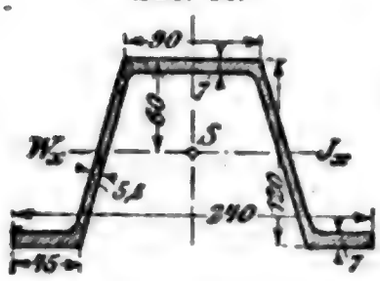
Für Schweifseisen (spez. Gew. = 7,8) sind die Gewichtangaben der vorstehenden Tafel noch mit $7{,}8 : 7{,}85 = 0{,}99363 = \left(1 - \frac{1}{157}\right)$ zu multiplizieren. — Die entsprechenden Faktoren für andere Metalle stehen in der letzten Zeile auf S. 621.

Digitized by Google

I-Eisen zwischen 14 und 20 m. Längen, gröfser als die normalen Längen, bedingen einen Aufpreis. Angeforderte Längen werden bis auf einen Spielraum von ± 5 cm genau geliefert. „Fixe Längen" (bis auf ± 1 cm genau) und „gefräste Stäbe" (bis auf ± 0,5 cm genau) haben Ueberpreise.

Die **breitflanschigen Differdinger I-Träger (Grey-Profile)** eignen sich zu Stützen und (bei beschränkter Konstruktionshöhe) auch zu Trägern (s. Tafel S. 652 u. 653).

Abb. 34.



Oft ist das in Abb. 34 gegebene **Belageisen** (in 4 bis 8 m Längen ohne Aufpreis geliefert, Rinnenprofil) Nr. 120/240 (Blatt 158, Ausgabe 1907) der Burbacher Hütte gut verwendbar; Querschnitt = 25,1 qcm, Gewicht (Flufseisen) = 19,7 kg/m, Trägheitsmoment $J_x = 541$ cm^4, Widerstandsmoment $W_x = 90$ cm^3.

b) **Stabeisen** (Handelseisen). (Rund-, Quadrat-, Flacheisen usw.); aus Flufs- oder Schweifseisen gewalzt, in Stäben von 4 bis 12 m gewöhnlich ohne Aufpreis. Flacheisen ist rechteckiges Stabeisen von 10 bis 180 mm Breite; gröfsere Breiten (bis zu 600 mm — darüber sind Bleche billiger) bei Stärken von 5 mm an aufwärts (am besten 10 bis 20 mm) werden als Universaleisen auf einem Universalwalzwerk hergestellt; Gewichtstafeln von Stabeisen und Flacheisen s. oben.

c) **Bandeisen.** Dünnes, auf genaues Dickenmafs kalt gewalztes Flacheisen unter 5 mm Stärke und bis 250 mm Breite, in gröfserer Länge zu Bunden aufgehaspelt (nicht in Stäben) verkauft.

d) **Draht,** aus Flufseisen oder Flufsstahl, mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser nach einer Drahtlehre S. 622), wird gewöhnlich nur bis 4,9 mm Durchm. warm gewalzt; dünnere Sorten werden kalt gezogen. Gewichte von Drähten S. 620. Ist der Querschnitt des Drahtes nicht kreisförmig, sondern halbrund, oval, quadratisch, eckig, sternförmig usw., so heifst der Draht Form- oder Fassondraht. Zugfestigkeit von Drähten S. 501 u. 503.

Es wiegen 1000 m **Telegraphendraht** nach Felten & Guilleaume in Mülheim [Rhein]: verzinkter Eisendraht 6 mm dick 215 kg, 5 mm dick 150 kg, 4 mm dick 100 kg, 3 mm dick 55 kg, 2 mm dick (Bindedraht) 24 kg, 1,7 mm dick (Wickeldraht) 18 kg.

8. Glatte Bleche (Schwarzbleche) werden aus Platinen und Brammen aus Flufs- und Schweifseisen sowie aus Flufsstahl gewalzt. Unter 5 mm Dicke heifsen sie Feinbleche (Sturzbleche), bei 5 mm und mehr Dicke Grobbleche. Dem Verwendungszweck entsprechend unterscheidet man bei Grobblechen: Kessel- (Feuer- und Mantel-), Schiffs-, Lokomotiv-, Behälter-, Konstruktions- und Spezialbleche. — Weiteres S. 661 bis 662.

Feinbleche. Die Dicke wird nach der Nummer der Blechlehre (S. 622) angegeben. Gewichte von Feinblechen enthält nachstehende Tafel. Der Grundpreis richtet sich nach der Blechnummer. Bleche von gröfseren Abmessungen, oder nach Form oder rechtwinklig auf genaue Länge und Breite geschnitten, runde oder halbrunde Feinbleche, ebenso die Qualität, bedingen Ueberpreise.

Bund- oder Zentnerbleche sind Feinbleche, die in Gebunden von 50 kg und in Tafelgröfsen von 470 . 630, 470 . 790, 630 . 940 mm geliefert werden. Ein Gebund enthält je nach der Tafelgröfse und der Blechnummer 3 bis 75 Tafeln.

Digitized by Google

Gewichtstafeln für Feinbleche

der deutschen und Dillinger Lehre (S. 622).

Gewicht in kg/qm.

Dicke mm	Schweifseisen	Flufseisen und Flufsstahl	Dicke mm	Schweifseisen	Flufseisen und Flufsstahl	Dicke mm	Schweifseisen	Flufseisen und Flufsstahl
0,30	2,34	2,36	0,875	6,83	6,87	1,85	14,4	14,5
0,375	2,93	2,94	0,90	7,02	7,07	2,00	15,6	15,7
0,40	3,12	3,14	1,00	7,80	7,85	2,25	17,6	17,7
0,438	3,42	3,44	1,10	8,58	8,64	2,50	19,5	19,6
0,50	3,90	3,93	1,125	8,78	8,83	2,75	21,5	21,6
0,562	4,38	4,41	1,25	9,75	9,81	3,00	23,4	23,6
0,60	4,68	4,71	1,375	10,7	10,8	3,25	25,4	25,5
0,625	4,88	4,91	1,40	10,9	11,0	3,50	27,3	27,5
0,68	5,30	5,34	1,50	11,7	11,8	3,75	29,3	29,4
0,70	5,46	5,50	1,55	12,1	12,2	4,00	31,2	31,4
0,75	5,85	5,89	1,70	13,3	13,3	4,25	33,2	33,4
0,80	6,24	6,28	1,75	13,7	13,7	4,50	35,1	35,3

Gelochte Bleche sind Feinbleche mit kreisförmiger, quadratischer, rechteckiger, sechseckiger, dreieckiger oder geschlitzter Lochung; in allen Nummern der Feinblechlehre bis zu 2,5 m Breite und 6,0 m Länge erhältlich, dienen sie zu Siebzwecken aller Art. Runde Lochung wird von 0,5 bis 100 mm Durchm. ausgeführt. Zierbleche sind verschiedenartig gemusterte gelochte Bleche von 0,75 bis 2 mm Stärke; sie werden zur Verkleidung von Heizkörpern, Ausfüllung von Maueröffnungen usw. benutzt. Alle gelochten Bleche werden auch verzinkt oder verbleit geliefert.

Grobbleche aus Schweifs oder Flufseisen. Gewichte S. 621. Der Durchmesser runder Platten beträgt bis zu etwa 2300 mm bei Blechen unter 8 mm Stärke und bis zu etwa 3600 mm bei stärkeren Blechen. Dicke der Bleche bis zu 40 mm, auch dicker. Weiteres II. Bd. Abschn. Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfkessel". Grundpreise und Ueberpreise sind aus der Preisliste des Verbandes der Grobblechwalzwerke zu entnehmen.

Der Grundpreis gilt für folgende normale Mafse und Gewichte:

Bei einer Dicke von	Breite und Durchm. bis zu mm	Fläche bis zu qm	Gewicht bis zu kg
5 bis unter 6 mm . .	1600	6	500
6 „ „ 7 „ . .	1700	7	600
7 „ „ 8 „ . .	1800	8	700
8 „ „ 9 „ . .	1900	9	800
9 „ „ 10 „ . .	2000	10	900
10 „ „ 15 „ . .	2200	12	1250
15 „ „ 25 „ . .	2400	15	2500
25 mm und darüber .	2700	20	3500

Digitized by Google

Bei Schiffsblechen ist es allgemein üblich, bis zu 12½ % Verschnittbleche (mit einem Gesamtschnittquerschnitt bis zu 250 mm) ohne Aufpreis zu liefern.

9. **Buckelplatten** (Trogbleche) aus Flufseisen, zum Belegen von Brücken usw., nach Art der Klostergewölbe mit $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ Stich geformt, mit allseitigem, ebenem Rande von 40 bis 80 mm Breite zum Annieten an die Träger, werden in allen Abmessungen (Seitenlängen von 500 bis 1800 mm) in quadratischer, rechteckiger und Trapezform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Die Tragfähigkeit der Platten wird am besten durch Versuchsbelastungen festgestellt. Bei der Gewichtsberechnung ist die Krümmung der Buckelplatten meist zu vernachlässigen.

10. **Tonnenbleche** (Hängebleche) aus Flufseisen, zum Belegen von Brücken, nach Art der flachen Kappen mit $^1/_8$ bis $^1/_{12}$ Stich geformt, mit längsseitigen, ebenen Rändern von 60 bis 80 mm Breite zum Annieten, werden in allen Abmessungen (Länge = 500 bis 3000 mm, Breite = 500 bis 2000 mm) in rechteckiger Grundform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Das Gewicht ist aus dem Querschnitt und der mittleren Länge zu bestimmen.

11. **Riffelbleche** (gerippte Bleche) aus Flufseisen. Die Platten sind auf der einen Seite mit geradlinigen, sich rautenförmig kreuzenden (Diagonalenverhältnis $\sim 20 : 30$ mm), 1,5 bis 3 mm hohen, 4 bis 5 mm breiten Erhöhungen (Riffeln) versehen. Sie werden bis 450 kg schwer, bis 1350 mm breit und in Stärken von 4 bis 25 mm (ausschl. Riffel) gewalzt. Benutzt zu Belagzwecken und Abdeckungen aller Art, z. B. für Belagplatten (besonders im Schiffbau und für Bühnen in Hüttenwerken und im Bergbau), Treppenstufen, zur Abdeckung von Kanälen, zu Brückenfufswegen usw. — **Waffelbleche**, in Stärken von 1,5 bis 5 mm, sind wie die Riffelbleche verwendbar. Aehnlich auch die **Warzenbleche**.

12. Für viele Zwecke wird Feinblech (Schwarzblech) mit einem schwer oxydierenden, metallischen Ueberzuge von Zinn, Zink, Blei, Kupfer und Nickel versehen, u. zw. auf warmem Wege oder galvanisch.

Der Ueberzug mufs das Eisen vollständig und gleichmäfsig bedecken und gut haften. (Vgl. auch S. 667 ff.)

Weifsbleche sind gute, gleichmäfsig stark **verzinnte** Schwarzbleche; sie sind im Handel als:

I. „Kreuzbleche" 530 × 760 mm in Stärken von 0,2 bis 2 mm,
II. „Pontonbleche" 650 × 870 mm in Stärken von 0,42 bis 1,45 mm,
III. „Grofsformatbleche" 1000 × 2000 mm in Stärken von 0,45 bis 2,5 mm.

Versand erfolgt in Kisten.

Verzinkte und verbleite Eisenbleche in allen Stärken und Gröfsen der Feinbleche; für eine 1 qm grofse Tafel und beide Seiten des Bleches zusammen ist zu rechnen 0,5 kg Blei oder 0,4 bis 0,6 kg Zink.

Verkupferte Bleche mit ein- oder beiderseitigem Kupferüberzuge (galvanisch), der 5 bis 10 % des Eisengewichtes beträgt. Tafeln bis 1,0 m lang und bis 0,6 m breit.

Vernickelte Bleche. Auf eine oder beide Seiten des Eisenbleches werden dünne Nickelplatten geschweifst und das Ganze ausgewalzt. Der Nickelüberzug beträgt 5 bis 10 % des Eisengewichtes.

13. **Wellbleche.** Querschnittformen, Trägheits- und Widerstandsmomente für eine Wellenbreite S. 538, Nr. 24 und 25. Um J in

Digitized by Google

cm^4 und W in cm^3 für 1 m-Tafelbreite zu erhalten, multipliziere man die dort angegebenen Formelwerte (Abmessungen in cm vorausgesetzt) noch mit $100 : B$. Sind auf S. 538 H, B und δ in mm gegeben, so findet man auch angenähert für 1 m Breite:

$$J = 0{,}1\,[0{,}1 + 0{,}195\,(H : B)]\,H^2\,\delta \text{ in } cm^4,$$
$$W = [0{,}2 + 0{,}39\,(H : B)]\,H\delta \text{ in } cm^3.$$

Wellbleche sind schwarz, gestrichen oder verbleit, meist aber verzinkt verwendet. Die beiderseitige Verzinkung ruft ein Mehrgewicht von $z = 0{,}4$ bis 0,8 kg/qm des ebenen (ungewellten) Bleches hervor.

Eine Anzahl gebräuchlicher Profilformen gibt umstehende Tafel. Die erste Zahl der Profilnummer bedeutet die Höhe der Welle, die zweite bedeutet die Breite von Mitte zu Mitte Welle.

14. **Eisenbahnbaustoffe.** Näheres III. Bd. Abschn. Eisenbahnwesen.

15. **Niete und Schrauben.** Abmessungen und Berechnungen 6. Abschn., Maschinenteile I. — Ueberschlägige Gewichtsbestimmung von Schraubenbolzen mit Mutter (ohne Unterlagscheibe) und quadratischem Kopf: Man nehme zu der gesamten Bolzenlänge (einschl. Kopfhöhe) einen Zuschlag gleich dem vierfachen Schaftdurchmesser und bestimme mit dieser Länge in m und dem Gewicht des betreffenden Rundeisens in kg/m (S. 659) das gesuchte Gewicht.

Beispiel. Ein Fundament-Ankerbolzen von 1,5 m Gesamtlänge und 30 mm Schaftstärke (Rundeisengewicht nach S. 659 gleich 5,549 kg/m) wiegt mit Mutter und quadratischem Kopf $(1{,}50 + 4 \cdot 0{,}03) \cdot 5{,}549 = 8{,}99$ kg.

16. **Drahtseile und Ketten.** Näheres 6. Abschn. Maschinenteile.

17. **Nägel** werden aus Draht oder Blech mittels Maschinen hergestellt, oder sie werden aus Stabeisen mit der Hand geschmiedet.

Drahtnägel (Drahtstifte), 5 bis 250 mm lang und 0,5 bis 10 mm stark, aus hart gezogenem, nicht ausgeglühtem, meist rundem (auch vierkantigem oder dreikantigem) Eisendraht mittels Maschinen gefertigt.

Geschnittene Nägel werden mittels Maschine aus keilförmigem Blech kalt (ohne Abfall) geschnitten und mit kalt gepreſstem Kopf versehen; Querschnitt flach rechteckig, Schneide mäſsig stumpf, keilförmig zulaufend. Brett-, Latten- und Bohlennägel, 70 bis 130 mm lang für 3 bis 8 cm starke Hölzer; Mühlen-, Schiffs- und Leistennägel werden bis 500 mm lang geliefert.

Geschmiedete Nägel werden aus vierkantigem Stabeisen warm geschmiedet.

Lieferungsbedingungen für Eisen und Stahl.

Vgl. I. Vorschriften für Lieferung von Eisen und Stahl, aufgestellt vom Verein deutscher Eisenhüttenleute.*)

II. Besondere Vertragsbedingungen für Eisenkonstruktionen, aufgestellt vom preuſs. Ministerium der öffentlichen Arbeiten.**)

III. Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau, aufgestellt vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieurvereine.***)

*) Zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung A. Bagel, Düsseldorf.
**) Zu beziehen durch Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin W 66, Wilhelmstr. 90
***) Zu beziehen durch O. Meiſsner, Hamburg, Hermannstr. 44.

Digitized by Google

Tafel für Wellbleche.

Nummer des Profiles	Blechstärke mm	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg schwarz	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg verzinkt	Widerstandsmoment f. 1 m Breite cm³	Querschnitt f. 1 m Breite cm²	Normale Baubreite cm
15/30	0,50	6,28	8.01	2,8	7,8	63
	0,56	7,07	8.80	3,2	8,8	63
	0,62	7,86	9.59	3,5	9,8	63
10/40	0,62	5,79	7.07	1,8	7,2	84
	0,75	6,95	8.23	2,1	8,7	84
	1,00	9,27	10.55	2,7	11,6	84
15/40	0,62	6,70	8.18	3,1	8,4	72
	0,75	8,05	9.52	3,7	10,1	72
	1,00	10,73	12.20	4,8	13,4	72
20/40	0,62	7,86	9.58	4,8	9,8	60
	0,75	9,42	11.15	5,7	11,8	60
	1,00	12,57	14.30	7,5	15,7	60
15/50	0,62	6,13	7.48	2,9	7,7	80
	0,75	7,35	8.70	3,4	9,2	80
	1,00	9,80	11.15	4,5	12,2	80
20/50	0,62	6,92	8.44	4,3	8,6	70
	0,75	8,30	9.81	5,1	10,4	70
	1,00	11,06	12.58	6,7	13,8	70
35/50	0,62	7,86	9.58	6,0	9,8	60
	0,75	9,42	11.15	7,1	11,8	60
	1,00	12,57	14.30	9,4	15,7	60
30/50	0,62	8,85	10.80	7,9	11,1	55
	0,75	10,63	12.57	9,5	13,3	55
	1,00	14,17	16.12	12,6	17,7	55
20/60	0,62	6,36	7.76	4,0	7,9	72
	0,75	7,65	9.05	4,7	9,6	72
	1,00	10,20	11.60	6,3	12,7	72
25/60	0,75	8,48	10.00	6,5	10,6	66
	1,00	11,30	12.85	8,6	14,1	66
	1,50	16,96	18.50	12,9	21,2	66
30/60	0,75	9,42	11.15	8,6	11,8	60
	1,00	12,57	14.30	11,4	15,7	60
	1,50	18,85	20.58	17,1	23,6	60
35/60	0,75	10,42	12.33	10,9	13,0	54
	1,00	13,90	15.81	14,6	17,4	54
	1,50	20,85	22.76	21,9	26,1	54
40/60	0,75	11,42	13.51	13,5	14,3	48
	1,00	15,23	17.32	18,0	19,0	48
	1,50	22,84	24.93	27,0	28,6	48
30/70	0,75	8,62	10.20	7,9	10,8	63
	1,00	11,50	13.08	10,6	14,4	63
	1,50	17,24	18.82	15,9	21,5	63
35/70	0,75	9,43	11.16	10,0	11,8	63
	1,00	12,57	14.30	13,3	15,7	63
	1,50	18,85	20.58	20,0	23,6	63
20/76	0,75	7,05	8.34	4,6	8,8	76
	1,00	9,40	10.69	6,1	11,7	76
	1,50	14,10	15.39	9,1	17,6	76
25/76	0,75	7,62	9.00	6,1	9,5	76
	1,00	10,16	11.56	8,1	12,7	76
	1,50	15,24	16.64	12,2	19,0	76
30/76	0,75	8,30	9.82	7,5	10,4	68
	1,00	11,06	12.58	10,4	13,8	68
	1,50	16,60	18.12	15,6	20,7	68
35/76	0,75	8,96	10.60	9,6	11,2	60
	1,00	11,94	13.58	12,8	14,9	60
	1,50	17,92	19.56	19,3	22,4	60
38/76	0,75	9,42	11.15	10,9	11,8	60
	1,00	12,57	14.30	14,6	15,7	60
	1,50	18,84	20.57	21,9	23,6	60
55/76	0,75	12,12	14.34	19,9	15,1	45
	1,00	16,16	18.38	26,6	20,2	45
	1,50	24,24	26.46	39,9	30,3	45
25/80	0,75	7,46	8.83	6,0	9,3	80
	1,00	9,94	11.31	8,0	12,4	80
	1,50	14,91	16.30	12,0	18,6	80
30/80	0,75	8,05	9.52	7,6	10,0	72
	1,00	10,73	12.20	10,2	13,4	72
	1,50	16,10	17.57	15,3	20,1	72
40/80	0,75	9,42	11.15	11,7	11,8	56
	1,00	12,57	14.30	15,6	15,7	56
	1,50	18,84	20.57	23,4	23,6	56
55/80	0,75	11,70	13.85	19,2	14,6	48
	1,00	15,61	17.76	25,6	19,5	48
	1,50	23,41	25.56	38,4	29,3	48
25/86	0,75	7,37	8.72	6,2	9,2	77
	1,00	9,82	11.17	8,2	12,3	77
	1,50	14,74	16.09	12,4	18,4	77

Nummer des Profiles	Blechstärke mm	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg schwarz	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg verzinkt	Widerstandsmoment f. 1 m Breite cm³	Querschnitt f. 1 m Breite cm²	Normale Baubreite cm
32/86	0,75	8,04	9.51	8,1	10,0	69
	1,00	10,72	12.19	10,8	13,4	69
	1,50	16,08	17,55	16,2	20,1	69
30/86	0,75	8,50	10 06	9,3	10,6	69
	1,00	11,33	12 90	12,5	14,2	69
	1,50	17,00	18.56	18,7	21,2	69
30/90	0,75	7,65	9.05	7,3	9,6	72
	1,00	10,20	11.60	9,8	12,7	72
	1,50	15,29	16.69	14,7	19,1	72
35/90	0,75	8,18	9.68	9,0	10,2	63
	1,00	10,91	12.41	12,1	13,6	63
	1,50	16,37	17.87	18,1	20,5	63
40/90	0,75	8,78	10.39	10,8	11,0	63
	1,00	11,70	13.31	14.4	14,6	63
	1,50	17,55	19.16	21,6	21,9	63
45/90	0,75	9,42	11.15	13,0	11,8	63
	1,00	12,57	14.29	17,3	15,7	63
	1,50	18,84	20,58	25,9	23,6	63
80/90	0,75	10,09	11.94	15,3	12,6	54
	1,00	13,45	15 30	20,4	16,8	54
	1,50	20,18	22,03	30,6	25,2	54
60/90	0,75	11,42	13.51	20,4	14,3	54
	1,00	15,23	17.32	27,2	19,0	54
	1,50	22,85	24.94	40,8	28,6	54
70/90	0,75	12,76	15.10	26,1	15,9	45
	1,00	17,01	19.35	34,8	21,3	45
	1,50	25,51	27.85	52,2	31,9	45
25/100	0,75	6,96	8.23	5,5	8,7	80
	1,00	9,27	10.54	7,3	11,6	80
	1,50	13,92	15,19	10,9	17,4	80
30/100	0,75	7,34	8.69	6,9	9,2	80
	1,00	9,80	11.15	9,2	12,2	80
	1,50	14,70	16.05	13,8	18,4	80
35/100	0,75	7,80	9.23	8,5	9,7	70
	1,00	10,40	11.83	11,4	13,0	70
	1,50	15,60	17.00	17,0	19,5	70
40/100	0,75	8,29	9.81	10,3	10,4	70
	1,00	11,06	12.58	13,7	13,8	70
	1,50	16,60	18,12	20,6	20,7	70
45/100	1,00	11,79	13.41	16,4	14,7	60
	1,50	17,70	19.31	24,6	22,1	60
	2,00	23,58	25,20	32,7	29,5	60
50/100	1,00	12,57	14.30	19,2	15,7	60
	1,50	18,85	20.58	28,9	23,6	60
	2,00	25,14	26,87	38,5	31,4	60
55/100	1,00	13,37	15.21	22,4	16,7	60
	1,50	20,05	21.89	33,5	25,1	60
	2,00	26,74	28,57	44,7	33,4	60
60/100	1,00	14,17	16.12	25,6	17,7	50
	1,50	21.25	23.19	38,4	26,6	50
	2,00	28,34	30.29	51,3	35 4	50
70/100	1,00	15,77	17.94	32,7	19,7	50
	1,50	23,64	25.81	49,1	29,5	50
	2,00	31,54	33,70	65,4	39.4	50
80/100	1,00	17,37	19.76	40,5	21,7	40
	1,50	26,05	28.44	60,7	32,6	40
	2,00	34 74	37.13	81,0	43,4	40
90/100	1,00	18,96	21.57	48,8	23,7	40
	1,50	28 44	31.05	73,2	35,6	40
	2,00	37,92	40 53	97,6	47,4	40
100/100	1,00	20,56	23.39	58,0	25,7	40
	1,50	30,84	33.67	87,0	38,6	40
	2,00	41,12	43.95	116.0	51,4	40
110/100	1,00	22,16	25.21	68,0	27,7	40
	1,50	33,24	36.28	102,0	41,6	40
	2,00	44,32	47.37	136,0	55,4	40
25/120	0,75	6.66	7 88	5,4	8,3	84
	1,00	8,88	10 10	7,2	11,1	84
	1,50	13,32	14.54	10,7	16,7	84
30/120	0,75	6,96	8 24	6,7	8,7	84
	1,00	9,28	10.56	9,0	11,6	84
	1,50	13,92	15.20	13,5	17,4	84
40/120	1,00	10,20	11.60	13,1	12,7	72
	1,50	15,30	16.70	19,6	19,1	72
	2,00	20,40	21.80	26,1	25,5	72
50/120	1,00	11,30	12.85	17,7	14,1	60
	1,50	16.95	18,50	26,5	21,2	60
	2,00	22,60	24,15	35,3	28,3	60
60/120	1,00	12,57	14.29	23,2	15,7	60
	1,50	18,84	20.57	34,8	23,6	60
	2,00	25,12	26.85	46,4	31,4	60
70/120	1,00	13,90	15.81	29,5	17,4	48
	1,50	20,85	22.76	44,2	26,1	48
	2,00	27,80	29.71	59,0	34,8	48

Digitized by Google

Nummer des Profiles	Blechstärke mm	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg schwarz	Gewicht f. 1qm ohne Ueberdeckung in kg verzinkt	Widerstandsmoment f. 1 m Breite cm³	Querschnitt f. 1 m Breite cm²	Normale Baubreite cm
80/120	1,00	15,23	17.32	36,4	19,0	48
	1,50	22,84	24.93	54,6	28,6	48
	2,00	30,46	32.55	72,8	38,1	48
97/122	0,75	6,75	8.00	5,8	8,4	85
	1,00	9,00	10.25	7,7	11,3	85
	1,50	13,50	14.75	11,6	16,9	85
29/122	0,75	6,87	8.13	6,3	8,6	85
	1,00	9,15	10.40	8,4	11,4	85
	1,50	13,74	15.00	12,6	17,2	85
50/125	1,00	11,07	12 59	17,3	13,8	62
	1,50	16,60	18 12	25,9	20,7	62
	2,00	22,13	23.65	34,5	27,7	62
80/127	0,75	6,85	8.10	6,5	8,6	76
	1,00	9,15	10.40	8,7	11,4	76
	1,50	13,70	14.95	13,0	17,1	76
83/128	0,75	6,96	8 24	7,0	8,7	77
	1,00	9,28	10 56	9,4	11,6	77
	1,50	13,92	15.20	14,1	17,4	77
36/130	0,75	6,62	7.83	5,4	8,3	91
	1,00	8,82	10 04	7,3	11,0	91
	1,50	13,23	14.44	10,9	16,5	91
80/130	0,75	6,82	8.07	6,5	8,5	78
	1,00	9,00	10.34	8,6	11,4	78
	1,50	13,03	14 88	13,0	17,0	78
85/130	0,75	7,10	8 40	7,9	8,9	78
	1,00	9,40	10.76	10,5	11,8	78
	1,50	14,21	15.51	13,8	17,8	78
80/135	0,75	6,76	8.00	6,4	8,4	81
	1,00	9,02	10.25	8,6	11,3	81
	1,50	13,52	14.76	12,9	16,9	81
25/135	0,75	7,03	8.30	7,8	8,8	81
	1,00	9,37	10.67	10,4	11,7	81
	1,50	14,05	15.35	15,6	17,6	81
70/140	1,00	12,57	14 29	27,1	15,7	56
	1,50	18,84	20.57	40,6	23,5	56
	2,00	25,12	26 85	54,2	31,4	56
25/150	0,75	6,45	7.63	5,1	8,0	90
	1,00	8,58	9.76	6,8	10,7	90
	1,50	12,90	14.08	10,2	12,1	90
30/150	0,75	6,62	7.84	6,3	8,3	75
	1,00	8,82	10.03	8,4	11,0	75
	1,50	13,23	14.44	12,6	16,5	75
35/150	0,75	6,84	8.09	7,6	8,5	75
	1,00	9,11	10.36	10,1	11,4	75
	1,50	13,68	14,93	15,2	17,1	75
40/150	0,75	7,08	8.38	9,0	8,8	75
	1,00	9,44	10.74	12,0	11,8	75
	1,50	14,16	15.46	18,0	17,7	75
45/150	0,75	7,35	8.70	10,5	9,2	75
	1,00	9,80	11.15	14,0	12,2	75
	1,50	14,70	16.05	21,0	18,4	75
50/150	1,00	10,19	11.59	16,1	12,7	75
	1,50	15,29	16,70	24,1	19,1	75
	2,00	20,38	21.80	32,2	25,4	75
60/150	1,00	11,06	12.58	20,8	13,8	60
	1,50	16,59	18.11	31,1	20,7	60
	2,00	22,13	23.65	41,6	27,7	60
70/150	1,00	12,04	13.69	26,1	15,0	60
	1,50	18,06	19.70	39,2	22,6	60
	2,00	24,08	25.73	52,3	30,1	60
75/150	1,00	12,57	14.30	29,1	15,7	60
	1,50	18,85	20.58	43,6	23,6	60
	2,00	25,14	26,85	58,1	31,4	60
80/150	1,00	13,10	14.90	32,1	16,4	45
	1,50	19,66	21,45	48,2	24,7	45
	2,00	26,21	28.00	64,3	32,8	45
30/160	0,75	6,55	7.75	6,3	8,2	80
	1,00	8,73	9.93	8,4	10,9	80
	1,50	13,10	14.30	12,5	16,4	80
40/160	0,75	6.96	8.22	8,8	8,7	80
	1,00	9,28	10.54	11,8	11,6	80
	1,50	13,90	15.17	17,7	17,4	80
50/160	1,00	9,94	11.31	15,7	12,4	64
	1.50	14,91	16 28	23,6	18,6	64
	2,00	19,89	21.26	31,5	24,9	64
60/160	1,00	10,73	12.19	20,2	13,4	64
	1,50	16,08	17,55	30,3	20,1	64
	2,00	21,46	22,92	40,5	26,8	64

Außer den angegebenen werden noch folgende Profile hergestellt:

70/140, 75/160, 80/160, 150/160, 70/200, 75/200, 80/200, 85/200, 90/200, 95/200, 100/200.

6. Rostschutz des Eisens.

1. Rosten ist die allmähliche Umwandlung des Eisens in Eisenoxydhydrat durch gemeinsamen Angriff von Luft und Wasser, schneller jedoch unter Mitwirkung verdünnter Säuren, auch einiger Salzlösungen, wie auch von abirrenden elektrischen Strömen; im Seewasser befördert besonders Chlormagnesium die Rostbildung. In völlig wasserfreier Luft und sauerstofffreiem Wasser rostet Eisen nicht. — Walzeisen rostet leichter als Gufseisen.

Der Rost (spez. Gew. rd. 4) nimmt einen gröfseren Raum ein als das dazu verbrauchte Eisen. Frischer Kalkmörtel greift Eisen stark an, indessen kommt die Rostbildung gewöhnlich zum Stillstande; Zementmörtel hält dagegen das Eisen blank (s. unten).

2. Rostschutzmittel sind nur wirksam, wenn die Oberfläche vorher gut gereinigt ist, wozu auch Sandstrahlgebläse dienen kann. Unter ihnen ist, den jeweiligen Umständen entsprechend, sorgfältige Auswahl zu treffen. Bewährte Mittel sind:

Bedeckthalten mit Körpern, die Wasser und Säuren aufnehmen oder binden. So zum Schutze der Dampfkessel der Zusatz von Zinkara (Lösung von Zinkoxyd-Natron) oder von festem Karbozink (kohlens. Zinkoxyd) zum Dampfkesselwasser bei der Kaiserl. Deutschen Marine. Ferner werden aufser Betrieb befindliche Dampfkessel gut geschützt durch Eintragen von Chlorcalcium in nufsgrofsen Stücken in den mittels der Feuerung gut ausgetrockneten Kessel bei gleichzeitigem Luftabschlusse.

In Tunneln benutzt man entweder Kalksteinschlag als Bettung, oder man bestreicht die Eisenteile des Oberbaues mit Kalkmilch, wodurch ein besonders gefährlicher Rosterreger, nämlich die schweflige Säure der Lokomotivrauchgase, gebunden und unschädlich gemacht wird. Für Schraubenmuttern genügt in Tunneln ein zweimaliger Teeranstrich.

3. Metallüberzüge, dadurch hergestellt, dafs die mit Säure usw. völlig rein gebeizten und dann rasch getrockneten Gegenstände noch heifs in die geschmolzenen Metalle getaucht oder in dem betreffenden Metallbad galvanisch überzogen werden.

Zink gibt den besten Schutz, auch vor Salzwasser (Bildung einer Eisen-Zink-Legierung); s. auch S. 662. Vorzüglich ist die kalte elektrolytische Verzinkung. Verzinktes Eisendrahtseil (12drähtig, Drahtstärke 3,5 mm) eignet sich vortrefflich bei Blitzableitern zur Luftleitung. (Verzinktes Eisen wird im Handel vielfach als „galvanisiertes" bezeichnet.)

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für den Zinküberzug des eisernen Telegraphendrahtes folgendes:

Zusammenhangende glatte Oberfläche; wenn Draht in eng aneinander liegenden Schraubenwindungen um einen Zylinder vom 10fachen Drahtdurchmesser gewickelt wird, soll der Zinküberzug weder rissig werden, noch abblättern. Dicke des Ueberzuges: Es soll sich auf ihm keine zusammenhangende Kupferhaut bilden, wenn der Draht von 6 und 5 mm Dicke 8mal, von 4 und 3 mm 7mal, von 2 und 1,7 mm 6mal je eine Minute lang in eine Lösung von 1 G.-T. Kupfervitriol mit 5 G.-T. Wasser eingetaucht wird.

Zinn schützt nur so lange, als das Eisen an keiner Stelle von Zinn entblöfst ist; vgl. Weifsbleche, S. 662.

Blei bildet einen auch gegen Salz- und Schwefelsäure schützenden Ueberzug. Verbleit-verzinkte Bleche dienen zu Dachdeckungen von

Digitized by Google

chemischen Fabriken, Gasanstalten usw. [Verzinnung, Verzinkung, Verbleiung mit Epicassit (Metallanstrich-Syndikat Berlin W 30).]

Kupfer und **Nickel** (galvanisch) schützen nur bei gröfserer Dicke der Schicht; vgl. S. 662.

4. Emaillieren. Die auf die gereinigten (gebeizten und getrockneten) Flächen des Gufsstückes aufgetragene pulverige Grundmasse (Feldspat, Quarz, Borax und Ton) wird bis zur Sinterung gebrannt und dann die Masse des eigentlichen Schmelzes (Silikate und Zinnoxyd) aufgebracht und bis zu ihrer völligen Schmelzung erhitzt.

5. Fette, fest oder flüssig, eignen sich gut zum vorübergehenden Ueberziehen von blanken Eisenteilen; jedoch werden im Freien die Fette von der Sonne abgeschmolzen oder vom Regen fortgespült. Talg (auch mit 50 bis 100 % Bleiweifs) wird später ranzig, die entstehenden Fettsäuren greifen das Eisen an. Talg mit Graphit zum Einfetten der Drahtseile (alle Monat zu wiederholen) sowie des Ackergeräts im Winter bewährt. Dahin gehört auch die gut empfohlene Rostschutzsalbe Ferronat von Rosenzweig & Baumann in Kassel.

6. Portlandzement (auch als Mörtel und Beton) schützt nicht nur, sondern nimmt sogar dünne Rostschichten in sich auf (vgl. Monierbau). Vorzüglicher Schutz für ganze Eisenkonstruktionen; der mit Wasser angerührte reine Zement wird 4- bis 5mal (nach jedesmaligem völligen Erhärten) auf die metallreinen Flächen gestrichen. Für Flächen, die dem Wasser ausgesetzt sind (z. B. Schleusenbauten, Schiffsböden), wird Zement mit entrahmter Milch angemacht.

7. Teer, Asphalt und Pech, rein und wasserfrei, in heifsem Zustande auf das heifse Eisen aufgetragen, haben sich für gufseiserne Rohre sehr bewährt. Zu empfehlen ist auch die Mischung von 8 G.-T. Teer mit 2 G.-T. zu Pulver gelöschtem Kalk und 1 G.-T. Terpentinöl, dreimaliger Anstrich; oder auch 1 G.-T. Schwefel in 2 G.-T. schwerem Teeröl und darin 5 G.-T. Pech oder Asphalt mit ein wenig Wachs aufgelöst.

8. Harzölanstriche. Rostschutzmittel der deutschen Kriegsmarine: Kautschuköl, eine Lösung von Kautschuk in Terpentinöl.

9. Hartgummi und Zelluloid geben festhaftende Ueberzüge von Nägeln, Schrauben, Schnallen, Ringen usw., die dadurch vollkommen unangreifbar für Luft, Wasser, Säuren werden. Sehr wichtig für elektrische Isolatoren. Umkleidungen von Schiffswellen mit Hartgummi (Kaiserl. Marine). Mit Zaponlack (Lösung von Zelluloid) werden u. a. Maschinen, die über See gehen, vor dem Rosten geschützt.

10. Oelfarbenanstriche sind als Rostschutzmittel am gebräuchlichsten. Als Grundierung dient dünnflüssiger, rasch trocknender Leinölfirnis, gemischt mit gut deckenden Farbstoffen, wie Graphit, Ocker, Eisenmennige (völlig säurefrei!), am besten aber mit Bleimennige angerieben. Unter Wasser hat sich nur Bleimennige bewährt.

Nach dem Grundieren folgt der äufsere Anstrich, wozu reiner Leinölfirnis mit Bleiweifs — nicht Zinkweifs —, Graphit und Zinkstaub den besten Schutz gibt. Zur Verhütung von Blasenbildung soll der möglichst dünnflüssige Anstrich erst nach dem völligen Erhärten der unteren Schichten aufgetragen werden.

Digitized by Google

Für Oelfarbenanstriche vgl. die Erfahrungssätze von J. Spennrath, Untersuchung der gebräuchlichen Eisenanstriche, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1334. Zentralbl. Bauv. 1900 S. 133.

Anstrichmittel, die sich ferner bewährt haben, sind: Bessemerfarben von Rosenzweig & Baumann (Cassel); Schuppenpanzerfarbe von Dr. Graf & Co. (Berlin); Siderosthen-Lubrose von der A.-G. für Asphaltierung und Dachbedeckung, vormals Johannes Jeserich (Berlin); die Farbe von Zonka & Co. (Würzburg); Tegolin-Rostschutzfarbe von Court & Baur (Cöln-Ehrenfeld); Eisenglasurit der Glasuritwerke M. Winkelmann (Hamburg); Riessolinfarben der Dessauer Rostschutz-Farbwerke in Dessau; Inertol (Paul Lechler in Stuttgart).

II. Schiffsbodenfarben. Um die eisernen Schiffsböden aufser gegen das Rosten auch gegen das Ansetzen von Tieren zu schützen, müssen die Anstriche auch giftige Stoffe (Quecksilberoxyd u. a.) enthalten. Bewährt sind u. a. die Farben von Joh. Rahtjen, von der Norddeutschen Farbenfabrik Holzapfel sowie von Emil G. v. Höveling (sämtlich in Hamburg).

Reinigung und Anstrich von Eisenkonstruktionen.

(Auszug aus dem § 7 der auf S. 663 unter II. erwähnten „Normalbedingungen".)

Reinigung. Die einzelnen Teile sind vor dem Zusammensetzen von allen Unreinheiten sowie von Rost und Hammerschlag zu befreien. Der Unternehmer ist gehalten, die von ihm beabsichtigte Reinigungsweise in dem Angebote anzugeben, falls (in den besonderen Bedingungen) nicht ein bestimmtes Verfahren vorgeschrieben ist oder der Unternehmer von der Vorschrift abzuweichen wünscht.

Falls die Reinigung auf chemischem Wege stattfindet, ist der Unternehmer für das etwaige Nachrosten infolge nicht genügend sorgfältiger Entfernung der Säure verantwortlich. Die auf chemischem Wege gereinigten Stücke (Platten, Stäbe usw.) sind unmittelbar nach der Reinigung in heifsem Zustande mit einem Anstriche von Leinölfirnis zu versehen. Der Firnis mufs dünnflüssig und schnell trocknend sein. Bis der Leinölfirnis genügend angetrocknet ist, sind die gestrichenen Eisenteile in geeigneter Weise unter Schutz zu halten.

Anstrich. Bevor ein deckender Anstrich aufgebracht wird, ist dem Besteller entsprechende Mitteilung zu machen, damit er die Eisenteile vorher prüfen kann. Erst nach Erledigung der bei dieser vorläufigen Abnahme für erforderlich erachteten Nacharbeiten und nach Erneuerung des etwa beschädigten Leinölfirnis-Anstriches darf die Grundierung der Teile mit dem (in den besonderen Bedingungen) vorgeschriebenen Grundanstriche erfolgen. Die Flächen, die durch andere verdeckt werden, sind vor der Zusammensetzung zu streichen.

Nach erfolgter Aufstellung der Eisenkonstruktion sind die Köpfe der auf der Baustelle eingeschlagenen Niete von Rost zu reinigen und zu grundieren. Sämtliche Fugen sind sorgfältig zu verkitten.

In allen zwischen den Konstruktionsteilen bleibenden freien Räumen, in denen sich Wasser ansammeln kann, mufs für besonders sorgfältigen Anstrich sowie für den Abflufs des Wassers durch entsprechend gebohrte Löcher Sorge getragen werden. Ist letzteres nicht angängig, so ist der Raum, soweit tunlich, mit Asphaltkitt oder einem anderen geeigneten Stoff (z. B. Portland-Zement) auszufüllen.

7. Schweifsverfahren.*)

1. Elektrische Verfahren.

a) Das Thomsonsche **Widerstandsschweifsverfahren** (Stumpfschweifsung) besteht darin, dafs die zu schweifsenden Stücke in

*) Vgl. a. C. Diegel, Das Schweifsen und Hartlöten mit bes. Berücksichtigung der Blechschweifsung.

Digitized by Google

eine Maschine gegeneinander gelegt werden und dann ein starker Strom mit geringer Spannung durch dieselben so lange hindurchgeschickt wird, bis die Verbindungsstellen auf Schweifsglut erwärmt sind. Hierauf wird der Strom unterbrochen und die Teile, soweit wie nötig, zusammengepreſst. Das Verfahren ist anwendbar für Querschnitte bis rd. 20 qcm bei Eisen und bis rd. 25 qcm bei Kupfer. Zur Anwendung gelangt Wechselstrom, der in der Maschine auf 1 bis 3 V transformiert wird. Energieverbrauch für verschiedene volle Quer-

Abb. 35.

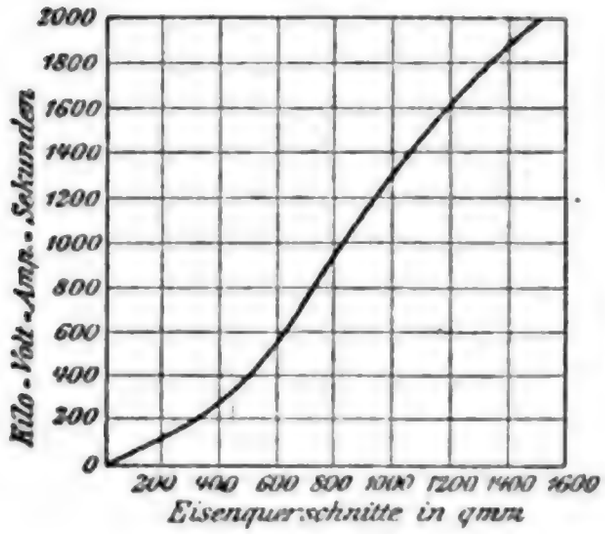


Abb. 36.

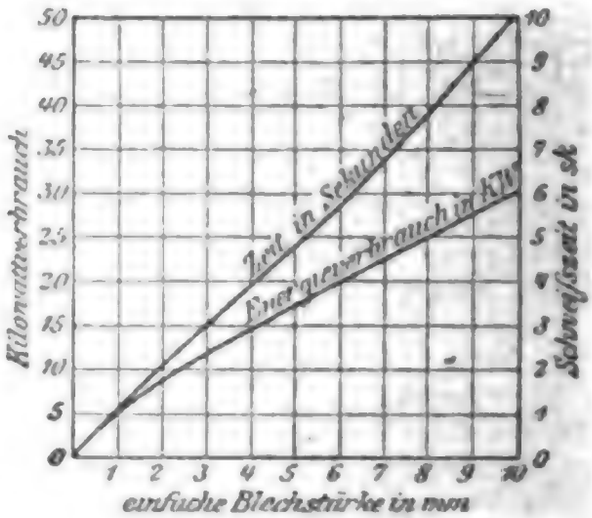
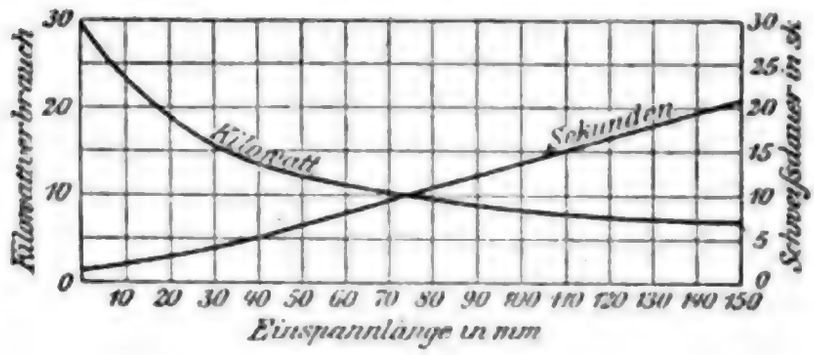


Abb. 37.



schnitte (Abb. 35). Einfluſs der Einspannlänge beim gleichen Querschnitt auf Energie- und Zeitverbrauch (Abb. 37).*)

Die **elektrische Punktschweifsung** ist eine besondere Ausführung des Widerstandsverfahrens und dient zur Verbindung meist dünnerer Bleche, bei welchen die überlappte Naht in kürzeren oder längeren Abständen zusammengeheftet wird und so die Handnietung ersetzt.

Hierbei werden die Schweifsstellen durch besondere gegenüberstehende Elektroden, zwischen denen die Bleche liegen, erwärmt. Um ungünstige Beeinflussung des Kraftverbrauchs durch Erwärmen der Elektroden zu vermeiden, werden diese durch Wasserumlauf gekühlt.

Werden die Elektroden in Rollenform ausgebildet, so lassen sich auch fortlaufende Nähte herstellen. Besonders bei der Herstellung von Blechgeschirren angewendet. Die Schweifsung geht mit etwa 2 V vor sich. Energie- und Zeitverbrauchskurve beim punktweisen Schweifsen von Blechen (Abb. 36).*)

*) Vgl. Bauer, Werkst.-Technik 1913 S. 17 ff.

Digitized by Google

b) Bei der **Lichtbogenschweifsung** nach Bernardos wird das Schweifsstück an den einen Pol einer Dynamo angeschlossen, während der andere mit einem Kohlenstab verbunden ist, den man in geringem Abstande über die zu schweifsende Stelle langsam hinwegführt. Der hierbei entstehende Lichtbogen bringt das Metall zum Schmelzen, so dafs es an der Schweifsstelle zusammenfliefst.

Beim Verfahren nach Zerener werden beide Pole an Kohlenstäbe, die unter einem spitzen Winkel zueinanderstehen, angeschlossen und der entstehende Lichtbogen durch einen Magneten derart abgelenkt, dafs er als Stichflamme wirkt.

Beide Verfahren, bei denen die Verbindung der Fuge durch Ineinanderfliefsen erfolgt, werden zum Stumpfschweifsen angewendet. Lichtbogenspannung 65 V. Schweifsstrom 200 bis 800 Amp, der von Querfeldmaschinen erzeugt wird. Diese sind gegen auftretende Stromstöfse und Kurzschlüsse ziemlich unempfindlich.

Ein Teil des Kohlenstoffes der Anode geht auf das Schweifsstück über, wodurch die Härte an der Schweifsstelle ungünstig beeinflufst und das Metall leicht brüchig wird. Der Lichtbogen eignet sich auch zum Zerschneiden von Blechen jeder Form, doch werden die Schneidkanten zackig und uneben.

Das Verfahren nach Slavianoff (auch elektrisches Giefsverfahren genannt) weicht von dem nach Bernardos dadurch ab, dafs anstatt der Kohlenanode eine Metallanode aus dem gleichen Stoff wie das des Schweifsstückes zur Anwendung gelangt. Beim Schweifsen schmilzt der Metallstab und tropft auf die Schweifsstelle. Dieses Verfahren eignet sich deshalb besonders zur Reparatur gebrochener Gufs- und Schmiedestücke und zum Beseitigen von Schönheitsfehlern an neuen Eisengufsstücken. Hierbei wird die Schweifsstelle so eingeformt, als ob die Fuge mit flüssigem Metall ausgegossen werden sollte. Gufseisen wird in Koksplatten, Schmiedeisen und Stahlgufs in Quarzsand eingeformt. Durchmesser der Schmelzstäbe 8 bis 10 mm; Gleichstrom von 65 V; Stromstärke je nach der Dicke der Schmelzstäbe 400 bis 600 Amp.

Bei dem elektrischen Schweifsverfahren müssen die Augen und nicht bedeckte Hautstellen der Arbeiter durch entsprechende Schutzvorrichtungen gegen die Einwirkung des grellen weifsen Lichtes geschützt werden.

2. Aluminothermisches Schweifsverfahren oder **Thermitschweifsung** nach Dr. Goldschmidt (Hütte, Taschenbuch für Eisenhüttenleute 1910 S. 667). Die Schweifsstelle wird mit flüssigem Eisen umgossen, das durch Reaktion zwischen Aluminiumpulver und Eisenoxyd entstanden ist.

3. Autogene Schweifsung. Die Schweifsstellen werden mittels Stichflamme so weit erhitzt, dafs sie bei dünnen Blechen zusammen fliefsen, während bei starken Blechen ein gleichartiges Material eingeschmolzen wird. Die Erzeugung der Stichflamme erfolgt durch einen sog. Schweifsbrenner, in welchem die Mischung der zu verwendenden Gase, entweder Sauerstoff und Wasserstoff oder Sauerstoff und Azetylen, so erfolgt, dafs die Flamme reduzierend ist, d. h. dafs entweder der Wasserstoff oder das Azetylen in Ueberschufs vorhanden

Digitized by Google

ist. Das Mischungsverhältnis beträgt für 1 R.-T. Sauerstoff 4 R.-T. Wasserstoff oder 0,6 bis 1 R.-T. Azetylen.

Obwohl beide Verfahren fast gleichwertig sind, dürfte doch das eine oder das andere je nach Art der auszuführenden Arbeiten den Vorzug verdienen. Mit Wasserstoff werden Bleche bis 8 mm, mit Azetylen bis 10 mm geschweifst. Bleche bis 3 mm werden stumpf aneinandergeschweifst, starke Bleche werden an den Kanten abgeschrägt, so dafs sich eine Nut bildet, die beim Schweifsen vollgeschmolzen wird. Das Material ist an der Schweifsstelle nicht so homogen und so zähe wie das Blech selbst. Dieser Verlust an Festigkeit läfst sich jedoch dadurch einschränken, dafs die Naht mit dem Fortschreiten der Schweifsung gehämmert wird. Das Hämmern hat zu beginnen, wenn das eingeschmolzene Material noch weifsglühend ist, und mufs bis zum Erkalten auf Rotwärme fortgesetzt werden. Durch nachfolgendes Ausglühen kann die Schweifsstelle vergütet werden.

Beim Wasserstoffverfahren wird der Druck der beiden Gase, der in den Flaschen anfangs bis 125 kg/qcm beträgt, je nach der Dicke der Bleche auf 0,5 bis 2 kg/qcm durch Regulierhähne heruntergebracht. In den Mischraum, vor dem Ausflufs im Brenner, strömen die Gase durch enge Kanäle, die unter sehr spitzem Winkel stehen. Die Druckregelung mufs so erfolgen, dafs die Austrittsgeschwindigkeit gröfser ist als die Zündgeschwindigkeit der Gase, um ein Zurückschlagen der Flamme zu vermeiden.

Beim **Azetylenverfahren** unterscheidet man Nieder- und Hochdruckbrenner. Bei ersteren, unter dem Namen Fouché-Brenner bekannten, reifst der Sauerstoff mit einem von der Blechstärke abhängigen Ueberdruck von 0,5 bis 3 at nach dem Injektorprinzip das unter einem Druck von rd. 150 mm W.-S. stehende Azetylen mit. Austrittsgeschwindigkeit 150 bis max. 250 m/sk, Temperatur der Schweifsflamme 3000 bis 3400°. Explosionsmöglichkeit tritt ein, wenn durch falsche Regelung oder Verstellung des Brenners Sauerstoff in die Azetylenleitung gepreßt wird. Als Schutz hiergegen Anwendung von Wasservorlagen.

Beim Hochdruckbrenner strömen beide Gase mit gleichem Druck (rd. 3 at) dem Brenner zu. Das Azetylen gelangt hierbei in Azeton gelöst als sog. Dissousgas zur Anwendung. Zur Vermeidung des Zurückschlagens der Flamme in die Azetylenleitung wird eine poröse Schicht zwischen geschaltet.

Enthält die Schweifsflamme Azetylen im Ueberschufs, so nimmt das Eisen Kohlenstoff aus der Flamme. Führt die Flamme dagegen Sauerstoff im Ueberschufs, so bilden sich besonders an den Rändern breite Oxydschichten.

Das richtige Mischungsverhältnis ist an der Flammenbildung zu erkennen (vgl. hierüber Ludwig, Der Azetylen-Sauerstoff-Schweifsbrenner).*)

Azetylenverbrauch bei glatter Schweifsarbeit für je 1 mm Blechstärke 75 l/st, bei zunehmender Blechstärke bis 100 l/st. Stündliche Leistung bei glatter Naht 12, 8, 6, 5 m bei entsprechenden Blechstärken von 1, 2, 3, 5 mm.

*) Berichte des Versuchsfeldes für Werkzeugmaschinen. Heft 2. Berlin, Jul. Springer

Digitized by Google

Zum Vergleich der beiden Verfahren ist zu beachten, dafs man beim Wasserstoff- und Azetylen-Hochdruckverfahren unabhängiger ist, da sich die Gasflaschen leicht transportieren lassen und man von einer besonderen Anlage, wie beim Azetylenniederdruck, absehen kann; das Azetylenverfahren arbeitet infolge der gröfseren Wärmeentwicklung schneller und ist für stärkere Gegenstände anwendbar, aufserdem ist Azetylen billiger herzustellen als Wasserstoff. Wasserstoff ruft keine chemische Zersetzung im Eisen hervor, während das Azetylen den Kohlenstoffgehalt an der Schweifsstelle erhöht.

Die autogenen Verfahren eignen sich auch bei der Anwendung sog. Schneidbrenner zum Durchschneiden von Eisen- und Stahlteilen in beliebiger Stärke und Härte. Zu diesem Zwecke erhitzt man zunächst eine Stelle mit der Schweifsflamme bis auf Schmelzhitze, stellt dann die Wasserstoff- bzw. Azetylenzufuhr ab und läfst den Sauerstoff allein mit einem Druck bis zu 30 kg/qcm gegen die Trennstelle streichen, wodurch eine augenblickliche Verbrennung und dadurch Schmelzung und Trennung an der Stelle entsteht. Die benachbarten Teile werden nicht merklich erwärmt.

4. Schweifsen mit Wassergas. Besonders zum Schweifsen stärkerer Bleche benutzt, die im gewöhnlichen Koksfeuer, da nur einseitig, nicht günstig genug erwärmt werden können. Die Wassergasflamme dagegen kann bei nicht zu engen Querschnitten von beiden Seiten wirken. Das zum Schweifsen benutzte Wassergas hat eine Zusammensetzung von 3 % CO_2, 44 % CO, 50 % H und 3 % N bei rd. 2600 WE. Die Temperatur der Wassergasflamme beträgt rd. 1800° C. Zur Erreichung der höchsten Temperatur ist es notwendig, dafs die Verbindung des Gases mit der atmosphärischen Luft eine möglichst innige ist. Die Mischung erfolgt meist in dem Brenner vor dem Ausströmungsschlitz in einem Verhältnis von rd. 5 R.-T. Luft und 2 R.-T. Gas. Zur Erzeugung der Stichflamme wird Luft und Gas, und zwar erstere stärker verdichtet. Hierdurch reifst der Wind das Gas beim Ausströmen in den Mischraum mit.

Die Schweifsung kann entweder mit Ueberlappen oder durch Einschweifsen von Keilstücken erfolgen. Blechstärken für die Wassergasschweifsung sind in der Regel 10 bis 25 mm, doch können auch Platten bis 100 mm geschweifst werden. Die Keilschweifsung fängt bei 20 bis 25 mm an. Blechstärken unter 4 mm eignen sich nicht mehr für dieses Verfahren. Für starke Bleche und Platten sind Kraftbämmer oder hydraulisch wirkende Schweifsapparate in Anwendung. Je nach der Gröfse, der Blechstärke und dem Gewicht der Schweifskörper erfordert ein Schweifsfeuer zwei bis vier Mann beim Maschinenschweifsen und vier bis sieben Mann beim Handschweifsen.

Gasverbrauch und Leistung einer maschinell betriebenen Schweifsstrafse stellen sich nach Angaben von Julius Pintsch:

Blechstärke . . . mm		6	8	10	15	20	25
Gasverbrauch . . cbm		70—75	73—78	75—80	90—110	110—120	130—145
Schweifsnaht i. d. Stunde	normal m			2,6	2,2	1,4	1,3
	maximal m			5,0	4,2	3,4	2,5

Digitized by Google

II. Zink.

Aus Zinkspat (Galmei) oder Zinkblende gewonnen, kommt als Zinkblech und Schmelzzink in den Handel.*) Spez. Gew. S. 616 u. 621. Zwischen 130 bis 155° geschmeidig und walzbar, bei sehr niedriger Temperatur spröde; Schmelzpunkt (vor dem Glühen) bei 419°; füllt, weil sehr dünnflüssig, die Formen gut aus. Erfährt durch Erwärmung eine bedeutende Ausdehnung (Ausdehnungszahl $\alpha \sim 0{,}00003$ für 1°), was bei Verwendung von Zinkblechen besonders zu berücksichtigen ist. Feuchte Luft erzeugt auf ihm eine dünne, fest haftende, schützende Schicht von halbkohlensaurem Zinkoxyd. Durch salz- und säurehaltige Dämpfe und an dumpfen Orten wird Zink bald zerstört. Verunreinigungen des Handelzinks: Blei und Cadmium. Bei hellroter Glühhitze verdampft das Zink und verbrennt bei Luftzutritt mit bläulicher Flamme zu Zinkoxyd (Zinkweifs).

1. Glattes Zinkblech, in 26 Stärken, wird benutzt zu Dacheindeckungen, Dachrinnen und Abfallrohren (Nr. 13 bis 15), Fenster- und Gesimsabdeckungen, Kehlblechen, architektonischen Verzierungen, Badewannen usw. Für Bauzwecke meist in den Stärken Nr. 12 bis 16; leicht und billig, wetterbeständig, durch Firnisanstrich oder galvanische Verkupferung zu färben.

Bei 16° ist längs der Faser $K_z = 1900$, quer $K_z = 2500$ kg/qcm; dabei die Dehnung $\varphi = 18$ bzw. 15 %. Bei 155° ist φ am gröfsten: längs 100 %, quer 80 %; die Längsdehnung fällt von 155° ab bis zu 100° bzw. 175° auf $\varphi = 40$ % und gleichzeitig die Querdehnung auf $\varphi = 20$ bzw. 26 %.

Zu Leisten-Dachdeckungen werden meist Blechtafeln von 1,0 . 2,0 m benutzt; jedoch sind auch Tafeln 0,65 . 2,0 m, 0,8 . 2,0 m, 1,0 . 2,5 m zu beziehen.

Gröfste Länge 6,0 m, gröfste Breite 1,6 m; Stärken von 0,1 bis 30 mm.

Deutsche Zinkblechlehre.

Nr. der Lehre .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dicke in mm .	0,10	0,143	0,186	0,228	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,58	0,66	0,74
1 qm wiegt kg .	0,70	1,00	1,30	1,60	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50	4,06	4,62	5,18
Nr. der Lehre .	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
Dicke in mm .	0,82	0,95	1,08	1,21	1,34	1,47	1,60	1,78	1,96	2,14	2,32	2,50	2,68
1 qm wiegt kg .	5,74	6,65	7,56	8,47	9,38	10,29	11,20	12,46	13,72	14,98	16,24	17,50	18,76

Bemerkung. Die belgische Lehre stimmt mit der deutschen Lehre überein.

Aufser den gewöhnlichen Zinkblechen werden geliefert Satinierbleche, geschliffene und polierte Zinkplatten, Bleche zur Bekleidung von Schiffswänden; letztere gewöhnlich 14 . 48" engl. und 1 bis 2 mm stark u. a.

2. Zinkwellblech für Dachdeckungen, vom Verbande deutscher Zinkwalzwerke, Berlin, Albrechtstr. 11 in den nachstehenden sechs

*) Ausführliche Angaben über Zinkblech und seine Verwendung im Baufach siehe Broschüren des Verbandes deutscher Zinkwalzwerke, Berlin NW 6, Albrechtstr. 11.

Digitized by Google

Profilen geliefert, wovon A bis D in Dicken bis Nr. 16 und E bis Nr. 12.

Profil A auch gebogen (bombiert) nach Halbmessern von 1,5 m und darüber, bis 1 m Breite und 3 m Länge im gewellten Zustande.

Zinkwellbleche.*)

Profil-Nr.	Wellen- Breite B mm	Wellen- Höhe H mm	Max. Breite m	Max. Länge m	Querschnitt für 1 m Tafelbreite qcm	Gewicht f. 1 qm Wellblech kg	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite cm^3
					und für 1 mm Blechstärke		
A	117	55	etwa 1,60	etwa 3,00	14,50	10,33	20,9
B	110	32	„ 1,60	„ 3,00	12,35	8,79	10,0
C	100	32	„ 1,30	„ 3,00	12,50	8,90	10,4
Grillo	100	26	„ 1,00	„ 2,80	11,40	8,13	7,3
D	60	14	„ 1,50	„ 2,61	11,50	8,20	4,2
E	20	6	„ 1,00	„ 2,58	11,65	8,30	1,9

Die Querschnitte, Gewichte und Widerstandsmomente für kleinere und gröfsere Blechdicken als 1 mm erhält man (annähernd) durch Multiplikation mit der betreffenden Blechdicke in mm. Hierbei sind A B C der Länge nach, D und E der Breite nach gewellt.

3. Schmelzzink, meist in kleinen 4 cm starken Platten, zum Verzinken von Eisenblech und Eisendraht, ferner für Metallegierungen (S. 678), Zinkgufswaren, galvanische Elemente usw. Längen-Schwindmafs = $^1/_{69}$ (S. 372). Zinkgufswaren sind durch Anstrich oder galvanischen Metallüberzug (z. B. Kupfer) gegen atmosphärische Einflüsse zu schützen.

III. Kupfer.

Rösten und reduzierendes Schmelzen der meist schwefelhaltigen Kupfererze liefert das unreine, spröde Roh(Schwarz-)kupfer. Bei sehr armen Erzen und kupferhaltigen Metallabfällen wird das Kupfer auf nassem Wege ausgelaugt und gefällt, Zementkupfer. Weiterverarbeitung durch Raffinieren, wiederholtes oxydierendes Schmelzen mit unmittelbar anschliefsendem Reduzieren des gebildeten Kupferoxyduls. Das reinste Kupfer wird durch Elektrolyse gewonnen.

Schmelzpunkt 1054°. Spez. Gewicht S. 615 u. 621. Festigkeitsangaben für Kupfer und Kupferlegierungen S. 493 ff.

Je reiner, desto weicher und dehnbarer, sowohl kalt wie in Glühhitze; Verunreinigung durch Blei, Arsen, Wismut, Zink, Nickel, Silber. Geringe Mengen Wismut (schon 0,05 %) machen das Kupfer brüchig; Arsen- oder Nickelgehalt bis 0,5 % erhöht seine Festigkeit, vermindert aber elektrische Leitungsfähigkeit. Durch Walzen und Hämmern wird es hart, durch Erhitzen auf 600 bis 800° (Art der Abkühlung ohne Einfluss) wieder weich; sehr wenig schweifsbar, zu Gufswaren ungeeignet, weil es blasige Güsse liefert. Grofse Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität.

*) Angabe vom Januar 1914.

Digitized by Google

Aus Kupfer werden gefertigt Draht, Blech, Stangen und Rohre, es wird benutzt zu Legierungen und Farben.

1. Kupferdraht. Gewichte S. 620 und II. Bd. Abschn. Elektrotechnik. Festigkeit S. 501. $K_z = 2400$ kg/qcm für weichen, chemisch reinen Kupferdraht, $K_z = 3700$ bis 4500 kg/qcm für hartgezogenen. Je dünner der hartgezogene Draht ist, desto gröfser ist seine relative Festigkeit. Der Kupferdraht wird je nach Verwendungszweck in weichem oder in hartgezogenem Zustande (in letzterem meist für Freileitungen), und zwar in Ringen bis zu 80 kg geliefert. Trolley- oder Fahrdraht wird auf Haspel, und zwar bis 350 kg ohne Lötstelle ausgeführt. Die elektrische Leitfähigkeit für Kupferdraht soll bei 15° C mindestens 57 Siemens-Einheiten, d. i. 95% betragen. Für Telephon- und Telegraphenleitungen werden hartgezogene Bronzedrähte mit 4500 bis 8400 kg/qcm und dementsprechender Leitfähigkeit von 95 bis 30% verwendet. Der Kupferdraht soll eine glatte Oberfläche ohne Furchen, Schiefer oder Splitter haben, soll zäh und biegsam sein und auf seiner ganzen Länge einen gleichmäßigen kreisförmigen Querschnitt haben.

2. Kupferbleche. Das Kupfer darf weder warm- noch kaltbrüchig sein und mufs im Bruche ein gleichmäfsiges dichtkörniges Gefüge zeigen. Die Bleche sollen gleichmäfsige Stärke und eine glatte, schiefer- und rifsfreie Oberfläche haben.

$K_z = 2000$ bis 2300 kg/qcm, $\varphi \geqq 38\%$. Gewöhnliche Kupferschieferbleche werden in den Lagerformaten 1×2 m bei 0,44 bis 1,11 mm Stärke, 1×3 m bei 0,67 bis 1,11 mm Stärke, 1×4 m bei 0,85 bis 1,50 mm Stärke gewalzt. Mafsbleche werden in Breiten bis zu 4 m und in Längen bis zu 10 m gewalzt; die Stärke dieser Bleche beträgt mindestens 0,1 mm bei 0,4 m Breite, mindestens 4,5 mm bei 4 m Breite.

Feuerbuchsbleche werden in Breiten bis zu 4 m und in Längen bis zu 10 m bei Stärken von 10 bis 32 mm gewalzt. Kreisrunde Scheiben werden in Stärken von 0,1 mm aufwärts bis zu 4 m Durchm. (letzterer Durchmesser bei mindestens 4,5 mm Stärke) gewalzt.

Glatt- oder Druckbleche für feinere Fabrikation (Treibarbeiten usw.) werden kalt nachgewalzt und blank geglüht.

3. Stangenkupfer wird gewalzt und gezogen und mufs vollkommen gleichartig und auf der ganzen Länge von gleichem Durchmesser sein. $K_z \geqq 2300$ kg/qcm, $\varphi \geqq 38$ und etwa 60% Einschnürung. Ein mit Gewinde versehenes Stück Rundkupfer von 180 mm Länge soll sich kalt mit seinen Enden zusammenbiegen lassen, ohne zu brechen oder aufzureifsen. Ein Stück Rundkupfer von der Höhe des doppelten Durchmessers soll sich kalt auf $^1/_3$ der Höhe zusammenstauchen lassen, ohne hierbei Risse zu erhalten.

4. Kupferrohre werden bis zu etwa 350 mm Durchm. nahtlos gewalzt und gezogen usw.

Kupferrohre sollen sich, mit Sand ausgefüllt im warmen Zustande, mit Kolophonium ausgefüllt im kalten Zustande um einen Rundstab vom dreifachen äufseren Durchmesser biegen lassen, ohne Risse zu bekommen. Nach den Bedingungen der deutschen Marine müssen sich bei einem Biegungswinkel von 180° mit Kolophonium gefüllte Kupferrohre im kalten Zustande bis 40 mm äufseren Durchmesser über einen Dorn

Digitized by Google

gleich dem äufseren Rohrdurchmesser, Kupferrohre über 40 mm äufseren Durchmesser über einen Dorn gleich dem $1^1/_2$ fachen äufseren Rohrdurchmesser biegen lassen, ohne Risse zu bekommen. Kupferne Knie- und Federrohre, kupferne T-Stücke, sowie Näheres über Kupferrohre im 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre".

IV. Blei.

Meist aus Bleiglanz (Schwefelblei) als (meist silberhaltiges) Werkblei gewonnen, das raffiniert (und entsilbert) das Kaufblei liefert. Spez. Gew. zwischen 11,25 und 11,37, wenn nicht allzusehr verunreinigt. Blei schmilzt bei 326°, ist gieſsbar, sehr dehnbar und biegsam, wetterbeständig, läfst sich leicht schneiden und verdampft bei Rotglühhitze. Festigkeit S. 496 u. 501.

Bleibleche*) für Dachdeckungen: aufgerollte Tafeln, 0,80 und 1,00 m breit, 10 bis 15 m lang, 1,5 bis 2,0 mm stark.

Hartblei ist Blei mit Antimonzusatz, zu Lagerschalen, Schriftmetall, Bleirohren, zum Untergieſsen der Auflagerplatten von Eisenkonstruktionen (Blei mit 2 bis 10 % Antimon) usw. benutzt. Bleirohre sind zum Schutze gegen die Einwirkung von Wasser innen mit einem Ueberzuge von Schwefelblei (durch Schwefelnatrium) oder Zinn zu versehen. — Rohre aus Hart- und Weichblei 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre".

Bleidraht.

Handelsbureau der Königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg.)**

Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg	Dicke mm	Gewicht von 100 m kg
1,0	0,9	3,5	10,9	6	32,2	11	107,5
1,5	2,0	4,0	14,2	7	43,5	12	128,0
2,0	3,6	4,5	18,0	8	57,0	13	150,0
2,5	5,6	5,0	22,2	9	72,5	14	174,0
3,0	8,0	5,5	26,8	10	89,0	15	200,0

Bemerkung. Draht aus Weichblei ist aufser in den vorstehenden Sorten auch noch in jeder anderen gewünschten Stärke über 0,5 mm, u. zw. rund oder mit anderem Profil, erhältlich.

V. Zinn.

Meist aus Zinnstein gewonnen. Spez. Gew. S. 616 u. 621; Schmelzpunkt bei 232°, $K_z = 350$ bis 400 kg/qcm. Zinn ist weich und geschmeidig, sehr dehnbar, härter als Blei. In Stärken von 0,2 bis 0,008 mm ausgewalzt und gehämmert, heifst es Zinnfolie oder Stanniol.

Gutes Zinn mufs frei von verunreinigenden Beimengungen (Arsen, Blei, Eisen, Kupfer, Wismut, Nickel und Zink) sein und an der Luft

*) Handelsbureau der Königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg: **Bleiblech** in Stärken von 0,3 bis 12 mm, Längen bis 10 m und Breiten bis 3,0 m ist käuflich; dabei das gröfste Plattengewicht 2400 kg. **Bleiröhren** von 3 bis 300 mm lichter Weite.

**) Angabe Januar 1914.

Digitized by Google

seine glänzende Oberfläche behalten. Kommt in Form von Blöcken (12 bis 15 oder 60 kg), Stangen, Rollen (5 bis 6 kg schwer) und Körnern, u. zw. nach Ursprungsländern bezeichnet, als Banka-, Billiton-, Malakka-, australisches und englisches (Lamm-) Zinn in den Handel; ersteres ist das beste und sehr rein. Böhmisches, sächsisches und peruanisches Zinn sind unreine Sorten.

VI. Metallegierungen.*)

Die Schmelztemperaturen der Legierungen sind aus den Zustandsbildern zu entnehmen. Die meisten Legierungen haben ein Schmelzbereich. Sie bestehen in diesem Bereiche aus einem Gemische fester und flüssiger Teile und befinden sich daher in einem breiigen Zustande. Die Schmelzbereiche sind in den Zustandsbildern Abb. 1 bis 12 S. 623 u. 624 schraffiert.**)

Die Zusammensetzung der Legierungen ist im folgenden überall nach Gewichtsteilen (G.-T.) angegeben. — Festigkeitszahlen für Metallegierungen S. 493 ff.

1. Messing (Gelbguſs) nennt man Legierungen aus Kupfer und Zink. Stolberger Messing: 64,8 Kupfer, 32,8 Zink, dazu 2,0 Blei und 0,4 Zinn. Englisches Messing: 66,7 Kupfer, 33,3 Zink. Messing ist härter als Kupfer und sehr dehnbar. Härte und Festigkeit nehmen mit dem Zinkgehalte zu, erstere bis zu etwa 50 %, letztere bis zu etwa 45 % Zinkgehalt, darüber wieder Abnahme. Für eine gegebene Legierung ist die Härte von dem Grade der Kaltbearbeitung abhängig. Für die Praxis empfiehlt sich ein Zinkgehalt von 25 bis 35 %. Die Dehnbarkeit wächst mit dem Kupfergehalte. — Durchschnittlich ist $K_s = 1500$ kg/qcm.

Messing ist in der Rotglühhitze spröde, läſst sich kalt wie Kupfer bearbeiten und zu den dünnsten Blechen kalt auswalzen (Gewichte S. 621). Blech kommt schwarz, gebeizt, ein- und zweiseitig geschabt und poliert in den Handel. Tafeln meist 0,5 . 2,0 m groſs in 0,1 bis 10 mm Stärke. Messingdraht (Gewichte S. 620) geglüht und ungeglüht, Festigkeit S. 501. — Messing liefert, weil dünnflüssig, glatten, blasenfreien Guſs (oft mit 1 bis 2 % Bleizusatz), der leicht zu bearbeiten ist. Allzu hoher Zinkgehalt verursacht starkes Saugen in der Guſsform. Ueber Messingrohre 6. Abschn., Maschinenteile unter „Rohre".

Aehnlich dem Messing sind **Tombak** (85 Kupfer, 15 Zink) von rötlicher Farbe und **Weiſsmessing** mit 50 bis 80 % Zink, gelblich-weiſs.

2. Bronze (Rotguſs) heiſsen Legierungen aus Kupfer und Zinn; dichter, härter, leichtflüssiger als Kupfer. Für Lagerschalen geeignet: 83 Kupfer und 17 Zinn bzw. 82 Kupfer, 16 Zinn und 2 Zink. Härte wächst bis zu 28 % Zinn, nimmt dann wieder ab; Festigkeit am

*) Ueber die zur Verminderung der Reibung dienenden Metallegierungen Z. d. V. d. I. 1898 S. 1300, 1330, 1350 ff. — Legier- und Lötkunst von Dr. F. Wüst. Leipzig 1908.

**) Vollständige Zusammenstellung aller bisher erforschten Zustandsbilder von Legierungen zweier Metalle siehe: Bornemann, Die binären Metallegierungen. Erklärung der Zustandsdiagramme siehe Guertler, Metallographie; Hanemann, Einführung in die Metallographie und Wärmebehandlung.

Digitized by Google

gröfsten bei 17,5 % Zinn. Bronze mit < 5 % Zinn läfst sich kalt strecken. Bleizusatz erhöht die Sprödigkeit, vermindert die Festigkeit und erniedrigt den Schmelzpunkt; Zinkzusatz vermindert Festigkeit und Härte. Festigkeit bei höherer Temperatur S. 495.

Zur Erzielung sauerstofffreier Bronzen wird dem Gusse 0,5 bis 1 % Phosphor zugesetzt. Der Phosphor bindet den Sauerstoff und bildet eine dünnflüssige Schlacke. Das (meist phosphorfreie) Erzeugnis, **Phosphorbronze**, ist sehr zäh, fest, feinkörnig und dünnflüssig, walz-, zieh- und schmiedbar. Zu Maschinenteilen: 90,34 Kupfer, 8,90 Zinn und 0,76 Phosphor. Phosphorbronze findet Verwendung für Achslager und -büchsen, Dampfschieber, Zahnräder, Preſszylinder und Armaturen, d. h. im besonderen für solche Maschinenteile, welche heftigen Stöfsen ausgesetzt sind; auch wird sie zu Rundstangen, Rohren ohne Naht (weich und federhart), Blech und Telephondraht (ungeglüht $K_z = 14000$ kg/qcm bei $\varphi = 1$ %, geglüht $K_z = 6300$ kg/qcm bei $\varphi = 72$ %) benutzt.

Bei den **Lokomotiven** der preufs. Staatsbahnen wird **Rotguſs** von der Zusammensetzung 84 Kupfer, 15 Zinn und 1 Zink verwendet für die Lagerschalen der Treib- und Kuppelstangen, der Treib- und Kuppelachsen, Gleitbacken der Geradführungen u. ähnl., **Phosphorbronze** von der Zusammensetzung 83 Kupfer, 16 Zinn, 1 Phosphorkupfer für die Buchsen des Steuerungsgestänges, der Schieberschubstangen u. ähnl.

Glockenmetall enthält bis 25 % Zinn, ist rötlich-grau, sehr spröde, läfst sich schwer bearbeiten. — **Geschützbronze** enthält bis 10 % Zinn, ist gelblich-rot, wenig dehnbar, ziemlich hart und sehr fest, zu Geschützrohren, Dampfventilen, Dampfhähnen und zu den meisten Bronzegufswaren benutzt, wird durch schnelles Abkühlen weich, bei langsamem Abkühlen hart und spröde.

Kunstbronze enthält noch Zusätze von Zink und Blei, füllt die Gufsformen gut aus und überzieht sich allmählich unter der Einwirkung der feuchten, kohlensäurehaltigen Luft mit sog. Patina (halbkohlensaurem Kupferoxyd), dem grünen, blauen, braun-grünen Edelrost. Kunstbronze ist in der Zusammensetzung sehr schwankend. Soll im Freien leicht Patina erzeugt werden, so mufs die Bronze zinkfrei sein (90 bis 95 % Kupfer und 10 bis 5 % Zinn). Kunstbronze nach Elster: 86,7 Kupfer, 6,7 Zinn, 3,3 Blei und 3,3 Zink. Künstlich erzeugte Patina ist wenig dauerhaft. — **Medaillenbronze** mit nur 2 % Zinn.

Telegraphen- und Telephondraht aus Bronze
von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).*)

Drahtstärke in mm	4,5	4,0	3,0	2,7	2,5	2,2	2,0	1,8	1,5	1,2	1,0	0,9
Gewicht v. 1000 m Draht in kg	143	113	63	51	44	34	28	23	18	10	7,0	4,5

Bronzedraht für grofse Entfernungen mit 60 bis 98 % der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 6800$ bis 4600 kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,
$K_z = 7100$ „ 4800 „ „ 0,9 „ „ .

Siliziumbronzedraht für Stadtleitungen mit 80 bis 40 % der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 7800$ bis 6500 kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,
$K_z = 8500$ „ 8000 „ „ 0,9 „ „ .

*) Angabe Januar 1914

Digitized by Google

Siliziumbronzedraht wird als Seele für Tiefseekabel benutzt.

Doppelbronzedraht, aus einer Aluminiumbronzeseele mit Kupferumhüllung bestehend, mit $K_z = 7600$ kg/qcm und 69 % der Leitungsfähigkeit des Kupfers.*)

Compounddraht, aus einer Stahlseele mit Bronzeumhüllung bestehend; bei einem 3 mm starken Drahte ist der Querschnitt der Seele 2,87 qmm, der der Hülle 4,20 qmm.

*) Bei der Zerreifsprobe (bei 10 bis 15° Temperatur) sei für den 1,5 mm starken Draht $\varphi \gtrless 1$ %, für die übrigen Drähte $\varphi \gtrless 1{,}5$ %. — Ueber den zulässigen Leitungswiderstand II. Bd. Abschn. Elektrotechnik.

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für Bronzedraht zu Telephonleitungen folgendes:

Für Draht von	4,5	4	3	2	1,5	mm Durchmesser
sei K_z mindestens . . .	5000	5100	5260	5260	7000	kg/qcm;
der Draht soll aushalten .	6	7	7	7	11	Biegungen
bei Klemmbacken von	10			5		mm Halbmesser.

3. Weifsmetall, zinnreiche Legierungen mit Antimon, Kupfer oder Blei. Weifsmetall für Lagerschalen: 1 Kupfer, 2 Antimon und 15 Zinn. Weifsmetall für Stopfbüchsenringe: 7 Blei, 1,5 Antimon und 1,5 Zinn.

4. Deltametall, Legierungen aus Kupfer, Zink und Eisen, goldgelb, von grofser Festigkeit und Dehnung, in Rotglut schmiedbar. Gegossen, durchaus dicht und für hohen Druck sehr geeignet. Gegen Seewasser und saure Grubenwässer vollständig widerstandsfähig, daher vielseitige Verwendung im Schiffbau und Bergbau, zu Pumpenkörpern, Flügelrädern für Kreiselpumpen, zu Kolbenstangen, Spindeln, Ventilen usw. Wird geliefert in Barren, Blechen, Stangen, Guís-, Schmiede- und Stanzstücken von der Deutschen Delta-Metall-Gesellschaft, Düsseldorf-Grafenberg.

5. Durnametall, eine vollkommen homogene Kupfer-Zink-Eisen-Legierung (Dürener Metallwerke A.-G.) von ausgezeichneter Festigkeit und Widerstandsfähigkeit, läfst sich ebensogut warm schmieden und walzen als gieísen und findet die vielseitigste Verwendung im Schiffbau, Maschinen- und Pumpenbau, Lokomotiv- und Automobilbau u. a. Ueber Festigkeit usw. s. S. 495.

Duraluminium ist eine Legierung aus Aluminium, Kupfer, Mangan und Magnesium mit über 90 % Aluminium. Spez. Gew. 2,77 bis 2,84. Bruchfestigkeit 35 bis 46 kg/qmm. Dehnung 21 bis 18 %.

6. Lote. Vor dem Löten sind die zu verbindenden Stellen durch Feilen, Schaben oder Aetzen metallisch rein zu machen und alsdann zum Schutz gegen Oxydation während des Lötens beim Weichlöten z. B. mit Lötwasser (Zink in Salzsäure gelöst), Lötfett, Kolophonium, beim Hartlöten z. B. mit Borax zu bedecken. Die zu verbindenden Metallflächen müssen mindestens bis zum Schmelzpunkte des Lotes erhitzt sein, gut aufeinander passen und unverschiebbar gegeneinander gehalten werden. Die Erhitzung der Metallflächen und das Schmelzen

*) Vgl. Z. d. V. d. I. 1892 S. 1319.

Digitized by Google

des Lotes geschieht beim Weichlöten mit Hülfe des Lötkolbens oder der Lötlampe, beim Hartlöten in einem Holzkohlenfeuer.

Wismutlote für leicht schmelzbares, bleihaltiges Zinn; in G.-T.

15,5	32	52,5	Wismut; der Schmelzpunkt liegt bei	96°
20	26	54		101°
20,6	26,8	52,6		103°
21,4	27,8	50,8		107°
24,8	22,1	53,1		121°
20	20	60		114°
15	25	60		125°

Weichlote für verzinntes Eisenblech, Kupfer, Messing, Zinn, Zink, Blei usw.; in G.-T.

90	10	Zinn, Blei; der Schmelzpunkt liegt bei	210°*)
70	30		190°

Hartlote für Messing, Kupfer, Eisen und Stahl; in G.-T.

.	Zinn, 1	Zink, 7	Messing, .	Kupfer;	sehr strengflüssig	gelb
.	1	3 bis 4	.		strengflüssig	gelb
.	1	2 bis 2,5	.		für Messing	gelb
1	4 bis 7	12	.		halbweifs	
1	16	.	16		halbweifs	
1	1	.	3		leicht schmelzbar	weifs
.	1	1	.		leicht schmelzbar	weifs

Silberlote für feine Arbeiten; in G.-T.

4	Feinsilber, .	Zink, .	Messing, 1	Kupfer;	hart
2	.	.	1		weich
20	10	.	30		für Gufseisen geeignet.

Bleiflächen, z. B. bei Akkumulatorplatten, werden dadurch miteinander verlötet, dafs man die Flächen reinigt und dann mit Hülfe einer Wasserstoffgasflamme zum Schmelzen und Ineinanderfliefsen bringt.

7. Sonstige Metallegierungen.

Bezeichnung	Gehalt in G.-T. an Kupfer	Zinn	Zink	Antimon	Dazu noch G.-T.
Letternmetall	.	.	.	16 bis 25	84 bis 75 Blei (auch mit 5 bis 15 % Alum.-Zusatz)
Letternmetall von Ehrhardt	4 bis 2	4 bis 3	89 bis 93	.	3 bis 2 Blei
Hartes Typenmetall von Johnson	.	59	33	.	
	.	75	.	25	
Britanniametall	1,85	81,9	.	16,25	
	.	90	.	10	
Neusilber	50 bis 65	.	30 bis 20	.	20 bis 15 Nickel
Alfenide	59	.	30	.	10 „
Aluminiumbronze	85 bis 95	.	.	.	15 bis 5 Alum.
Aluminiummessing	96,7	.	.	.	3,3 „

Magnalium, Legierungen aus 77 bis 98 % Aluminium (Al) und 23 bis 2 % Magnesium (Mg). Die Legierung von 100 Al mit 10 Mg besitzt etwa die mechanischen Eigenschaften des gewalzten Zinks, die mit 15 Mg des Messings, die mit 20 Mg weicher Bronze und die mit 25 Mg gewöhnlicher Bronze. Festigkeitsangaben S. 496.

Spiegelamalgam: 1 Zinn, 1 Blei und 2 Wismut werden zusammengeschmolzen (Schmelzpunkt bei 110°) und hierzu 4 Quecksilber (bis auf 100° vorgewärmt) zugefügt.

*) Lot für Gegenstände, die mit Nahrungsmitteln in Berührung kommen, darf höchstens 10% Blei enthalten.

Digitized by Google

Leicht schmelzbare Legierungen.

Roses Metall: 1 Zinn, 1 Blei, 2 Wismut (Schmelzpunkt bei 110°).
Clichélegierung: 2 Zinn, 2 Blei, 5 Wismut (Schmelzpunkt bei 105°).
Wood-Metall: 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 4 Kadmium (Schmelzpunkt bei 70°).
Lipowitz-Metall: 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 3 Kadmium (Schmelzpunkt bei 60°).

Metallpreise in Mark für 1000 kg.

Jahresdurchschnittspreise*)	1910	1911	1912
Gießereiroheisen	64,50	66,94	73,50
Flußstabeisen	110,75	106,00	117,90
Schmelzzink	461,81	505,14	595,38
Kupfer	1227,60	1193,66	2409,54
Blei	260,02	280,30	353,33
Zinn	3718,39	3862,20	4704,90
Nickel	3000 bis 3500	3000 bis 3500	3000 bis 3500
Aluminium	1300 „ 1600	1050 „ 1250	1250 „ 1750
Silber	72 750	72 560	82 360

1 kg Gold kostet 2790 Mark.

III. Natürliche Steine und Erden.**)

Mineralogische Härteskala (nach Mohs): 1. Talk, 2. Gips (oder Steinsalz), 3. Kalkspat, 4. Flußspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz, 8. Topas, 9. Korund (Schmirgel), 10. Diamant.

Ueber Druckfestigkeit und zulässige Druckspannung natürlicher Steine S. 498 u. 506. — Spezifische Gewichte S. 613 ff.

1. **Granit** (Feldspat, Quarz und Glimmer); kristallin-körnig. Feldspat bestimmt die Farbe: gelb-grau, grau bis schwärzlich, fleischfarben, rot bis braun, auch grün, Quarz wesentlich die Härte.

2. **Syenit** (Feldspat und Hornblende); kristallin-körnig. Schwarz und weiß oder farbig gesprenkelt. Der **Augitsyenit** („Labrador") von Norwegen, besonders hart und polierbar.

3. **Diorit** (Feldspat und Hornblende, daneben Augit, Glimmer u. a.). Meist grün-weiß oder dunkelgrün: Grünstein.

4. **Diabas** (Feldspat mit Augit). Schwärzlich bis grün, daher auch Grünstein genannt.

5. **Gabbro** (Labrador oder Saußurit mit Diallag). Dunkelgrau und grün. Geht, wie auch 3. und 4., vielfach als Granit.

*) Nach „Stahl und Eisen" und „Statistischen Zusammenstellungen der Metallbank und Metallurgischen Gesellschaft, Frankfurt a. Main". Daselbst ausführlichere Angaben.

**) Näheres: Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Ernst Toeche. O. Herrmann, Steinbruchindustrie und -geologie; Berlin 1899, Gebr. Borntraeger. E. Nandelstaedt, Die Werk- und Pflastersteine Westdeutschlands; Hannover 1910, Max Jänecke. Ferner: E. Glinzer, Lehrbuch der Baustoffkunde, 4. Aufl.; Leipzig 1910, L. Degener. H. Seipp, Die Wetterbeständigkeit der natürlichen Bausteine und die Wetterbeständigkeitsproben, mit besonderer Berücksichtigung der Dachschiefer; Jena 1900, H. Costenoble. H. Seipp, Die abgekürzte Wetterbeständigkeitsprobe; Frankfurt a. M. 1905, Heinrich Keller. J. Hirschwald, Handbuch der bautechnischen Gesteinsprüfung; Berlin 1912, Gebr. Borntraeger.

Digitized by Google

6. **Serpentin** (wahrscheinlich durch Umwandlung aus Gabbro entstanden). Meist grün. Nicht haltbar im Freien. — Verwandt sind der dauerhafte nordische **Saponit** sowie der **Speckstein** und der **Asbest** (Chrysotil), dessen wichtige Anwendungen unter VII 3. angegeben sind.

7. **Porphyrgesteine** (dichte oder feinkörnige kristalline Grundmasse aus Feldspat und Quarz, in die deutliche Kristalle von Feldspat, zuweilen von Quarz, Hornblende, Augit usw. eingesprengt sind). Hauptsächlich: **Felsitporphyr,** rötlich-braun, gelblich, grau, grünlich oder bläulich, und **Melaphyr,** meist schwärzlich von Augit.

8. **Trachytgesteine** (dichte, häufig poröse Grundmasse von Feldspat, wesentlich Sanidin, mit Einsprengungen von Hornblendekristallen, schwarzem Glimmer, Magneteisen). Grau. Dazu gehörend: **Bimsstein, Obsidian, Phonolit** usw.

9. **Augitgesteine.** Darunter: **Basalt,** erstarrter Ausfluſs aus Vulkanen (scheinbar gleichartiges Gestein aus Augit, Feldspat, Olivin, Magneteisen u. a.), dunkelgrau bis schwarz, oft in prismatischen Säulen: **Säulenbasalt,** der dauerhafteste und druckfesteste Baustein, für Straſsenbau, Ufer- und Stützmauern. **Basaltlava,** vielfach poriges Gestein, in Farbe und Härte sehr verschieden. Für Treppen, Sockel, als Pflaster- und Mühlstein. **Anamesit** und **Dolerit** sind fein- bis grobkörnige Basalte.

10. **Gneis** (geschichtete Ausbildung des Granites). Mehr als Granit der Verwitterung ausgesetzt, besonders der feldspat- und glimmerreiche.

11. **Quarzit** (reiner oder nahezu reiner Quarz). Kristallin bis glasartig. Wenn porig zu Mühlsteinen. Zur Glasfabrikation. Als Steinschlag oder als Kies zum Straſsenbau, zur Bereitung von Beton usw. Dazu gehörig: **Feuerstein, Jaspis** usw.

12. **Glimmerschiefer.** Zwischen stark glänzenden Lagen von Glimmer grauer Quarz. Zu Dachplatten sowie als Gestellstein.

13. **Urtonschiefer** oder **Phyllit.** Dunkel oder grünlich, feinkörnig mit seidenglänzender Fläche. Vielfach als Dachschiefer.

14. **Tonschiefer** (erhärteter Ton [S. 685] und Quarz, oft mit Glimmerblättchen). Hell- oder bläulich-grau bis schwärzlich, auch rot; fein spaltbar, daher zur Dachdeckung geeignet. Schädliche Beimengungen: Schwefelkies, Kohle, kohlensaurer Kalk. Beste deutsche Dachschiefer von Lehesten (Meiningen) und andere Thüringer Schiefer. Die besten sind die englischen blauen und roten, auch grünen.

15. **Kalkstein** (kohlensaurer Kalk). Wenn polierbar, heiſst er **Marmor,** Farbe nach der Reinheit oder den zufälligen Beimengungen von Eisenoxyd, Kupferoxyd usw. sehr verschieden: weiſs bis grau und schwarz, gelb, rot, braun, bald einfarbig, bald gefleckt, geadert, geflammt usw. Nach Austreibung der Kohlensäure durch bedeutende Hitze bleibt **Aetzkalk** zurück. **Kristalliner Kalk,** durchscheinend: edler Marmor (Griechenland, Carrara, Tirol, Schlesien, Norwegen, neuerdings Deutsch-Südwestafrika). **Dichter Kalk,** oft mit Sand und Ton vermengt; bildet sich noch heute als Tropfstein und Kalksinter. Darunter: **Uebergangskalk** (Grauwackenkalk). Weiſs, grau, gelb, rot usw. Oft hohle oder tonige Stellen, die sich leicht austreten. **Kohlenkalk,** meist dunkelgrau bis schwarz; hierzu gehört der „belgische Granit", ein vortrefflicher Baustein. **Zechstein,** tonhaltig und bituminös, dunkelgrau. **Muschelkalk,** gelblich und bläulich-grau bis schwärzlich, auch rötlich. **Oolithkalk**

Digitized by Google

oder **Rogenstein**, aus rundlichen Körnern bestehend, grau bis rotbraun, oft sehr fest und hart, zu Uferbauten. **Jurakalk**, grau, gelblich oder rötlich-weifs. **Alpenkalk**, gelblich, rötlich, braun usw.; am bekanntesten der Untersberger Marmor. **Kreide**, weifser, erdiger, schreibender Kalk, aus mikroskopischen Tiergehäusen bestehend. Dazu gehörig der oft sehr feste **Plänerkalk**. **Grobkalk**, sandiger, im frischen Zustande weicher, an der Luft erhärtender, mit zahllosen Schaltieren angefüllter Kalkstein; weifslich bis gelb (Pariser Kalkstein). **Kieselkalk**, lichtgrau und bräunlich, mit viel Kieselerde gemengt: u. a. der vortreffliche „bayerische Granitmarmor". Zu den **Kalkbreccien** (21.) gehört der Brokatellmarmor mit kleineren Bruchstücken; der Lumachelmarmor, aufserdem mit Muschelversteinerungen.

16. **Mergel.** Verschieden gefärbte dichte, erdige oder schiefrige Gesteine aus kohlensaurer Kalkmasse, verbunden mit Ton und Sand. Je nach dem Vorherrschen: Kalk- oder Tonmergel; mit Kieselerde: kieseliger Mergel; mit Bitterkalk: dolomitischer Mergel usw. Manche Mergelarten sind vorzüglich zur Zementfabrikation geeignet.

17. **Dolomit** (kohlensaurer Kalk und kohlensaure Magnesia). Weifslich, gelb, grau bis braun. Kristallin, dicht, oolithisch. Aus guten Brüchen ein harter, höchst dauerhafter Baustein, vornehmlich zum Sockelbau.

18. **Gips** ist wasserhaltiger schwefelsaurer Kalk. Im allgemeinen weifs, gelblich bis rötlich, grau bis schwärzlich, oft gefleckt, geadert, wolkig usw. Darunter: **spätiger Gips** oder **Marienglas**, wasserhell, kristallin-grofsblättrig, ungemein leicht spaltbar. **Feinkörniger Gips** (oder **Alabaster**), weifs-gelblich und grünlich, auch grau; geadert, geflammt usw.; oft stark durchscheinend und polierbar. **Fasergips**, mit parallelfaserigem Gefüge, weifs, gelb, grau, rot. **Dichter Gips**, schneeweifs bis grau, zum Brennen benutzt. Der Gips kommt gewöhnlich in Begleitung von Ton, Steinsalz vor. (S. auch S. 696). — Wasserfreier schwefelsaurer Kalk bildet den weit härteren, oft wie Marmor, aber nur innen verwendeten **Anhydrit**.

19. **Sandstein.** Quarztrümmer (Sandkörner) durch ein kieseliges oder kalkiges oder (meistens) ein toniges Bindemittel zu mehr oder weniger festem Gestein verbunden. Weifs, grau, grünlich, bräunlich, gelb bis rot. Führt oft Kalkspat, Glimmerblättchen, Brauneisenerz, Einschüsse von rotem und grünem Ton usw. mit sich. Verderblich wirkt Schwefelkies, ungünstig auch Glimmerreichtum. Darunter: **Grauwacke**, gewöhnlich dunkelgrau; besonders hart, daher zu Pflasterungen benutzt. **Kohlensandstein**, meist hellgrau mit tonigem, glimmerhaltigem Bindemittel und oft mit Kohlenadern (Ruhrsandstein). **Buntsandstein**, vorherrschend rot wie der schöne Mainsandstein, mit tonigem, kieseligem, eisenschüssigem Bindemittel; enthält oft Tongallen (d. s. eingeschlossene Tonbrocken); sehr verbreitet. **Keupersandstein**, meist gelb, mit tonigem und mergeligem Bindemittel. **Wäldersandstein**, hier besonders die Wesersandsteine wertvoll, wozu der kieselige, für einen der besten gehaltene Obernkirchener Sandstein*) gehört; grau und gelblich-grau, feinkörnig. **Quadersandstein**, mehr oder weniger tonig

*) Bewährung am Cölner Dom, Zentralbl. Bauv. 1909 S. 473.

Digitized by Google

(sächsische Sandsteine), aber auch kieselig wie die vorzüglichen Friedersdorfer, Wünschelburger u. a. (Schlesien), fein und grobkörnig, meist weifs und gelblich. **Hilssandstein**, weifslich oder gelblich. **Nummuliten-** und **Molassesandstein.** Letzterer enthält ein toniges, stark kalkhaltiges Bindemittel. Grau, grünlich und gelblich; zweifelhaftes Material (Schweizer Sandsteine).

20. **Konglomerate.** Bestehen aus abgerundeten Geschieben der mannigfaltigsten Mineralien, durch ein Bindemittel verkittet; z. B. **Nagelfluh**, die Gerölle und Geschiebe verschiedener Gebirgsarten enthält; mergeliges Bindemittel (u. a. Rigi, Salzburg).

21. **Breccien.** Scharfkantige, eckige Bruchstücke, durch Bindemittel verkittet. Besonders häufig bei Kalkstein (u. a. Höttinger Breccie bei Innsbruck), oft schön polierbar.

22. **Tuffe.** Mehr oder minder lockere, porige Gesteine. Man unterscheidet vulkanische und Kalktuffe. Erstere sind verhärtete, lose Auswurfstoffe von Vulkanen, letztere Sinterbildungen, die sich aus kalkhaltigen Wässern bilden. Darunter: **Porphyrtuff**, rot (wie der schöne von Rochlitz in Sachsen). **Bimssteintuff**, aus Bimssteinschutt bestehend, weifs, gelb oder grau. Enthält Brocken von Bimsstein und Trachyt, Körner von Augit und Leucit, Sanidinkristalle usw. Feinerdig und frisch weich (Brohler, Ettringer und andere Tuffsteine). Dazu die **Puzzolanerde**, die **Santorinerde**, der **Trafs.** **Basalttuff** aus verkittetem Basalt- oder Doleritschutt. Schmutzig-grau bis schwärzlich. Enthält Augit, Olivin, Hornblende, Glimmer usw. **Leucittuff**, gelblich-grau. Enthält viele meist verwitterte Leucitkörner, Augit, Glimmer, Sanidin. — **Kalktuff** (Travertin), gelblich-weifs oder grau bis bräunlich. Mehr oder minder dicht, oft porig, blasig und röhrig; gern als „Grottenstein" verwendet.

23. **Erratische Blöcke** oder **Findlinge** sind durch Gletscher oder Eisberge fortgeführt worden und Fremdlinge an ihrer Fundstätte. Am häufigsten Granit, Gneis, Syenit, Diorit, Porphyr usw.

24. **Gerölle** und **Geschiebe**, Trümmer von Gesteinen, durch Frost abgebröckelt und von stark fliefsendem Wasser aus dem Gebirge fortgeführt. Kalkgerölle zum Brennen, Kiesgerölle zum Wegebau.

25. **Kies** und **Grant** sowie **Sand**, kleine bis allerkleinste Bruchstücke quarziger Steine, oft mit Kalk, Mergel und Ton verunreinigt, durch Waschen davon zu befreien. Meeres-, Dünen-, Flufs- und Grubensand; letzterer gewöhnlich schärfer, aber häufig unreiner als Flufssand.

26. **Kieselgur**, Infusorienerde, aus fossilen Panzern mikroskopischer Tierchen bestehend. Weifslich und grau. Zu Isoliermasse, Kitten, als Poliermittel, zur Dynamitfabrikation, zur Herstellung von Wasserglas usw. verwendet (u. a. Lüneburger Heide, Untergrund von Berlin).

27. **Ton**, im völlig reinen Zustande: wasserhaltige kieselsaure Tonerde; sonst aber ein Gemenge dieser mit Sand (grob und sehr fein), Kalkstein und Eisenoxyd, durch Verwitterung feldspathaltiger Gesteinmassen entstanden und im Wasser abgelagert. Grau, grün, blau, rot, braun oder gelb. Darunter: **Kaolin**, der reinste Ton, zur Herstellung des Porzellans benutzt. Die anderen **plastischen Tone**, dazu der Pfeifenton, die feuerfesten und die Töpfertone. Die **Ziegelerde**, dazu Ton-

Digitized by Google

mergel, Lehm und Löfs, der sich heute noch fortwährend absetzt. Ton schwindet beim Trocknen und nachherigem Brennen, ohne die Form im ganzen zu verlieren, und wird dabei äufserst hart. Anwendung zum Porzellan und zu allen Töpferwaren sowie zu den gebrannten Steinen (S. 691 ff.). Trockener Ton, besonders Bolus, saugt auch Fett begierig ein.

28. **Dammerde** (Acker- und Gartenerde), durch Verwitterung von Gestein, unter Beimengung von verwesenden Pflanzen- und Tierstoffen, entstanden; führt stets NaCl (Kochsalz) mit sich und gibt hierdurch, sowie besonders durch Bildung von Salpetersäure, bei Berührung mit kalkhaltigem Mauerwerk zum Mauerfrafs Anlafs, ist daher durch trockenen Schutt oder Sand, durch eine Teer- oder Zementschicht usw. von Holz oder Mauerwerk getrennt zu halten.

IV. Künstliche Steine.

A. Ungebrannte Steine.

a. Zu Mauern und Wänden. **1. Lehmsteine** (Lehmpatzen, Luftziegel) werden aus nassem Lehm geformt und an der Luft getrocknet; zum Vermauern dient Lehmmörtel (Lehm mit Wasser). Format ist wechselnd; Festigkeit gering. Lehmsteine werden zum Ausmauern von Fachwerk und zu Innenwänden landwirtschaftlicher Gebäude benutzt und geben hierbei billige, trockene und warme Wände.

Aus Lehm, der mit geschnittenem Stroh (oder mit Flachs- oder Hanfscheben) gemengt ist, werden zwischen Holzverschalungen die sogen. Lehmpisé-Wände hergestellt. Betrachtlich fester und dauerhafter die Lehmdrahtwände von Baurat W. Paetz in Harburg a. d. Elbe, jetzt als balkentragende Aufsenwände genehmigt.

Aufsenwände aus Lehmsteinen oder Lehm sind durch gute Isolierung und vorspringende Dacher vor Feuchtigkeit zu schützen. Lehmschlag als Füllstoff für die Zwischendecken; wenn feucht bleibend, eine Gefahr für das Holz.

2 **Kalksandstein** (Hartstein)*) ist „ein aus einer innigen Mischung von Kalk und Sand gepreifster und unter Dampfdruck (7 bis 9 at) gehärteter Mauerstein mit einer durchschnittlichen Mindestdruckfestigkeit von 140 kg/qcm; Steine von < 140 kg/qcm sollen Mörtelsteine heifsen". Das nur 6 bis 10 % Fettkalk haltende Gemenge wird in feuchtem Zustande in Mauersteinform gebracht und darauf im Härtekessel in 8 bis 10 st zu sofort brauchbaren Steinen von Normalformat umgewandelt: Bildung von wasserhaltigem Kalksilikat aufser sich nachher bildendem Kalkkarbonat. In Korn und Härte sandsteinartig, weifs, aber auch leicht zu färben, von sehr regelmäfsiger Form; $K = 140$ bis 240 kg/qcm. Vorzüglicher Ersatz für gewöhnliche gute Ziegelsteine, da er wegen seiner besseren Form weniger Mörtel braucht und in anderen wesentlichen Eigenschaften (Wasseraufnahme, Frostbeständigkeit, Haftvermögen**), Widerstand gegen Feuer) ihnen nach-

*) H. Burchartz, Die Prüfung und die Eigenschaften der Kalksandsteine. Berlin 1908. — Verein der Kalksandsteinfabriken, Der Kalksandstein, seine Herstellung und Eigenschaften, 2. Aufl. Berlin 1909. — Derselbe, Das kleine Kalksandsteinbuch. Berlin 1912.

**) H. Burchartz, Haften von Mörtel im Kalksandsteinmauerwerk. Zentralbl. Bauv. 1909 S. 214.

Digitized by Google

gewiesenermafsen mindestens ebenbürtig ist; tadellose Herstellung vorausgesetzt (Vorsicht!). An Gewicht und zulässiger Druckbeanspruchung werden beide Arten Mauerwerk behördlich gleich eingeschätzt. Wird auch als Verblendstein und im Tiefbau sowie für Feuerungsanlagen mit Erfolg verwendet. — Preis nach der Gegend usw. sehr verschieden, 1912 meist 20 bis 23 ℳ (Grenzen 14 und 33 ℳ), fast überall geringer als für gleichwertige Ziegelsteine.

3. **Kalkschlackenstein** (Georgs-Marien-Hütte in Osnabrück, Sophienhütte bei Wetzlar, Maximilianshütte i. Th., Hochofenwerk Lübeck u. v. a.). Zu grobsandigem Pulver granulierte Hochofenschlacke wird mit gelöschtem Kalk gemengt und die Masse in Ziegelform gepreſst. Die Steine erhärten an der Luft allmählich (bei Bildung von kiesel- und kohlensaurem Kalk) und geben warme und dauerhafte, gut ventilierende Wände, sind vielfach als vollwertiger Ersatz für gebrannte Ziegelsteine zugelassen, oft noch wetterbeständiger als diese. Auch solche von hydraulischen Eigenschaften im Tiefbau, zu Wasserbehältern u. a.

4. **Rheinischer Schwemmstein** (Bimssandstein).*) Der vulkanische Bimssand des Neuwieder Beckens wird zu 7 bis 9 R.-T. mit 1 R.-T. hydraulischer Kalkmilch gründlich durchgemengt und zu Steinen geschlagen, die 3 bis 4 Monate an der Luft erhärten. Raumgew. 0,7 bis 0,85, Druckfestigkeit $K = 15$ bis 29 kg/qcm, zulässige Druckspannung für das Mauerwerk $k = 3$ kg/qcm. Verlangen als Bindemittel Kalkmörtel oder besser verlängerten Zementmörtel und eignen sich vorzüglich zu Fachwerkbauten u. a. Zwecken, sind aber seit 1908 auch zur Herstellung massiver belasteter Aufsenmauern zugelassen. Die damit ausgeführten Bauteile sind leicht (850 kg/cbm), gut ventilierend (daher hygienisch besonders geschätzt), feuer-, schwamm- und schallsicher und halten gut warm ($\lambda = 0{,}14$ gegen 0,69 für Ziegel). Auf der sehr rauhen Oberfläche haftet jeder Verputz leicht und dauerhaft. Die Schwemmsteine sind zu Paſsstücken zersägbar, ermöglichen wegen ihrer Leichtigkeit schwache Fundamente und erleichtern den Versand auf weite Entfernungen. Die gangbarsten Gröſsen, von denen der Stein 25 . 12 . 9,5 als Normalstein („Vierzöller") bezeichnet wird, sind in folgender Tafel angegeben.

Länge cm	Breite cm	Stärke cm	Gewicht/Stück kg	Lademenge für 10000 kg je nach der Witterung Stück	Ungef. Preis für 1000 Stück ℳ
25	12	6,5	1,35 bis 1,85	6500 bis 7200	20 bis 21
25	12	7,5	1,65 „ 2,30	5500 „ 6000	20 „ 21
25	12	9,5	2,05 „ 2,85	4400 „ 5000	21 „ 22

Verkauf durch das **Rheinische Schwemmstein-Syndikat** in Neuwied.

Loser Bimssand ist sehr leicht ($\varrho = 0{,}375$), luftdurchlässig und ein schlechter Wärmeleiter ($\lambda = 0{,}066$ m . qm . St. °C); er dient als „Isolierbims" zu Fuſsbodenunterlagen, zu Ausfüllungen zwischen Verschalungen und auf Deckengewölben, als

*) Anton Hamblock, Der rheinische Schwemmstein. Stuttgart 1903. — Der Schwemmstein und seine Verwendung zu Bauzwecken; zu beziehen vom Syndikat in Neuwied.

Digitized by Google

Schutz gegen Frost bei Wasserleitungen, zum Ausfüllen der Isolierschichten in Eis- und Kühlkellern usw.

Die von H. Schneider in Neuwied (Rhein) aus Bimssand mittels Zement, Kieselgur und Schill hergestellten Isolierbimssteine (mit $\lambda = 0{,}084$) eignen sich zu isolierenden Bodenbelägen in Kühlhallen und Eishäusern, zu Dampfkessel-Einmauerungen usw. Raumgew. i. M. 0,68; $K = 17$ kg/qcm. — Aehnlich die Bimszementdielen zu leichten, festen, nagelbaren Zwischenwänden sowie als leichte und feuersichere Unterlage für Kupferblech usw. bei Kirchendächern. Format 107 . 28 cm bei 5, 6 und 7 cm Stärke; Kosten der fertigen Wand 3,30 bis 4 ℳ/qm. Verkaufsverein für Bimszementdielen in Neuwied.

5. **Korkstein**, von Grünzweig & Hartmann in Ludwigshafen a. Rh., Dr. Friedrich Nafzger in Hamburg, Rheinhold & Co. in Hannover, A. Haacke & Co. in Celle, Mannheimer Isolierwerke in Rheinau u. a. Spez. Gew. S. 615; Festigkeitsangaben S. 499. Die gewöhnlichen weifsen bestehen aus Korkstückchen, die mit einer wesentlich tonigen Masse verkittet sind; sie haben sehr geringes Gewicht, lassen sich in beliebigen Gröfsen herstellen, zersägen, zerschneiden und mit Nägeln befestigen. Ungef. Preis des Normalziegels (25 . 12 . 6,5 cm) für 100 Stück 10 ℳ. Gute Eigenschaften und vielfache Verwendungszwecke wie vorstehend bei Schwemmsteinen; jedoch sind Nässe und Temperaturen über 350° zu vermeiden. Als Bindemittel zum Vermauern dient meistens Gips, zum Verputzen empfiehlt sich Kalkmörtel und Gips zu gleichen Teilen.

Schwarze Korksteine, mit Steinkohlenpech als Bindemittel, fester, etwas schwerer und etwa 40 % teurer als die gewöhnlichen, lassen sich auch in feuchter Umgebung verwenden; mit Zement- oder Asphaltmörtel zu vermauern. Sind auch, einerseits mit Gudron überzogen, besonders für Bekleidung kalter und feuchter Wände zu empfehlen, sowie für Kälteschutz (Kühlanlagen). Für schwarzen Korkstein ist $\lambda = 0{,}165$, für gewöhnlichen $\lambda = 0{,}080$ m . qm . St. °C. Nach amtlichen Brennproben als feuerschützende Ummantelung eiserner Säulen und Träger sehr geeignet.

Von beiden Arten hat man 1 bis 12 cm starke Platten in Gröfse von 100 . 25 cm bis 100 . 50 cm. Solche mit Magnesiazementüberzug ($K = 15$ kg/qcm) dienen als vorzügliche Unterlage von Linoleum, nehmen keinen Eindruck an. Dem letzteren Zweck dient auch das **Korkment** von Maximiliansau, welches, in Stärke von 8 mm mit Linoleum bedeckt, vollkommenen Schutz gegen kalten Fufsboden abgibt.

Aus Expansit, nach besonderem Verfahren veredeltem Kork, ist der imprägnierte **Expansit-Korkstein** von Grünzweig & Hartmann hergestellt, der mit $r = 0{,}18$ und $\lambda = 0{,}038$ die gröfste Leichtigkeit besitzt und den allervollkommensten Wärmeschutz bietet.

Korksteinschalen von halbzylindrischer Form, gegen Feuchtigkeit imprägniert, geben vorzüglichen Wärmeschutz für Dampf- und Kälteleitungen; so die Korkisolitschalen von Nafzger. Noch wirksamer sind hierzu die **gebrannten Kieselgurplatten und -formstücke**, aus einem mit Korkstücken gemengten Gur-Ton-Gemisch durch Brennen hergestellt, von aufserordentlicher Porosität und Leichtigkeit: so der **Diatomit** von Grünzweig & Hartmann, Raumgew. 0,3, die gebr. Diatomeen-Schalen von Rheinhold & Co.

Gepreſste Korkplatten der Delmenhorster Korkwerke in Gröfse von 50 . 50 cm und mehr, 10 bis 60 mm stark, in zwei Harten geliefert, dienen höchst wirksam zur Schall-, Wärme- und Trockenisolierung als Unterlage von Maschinen, Trägern, Säulen, Schienen, Belag von Schiffswänden, sowie zu Fufsboden und Wand. Preise: 10 bis 30 mm stark 2,50 bis 4,50 ℳ/qm. Aehnlich die **Rein-Korkplatten** der Korkwerke Salmünster (Hessen-Nassau), in 4 Qualitäten und in Tafeln 100 . 50 cm und 50 . 50 cm geliefert, die im-

Digitized by Google

prägniert auch zur Ummantelung von Eisen dienen. Preise der Stärken 6 bis 60 mm Qual. B 1,70 bis 9,50 ℳ/qm. — Unter dem Namen **Korfund** von E. Zorn in Lankwitz-Berlin empfehlen sich besonders präparierte, gepreſste Korkplatten als Unterlage von Maschinen zur Verhinderung von Erschütterungen und Geräuschübertragungen.

Kunsttuffstein von Dr. Grote in Uelzen, in verschiedenen Formen geliefert, ist ein äuſserst leichter, gut nagel- und schneidbarer, feuersicherer, als vorzüglicher Wärmeschutz erprobter Baustoff.

Linoleum aus Korkmehl und verharztem Leinöl, einseitig mittels Jutegewebe und Lackierung verstärkt, dient zum Belegen von Treppen und Fuſsböden.

Handelsübliche Sorten: Einfarbiges L. in 5 verschiedenen Tönungen. Granit-L. in zahlreichen Farbenstellungen. Inlaid-L. mit durchgehender Musterung. Ferner die bald unansehnlich werdende Druckware.

Handelsübliche Maſse: Länge rd. 25 m, Breite 2 m, Dicke 1,8, 2,2, 3, 3,6, 4, 4,6, 7 mm, bei Inlaid Dicke nur 2,2 und 3,3 mm.

Gewicht: durchschnittlich 1,1 kg/qm für 1 mm Dicke.

Haupteigenschaften: wasserdicht, warm, dauerhaft, schalldämpfend, u. zw. letzteres umsomehr, je gröberes Korkmehl verwendet wird (Korklinoleum von Maximiliansau, 4 und 7 mm stark, von Schlüsselmarke 4, 7 und 9 mm). Desto weniger geschlossen und eben ist aber auch die Oberfläche.

Linoleum bewährt sich auf Holzboden sowie massiven Decken; wichtig ist, daſs der Fuſsboden vor dem Verlegen des Linoleums gut geglättet und gänzlich trocken, auch ganz frei von hygroskopischen und durch Oelsäure angreifbaren Stoffen ist.*) Die Befestigung bei Holz hin und wieder durch Anstiften mit kopflosen Nägeln, sonst durch Aufkleben mit Harzkitt, 1 kg Kitt auf 4 qm (Kleister ist durchaus zu verwerfen).

Neu ist das von der Schlüsselmarke Delmenhorst gelieferte Muralin, ein linoleumähnlicher, sehr haltbarer, etwas rauher Wandbelag in guten farbigen Mustern. Ferner der Korkfilz von Maximiliansau, ein hygienisch vorzüglicher Wand- und Tischbelag; besser als die veraltete Linkrusta.

Sieben deutsche Fabriken, nämlich Delmenhorst bei Bremen: „Hansa", „Anker" und „Schlüssel"; Bietigheim bei Stuttgart; Rixdorf bei Berlin; Bedburg bei Cöln; Maximiliansau, Rheinpfalz, bilden einen Verband mit einheitlichen Preisen.

6. **Dübelsteine**, die gut nagelbar sein, den Mörtel gut festhalten und genügende Festigkeit besitzen müssen, sind u. a. Idealdübelstein aus Bimssand und Zement 9,50 ℳ/100 Stck., ähnlich Meurers Idealstein; Norisdübelstein aus Holzmehl usw. und Magnesiakitt 16 ℳ/100 Stck, ähnlich Adler-Dübel (Otto Franczok & Co. in Berlin SW) im Normalformat 250 ℳ/1000 Stck; Herkules-Dübel, ziemlich schwer. Ferner die Kombinationsdübel aus Holz und Zementstein von Dr. Katz (Waiblingen), Erdmenger u. a.

b. Zu Fuſsboden. 7. Unter dem Namen „Steinholz" lassen sich mehrere Fuſsbodenarten zusammenfassen, deren erster Vertreter der **Xylolith** (von Otto Sening & Co. in Potschappel bei Dresden) ist. Holzmehl (auch Korkmehl), wozu Infusorienerde, Talkumpulver, Asbestfaser u. a., mit Magnesiakitt (S. 717) angerührt und unter hohem Druck in Formen gepreſst. Die Platten müssen auf völlig trockener Unterlage mit einem Wasserglaskitt verlegt oder mit Schrauben befestigt werden. Xylolith ist ein schlechter Wärmeleiter, leichter zu bearbeiten als Stein, jedoch von höchst geringer Abnutzbarkeit, wirft sich nicht, ist schwamm- und feuersicher und dauerhaft gegen Nässe (nimmt nur bis 4,5 % Wasser auf); $s = 1{,}56$. Platten bis etwa 1,4 qm groſs und 10 bis 26 mm stark. Preis ohne Verlegung bei 12 mm Stärke 4,50 ℳ/qm.

Alle anderen Steinholzfuſsböden, aus den gleichen Stoffen hergestellt, werden erst an Ort und Stelle ähnlich wie Zementestrich aufgetragen und geglättet. Sie bilden fugenfreie, feuersichere, fuſswarme

*) S. den Ministerial-Erlaſs vom 12. Oktober 1910 über die Verwendung von Linoleum als Fuſsbodenbelag. Zentralbl. Bauv. 1910 S. 571.

Digitized by Google

and staubfreie Fufsbodenbeläge, an der Oberfläche ziemlich wasserundurchlässig, etwas hygroskopisch. — Der erste Vertreter ist das aus Leipzig hervorgegangene **Torgament** (jetzt Berliner Torgamentwerke, Berlin SW). Preis: einfarbig 5,50 bis 3,50 ℳ/qm je nach Größe der Fläche; mehrfarbig + 0,75 ℳ/qm.

Aehnlich sind viele andere, wie **Xylopal** von Kühl & Miethe in Hamburg, **Sanitas** von Heinze & Kroner in Erfurt, **Terralith** von Mahla in Nürnberg, **Terrast** von der T.-G. m. b. H. in Berlin W, **Terragont**, asbesthaltig, von den T.-Werken in Maikammer (Pfalz), **Mineralit** von den Asbestzementwerken in Hamburg, **Pyrofugont** von Gebr. Schleicher in München, **Dolomont** von Langguth & Platz in Berlin, **Fama** in Hannover, **Holzmarmor, Holzterrazzo, Aesculap** und **Wallinit** (sämtlich von Hamburg). Hygienisch einwandfrei ist besonders der Oel-Xylopal, für den das Holzmehl vorher mit Oel getränkt wird. Ungef. Preis bei 24 mm Stärke 7,50 ℳ/qm. Der **Sklerolithzement** von K. Müller in Lüneburg mit Magnesiumsulfat (statt -chlorid) ist nicht hygroskopisch, dürfte sich deshalb, besonders auch in der feuchten Tropenluft besser bewähren.

Haltbarkeit und Aussehen aller Steinholzfußböden ist von guter Pflege abhängig: Reinigung nur mit reinem, warmem Wasser, Einreiben nach dem Trocknen mit Fufsbodenöl, zuerst öfter, später alle Vierteljahre.

8a. **Englischer Schlackenstein** (Ironbrick). In Eisenformen gegossene, noch längere Zeit glühend erhaltene Hochofenschlacke bildet nach langsamer Abkühlung äufserst harte, schwere, wenig spröde Steine von brauner bis schwarzer Farbe; durch ein Muster rauh gemacht, eignen sich diese flach-rechteckigen Steine zur Pflasterung von Bürgersteigen, Höfen, Ställen usw. Werden jetzt durch die gleichgeformten schön gelben Skromberga-Klinkerplatten (30 . 15 . 5 cm, Preis 5,40 ℳ/qm) ersetzt. — b. **Deutscher Schlackenpflasterstein** (Mansfeldsche Kupferschiefer bauende Gewerkschaft zu Eisleben) von grauer Farbe und Würfelform (16 cm Kante) mit ebener, etwas rauher Kopffläche. Für Radfahrwege, jetzt auch für ganze, leichter belastete Strafsen bewährt. Preis I 16½, II 13 ₰ das Stück.

c. Zu Wandputz. 9. Als „Edelputz" ist zu bezeichnen: **Terranova** („Terranova"-Industrie in Freihung, Oberpfalz), ein dekorativ wirkendes Mörtelmaterial, das mit Wasser ähnlich langsam bindendem Zement abbindet und einen rauhen, wetterfesten, harten Putz gibt, dabei luftdurchlässig und durchaus volumbeständig ist. Seit 1910 noch verbessert und stark wasserabweisend gemacht. In mehreren naturechten Farbtönen geliefert, gestattet es mannigfaltigste Oberflächenbehandlung. — Aehnlich das **Lithin** von H. Knab in Steinfels, Bayern, der **Felsitporphyr** von der „Porphyr"-Putz-Industrie in Freihung, der Extra-Putz-**Porphyr** von Massenhausen bei München sowie der **Terrasit** von der Terrasit-G. m. b. H., Berlin-Halensee.

Zu diesen Arten Kalkedelputz ist 1912 als Zementedelputz **Grana** (Paul Frank in Hamburg) getreten: Durch farbige Steinzuschläge wird eine dekorativ gut belebte Zementputzfläche hervorgebracht.

10. **Heliolith** (von M. Möller in Altona) ist ein harter, glänzender, waschbarer, fugenloser Wand- und Deckenputz, der auch von Desinfektionsmitteln nicht angegriffen wird. Amtlich als hygienisch bester Wand-

Digitized by Google

putz bezeichnet. Weifs, farbig sowie marmorartig. Preis etwa 7 ℳ/qm.

d. Zu Bedachung. 11. **Eternit** von der Deutschen Eternitgesellschaft in Hamburg ist Asbestzementschiefer. Wasserundurchlässige Tafeln von der Härte mancher natürlichen Schiefer, leichter und fester als diese (Raumgew. 2,1 und $K_b = 689$ kg/qcm), gut wärmeschützend, als feuersicher bewährt, eignet sich aufser zur Dacheindeckung auch für Fachwerkbau zu billigen, leicht zerlegbaren, gesunden Wohnstätten, besonders in den Tropen und in kalten Gegenden. Farben hellgrau, dunkelgrau und rot.

I. Dachschiefer, 3,5 mm stark, aus Tafeln von 30 . 30 und 40 . 40 cm für alle Deckungsarten zugeschnitten, gestattet leichte Bauart, vermindert die Heizkosten. Preis 285 ℳ/1000 Stck. II. Tafeln zur Decken- und Wandverkleidung, Herstellung von Baracken, 122 . 122, 244 . 122 und 250 . 125 cm grofs und 4 bis 20 mm stark. Preis 3,25 bis 25 ℳ/qm. III. Calmons Asbestholz aus Eternit mit Holzfurnier zu Täfelungen, Türen u. a., spart an Gewicht, Raum und auch an Kosten. — Aehnlich der **Thümmelitschiefer** von den Thümmelitwerken Nürnberg.

Asbestolith, nach den Patenten Leo Pulvermann in Hamburg hergestellter Asbestzementschiefer, durch besondere Wasserundurchlässigkeit und Feuerschutz ausgezeichnet. Dachsteine 30 . 30 und 40 . 40 cm, Preis 105 und 190 ℳ/1000 Stck; Wand- und Deckenplatten 100 . 100 cm, Preis 0,40 ℳ/qm und mm.

12. **Gipsdielen, Bautafeln, Marmorzement, Stuckmarmor** u. a. s. unter Gips.

13. **Kunststein** und **Kunstwerkstein, Terrazzo** s. unter Zement; **Vulkanol** unter Klinker.

14. **Glasbausteine, Glasziegel, Glaswandplatten** s. unter Glas.

15. **Tektolith, Ruberoid** s. unter Asphalt usw.

B. Gebrannte Steine.

Der Rohstoff hierfür ist der feuchte Ton (Ziegelton, Ziegelerde, Lehm) mit mehr oder weniger Sand (Staubsand und Grobsand), wozu noch Beimengungen von Eisenoxyd, Kalkstein, Schwefelkies, organischen Resten usw. kommen. Die Aufbereitung des Ziegelgutes durch Auswintern, Einsumpfen, Schlämmen usw. bezweckt Auflockerung und die Entfernung aller groben und schädlichen Einmengungen. Zu fette Ziegelerde wird durch Zumischen von Sand, Ziegelmehl, Sägespänen, Lohe (für feuerfeste Steine Schamottegrus, Serpentin u. a.) magerer gemacht; auch wird oft durch Mengung von fettem und magerem Lehm eine brauchbare Mischung erzielt.

Nachdem die Masse möglichst gleichmäfsig gemacht ist (z. B. durch Tonschneider), erfolgt das Formen meist in nassem Zustande zum gröfsten Teil in Maschinen (mit Kraft- oder Handantrieb), welche dichtere, festere und regelrechtere Steine liefern als der Handstrich und auch zur Herstellung von Loch- und Formsteinen, Tonrohren usw. dienen können. Die Gröfse der Form mufs jedenfalls auf das Schwinden des Ziegelgutes berechnet sein. Das Längenschwindmafs eines mittleren Tones ist 1 : 10 bis 1 : 7; das körperliche Schwindmafs

Digitized by Google

ist annähernd dreimal so groſs und u. Umst. durch Probebrennen festzustellen. Ein Arbeiter streicht in 10 st 3000 bis 4000 Ziegel; eine Ziegelmaschine von 20 und mehr PS formt aus nassem Lehm bis zu 30 000, eine noch stärkere aus trockenem Lehm bis zu 40 000 Ziegeln in 10 st.

Auf Gerüsten lufttrocken geworden, werden die Steine gebrannt. Der Feldbrand (in Meilern) liefert weniger ansehnliche, aber billige und für gewöhnliche Zwecke gut brauchbare Steine. Preise 1912: 17 bis 20 ℳ/1000 Stck, selten mehr. Von Brennöfen ist in Deutschland der Hoffmannsche Ringofen der vollkommenste, da er ununterbrochenen Betrieb bei möglichster Ausnutzung des Brennstoffs ermöglicht. Er liefert täglich, je nach Gröſse, 4000 bis 20000 Steine bei einem Brennstoffverbrauch von 150 bis 200 kg Kohlen auf 1000 hartgebrannte Steine. Jahresleistungen von mehreren Millionen Steinen sind jetzt nichts Seltenes. — Spez. Gew. der Ziegelsteine S. 616 u. 619; Festigkeitsangaben, auch für das Ziegelmauerwerk, S. 498 u. 499. — Ueber „die Ausblühungen des Mauerwerks, ihre Entstehung und Bekämpfung" s. die Schrift von Dr. Mäckler, Berlin 1901.

1. **Gewöhnliche Mauersteine** (Hintermauerungsziegel). **Normalformat** (Reichsmaſs) = 25 . 12 . 6,5 cm usw. s. III. Bd., Hochbau. Preise 1912 äuſserst verschieden, meist 20 bis 26 ℳ/1000 Stck II. Sorte (Grenzen 15 und 32 ℳ). Aufserdem noch in den Gebieten der unteren Elbe und der unteren Weser sowie in Schleswig-Holstein zwei **Kleinformate**: 22 . 10,5 . 5 cm (Hamburger oder Oldenburger Format) und 23 . 11 . 5,5 cm (Kieler Format).

Gut gebrannte Steine dürfen nicht abfärben, sollen höchstens bis 16 % Wasser aufnehmen, hart sein und scharfkantigen Bruch zeigen sowie beim Anschlagen mit dem Hammer hellen (nicht dumpfen oder klirrenden) Klang geben; nur solche Steine sind tragfähig und dauerhaft.

Poröse Vollsteine (Tuffziegel) für leichte Wände, Erker usw. werden aus Lehm, der zu einem Drittel bis zur Hälfte mit Brennstoff (Sägespänen, Braunkohle, Koksstaub, Lohe) gemischt ist, hergestellt; sie sind etwa halb so fest wie gewöhnliche Ziegel, besonders warmhaltend und leicht (1 Stein im Normalformat wiegt 2,25 bis 2,75 kg, 1 cbm hiervon wiegt 1130 bis 1380 kg).

Lochsteine, mit prismatischen oder zylindrischen Löchern, längs oder quer; Vorteile und Verwendung wie bei porösen Steinen, dabei aber gröfsere Festigkeit. Die Wandstärken des Lochsteines macht man am besten überall gleich, etwa 1,5 bis 2,5 cm. Dünnwandige Lochsteine wiegen etwa 1000, dickwandige etwa 1200 kg/cbm, der Normalstein 2,0 bzw. 2,4 kg. Für groſse Auskragungen die tragfähigen durchlochten Tonsteine von Gail in Giefsen, bis 1 m lang. Preis II. Sorte, etwa 0,7 m lang, 272 ℳ; 1 m lang, 380 ℳ/1000 Stck.

Noch leichter und auch für manche Zwecke fest genug (z. B. für Erker, Balkone, massive Decken usw.) sind die porösen Lochsteine. So die Steine für die Förstersche Decke, Format 25 . 13 cm und für Spannweiten bis 1,7 m 10 cm hoch. Gewicht des Steines 3,2 kg. Preis etwa 52 ℳ/1000 Stck.; für die Schillerdecke mit 30 . 25 cm Grundfläche.

2. **Klinker**, durchweg bis zur Sinterung gebrannte Ziegelsteine, aus besonders geeignetem, kalk- oder eisenoxydhaltigem Lehm her-

Digitized by Google

gestellt. Gröfse normal oder auch 21 . 10 . 5,5 cm; Form bei den Handstrichklinkern wenig regelmäfsig; besser bei den Maschinenklinkern, die zum Verblenden dienen. Sollen gar kein Wasser aufnehmen, hellklingend und sehr hart sein; sind nur mit hydraulischem Mörtel zu vermauern. Verwendung zu Brücken- und Wasserbauten, Ausmauerung von Jauchegruben; in Gebäuden zu Balkenauflagern und stark belasteten Pfeilern, zu Grundmauern und Trockenschichten; zu Pflasterungen: Klinkerstrafsen*) usw.

Vulkanol-Pflasterstein der Deutschen Steinwerke, A.-G. in Eltmann a. Main, aus 96 % Hartsteingrus mit tonigem Bindemittel gepreſst, bis zur Glutflüssigkeit gebrannt und sehr langsam abgekühlt. $s = 2{,}69$; $K = 2463$ kg/qcm. Abnutzung äufserst gering. Auf 5 bis 15 cm starker Betonschicht zu verlegen. Die Kosten der Strafse werden zu 12 bis 16 ℳ/qm angegeben.

3. **Verblendsteine**, aus fetterem Ton sorgfältig hergestellt und von verschiedenen Farbtönen; häufig gelocht, Normalformat usw. s. III. Bd.; Fugen überall 8 mm. Die Lagerflächen sind oft durch Rillen usw. rauh gemacht. Durch Aufrauhen, Sanden usw. werden jetzt oft die Sichtflächen belebt, durch Engoben (Ueberfangfarben, vor dem Brennen aufgetragener Tonschlamm) oder Glasuren (nochmaliges Brennen) erhalten sie Glanz, lebhafte Farben und Schutz vor Verwitterung, jedoch letzteres nur, wenn die Ueberzüge frei von Sprüngen und durchgehenden Haarrissen sind. Zu verlangen sind ein durchaus gleichmäfsiger Farbenton (ohne jede Auswitterung) und vollkommen scharfe Formen bei Abweichungen in den Abmessungen von höchstens $\pm$ 0,5 mm. Gröfsere Steine im sogenannten Klosterformat: 28,5 . 13,5 . 8,5 cm werden jetzt für staatliche monumentale Backsteinbauten in Preufsen hergestellt, wobei Handstrich oder der maschinell hergestellte Handstrich bevorzugt wird. — Durch Sintern der Oberfläche entstanden sind die jetzt vielbegehrten, äufserst harten „Eisenklinker".

Hierzu sind zu rechnen die Profilsteine (zu Gesimsen, Fenster- und Türeinfassungen usw.), die keilförmigen und nach der Krümmung des Gewölbes gestalteten Gewölbesteine; ferner die immer mehr zur Fassadenverblendung angewendeten glasierten Wandplatten, oft in Form von Spaltvierteln oder Spalthalben geliefert. Für Monumentalbau die Quaderverblender (Sichtfläche 15,6 . 25,6 cm) mit und ohne Verzahnung.

Am meisten verbreitet sind die schlesischen Verblender.

4. **Terrakotten** sind künstlerisch ausgebildete Ziegelwaren, aus sehr fettem, sich mit gleichmäfsiger Farbe brennendem Ton, unter Anwendung von Gipsformen hergestellt. Hieran schliefsen sich die plattierten Ziegelwaren, die als Boden- und Wandbelag Verwendung finden; u. a. die einfarbigen Steinzeugplatten und die farbig gemusterten Mosaikplatten (von Villeroy & Boch, jetzt auch von vielen anderen Werken geliefert, wie: Deutsch-Lissa i. Schl.; Vereinigte Mosaikplattenwerke, A.-G. Friedland-Sinzig; Otto Kauffmann in Niedersedlitz i. S.; Norddeutsche Steingutfabrik Grohn bei Bremen u. a.)

*) G. Osthoff, Klinker und Klinkerstrafsen. Leipzig 1882.

Digitized by Google

5. **Schamottesteine,** feuerfest, werden geformt aus feuerfestem Ton, der mit bereits gebranntem, gemahlenem Ton (z. B. Kapselscherben) gemischt wird, langsam getrocknet und in Weifsglut gebrannt. Der Hitzegrad, für den sie feuerfest sein sollen, wird mit den Segerschen Kegeln (II. Bd. 2. Abschn., Mefskunde, E. Wärmemessung) bestimmt. Je nach dem Verwendungszwecke werden sie sehr dicht und hart oder auch von lockerer, körniger Beschaffenheit hergestellt. Vermauerung mit feuerfestem Mörtel (fetter Ton, trocken mit Schamottemehl oder -körnern und dann angefeuchtet im Tonschneider gemischt); vortrefflich hierzu und billig sind Feuerzement und Klebesand, beide vom Westerwald (Tonzeche Rofsbach) oder von der Eifel (Industrie-Gesellschaft „Brohlthal" in Cöln); teurer der Pyrosin.

Andere feuerfeste Steine, deren Grundmasse durch Glühen von Magnesit oder von Dolomit gewonnen wird (Magnesitsteine u. a.), dienen hauptsächlich bei der Eisenerzeugung.

6. **Dachziegel,** entweder eben wie die Biberschwänze oder gekrümmt wie die Pfannen (S-Ziegel), First-, Grat- oder Hohlziegel. In mannigfaltigen Farben, auch grau „gedämpft", engobiert oder glasiert; zum Schutze gegen Säuren usw. werden sie auch in heifsen Gasteer getaucht. — Die neueren Falzziegel verhindern durch ihr falzartiges Ineinandergreifen das Eindringen von Regen und Schnee. Von einfachster Form und Herstellung sind die Strangfalzziegel. — Die mannigfachsten Formen und Färbungen für die verschiedenen Zwecke (Turm-, Giebelverzierungen) bieten u. a. Ludowici in Jockgrim (Pfalz), Sturm in Freiwaldau (Schlesien), die Möncheberger Gewerkschaft, Cassel.

7. **Ofenkacheln,** aus dem nachher glasierten rechteckigen Blatt und der (inneren) im Viereck gebogenen wulstförmigen Zarge bestehend, werden aus Ton von Hand mittels dieser Teile oder durch Maschinenarbeit (Pressen) gleich im ganzen hergestellt und zweimal gebrannt. Nach dem ersten Brennen wird die Aufsenfläche mit einer Glasurmasse überzogen.

8. **Tonrohre** für Flüssigkeitsleitungen, selten und dann nur innen glasierte Muffenrohre von kreisförmigem (auch wohl elliptischem oder eiförmigem) Querschnitt, sind mit den zugehörigen Formstücken (Bogen, Abzweigen, Uebergängen, Siphonen) in lichten Weiten von 5 bis 60 cm und darüber erhältlich. — Tonrohre von rechteckiger Form zu Rauchrohranlagen, Abluftröhren und Luftheizungskanälen; in Stücken mit 1 bis 4 Oeffnungen von 70 bis 2350 qcm lichtem Querschnitt. Ferner Krippen und Tröge, Schornsteinaufsätze, Klosettbecken u. a.

V. Mörtel, Putz, Zement, Beton usw.

Nach den Definitionen, Dezember 1909 von den Handelskammern Berlin und Potsdam sowie den Aeltesten der Kaufmannschaft zu Berlin aufgestellt, ist Kalkmörtel = Gemisch von gelöschtem Kalk und Sand; verlängerter Zementmörtel = Gem. wie eben mit Zementzusatz; Gipsmörtel = Gem. wie eben mit Gipszusatz; Haarkalkmörtel = Gem. wie eben mit Zusatz von Tierhaaren; reiner Zementmörtel = Gem. von Zement und Sand; hydraulischer Mörtel = sonstiger Mörtel, der unter Wasser abbindet; Schamottemörtel = Gem. von Schamottemehl mit feuerfestem Ton; Lehmmörtel = Gem. von Lehm und Wasser.

Digitized by Google

A. Luftmörtel.

1. Lehmmörtel, aus genäfstem, magerem, mit Häcksel u. a. vermischtem Lehm bestehend, erhärtet durch einfaches Austrocknen, daher wenig fest und vom Wasser leicht auszuspülen. Nur für Innenwände und ganz geschützte Aufsenmauern sowie bei Feuerungsanlagen (Backöfen) anwendbar. Billigster, schnell trocknender, warm haltender Mörtel, auch Anstrich für Holz gegen Feuersgefahr.

Zu dem ziemlich harten und zugleich etwas elastischen **Lehmestrich** (Lehmschlag) für Tennen, Kegelbahnen usw. wird mit Hammerschlag versetzter und nachher auch mit Blut getränkter Lehm gehörig gestampft.

2. Kalkmörtel*) („Mauerspeise"). Der zum Löschen bestimmte gebrannte Kalk wird aus möglichst von Ton und Sand freiem Kalkstein durch starkes Glühen in den Kalköfen, jetzt auch im Ringofen (S. 692) oder im Drehofen (S. 699), hergestellt, wobei für rasche Abführung der entweichenden Kohlensäure gesorgt werden mufs. Vor Wasser und Luft sorgfältig geschützt aufzubewahren, da er sonst abstirbt. Dieser gebrannte oder Aetzkalk (Mindestgehalt an CaO soll 90 % sein) wird mit weichem Wasser (am besten Regenwasser) gelöscht, entweder trocken zu Staubkalk (Sackkalk), der in guter Verpackung sehr lange gebrauchsfähig bleibt, oder aber meistens (beim Nafslöschen) zu Kalkbrei. Hierzu bringt man den Kalk am besten zunächst mit wenig Wasser zum Zerfallen, wobei er seinen Rauminhalt bedeutend vergröfsert, und setzt dann sogleich noch die doppelte Menge Wasser und mehr unter Umrühren zu. Bei zu wenig Wasser „verbrennt" der Kalk, bei zu viel „ersäuft" er. Totgebrannte Stücke bleiben steinig zurück. Die entstehende Kalkmilch fliefst in eine Erdgrube und gesteht hier, unter Abrieselung von Unreinheiten und völliger Löschung aller Teilchen, zu dem Kalkbrei, der vor seiner Verwendung eine rissige Oberfläche zeigen soll. Durch aufgestreuten Sand und sorgfältige Abdeckung läfst sich der so eingesumpfte Kalk länger gebrauchsfähig erhalten. Die Mörtelbereitung aus der frischen Kalkmilch im Kasten selbst ist zu verwerfen.

Man unterscheidet fetten („Weifskalk") und mageren Kalk. Letzterer, weniger geschmeidig und mehr körnig (kurz), verträgt weniger Sandzusatz. Durch zu grofsen Gehalt an der magernden Magnesia wird er schlecht brauchbar zu Mörtel, so der aus dolomitischen Kalken gebrannte Magerkalk („Graukalk").

Zur Herstellung des Mörtels wird mittelgrober, möglichst $^1/_3$ Feinsand enthaltender, von Lehm und organischen Resten möglichst freier Quarzsand mit so viel Kalkbrei versetzt, dafs die Lufträume zwischen den Körnern ausgefüllt werden, mithin der Gesamtinhalt sich wenig vergröfsert. An Wasser so viel, dafs beim gehörigen Durcharbeiten der Mörtel gut von der Kelle läuft. Bei fettem Kalk nimmt man für Mauern über der Erde 1 R.-T. Kalk : 3 R.-T. Sand, woraus etwa 3,2 R.-T. Mörtel entstehen; für Grundmauern 1 R.-T. Kalk : 4 R.-T. Sand. Mit dem Kalkgehalt wachsen die Erhärtungszeit und die Festigkeit, aber auch die Kosten. — Ersetzt man das Wasser beim Anmachen

*) H. Burchartz, Luftkalke und Luftkalkmörtel. Berlin 1908.

Digitized by Google

durch Kuhmilch, so erhält man den Milchkalkmörtel von aufserordentlicher Härte und Dichtigkeit. — Das Mischen geschieht mit Vorteil in Mörtelmaschinen.

Bei Anwendung von Staubkalk zum Mörtel ist überall von diesem mehr als vom Kalkbrei zu nehmen. Ein Zusatz von Wasserglas gibt dabei die gröfste Härte.

Erhärtung des Kalkmörtels. Sofort beginnt durch teilweises Verdunsten des Wassers das Anziehen. Erst nach beträchtlicher Verminderung des Wassergehaltes geht die eigentliche Erhärtung durch Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft vor sich. Mit nicht gehörig genäfsten Steinen hergestelltes Mauerwerk hat geringe Festigkeit.*) Für guten Kalkmörtel ist etwa $K = 40$ kg/qcm. Durch Frost wird der Kalkmörtel zerrissen, solange er noch nicht angezogen hat; die für die Verarbeitung polizeilich erlaubte Frostgrenze ist vielfach auf -2^0 festgesetzt. Bei stärkerem Frost wendet man mit Erfolg Wasser und Steine in erwärmtem Zustande an oder setzt dem Wasser Soda (1 kg auf 10 l Wasser) oder Bau-Frost-Aquol (Flörsheim a. M.) 1 R.-T. auf 2 R.-T. Wasser zu.

Die Festigkeiten des Kalkmörtels und des Mauerwerks in Kalkmörtel sind beträchtlich geringer als beim Zementmörtel. Namentlich wo eine Beanspruchung auf Schub oder Biegung in Frage kommt, ist der Kalkmörtel besonders minderwertig und deshalb auszuschliefsen.*) Durch Beimischung von Portlandzement werden die Festigkeit und Härte beträchtlich vergröfsert sowie auch die Erhärtung wesentlich beschleunigt. Ueber verlängerten Zementmörtel S. 703.

Als Mörtel für Werkstücke (Sandsteine u. a.) dient ein Gemisch von Staubkalk und Ziegelmehl oder auch Trafskalkmörtel, siehe unten.

Der innere Wandputz wird aus Löschkalk, Gips (z. B. Lüneburger Kalk) und wenig Sand hergestellt. Das beschleunigte Austrocknen des Wandputzes mittels (auf gemauerter Unterlage aufzustellender) Kokskörbe liefert weniger feste und oft rissige Flächen; auch gefährden die Gase die Gesundheit, weshalb das Arbeiten in solchen Räumen verboten ist. — Die rasche Austrocknung der Mauerwände selbst geschieht mittels Zirkulation von erwärmter Luft durch die Austrocknungs-Gesellschaft, noch intensiver durch die hygienische Trockenheizung Türk & Co., beide in Charlottenburg.

3. **Gipsmörtel,****) durch Anmachen von entwässertem Gips mit oder ohne Sand hergestellt. Mäfsig erhitzt, gibt der natürliche Gips (S. 684) leicht sein Kristallwasser zum gröfseren Teil ab und hat dann die Fähigkeit, mit Wasser angemacht, sich wieder damit zu verbinden und zu einer wenig harten, gegen Wasser nicht widerstandsfähigen Masse zu erstarren. Die weitere Erhitzung über 200^0 macht ihn totgebrannt, so dafs er gar nicht mit Wasser abbindet. Wird er aber noch weiter bis zur Rotglut und mehr erhitzt, so erlangt er hydraulische Eigenschaften, d. h. er bindet mit Wasser, wenn auch langsam, zu einer sehr harten, wasserfesten Masse ab.

Von den beiden, hiernach sehr verschiedenen Stoffen ist der erstere im gepulverten Zustande der **Stuck- oder Bildhauergips** (Schnell-

*) Michaëlis in Zentralbl. Bauv. 1908 S. 120.

**) Heusinger von Waldegg, Der Gips. 2. Aufl. Leipzig 1906. — Deutscher Gipsverein, Berlin, Vorschrift zur einheitlichen Gipsprüfung vom 15. Febr. 1911. — Derselbe, Das kleine Gipsbaubuch. Berlin 1912.

Digitized by Google

gips), welcher, nur bis 150° gebrannt, noch etwa 6% Wassergehalt hat. Seine Anmachung mit Wasser erstarrt sehr rasch, höchstens in ½ Stunde, ohne starke Erwärmung. Da sich die Masse hierbei etwas ausdehnt, füllt sie Gufsformen rasch und vollkommen aus (Herstellung der inneren Bauornamente in Leimformen). Beträchtlich härter unter Verlangsamung des Abbindens werden diese Arbeiten durch Beimischung von Leim oder Dextrin zum Wasser: **Hartstuck.**

Die zweite Art, der **Estrich- oder Mauergips**, verhält sich, wenn er in allen Teilen zur Rotglut gekommen ist, als Pulver mit Wasser angemacht, ähnlich wie langsam bindender Zement. Der steife Gipsteig, stundenlang noch weich bleibend, erhärtet erst nach mehreren Tagen vollständig, ist dann aber sehr hart, aufserordentlich fest, dicht und wetterbeständig und treibt auch nicht.

Andere Anwendungen des Stuckgipses: **Decken- und Wandputz** aus Gips, Kalk und Sand (etwa 1 : 3 : 1). **Gipsdielen**, u. a. die Mackschen nagelbaren mit Holzleisten (Fabrik in Ludwigsburg i. Württbg.), die Sittigschen mit Kokosfasereinlage besonders fest und feuersicher, in verschiedenen Stärken bis 9 cm, sowie **Gipsbautafeln** zu leichten, rasch auszuführenden Wänden in Innenräumen, Decken usw. **Rabitz-Wände:** Mit Leimwasser verrührtes Gipspulver, mit Kalkmörtel gemischt, wird auf ein Drahtgeflecht oder auf Streckmetall aufgetragen. **Scagliola** aus Gipspulver und gepulvertem Gipsspat, mit Leimwasser angemacht. **Stuckmarmor** aus Gipspulver, Leimwasser und den Farbstoffen auf rauhem Grundputz. Ferner Alaungips, Marmorzement von der Walkenrieder Gipsfabrik usw. — An der Oberfläche erheblich gehärtet werden diese Gipsarbeiten durch das Kesslersche Gipsfluat (Hans Hauenschild, G. m. b. H., Berlin NW 21, Dreysestr.).

Anwendungen des Estrichgipses: **Gipsmörtel**, u. a. in Paris zu allen Mauern über dem Erdgeschofs, wie auch zum äufseren Verputze benutzt, wird als steifer Brei ohne alle Beimengungen aufgetragen. Zu rascherem Trocknen und der Ersparnis halber setzt man oft ⅛ bis ½ Sand oder Ziegelmehl zu. Haftet vorzüglich an den Steinen und ist schliefslich härter als diese (Pyramiden; Ruinen bei Osterode, Südharz). **Gipsestrich:** Der mit wenig Wasser hergestellte Gipsbrei, auf eine massive Unterlage ausgebreitet, wird nach 24 st geschlagen und geglättet, ist in 1 bis 2 Wochen beschreitbar; ein billiger, dauerhafter, für die Nagetiere unangreifbarer, feuer- und wassersicherer Fufsboden für Vorratskammern, Flure, Trockenböden usw. Nach vollkommener Austrocknung mit Linoleum (S. 689) belegt, gibt er einen vortrefflichen Fufsboden. **Gipsbeton** zu Kunststeinen und Gufsmauerwerk, wie Zementbeton hergestellt, gibt sehr feste und harte Quadern, und, die Fernhaltung der Erdfeuchtigkeit vorausgesetzt, in jeder Hinsicht vorzügliche Wände.

Gebrannter Gips jeder Art darf niemals mit Portlandzement und anderen hydraulischen Kalken zusammen verarbeitet werden, da hierbei unfehlbar Treiben eintritt!

B. Wassermörtel (hydraulischer oder Zementmörtel).

Die Stoffe, die zur Herstellung solcher Mörtel dienen, sind mannigfaltiger Art, jedoch sind bei allen Ton und Kalk die Grundbestandteile.

Digitized by Google

1. Puzzolane. Natürliche oder künstliche, durch Glühen aufgeschlossene Tonerdesilikate, dem Kalkmörtel zugemischt, verleihen dem Löschkalk darin die Fähigkeit, im Wasser zu erhärten, sind also **hydraulische Zuschläge.**

α. Natürliche Puzzolane: **Puzzolanerde** (Italien, Frankreich), **Santorinerde** (Griechenland). Der **Trafs***) (vulkanischer Tuffstein von der Eifel), altberühmter vortrefflicher Baustoff, wird meistens in Mehlform gehandelt. Mufs mindestens 7 % chemisch gebundenes Wasser enthalten.**) (Warnung vor wildem Trafs!) Preis (1911) gemahlen, je nach Feinheit, 125 bis 160 ℳ/10 000 kg (= 10 cbm); in Stücken, je nach Farbe, 120 bis 140 ℳ/10 000 kg.

Trafsmörtel ist vorzugsweise hydraulisch (Wasserbauten in Holland) und durch Raumbeständigkeit, Elastizität und Wasserdichtigkeit (daher zu Talsperren) besonders ausgezeichnet, wird auch, wo Trafs billig ist, mit Vorteil als Luftmörtel benutzt (Cölner Dom). Mischungsverhältnisse: 1 R.-T. Trafs mit $^3/_8$ bis 1 R.-T. Kalkbrei und 1 R.-T. Sand dient für Unterwasserbauten; $1^1/_2$ Trafs mit 1 nassem Kalkbrei und 2 Sand für wasserdichte Bauten in und über Wasser, z. B. zur neuen Edertalsperre; 1 Trafs, 2 Kalkbrei, 3 bis 5 Sand gibt verlängerten Trafsmörtel für Trockenmauerwerk. Ueber Trafsbeton s. unten bei Beton.

β. Künstliche Puzzolane: **gebrannter Ton** jeder Art, in Mehlform, also u. a. Ziegelmehl. Gebraucht wird z. B. ein Mörtel aus 3 R.-T. Kalkbrei, 2 R.-T. Ziegelmehl und 3 R.-T. Sand. — Wassergekörnte Hochofenschlacke von geeigneter Zusammensetzung (30 bis 40 % SiO_2 und 10 bis 15 % Al_2O_3), mit Kalkbrei gemengt, bindet langsam ab. Daraus hergestellte Schlackensteine (S. 687) sind stark hydraulisch. — Günstig zusammengesetzte Stein- oder Braunkohlenasche gibt, mit Staubkalk zu Brei angemacht, dem ein wenig verdünntes Wasserglas zugesetzt wird, einen brauchbaren Wassermörtel.

2. Hydraulische Kalke***) sind Kalksteine mit einem günstigen Gehalt an Tonerdesilikaten, Magnesia u. a., wie gewisse Mergelarten. Auf Faustgröfse gebracht, werden sie in Schachtöfen vorsichtig gebrannt. In gemahlenem Zustande mit Wasser (auch wohl unter Zusatz von Sand) angemacht, erhärtet die Masse unter Wasser, aber auch in aufgehendem Mauerwerk und erhält mehr oder weniger Festigkeit. Hydraulischer Kalk (ohne Sand) mit wenig Wasser zu Mauern in bewegtem Wasser; mit Sand (3 R.-T. Zement, 2 R.-T. Sand) zu Mauerwerk im Nassen.

Hierher gehören die **Romanzemente**, von denen der älteste (eigentliche) der englische ist. Aehnlich sind der Bielefelder, Mindener, Kulmbacher, Perlmooser usw., sämtlich billiger und viel leichter als Portlandzement. Raumgew.: lose eingelaufen i. M. 0,82, eingerüttelt i. M. 1,27.

Vielfach bewährt haben sich zahlreiche **Wasserkalke.** So der Natur-Zementkalk von Förderstedt, durch scharfes Glühen eines

*) A. Hambloch, Trafs und seine Verwendung im Baugewerbe. Andernach 1908.
**) Ueber Trafsprüfung, Zentralbl. Bauv. 1897 S. 179 ff. M. Gary, Mitt. Materialpr.-Amt 1901 Heft 1 S. 8. Neue Vorschriften für die Trafsprüfung vom Dtsch. Verb. f. d. Materialprüfung d. Technik 1909.
***) Burchartz, Ueber hydraulische Kalke, Zentralbl. Bauv. 1902 S. 255.

Digitized by Google

Dolomits erhalten. Mit Sand (1 : 6) trocken gemischt und dann mit Wasser zum Brei angemacht, bleibt die Masse 24 Stunden liegen, bevor sie gebraucht wird. Der vorzüglich empfohlene Meteorkalk von Geseke i. W., $s = 3{,}06$, von äufserst feiner Mahlung, Bindezeit etwa 13 st, gibt bedeutende Festigkeit. (Meteorkalk extra ist dagegen ein Portlandzement.) Aehnlich der sehr ausgiebige Zementkalk von Steudnitz i. Thür., der hydraulische Kalk von Rüdersdorf, der westfälische Wasserkalk von Recklinghausen (Wicking). Der vielgerühmte und auch bei grofsen Staatsbauten bewährte Viktoria-Puzzolan-Zement von Thale a. H. gibt bei grofser Ergiebigkeit an der Luft wie unter Wasser gut erhärtenden Mörtel von Festigkeiten, welche die Normenproben (s. unter 3.) reichlich aushielten (1901).

Nach Erlafs von 1902 können auch derartige Zemente bei den preufsischen Staatsbauten Verwendung finden, falls nicht ausdrücklich Portlandzement ausgeschrieben ist. — Naturzement darf nicht als Portlandzement angepriesen werden (Oberlandesgericht Düsseldorf 1909).

3. Portlandzement,*) hergestellt durch Glühen eines innigen Gemenges aus Kalkstein und Ton, jetzt allgemein im Drehofen (Polysius in Dessau; Amme, Giesecke & Konegen in Braunschweig), ist ein meist grünlich-graues, äufserst gleichmäfsiges, sehr feines und schweres Pulver. Spez. Gew. als Klinker 3.1 bis 3,2, Raumgew. gepulvert, lose eingelaufen 1,4, eingerüttelt 1,95; erhärtet 2,7 bis 3,2. Die Vorgänge bei der Erhärtung des Portlandzementes (und der anderen hydraulischen Bindemittel) sind noch nicht völlig aufgeklärt. Chemische Zusammensetzung ziemlich gleichmäfsig, i. M. 60 % Kalk, 23 % Kieselsäure, 7,5 % Tonerde, 3,5 % Eisenoxyd, wenig Magnesia usw.

Erzzement**) (nach Dr. Michaelis) heifst ein in Hemmoor hergestellter, langsam bindender, dunkel gefärbter Portlandzement, der wegen seiner Entstehung aus Kreide, Eisenoxyd und Feuersteinpulver fast frei von Tonerde und daher vollkommen widerstandsfähig gegen Seewasser ist, im übrigen sämtliche Forderungen der Normen reichlich erfüllt. Zu gröfseren Versuchen in sämtlichen Nordseehäfen und besonders bei den Befestigungsarbeiten von Helgoland verwendet.

Normen für einheitliche Lieferung und Prüfung von Portlandzement,

aufgestellt von dem „Verein deutscher Portlandzement-Fabrikanten".

Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 28. Juli 1887,***) vom 23. April 1897 und 19. Februar 1902,†) vom 16. März 1910.††)

(Auszug.)

1. Begriffserklärung. Portlandzement ist ein hydraulisches Bindemittel mit nicht weniger als 1,7 G.-T. Kalk (CaO) auf 1 G.-T. lösliche Kieselsäure (SiO_2) + Tonerde (Al_2O_3) + Eisenoxyd (Fe_2O_3), hergestellt durch feine Zerkleinerung und innige Mischung der Rohstoffe, Brennen bis mindestens zur Sinterung und Feinmahlen. Dem Portlandzement dürfen nicht mehr als 3 % Zusätze zu besonderen Zwecken zugegeben sein.

Der Magnesiagehalt darf höchstens 5 %, der Gehalt an SO_3 nicht mehr als 2,5 % im geglühten Portlandzement betragen.

---

*) F. W. Büsing und C. Schumann, Der Portlandzement und seine Anwendungen im Bauwesen, 4. Aufl. Berlin 1912. — C. Naske, Die Portlandzement-Fabrikation, 2. Aufl. Leipzig 1909.

**) Erzzement, Darstellung seiner Eigenschaften. Hemmoor bei Hamburg 1905. — Zentralbl. Bauv. 1904 S. 444.

***) Zentralbl. Bauv. 1887 S. 309; als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin W. — Zentralbl. Bauv. 1890 S. 539.

†) Zentralbl. Bauv. 1902 S. 113.

††) Zentralbl. Bauv. 1910 S. 189.

Digitized by Google

2. Verpackung und Gewicht. Portlandzement wird in der Regel in Säcken oder Fässern verpackt. Die Verpackung soll äufser dem Bruttogewicht die Firma oder die Fabrikmarke des Werkes in deutlicher Schrift tragen.

Streuverlust sowie etwaige Schwankungen im Einzelgewicht können bis zu 2 % nicht beanstandet werden.

[Die Bestimmungen unter 2. sind zum Teil durch den Minist.-Erl. vom 23. April 1897 (S. 701) ersetzt bzw. erweitert worden.]

3. Abbinden. Der Erhärtungsbeginn von normal bindendem Portlandzement soll nicht früher als eine Stunde nach dem Anmachen eintreten. Für besondere Zwecke kann rascher bindender Zement verlangt werden, welcher als solcher gekennzeichnet sein mufs.

Zur Feststellung des Erhärtungsbeginns und zur Ermittlung der Bindezeit bedient man sich der Normalnadel von 1 qmm Querschnitt und 300 g Gewicht, die quer abgeschnitten ist. Ein auf eine Glasplatte gesetzter Hartgummiring wird mit dem Portlandzementbrei (aus 300 g Zement) von bestimmter Dickflüssigkeit gefüllt und unter die Nadel gebracht. Der Zeitpunkt, in dem die Nadel den Kuchen nicht mehr ganz zu durchdringen vermag, gilt als der „Beginn des Abbindens". Die Zeit, welche verfliefst, bis die Nadel keinen merklichen Eindruck mehr hinterläfst, ist die „Bindezeit". Wasser- und Lufttemperatur sollen hierbei 15 bis 18° betragen.

Portlandzement wird durch längeres Lagern langsamer bindend und verliert, sofern er trocken und zugfrei aufbewahrt wird, nicht an Güte. Vertragsbestimmungen, welche nur frische Ware vorschreiben, sollten daher in Wegfall kommen.

4. Raumbeständigkeit. Portlandzement soll nicht treiben, d. h. raumbeständig sein. Als entscheidende Probe soll gelten, dafs ein auf einer Glasplatte hergestellter und vor Austrocknung geschützter Kuchen aus reinem Zement, nach 24 st Luftlagerung unter Wasser gelegt, auch nach längerer Beobachtungszeit (bis zu 28 Tagen) durchaus keine Verkrümmungen oder Kantenrisse zeigen darf. — Die abgekürzten Proben haben sich als nicht zuverlässig erwiesen.

5. Feinheit der Mahlung. Portlandzement soll so fein gemahlen sein, dafs eine Probe von 100 g auf dem Siebe von 900 Maschen/qcm höchstens 5 % Rückstand hinterläfst. Die Maschenweite des Siebes soll 0,222 mm betragen.

6. Festigkeit. Die Bindekraft von Portlandzement soll durch Prüfung einer Mischung von Zement und Sand auf Druckfestigkeit nach einheitlichem Verfahren ermittelt werden, u. zw. an Würfeln von 50 qcm Fläche. Dabei soll der Druck stets auf zwei Seitenflächen der Würfel, nicht aber auf die Bodenfläche und die bearbeitete obere Fläche ausgeübt werden. Zur Erzielung richtiger Durchschnittszahlen sind für jede Prüfung mindestens 5 Probekörper anzufertigen. Das Mittel aus den 5 Proben soll mafsgebend sein.

Langsam bindender Portlandzement soll bei der Probe mit 3 G.-T. Normensand (s. unten) auf 1 G.-T. Zement nach 7 Tagen Erhärtung (1 Tag an der Luft und 6 Tage unter Wasser) eine Druckfestigkeit von mindestens $K = 120$ kg/qcm haben (Vorprobe). Nach weiterer Erhärtung von 21 Tagen in Luft von Zimmertemperatur (15 bis 20° C) soll die Druckfestigkeit mindestens 250 kg/qcm betragen. Im Streitfalle entscheidet die Prüfung nach 28 Tagen.

Portlandzement, der für Wasserbau bestimmt ist, soll nach 28 Tagen Erhärtung (1 Tag in feuchter Luft, 27 Tage unter Wasser) mindestens 200 kg/qcm Druckfestigkeit zeigen.

Zur Erleichterung der Kontrolle auf der Baustelle kann eine Prüfung auf Zugfestigkeit dienen. Der Zement soll in einer Mischung von 1 T. Zement : 3 T. Normensand nach 7 Tagen Erhärtung (1 Tag an der Luft, 6 Tage unter Wasser) mindestens 12 kg/qcm Zugfestigkeit aufweisen. — Diese Zerreifsproben sind an Probekörpern von 5 qcm Zerreifsquerschnitt vorzunehmen.

Bei schnell bindenden Portlandzementen ist die Festigkeit nach 28 Tagen im allgemeinen geringer als die vorstehend angegebene. Es soll deshalb bei Nennung von Festigkeitszahlen stets auch die Bindezeit angeführt werden.

Zement, der eine höhere Zug- oder Druckfestigkeit zeigt, gestattet in vielen Fällen einen gröfseren Sandzusatz und hat Anrecht auf einen entsprechend höheren Preis.

Um zu übereinstimmenden Ergebnissen zu gelangen, mufs überall Sand von gleicher Korngröfse und gleicher Beschaffenheit benutzt werden. Diesen **Normensand** für Deutschland erhält man aus dem gewaschenen und getrockneten Quarzsand von Freienwalde a. d. O., den man durch zwei Siebe vom Groben wie vom Feinen befreit hat. (Spez. Gew. des Normensandes 1,41.) — Zur Prüfung der Korngröfse (ausgeführt vom Kgl. Materialprüfungsamt in Grofs-Lichterfelde) dienen Siebe aus 0,25 mm dickem Messingblech mit kreisrunden Löchern von 1,35 und 0,775 mm Durchmesser. Verkauf des „Deutschen Normensandes" durch das Laboratorium des Ver. dtsch. Portlandzement-Fabrikanten, Karlshorst. — Bei gröfseren Lieferungen wird empfohlen, auch mit dem betreffenden Bausand und den gewünschten Mischungen Druckproben anzustellen!

[Folgen im Minist.-Erl. von 1887 genaue Regeln über die Anfertigung der Proben und deren Behandlung bei der Prüfung, ergänzt durch den Erlafs von 1902.]

Anweisung für die Ermittlung des Nettogewichtes bei der Abnahme von Portlandzement.

Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 23 April 1897.*)

Bei der Veranschlagung, Verdingung und Abnahme von Portlandzement ist fortan das Nettogewicht (in kg oder t) zugrunde zu legen.

Die Verpackung kann in Fässern oder Säcken erfolgen. Auf den Verpackungen müssen Brutto- und Nettogewicht sowie Firma oder Marke der betreffenden Fabrik deutlich angegeben sein.

Fässer sollen in der Regel die Normalgröfse von

180 kg brutto = etwa 170 kg netto für ganze Fässer,
90 „ „ = „ 85 „ „ „ halbe „ ,
45 „ „ = „ 40 „ „ „ viertel „ haben.

Doch ist auch die Packung in gröfseren Fässern von 200 kg brutto zuzulassen.

Zur Feststellung des Nettogewichtes einer Lieferung soll wenigstens ein Zehntel der gelieferten Fässer oder Säcke nach beliebiger Auswahl des abnehmenden Beamten genau verwogen werden. Hierbei ist zunächst das Bruttogewicht zu ermitteln und alsdann durch Abzug des Gewichtes der Verpackungen das Nettogewicht festzustellen. Weicht dieses um weniger als 2 % von dem Gewicht ab, das die Fabrik angegeben hat, so ist das letztere der Abrechnung zugrunde zu legen. Beträgt die Abweichung nach unten mehr als 2 %, so ist der überschiefsende Teil für die ganze Lieferung in Abzug zu bringen. Uebergewicht wird dagegen nicht bezahlt.

Für die Ermittlung des Gewichtes der Verpackung ist anzunehmen, dafs alle Verpackungen einer Lieferung bzw. (bei gröfseren Lieferungen) einer Sendung von gleichem Gewicht sind; doch ist das Einheitsgewicht aus dem Durchschnitt wenigstens des zehnten Teiles der Lieferung oder der Einzelsendung festzustellen.

4. Eisenportlandzement) wird hergestellt aus einem mittels Kalkstein und Hochofenschlacke erzeugten Portlandzement und einer basischen Hochofenschlacke durch inniges Vermischen derselben im mehlfeinen Zustande. Er soll mindestens 70 % vom ersteren und höchstens 30 % von letzterer enthalten. Seine chemische Zusammensetzung ist der des Portlandzements sehr ähnlich, er hat auch (nach amtlicher Prüfung seit 1902) allen Forderungen der Normen genügt, so dafs er in derselben Weise wie jener zu allen Staatsbauten zugelassen ist.***) Die deutschen Normen für Eisenportlandzement (Dezember 1909) decken sich völlig mit den obigen für den Portlandzement und sind durch den Ministerial-Erlafs vom 16. März 1910 anerkannt. Die acht Werke, die ihn zur Zeit herstellen, haben sich zum Verein deutscher Eisenportlandzementwerke verbunden. — Vgl. hierzu die Schrift: „Portlandzement und die Schlackenmischfrage“. Ver. deutsch. Porlandzement-Fabrikanten. Berlin 1909.

5. Hochofenzement:†) Basische Hochofenschlacken werden durch schnelle Kühlung, die man durch die bekannte Wassergranulation oder durch Zerstäubung mittels Wasser und Luft bewirkt, in einen glasigen Zustand übergeführt und, nötigenfalls getrocknet, mit 15 bis 30 % Portlandzementklinkern staubfein vermahlen. Hochofenzement erfüllt ohne weiteres alle Anforderungen, die an einen normalen Portlandzement gestellt werden. (Vgl. die von Passow für die Prüfung aufgestellten Normen.) Gegen Moorwasser und salzhaltige Wässer, deshalb besonders gegen Meerwasser ist er aufserordentlich widerstands-

*) Zentralbl. Bauv. 1897 S. 205.
**) Taschenhandb. d. Ver. deutsch. Eisenportlandzementwerke 1904.
***) Rund-Erlafs, betr. die Verwendung von Eisenportlandzement vom 6. März 1909, Zentralbl. Bauv. 1909 S. 153.
†) H. Passow, Die Hochofenschlacke in der Zementindustrie; Würzburg 1908. — Derselbe, Hochofenzement, Kurzer Leitfaden, 3. Aufl.; Berlin 1918.

Digitized by Google

fähig. Sechs Hochofenwerke haben sich zum Verein deutscher Hochofenzementwerke verbunden.

6. Schlackenzemente (Permzement, Puzzolanzement) werden hergestellt durch innige Mischung von etwa 2 R.-T. geeigneter wassergekörnter, staubfein gemahlener Hochofenschlacke und 1 R.-T. zu Pulver gelöschtem Kalk. Nähern sich in ihrer Wirkung unter Wasser dem Portlandzement, bleiben aber besonders in der Druckfestigkeit und bei Lufterhärtung hinter ihm zurück.

7. Weifser Zement ist der Sternzement der Portlandzementfabrik „Stern" in Finkenwalde bei Stettin, langsam bindend und wetterbeständig, ein in jeder Hinsicht vorzüglicher Baustoff. Vollkommen wasserdicht und ausschlagfrei ist der Lux-Sternzement derselben Fabrik. — Neu der weifse Portlandzement der Atlaswerke New-York, Broad St., der als das vorzüglichste Mittel zum Ausfugen empfohlen wird (Bruns & Möllendorff in Hamburg).

8. Anwendung der hydraulischen Bindemittel zu Wassermörtel, der auch als Luftmörtel die vorzüglichsten Dienste leistet (der gröfste Teil des hergestellten Portlandzements dient jetzt zu aufgehendem Mauerwerk), zu Beton und Eisenbeton, zu Kunststeinen usw.

a) Wassermörtel für Mauern usw.

Je nach dem Zweck dient Normalbinder (mit 1 bis 2 st Bindezeit) zu allen gewöhnlichen Bauausführungen, Langsambinder (mit 4 bis 8 st) vorwiegend zum Betonbau, Raschbinder (mit 10 bis 20 min) zu Häuserputz und Gesimsen, Giefszement (sehr nafs, mit 4 bis 7 min) zum Giefsen von Ornamenten und Stuck.

Zement ganz ohne Sandzusatz dient nur zu besonderen Zwecken: Verstopfen von Quellen, Einspritzen in Hohlräume, Rostschutz des Eisens und Vergiefsen von Eisen in Stein. Sonst, schon zur Vermeidung von Schwindrissen, stets Sandzusatz. Mittelfeiner Quarzsand und weiches Wasser sind vorzuziehen; frei von Lehm, organischen Teilen usw. sollen sowohl Sand wie Wasser sein. Nötigenfalls vorherige Reinigung des Sandes in besonderen Waschmaschinen. Trockner Sand ist zunächst mit dem Zement gut zu vermischen und dann ist das Wasser unter fortwährendem Durcharbeiten hinzuzufügen. Bei nassem Sand empfiehlt es sich, den Zement mit dem Wasser anzumachen und dann den Sand einzumischen. An Wasser ist nur so viel zu nehmen, dafs der Mörtel erst durch längeres kräftiges Durcharbeiten die nötige Geschmeidigkeit erlangt. Die gehörige Durcharbeitung ist äufserst wichtig, daher die immer allgemeinere Anwendung von Mörtelmaschinen.

Mehr, als vor dem Abbinden verarbeitet werden kann, darf nicht angemacht werden, da abgebundene Mörtelreste als unbrauchbar beseitigt werden müssen. Die Steine sind vor dem Vermauern mit Wasser zu sättigen, die zu verputzenden Mauerflächen nach sorgfältiger Reinigung gehörig zu nässen und die Verputzarbeiten (Gesimse, Verzierungen usw.) noch längere Zeit (2 Wochen) nach der Herstellung stets feucht zu halten, um Reifsen und Abblättern zu verhindern.

Zementmörtel erreicht weit gröfsere Festigkeit, widersteht hohen Hitzegraden besser und schwindet weniger als Kalkmörtel.

Digitized by Google

Mischungsverhältnisse von Zementmörtel (in R.-T.): 1 Zement mit 1 Sand (höchst fett, gibt gröfste Festigkeit, Härte und Wasserdichtigkeit); 1 Zement mit 2 bis 3 Sand (für nafsliegende Bauteile); 1 Zement mit 3 bis 4 Sand (gewöhnlich); 1 Zement mit 5 und mehr Sand (bei der jetzigen überaus feinen Mahlung des Portlandzements werden sogar Mischungen bis 1 : 8 verarbeitet) ist besser durch Zementkalkmörtel zu ersetzen.

Festigkeitsangaben für Zement und Zementmörtel S. 498 ff.

Nach dem Satz: „Mörtelvolum = Summe der wirklichen Volumina der Bestandteile" ergeben sich folgende, durch Versuche bestätigte Mörtelausbeuten:

Mischungsverhältnis und Ausbeute in R.-T.				1 cbm Mörtel erfordert	
Zement	Sand	Wasser	Ausbeute	Zement in kg	Sand in l
1	1	0,53	1,50	933	667
1	2	0,70	2,22	622	888
1	3	0,95	3,00	467	1000
1	4	1,22	3,80	368	1053

Reiner Zement wird eher rissig als mit Sand gemischter und ist daher zum Abdichten nicht so geeignet als Zementmörtel, der bei Mischungen von 1 Zement mit 1 bis $1^1/_2$ feinem, reinem Sand oder 1 Zement mit 2 Sand und $^1/_2$ Kalkbrei oder 1 Zement mit 3 Sand und 1 Kalkbrei ziemlich wasserdicht bleibt. Schichtstärke 1,5 bis 2,5 cm. Bessere Dichtung und die Fähigkeit, den Oelfarbenanstrich alsbald festzuhalten, erlangt die Oberfläche des Zementes durch Anstrich mit Kefslerschem Zementfluat. Besondere, dem Mörtel zuzusetzende Dichtungsmittel sind: Biber (jetzt Castorit) von Cornel Esser in Cöln 1,20 ℳ/kg, vorzüglich bewährt; Aquabar von der Aquabar-Ges., Berlin N 20; Ceresit von Unna i. W.; Porolith von den Emulsionswerken in Strafsburg i. E.; Preolit von A. Prée in Dresden-N.; Awa von A. W. Andernach in Beuel a. Rh. (39 ℳ/50 kg); Heimalol von Heimann in Datteln i. W. (60 ℳ/75 kg). — Da kohlensäurehaltiges Wasser stark einwirkt, müssen die Behälter mancher Wasserwerke, die Staubecken von Talsperren u. a. gut geschützt werden, wozu sich ein Anstrich des Zementputzes mit Siderosthen (Rostschutz S. 669), noch besser mit Inertol (P. Lechler in Stuttgart) eignet. — Neu ist Antiaqua (Vertriebsbureau Bielefeld), das durch Vermahlen der Zementklinker mit einer bituminösen Masse hergestellt, fertig zum Verarbeiten ist und völlig wasserdichte Arbeiten gibt.

Gegen Frost ist der Zementmörtel, sobald er abgebunden hat, ganz unempfindlich, weshalb für Arbeiten bei Kälte schnell bindender Zement vorzuziehen ist. Anwärmung von Wasser und Sand sowie Anwendung von möglichst wenig Wasser sowie etwas Soda zum Wasser beschleunigen aufserdem das Abbinden.

Durch Mischung von magerem Portlandzementmörtel mit einem geringen Zusatz von fettem Kalkbrei (oder noch besser zu Pulver gelöschtem hydraulischen Kalk) erhält man den billigeren Zementkalkmörtel (verlängerten Zementmörtel), der gut zu verarbeiten ist und sich überall eignet, wo nicht die volle Festigkeit des fetten Zementmörtels verlangt wird. Er genügt besser als Kalkmörtel allen Anforderungen, die an einen guten Luftmörtel, betreffend Adhäsion an den Steinflächen, rasche Erhärtung und Festigkeit zu stellen sind, und bewährt sich auch als hydraulischer Mörtel.

Mischungsverhältnisse des Zementkalkmörtels (in R.-T.): 1 Zement, 6 bis 7 Sand, 1 Kalkbrei (Ausbeute 6 bis 6,8) oder 1 Zement, 8 Sand, $1^1/_2$ Kalkbrei (Ausbeute 7,8) oder 1 Zement, 10 Sand, 2 Kalkbrei (Ausbeute 9,45).

Digitized by Google

An Stelle von fettem Kalkbrei werden auch mit Vorzug Trafs, granulierte Hochofenschlacke u. a. als feine Mehle dem Zementmörtel zugeschlagen. Vortreffliche Zementtrafsmörtel geben die Mischungen (in R.-T.): 1 Zement, $^3/_4$ bis 1 Trafs und $2^1/_2$ bis 5 Sand (für Schleusen-, Kai- und Hafenbauten); $^3/_4$ bis 1 Zement, 1 Trafs und 4 bis 5 Sand (für Kanalbauten).*)

b) Beton und Eisenbeton.

Beton wird aus losem ungeformten Steinmaterial durch Verkittung mittels eines hydraulischen Mörtels hergestellt und ist der schmiegsamste und anpassungsfähigste von allen Baustoffen, dazu unbedingt feuersicher.**) Daher sein gewaltiges, noch stets wachsendes Anwendungsgebiet. Vgl. III. Bd., Abschn. Eisenbetonbau und Abschn. Grundbau.

Wichtigste Anwendungen des Beton- und Eisenbetonbaues. Gründungen aller Art, Herstellung wasserdichter Platten. Unterbettung für Asphalt-, Holz-, auch Steinpflaster, Makadamstrafsen, Estrich und Platten für Bürgersteige, Talsperren, Wellenbrecher und Molen. Kai-, Dock-, Schleusen-, Stützmauern. Wände, Decken, Bogen, Gewölbe, Kuppeln, Dächer, Treppen. Platten und Plattenbalken. Wasserbehälter, Schwimmbäder, Kläranlagen, Gasbehälterbecken. Schacht- und Tunnelbau, Untergrundbahnen. Brücken, Unterführungen und Durchlässe. Kanalisation und Abwässeranlagen. Kabelrohre. Pfähle, Pfosten, Leitungsmasten. Schornsteine, Türme, Silos. Weitgespannte Hallen. Festungsbau.

Das Steinmaterial, welches aufser Zement (am besten Portlandzement, aber auch Trafs u. a.), Sand und Wasser, für die das S. 702 Gesagte gilt, genommen wird, ist entweder grober Kies, möglichst Quarzgesteinen entstammend, oder Schotter, d. i. Steinschlag aus natürlichen oder aus gebrannten Steinen.***) Danach sind **Kiesbeton** und **Schotterbeton** zu unterscheiden. Ihrer Festigkeit nach müssen diese Zuschläge den erhärteten Mörtel mindestens erreichen, worauf besonders beim Ziegelsteinschlag zu achten ist; dieser mufs gut gesiebt sein (nur grobe Stücke), während der Grus der Natursteine, falls es Silikatgesteine sind, einen guten Füllstoff abgiebt. Gewaschener Kalksteinschotter von Rüdersdorf gibt ebenfalls vortrefflichen, besonders feuersicheren Beton. Gröfse der Stücke bei Kies bis zu 5 cm, bei Schotter bis zu 7 cm. Für den Mörtelverbrauch am vorteilhaftesten ist es, wenn möglichst alle Gröfsen vorhanden sind. Steht guter Flufskies zur Verfügung, so hat man durch Aussieben das Verhältnis von grobem Kies zum Sand darin festzustellen und danach die hinzuzufügende Menge von grobem Kies zu berechnen, um die vorgeschriebene Betonmischung herstellen zu können.

Zur Herstellung des Betons werden Zement und Sand trocken durchgemischt, dann mit Wasser derart durchfeuchtet, dafs durch nochmaliges regelrechtes Umschaufeln eine gleichmäfsig feuchte Masse entsteht. Nun werden die Zuschläge, vorher angenetzt, zugegeben und das Ganze nochmals gehörig durchgearbeitet. Alles dies mit möglichster Beschleunigung. Je nach der Menge des Wassers erhält man Stampfbeton, wobei die Betonmasse eben erdfeucht ist, oder Schütt-

*) A. Hambloch, Die bedeutendsten Mörtelbildner. Berlin 1911. — A. Unna, Die Bestimmung rationeller Mörtelmischungen, 4. Aufl. Cöln a. Rh.

**) Deutscher Beton-Verein, Feuersicherheit von Beton, Eisenbeton, Eisen und Holz. Berlin 1912 W. Ernst & Sohn. — Z. f. angew. Chem. 1912 S. 2140.

***) H. Passow, Eignung von Hochofen-Stückschlacke zur Betonbereitung. Stahl und Eisen 1910 Nr. 20.

Digitized by Google

beton, der in breiigem Zustand aufgetragen wird. (Trocken- und Nafsbetonierung.) Ersterer, in anscheinend etwas trockenem Zustand aufgebracht, wird kräftig (oft mit mechanisch bewegten Stampfen) geschlagen, bis er in der ganzen Masse die gröfste Dichtigkeit erreicht hat. Durch möglichst geringen Wasserzusatz*) wird bei richtiger Ausführung der Arbeit eine aufserordentlich hohe Druckfestigkeit erzielt, die mit den Jahren noch gröfser wird. Geringeres leistet der Schüttbeton, der am Platze ist, wo weniger Festigkeit gefordert wird, seine wichtigste Anwendung aber zur Betonierung unter Wasser erfährt (III. Bd. Abschn. Grundbau). — Für den Stampfbeton zieht man in manchen Fällen statt des erdfeuchten den „plastischen" Zustand vor, bei dem die etwas nassere Masse durch das Stampfen weich und besonders nachgiebig wird.

Die Gleichmäfsigkeit der Mischung wird am besten durch Maschinenarbeit (die auch billiger ist als Handmischung) gewährleistet.**) Für gröfsere Bauten ist deshalb meistens Maschinenmischung vorgeschrieben. Die Verarbeitung der frischbereiteten Masse mufs möglichst vor Beginn des Abbindens beendet sein; jedoch wird durch eine Lagerung der Masse in geschütztem Zustande, wenn sie sich nur auf einige Stunden erstreckt und nachher vor der Verwendung neues Umschaufeln stattfindet, die Festigkeit des Betons nicht sehr stark beeinträchtigt. „Transportbeton" von Magens in Hamburg. — Vor starkem Frost ist frischer, besonders nasser Beton sorgfältig zu schützen. Es darf nach den „Bestimmungen" bei Frostwetter nur dann betoniert werden, „wenn schädliche Einwirkungen des Frostes durch geeignete Mafsnahmen (S. 703) ausgeschlossen werden".

Mischungsverhältnisse und Ausbeute (in R.-T.) für Stampfbeton aus Portlandzement, Sand und Kies: 1 : 2 : 4 = 4,4 Beton; 1 : 3 : 6 = 6,6 Beton; 1 : 4 : 8 = 8,8 Beton; 1 : 5 : 10 = 11,3 Beton. Der Bedarf für 1 cbm Kiesstampfbeton ist danach z. B. bei 1 : 3 : 6 = 150 l Zement = 210 kg, 450 l Sand und 900 l Kies. — Wird Steinschlag (nur grofse Stücke) statt Kies genommen, so darf der Zusatz nur $^3/_4$ von der Kiesmenge betragen, und man hat deshalb für solchen Schotterbeton u. a.: 1 : 2 : 3 = 3,6 Beton; 1 : 3 : 4,5 = 5 Beton; 1 : 4 : 6 = 6,5 Beton; 1 : 5 : 7,5 = 8,4 Beton. Der Bedarf für 1 cbm ist z. B. bei 1 : 5 : 7,5 = 120 l = 168 kg Zement, 600 l Sand und 900 l Schotter.

Diese für bestimmte Verhältnisse gewonnenen Angaben sind durchaus nicht allgemein mafsgebend. Vielmehr hat man den Rohstoffbedarf im einzelnen Falle durch praktische Versuche mit den vorliegenden Rohstoffen und mit der für den Bau gewählten Art des Stampfens festzustellen. — Ueber die Aufstellung von Formeln zur Vorherberechnung des Stoffverbrauches siehe u. a. H. Nitzsche, Materialbedarf und Dichtigkeit von Betonmischungen. Leipzig 1907.

Für Zementtrafsbeton haben sich folgende Mischungen in R.-T. bewährt: 2 Zement, 2 Trafs, 1 Kalkbrei, 6 Sand, $11^1/_2$ Kies (für Beton unter Wasser); 1 Z., $1^1/_2$ T., $^3/_4$ Ka., 4 S., $11^1/_2$ Ki. (für Beton

*) C. Bach, Ueber Druckfestigkeit von Betonkörpern mit verschiedenem Wasserzusatz. Stuttgart 1909. auch Z. d. V. d. I. 1909 S. 828.

**) Zentralbl. Bauv. 1896 S. 15.

Digitized by Google

über Wasser); 1 Z., $^1/_2$ T., $2^1/_2$ S., 6 Ki. (für Eisenbeton); 1 Z., $^1/_2$ T., 3 S., 4 Ki. (für Eisenbetonpfähle).

Schlackenbeton, ein magerer Beton aus Kohlenschlacken und Zement, nur zu Ausfüllungen bei Wellblech-Zwischendecken (bis mindestens 5 cm über den Wellen), zu Zwickelausfüllungen (bis über Trägergleiche) bei den Decken aus gewölbten, gestampften Betonkappen usw. Gewicht 750 kg/cbm. — Für Eisenbeton sind Kohlenschlacken allgemein auszuschliefsen und für Stampfbeton nur zuzulassen, wo keine tragenden Eisenteile damit in Berührung kommen.*)

Das Raumgewicht des Betons und Eisenbetons.

Das Raumgewicht des Betons ist im allgemeinen sehr verschieden und richtet sich vornehmlich nach der Güte der aufgewendeten Stampfarbeit, der Höhe des Wasserzusatzes und der Auswahl der Baustoffe, während die Wahl des Mischungsverhältnisses weniger von Belang ist.**) Es ist im allgemeinen um so höher, je gröfser die Stampfarbeit, je geringer der Wasserzusatz und je fetter die Mischung ist. Probewürfel zeigen in der Regel ein gröfseres Raumgewicht, als solches dem Beton des betreffenden Bauwerks entsprechen würde, da hier weitaus gründlicher gestampft wird. Je kleiner das Raumgewicht, um so geringer natürlich auch die Festigkeit des Betons.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen sind die Raumgewichte einzelner Betonsorten etwa folgende:

Beton aus	Raumgewicht in kg/cbm	Mittelwert in kg/cbm
Zement und Kies (Kiessand)	1800 bis 2400	2200
„ „ Granitschotter	2000 „ 2500	2300
„ „ Basaltschotter	2200 „ 2800	2400
„ „ Kalkstein oder Sandstein .	2000 „ 2200	2100
„ „ Ziegelschotter	1500 „ 2000	1800
„ „ Bimskies***)	900 „ 1400	1100
„ „ Kohlenschlacke***) . . .	800 „ 1500	1200

Das Raumgewicht des Eisenbetons wird in der Regel zu 2400 kg/cbm angenommen, welcher Wert für Decken, schlanke Stützen, Gewölbe u. drgl. als durchaus ausreichend erachtet werden kann. Für gering bewehrte Fundamentkörper, Wandbauarten, Widerlager usw. genügt es, der Berechnung ein Raumgewicht von etwa 2300 kg/cbm zugrunde zu legen. Die neuen Schweizerischen „Vorschriften über Bauten in armiertem Beton" (Juni 1909) schreiben ein Raumgewicht von 2500 kg/cbm als Grundlage für die statische Berechnung vor.

Stampfbeton†) findet immer gröfsere Anwendung im Hoch- und Tiefbau. Viele wichtige Anwendungen sind bereits S. 704 aufgezählt.

---

*) Ministerial-Erlafs vom 25. März 1908. Zentralbl. Bauv. 1908 S. 193.

**) Für einen normal hergestellten Kiesbeton kämen vergleichsweise etwa folgende Mittelwerte in Frage:

Mischung	1:3	1:5	1:7	1:10	1:12	1:15
Raumgewicht in kg/cbm	2300	2250	2200	2170	2150	2140

***) Für Bimskies- und Schlackenbeton werden vielfach zu geringe Raumgewichte angegeben. Die neuen preufsischen Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen (31. Januar 1910) geben nur 1000 kg/cbm als Durchschnittswert an. Dagegen hat man schon Raumgewichte bis 1500 kg/cbm für diese Betonarten festgestellt.

†) **Allgemeine Bestimmungen für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton**, aufgestellt vom Deutschen Ausschufs für Eisenbeton 1908, anerkannt durch Ministerial-Erlafs vom 19. Juli 1909. Zentralbl. Bauv. 1909 S. 417. — **Besondere Bedingungen und technische Vorschriften für die Ausführung von Stampfbetonbauten**, für die Badischen Staatseisenbahnen gültig seit Herbst 1911. — Vorschriften über die Ausführung von Wänden und Pfeilern in Stampfbeton, Berliner Baupolizei 1905.

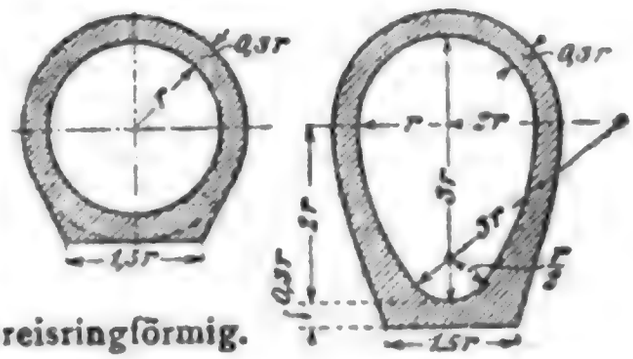
Digitized by Google

Zur Herstellung des **Zementsteins** (Kunststeins) durch Stampfarbeit verwendet man besten langsam bindenden Portlandzement, gemengt mit feinstem Sande bis grobem Kiessande, je nach den anzufertigenden Gegenständen. Nach 1 bis 2 Tagen aus den Formen genommen, müssen die Gegenstände noch mehrere Wochen täglich angefeuchtet werden. — Durch sehr starke Pressung in besonderen Maschinen (u. a. vom Krupp-Grusonwerk) hergestellt, erreichen die Kunststeine ganz aufserordentliche Härte und Festigkeit, so die Granitoidplatten. — Die in Spezialmaschinen (u. a. von Gaspary & Co. in Markranstädt sowie von Lindenthal & Co., Berlin W. 50) erzeugten Betonhohlblöcke geben Wände mit durchgehenden Luftkanälen oder zusammenhängenden Lufträumen. — Zementdielen und -bretter, u. a. von Böklen, mit Hülfe von Asche, Bimssand u. a. hergestellt, eignen sich für trocken, rasch zu errichtende und zu benutzende Wände und Decken. — **Terrazzo**, das bekannte schöne Fufsbodenmaterial, wird durch Vermengen von verschiedenfarbigen Marmorstücken mit fettem Zementmörtel (der auch gefärbt sein kann), Auftragen der Masse und Schleifen und Polieren nach der Erhärtung hergestellt.

Kunstwerksteine (u. a. von H. Boschen in Oldenburg i. Gr., Albert Lauermann in Detmold) aus zerkleinertem Naturstein (Granit u. a.) mit bestem Portlandzement (für helle Steine wie die Pietranova mit weifsem Sternzement), die sich nachher vom Steinmetz gut bearbeiten lassen und auch in Farbe und Korn wie Natursteine wirken, werden als billiger Ersatz für diese sowohl fertig geliefert als auch in der Art von Steinputz aufgetragen. So auch schöne Treppenstufen, ohne und mit Eisenbewehrung, feuersicher.

Die **Stampfbetonrohre** für Kanalisation u. a., mit rundem oder eiförmigem Querschnitt (Spitze nach unten, Achsenverhältnis 2 : 3) erhalten innen durch Tränkung (z. B. mit Keflerschem Zementfluat S. 697) eine etwa 8 mm starke wasserdichte, öl- und säurefeste Schicht. Frühestens 3 Monate nach Fertigstellung verlegt, werden sie mit lehmigem Kiessand (bei starker Auflast Kiessand mit $^1/_{15}$ bis $^1/_{30}$ Zementzusatz) fest eingestampft. Die Betonfabriken verbürgen gewöhnlich eine ruhende Scheitelbelastung von 5000 bis 6000 kg/qm des wagerechten Rohrquerschnitts.

Abb. 38. Abb. 39.



Stampfbetonrohre (Zementrohre).*)

Die kreisförmigen Stampfbetonrohre von 35 bis 100 cm Lichtweite erhalten den in Abb. 38 gegebenen Querschnitt; die kleineren Rohre sind im Querschnitt einfach kreisringförmig.

*) Ueber Prüfung von Ton und Zementrohren vgl. die vom Internat. Kongrefs f. d. Material-Prfg. d. Technik, Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Gary. Bericht 17 d. — Nach den vom Deutschen Beton-Verein 1909 aufgestellten „Leitsätzen für die Prüfung von Zementrohren" sind die Mindesttraglasten auf 1 m Rohrlänge festgestellt worden. Die betreffende Tabelle ist in „Beton u. Eisen" 1910 Heft IX S. 236 abgedruckt, ferner vom Deutschen Beton-Verein E. V., Oberkassel (Siegkreis) zu beziehen.

Digitized by Google

— Für die eiförmigen Rohre gilt Abb. 39; hierbei ist für das vollaufende Profil der Wasserquerschnitt

$$F = 4{,}59413\ r^2,$$

der benetzte Umfang $u = 7{,}92989\ r$

(also der hydraulische Radius $F : u = 0{,}5793\ r$), der Betonquerschnitt $= 3{,}0392\ r^2$ und das Rohrgewicht $= 0{,}67\ r^2$ kg/m (spez. Gew. $= 2{,}2$) und $= 0{,}76\ r^2$ kg/m (spez. Gew. $= 2{,}5$).

Ist das eiförmige Profil (Abb. 39) nur bis zur Kämpferhöhe mit Wasser angefüllt, so ist der Wasserquerschnitt $= 3{,}02333\ r^2$, der benetzte Umfang $= 4{,}7883\ r$ und der hydraulische Radius $= 0{,}6314\ r$.

Lichte Weite cm	Durchflußquerschnitt qcm	Mittlere Wandstärke cm	Nutzlänge m	Gewicht (spez. Gew. = 2,2) kg/m	Lichte Weite cm	Durchflußquerschnitt qcm	Mittlere Wandstärke cm	Nutzlänge m	Gewicht (spez. Gew. = 2,2) kg/m
Runde Form (Abb. 38).									
7,5	44,2	2,25	0,8	15,2	35	962,1	4	1,0	126
10,0	78,5	2,25	1,0	19,1	40	1256,6	4,5	1,0	161
12,0	113,1	2,5	1,0	25,1	45	1590,4	5	1,0	202
15,0	176,7	2,5	1,0	30,3	50	1963,5	5	1,0	222
17,5	240,5	3,0	1,0	42,5	60	2827,4	6	1,0	320
20,0	314,2	3,0	1,0	47,7	70	3848,4	6,5	1,0	402
22,5	397,6	3,5	1,0	62,9	80	5026,6	7	0,8	491
25,0	490,9	3,5	1,0	68,9	90	6361,7	7,5	0,8	590
30,0	706,9	3,5	1,0	81,1	100	7854,0	8	0,8	697
Ei-Form (Abb. 39).									
20/30	459	3,5	1,0	79	60/90	4 135	9	1,0	602
25/37,5	718	4,0	1,0	112	66,7/100	5 105	10	1,0	743
30/45	1034	4,5	1,0	151	70/105	5 628	10,5	0,8	820
35/52,5	1407	5,5	1,0	215	80/120	7 351	12	0,8	1072
40/60	1838	6,0	1,0	268	93,3/140	10 005	14	0,7	1457
45/67,5	2326	7,0	1,0	352	100/150	11 485	15	0,5	1673
50/75	2871	7,5	1,0	418	110/165	13 897	16,5	0,5	2025

Eisenbeton (Bewehrter Beton).*) Der Monierbau aus fettem Zementmörtel (1 Zement : 3 Sand bis 1 : 1) mit Einlage von Eisenstäben oder Drahtgeflechten oder von Streckmetall (Schüchtermann & Kremer, Dortmund u. a.) vereinigt die Druckfestigkeit des Zementmörtels mit der Zugfestigkeit des Eisens und gründet sich auf folgende Tatsachen: 1. Die Adhäsion (Haftfestigkeit) des Zementmörtels am Eisen ist eine sehr beträchtliche; die Schubfestigkeit

*) S. d. Abschn. „Eisenbetonbau" III. Bd. — F. von Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau 2. Aufl. Bd. I bis XII (Bd. II. Die Baustoffe). — Zeitschrift „Beton u. Eisen", Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin. — Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten, Ministerial-Erlaß in Preußen vom 16. April 1904 und vom 24. Mai 1907 (Zentralbl. Bauv. 1907 S. 301) sowie vom 11. April 1908 und vom 21. Januar 1909. Runderlasse betreffend Säulen aus eisenumschnürtem Beton vom 18. September 1909 (Zentralbl. Bauv. 1909 S. 529) und 21. Dezember 1909. Amtliche Ausgabe sämtlicher Bestimmungen Berlin 1910, Wilhelm Ernst & Sohn.

Digitized by Google

des Betons selbst genügt ebenfalls den Beanspruchungen. 2. Beton und Eisen erfahren annähernd gleiche Wärmeausdehnung. 3. Bei dichter Umschliefsung (weshalb die Mischung ziemlich fett und auch nafs genug sein soll) ist das Eisen vor dem Rosten geschützt, darf jedoch nicht zu nahe an der Oberfläche liegen. Zu ebenen und gewölbten Decken, zu Wänden, Treppen, Behältern, Brücken usw. angewendet, liefert der Monierbau tragfähige, vorzüglich feuersichere Bauten bei grofser Raumersparnis gegenüber nicht bewehrtem Beton (III. Bd.). Beim Hennebiquebau und vielen verwandten Bauarten werden auch die Unterzüge und die Stützen in gleicher Weise hergestellt und mit den Decken verbunden: Monolithische Bauweise. Ferner Eisenbetonpfähle mit vielen Vorzügen vor Holzpfählen. — Neu ist der Verbund-Holz-Eisenbetonpfahl von Heimbach & Schneider in Lindau.

Die Akt.-Ges. für Beton- und Monierbau, Berlin W, liefert ferner runde und eiförmige Monierrohre mit Eisenringen (für grofse Belastungen) oder mit Eisengeflechteinlagen (dünnwandige, für mittlere Lasten); diese Rohre übertreffen die vorstehend aufgeführten Stampfbetonrohre durch geringere Wandstärken und Gewichte bei ungefähr gleichen Tragfähigkeiten und Preisen.

Neu sind die mittels Zentrifugalkraft hergestellten Hohlkörper aus Eisenbeton, und zwar Masten für Leitung und Beleuchtung, sowie Säulen und Leitungsrohre für hohen Erddruck von den Schleuderbetonwerken von Dyckerhoff & Widmann in Dresden-N. — Orkan-Betonpfosten von E. Grähn in Pankow-Berlin.

Allzu zementarme oder mangelhaft hergestellte Betonmischungen haben schon wiederholt zu schweren Unglücksfällen und in weiterer Folge zu Bestrafungen geführt. Deshalb sei hier auf die Notwendigkeit der gewissenhaftesten Berechnung und Ausführung aller Eisenbetonbauten durch geschulte Kräfte eindringlich hingewiesen. Besonders ist auch vor zu früher Ausrüstung zu warnen.

VI. Glas.*)

Glas ist ein durch Zusammenschmelzen von Kieselsäure mit Kalk (oder Bleioxyd) und Natron oder Kali hergestelltes Gemenge von mehreren Silikaten, meist kieselsaurem Kalk und kieselsaurem Natron; spez. Gew. i. M. 2,6 (S. 614). Glas ist bei Weifsglut ganz dünnflüssig, bei Rotglut teigartig und zähe, so dafs es im ersteren Zustande gegossen, im letzteren geblasen werden kann. Nur wenn es nach der Formgebung gut „gekühlt" wurde (die noch rotglühenden oder wieder bis dahin erhitzten Gegenstände werden in einen heifsen Raum gebracht, mit dem sie ganz allmählich abkühlen), ist seine grofse Sprödigkeit und Zerbrechlichkeit im erforderlichen Grade herabgemindert. Härte und Glanz werden durch den Kalkgehalt vergröfsert, durch Bleioxyd verringert. — Das Blasen des Glases geschieht immer mehr auf mechanischem Wege mit Luft wie bei den Blasmaschinen von Owens und Schiller oder mit Wasserdampf nach Sievert (Dresden).

*) Baukunde des Architekten I. Bd., 2. Teil. Berlin 1891. — Th. Landsberg, Glas- und Wellblechdeckung. Darmstadt 1887. — E. Zschimmer, Die Glasindustrie in Jena. Jena 1909, E. Diederichs.

Digitized by Google

Festigkeitsangaben für Glas S. 497 u. 507. Durch verschieden starke Zusammenziehung bei der Abkühlung erhält das Glas aufsen Druck- und im Inneren Zugspannung. Sein Widerstand gegen Druck ist bedeutend gröfser als der gegen Zug; die Oberflächenhaut dient ihm zum Schutze, die natürliche Aufsenfläche ist daher bei der Verglasung usw. nach aufsen zu legen. Noch widerstandsfähiger ist die Oberfläche bei dem (zwischen Metallplatten) gekühlten „Prefshartglas" (s. unten).

Glas von geringer Güte leidet durch Regen und Luft, besonders in der Wärme, indem es erblindet (Treibhäuser u. a.) oder in Farben schillert und abblättert. Auch gutes Glas ist stets luftig und trocken aufzubewahren. Gutes Glas soll weder von scharfen Säuren noch Basen angegriffen werden; nur Flufssäure zerstört jedes Glas vollkommen.

Das durch Schmelzen von Bergkristall im elektrischen Ofen hergestellte Quarzglas (W. C. Heraeus in Hanau) ist völlig unempfindlich gegen schroffen Temperaturwechsel, hochfeuerfest, aufserst säurebeständig und leitet die Elektrizität nicht. Wärmeausdehnung fast Null. Spez. Gew. 2,2. — Neu sind die Erzeugnisse der Quarzgut-Handelsgesellsch. und der Zirkonglas-Gesellsch., beide in Frankfurt a. M. sowie der Deutsch-Englischen Quarzschmelze in Pankow-Berlin und der „Cölner Fabrik für feuer- und säurebeständiges Glas".

Zu baulichen Zwecken sind die wichtigsten Sorten folgende:

1. **Deutsches Glas** [auch vielfach als rheinisches bezeichnet], **Fensterglas,***) in den rheinischen Hütten, aber ebenso in Westfalen, Schlesien, Sachsen usw. durch Blasen hergestellt, beherrscht jetzt fast ausschliefslich den Markt in Deutschland. Neuerdings auch maschinell geblasen, erreicht das sogen. Maschinenglas weit gröfsere Abmessungen als bisher. Die gangbarsten Sorten werden als sogen. $^4/_4$-, $^6/_4$- und $^8/_4$-Glas gehandelt, welche Bezeichnungen etwa den Stärken 2, 3 und 4 mm oder den Gewichten 5, 7,5 und 10 kg/qm entsprechen. Der Reparatureinheitspreis für 1 qm wächst von 8 bis zu 16 ℳ mit der Gröfse der Scheiben, und zwar in 8 Absätzen nach der Summe aus Längen- und Breitenabmessung, den sogen. „vereinigten Zentimetern". Die Baupreise viel geringer. Die Gröfse geht bis zu 300 verein. cm und mehr, bei den stärksten Sorten von etwa 5 mm Stärke nur bis 164 verein. cm, so dafs hierfür das gröfste Tafelmafs etwa 100 . 64 oder 66 . 98 usw. wäre.

(Bei den Bahnhofshallen der Berliner Stadtbahn ist geblasenes Glas, 6 mm stark, in Tafeln von 50 . 85 cm verwendet worden.)

Von den vier Güteklassen oder „Wahlen" werden gewöhnlich bei besseren Bauten die 2. und 3. Wahl benutzt. Die 1. Wahl ist ganz

*) Der Runderlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten, betreffend die Bedingungen für die Lieferung von Fensterglas, vom 28. Juni 1894, bestimmt folgendes.

1. Für die allgemeine Bezeichnung des für gewöhnliche Zwecke zu verdingenden Glases ist der in der Technik übliche Ausdruck „rheinisches Glas" zu gebrauchen, ohne damit das Verlangen eines Ursprungsnachweises zu verbinden.

Hierzu wird bemerkt, dafs die Bezeichnung „rheinisches Glas" nur als ein Ausdruck für die Herstellungsweise, wie solche in den verschiedenen deutschen Landesteilen üblich, anzusehen ist, nicht aber eine besondere Kennzeichnung des aus rheinisch-westfälischen Glashütten hervorgehenden Fabrikates, so dafs eine unberechtigte Monopolisierung dieser Glashütten ausgeschlossen ist.

2. Die allgemein in der Praxis gebräuchliche, der geringeren oder besseren Güte entsprechende Gruppierung als Glas I., II. oder III. Sorte bzw. als weifses, halbweifses oder grünes Glas ist zur allgemeinen Kennzeichnung der auszuschreibenden Lieferung beizubehalten, desgl. auch die Abstufung nach den Stärkegraden $^4/_4$, $^6/_4$ oder $^8/_4$, entsprechend den Durchschnittstärken von 2, 3 und 4 mm.

Digitized by Google

rein und auch sonst tadellos. Die 4. Wahl dient nur zu untergeordneten Zwecken, wie bei Kellern, Speisekammern, Bodenräumen, Treibhäusern, Oberlichtern usw.; ihr Baupreis ist für $^4/_4$-Glas 1,70 bis 2 ℳ/qm. Die Baupreise für die 2. und 3. Wahl sind $^4/_4$-Glas (eingesetzt) bis 220 verein. cm rd. 3,60 ℳ/qm, bis 260 verein. cm rd. 4 ℳ/qm. $^6/_4$-Glas kostet 40 %, $^8/_4 = 80$ % mehr als $^4/_4$-Glas. Die Reparaturpreise betragen das Doppelte der Baupreise und mehr. Unter „Doppelglas" wird öfter auch $^6/_4$-Glas verstanden.

2. **Rohglas**, gegossen, wird meist in Stärken von 3 bis 13 mm verwendet. Noch stärkere Sorten von 20 bis 30 mm und mehr (bis 60 mm) werden zu Fufsbodeneinlagen benutzt; wegen der bei der Kühlung entstandenen unregelmäfsigen Spannungen springen die sehr starken Platten öfter bei plötzlicher Temperaturänderung (z. B. Regen auf die sonnenbeschienene Scheibe). Die Tragfähigkeit des Rohglases ist beträchtlich (S. 497 u. 507), schon eine 20 mm starke Platte kann, auf 1 m freiliegend, mit leichtem Schritte begangen werden; es ist jedoch gegen Stöfse u. dgl. sehr empfindlich, weshalb man die Platten in Abständen von 40 bis 55 cm durch Sprosseneisen unterstützt. Die gewöhnliche Stärke für Bedachungen, die wesentlichste Anwendung des Rohglases, ist 5 mm; Stärken über 7 mm sind selten. Es kommt glatt, gerautet oder geriffelt (was auch das Ausgleiten verhindert) und neuerdings auch mit eingebrannten Emailfarben verziert vor.

Preise für „weifses" Rohglas (eingesetzt): 4 bis 6 mm stark 5 bis 6 ℳ/qm, 13 mm 10 bis 15 ℳ/qm, 20 mm 25 bis 30 ℳ/qm, 26 mm 35 bis 40 ℳ/qm.

3. **Drahtglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden ist Glas mit einer darin völlig versenkten, also nicht rostenden Netzeinlage aus Eisendraht, besitzt etwa die 1,5fache Biegungsfestigkeit des Rohglases*) und gestattet geringe Stärken [kann schon bei 12 mm völlig sicher begangen werden]; behält, selbst wenn es Sprünge erhalten hat, noch völlig sicheren Zusammenhalt, ist also feuersicher (1904 in Baltimore bewährt) und diebessicher. Der Lichtdurchgang wird bei 1 mm Drahtstärke und 7,5 mm Maschenweite um 27 vH vermindert. Empfiehlt sich 4 bis 5 mm stark für Fabrikfenster, 6 bis 10 mm stark für Oberlichter, 15 bis 33 mm stark für begehbare Fufsboden-Lichteinlässe, macht Schutzgitter überflüssig. Zu Schutzgläsern für Wasserstände, farbigen Signalscheiben, feuersicheren Türen u. dgl. Die Tafeln (bis 100 . 60 cm grofs) lassen sich nicht schneiden, müssen daher genau nach Mafs bestellt werden. Preis bei 8 bis 25 mm Stärke 6 bis 40 ℳ/qm.

Drahtglas der Manufakturen: Schalke (Westfalen), Stolberg (Rheinland), Waldhof b. Mannheim, Gerresheim (Rheinland) und Altwasser (Schlesien) sowie Siemens (Dresden) hat dem vorigen gegenüber den Vorzug, schneidbar und wegen des dünneren Drahtes mehr lichtgebend zu sein, ist aber wegen des seitlich offenen Drahtes dem Rosten ausgesetzt. Wird geliefert in Stärken von rd. 4 bis 9 mm glatt und gerippt, von 10 bis 15 mm nur glatt, u. zw. als Tafeln von 300 . 100 cm und als Fufsbodenplatten von geringeren Gröfsen in

*) R. Hartig, Civil-Ingenieur Bd. 38 Heft 3; ferner C. Mühlke, Drahtglas, Zentralbl. Bauv. 1892 S. 246.

Digitized by Google

Stärken von 20 bis 50 mm. Preis bis 9 mm Stärke 6 ℳ/qm, für gröfsere Stärken rd. 1 ℳ/mm, also für 15 mm 15 ℳ/qm.

4. **Spiegelglas** wird wie Rohglas durch Gieſsen, aber aus einem feineren Glassatze hergestellt und dann auf beiden Seiten geschliffen und poliert; wegen des Verlustes der natürlichen Oberfläche und auch wegen seines Bleigehaltes von rd. 2 % ist es weicher und schwieriger zu behandeln. Von den drei „Wahlen" dienen die 1. und 2. zu Spiegeln (jetzt meist mit Silberbelegung), die 3. zu Schaufensterscheiben u. dgl., jetzt auch vielfach für bessere Bauten als Fensterglas. Stärke 5 bis 8 mm, wenn verlangt, auch stärker; Tafelgröfsen bis 4 . 5 m und darüber.

Die Preise der Spiegelglasscheiben, mit der Gröfse sehr erheblich wachsend, nach dem Vereins-Preiskurant von 1907, z. B. für Gröfsen von 0,5 qm 22 ℳ/qm, von 2 qm 28 ℳ/qm, von 4 qm 29 ℳ/qm, von 6 qm 31 ℳ/qm, von 13 qm 38 ℳ/qm.

Gegen die Ansätze dieser Preistafel wird je nach der Geschäftslage nach Prozenten abgeboten; i. J. 1911 stand der Nettopreis 22 bis 31 % unter jenen Preisen. — Für das Einsetzen usw. ist hierzu ein Betrag von 30 bis 40 % der Nettosätze zu rechnen.

5. **Prefshartglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden besitzt sehr bedeutende Festigkeit, so daſs z. B. Oberlichter aus sehr dünnen (2 bis 4 mm starken) Platten hergestellt werden können, verträgt schroffen Temperaturwechsel. Dieses Glas kann aber nicht mit dem Diamant usw. geschnitten werden und ist daher genau nach Maſs zu bestellen. Wegen der kleinen Abmessungen der Platten (0,2 bis 0,5 qm) gibt es viele Sprossen. Zu Schiffsfenstern (deutsche Marine), für Irrenzellen u. a.

6. **Kathedralglas**, gegossenes, 2 bis 3 mm starkes, oft farbiges, auch geflammtfarbiges Rohglas mit unregelmäſsiger Oberfläche; in Wiesau (Schlesien), Zwiesel (Niederbayern) für Kirchenfenster und Profanzwecke hergestellt. Dämpft das Licht und ist wenig durchsichtig, ohne matt zu sein. In Tafeln von rd. 0,7 . 1,5 m; Preis weifs 2,5 ℳ/qm, getönt 3 ℳ/qm, farbig 4 ℳ/qm.

Aehnlich, aber besonders schön und auch kostspieliger ist das amerikanische Opalescentglas (K. Engelbrecht in Hamburg), das in Bleieinfassung trefflichen Ersatz für Glasmalerei abgibt. Preise 1,50 bis 4 ℳ/kg. Wird jetzt ähnlich auch in Weifswasser O.-S. hergestellt.

Alle diese Gläser können ganz oder in Mustern mattiert werden, u. zw. durch Aetzen mit Flufssäure oder durch Schleifen oder (minderwertig, da leicht schmutzend) durch das Sandstrahlgebläse. Das erste Verfahren ist am teuersten (in einem oder mehreren Tönen 10 bis 50 ℳ/qm ohne Glas), gibt aber eine glatte, wenig schmutzende Oberfläche; das dritte ist schon für 0,75 ℳ/qm ausführbar. — Die Färbung des Glases geschieht mittels verschiedener Metalloxyde in allen möglichen Tönen, u. zw. entweder in der ganzen Masse oder oberflächlich durch Ueberziehen ungefärbten Glases mit farbigem (sogen. Ueberfangglas).

Die Verbindung der Scheiben mit Holz und Eisen durch Glaserkitt S. 716. Ihre Verbindung untereinander durch die Blei- oder die Elektroverglasung. Zu Bleiverglasungen werden verwendet: Kathedralglas, Ornamentglas (gemustert, auch farbig), darunter das neue Bukiglas von Kinon in Aachen, Antikglas, Butzenglas (geblasen), farbiges Flachglas, Ueberfangglas, Opalescentglas, Glassteine. Preise 15 bis 80 ℳ/qm und höher, mit Glasmalerei bis 500 ℳ/qm. — Viel

Digitized by Google

fester gefafst ist das Glas bei der neuen Elektroverglasung (s. unten), die deshalb u. a. in Warenhäusern besonders grofse Brandsicherheit bietet und auch mit geringerem Lichtverlust verbunden ist.

Die **Luxfer-Prismen** (Deutsches Luxfer-Prismen-Syndikat, Berlin-Weifsensee) dienen zur Erhellung dunkler Räume mit aufserordentlichem Erfolg. Diese weifsen Glasfliesen von 10, 13,5 und 15 cm im Geviert, deren innere Seite mit parallelen prismatischen Querleisten versehen ist, werden auf elektrolytischem Wege durch sehr feine Kupferleisten fest verbunden: Elektroverglasung. Auswahl des Prismenwinkels je nach der Richtung des verfügbaren Lichtes. Die Tafeln werden lotrecht vor die Fenster oder an deren Stelle gesetzt oder als Schirmdächer mehr oder weniger schräg aufsen angebracht. Für Räume unter der Erde sind die Multiprismen und besondere Glasprismenfliesen geeignet. Von grofser Festigkeit und bedeutendem Widerstand gegen Feuer. Preis einschl. Aufstellung rd. 50 bis 70 ℳ/qm. Zu Oberlicht und Dach dienen die Luxfer-Scheiben bis zu 2,5 . 1,1 m, welche auf besonders gestalteten eisernen Sprossen kittfrei und beweglich, dabei völlig wasserdicht verlegt werden. Preis der Tafeln 15 ℳ/qm, der Sprossen 2,5 bis 3,5 ℳ/m. — Wichtige Ausführungen u. a. Berlin: Zeughaus, Untergrundbahnhöfe, Warenhäuser. — Neu und höchst wirksam sind die Luxfer-Oberlichtplatten in Eisenbetonfassung, vollkommen tragfähig für Fufsgängerverkehr, feuersicher und weniger als schmiede- und gufseiserne Rahmen Volumänderungen unterworfen. Preise 36 bis 50 ℳ/qm. Ferner die künstlerisch hervorragenden Deckenabschlüsse aus „plastischem Glas", Preis von 45 ℳ/qm an. — Für gleiche Zwecke liefert die Deutsche Lichtglas-Ges. in Leipzig ihre Doppel- und Kreuzprismen-Scheiben, Preis 12 bis 13 ℳ/qm, sowie Lichtglas-Fufsbodenplatten, 15 . 15 und 24 . 24 cm, Preis 1,50 und 2,80 ℳ/Stck, und Lichtglas-Dachziegel, Preis 0,90 ℳ/Stck.

Bewährt für Glasdächer ist auch die kittlose Sprossenbauart Anti-Pluvius von J. Degenhardt in Berlin-Lichtenberg.

Glasbausteine „Falconnier" (Adlerhütten-A.-G., Penzig, Schlesien), geblasen, sind flaschenartige, geschlossene Glaskörper von solchen Formen, dafs sie sich ohne Zwischenräume zum Schliefsen von Maueröffnungen, zu Wänden usw. zusammenfügen lassen. Auch in Farben sowie in halben und dreiviertel Steinen erhältlich. Mörtel: 3 T. Sand, 1 T. Zement mit etwas Kalkbrei. Ventilatoren aus Blech, an Stelle eines Steines zu setzen. Von den gangbarsten Sorten gehen rd. 55 Stck auf 1 qm, Preis des Steines halbweifs 30 ₰. Für Brandmauern u. a. Zwecke werden sie mit Drahtmantel geliefert (u. a. 12 . 12 . 6,5 cm). Neu sind die für dünne Zwischenwände bestimmten rechteckigen Steine von 24 . 12,5 . 6,5 cm mit Falz, Preis 55 ₰/Stck. — Besser auswechselbar hergestellte derartige Steine von sechseckiger Form liefert Siemens in Dresden. Preis halbweifs bis farbig 24 bis 34 ₰/Stck (55 Stck/qm).

Höchst geeignet zu lichtgebenden, aber nur durchscheinenden Scheidewänden in Verkaufs-, Wirts-, Abort- usw. Räumen, zu blinden Fenstern in Giebelwänden, für Räume, die auf gleicher Temperatur zu halten sind (Gärtnerei, Kühlhaus, Eiskeller).

Digitized by Google

Hartglasbausteine „Faust" (Sächsische Glaswerke, A.-G., Deuben), gepreſst, rechteckig, hohl und unten offen, von solchen Abmessungen, daſs sie mit Normalsteinen in Verband gehen, übereinander- und seitlich ineinandergreifend; auch zu viertelsteinigen Wänden. Weiſs und farbig. $K = 32{,}6$ kg/qcm. Verwendung zu den gleichen Zwecken wie vorige. Preis für 59 Stück, die auf 1 qm gehen, weiſs 18 ℳ. Auch Dach-, Fuſsboden- und Wandplatten aus demselben Glas. — Leicht auswechselbar hergestellt sind die sonst ähnlichen Steine von Siemens in Dresden. Preis 17,60 ℳ/qm, als Drahtglas 30 bis 40 ℳ/qm.

Aehnlich zu verwenden sind die **Vitral-Glasbausteine** (Gebr. von Streit in Berlin SW). Preis 28 ℳ/qm. Vitralprismen zur Erhellung von Räumen, auch begehbar hergestellt. — Die **Idealglasbausteine** von der Rhein.-Westf. Prismengesellschaft in Düsseldorf für viertelsteinige Glaswände, vielfach als feuersicher zugelassen. Preis 24 ℳ/qm. „Mechanoverglasung", wenn in Kupfer, als feuersicher anerkannt.

Glashartgufsplatten für Fußbodenbelag sowie **Glasziegel** (Biberschwänze) und **Glasfalzziegel** für Dächer (sämtlich von Siemens in Dresden) haben sich vorzüglich bewährt.

Glasfliesen Monachia (Verein. Zwieseler & Pirnaer Farbenglaswerke, München), gegossene weiſse und farbige Glasplatten, geben schönen, auch hygienisch einwandfreien Wandbelag. Preis 7 bis 12 ℳ/qm. — **Har porzellan**-Verblender (Kahla A.-G.), weiſse und farbige Wandplatten, sehr praktisch. Preis je nach Güte 3,85 bis 10,75 ℳ qm.

Als bestes Wasserstandglas gilt **Durobax** vom Glaswerk Schott & Gen., Jena.

Prüfung des Glases: 1. auf Farblosigkeit: Eine oder mehrere Scheiben werden auf einen weiſsen Papierbogen, diesen teilweise bedeckend, gelegt und der Abstich geprüft; 2. auf Blasen, Schlieren, Wellen u. dgl.: Bei einem Lieferungsvertrage ist eine Probescheibe von der ungefähren Gröſse der zu liefernden Scheiben zugrunde zu legen; 3. auf Haltbarkeit: Die Probe wird, von einer Glocke dicht überdeckt, den Dämpfen stark rauchender Salzsäure 24 st ausgesetzt und dann in völlig reiner, staubloser Luft 24 st getrocknet. Sie darf nicht den geringsten weiſslichen abwischbaren Anflug aufweisen. — Windschiefe, verbogene oder mit Haarrissen behaftete Tafeln sind auszuscheiden.

VII.*) Kautschuk und Guttapercha.**) Asbest.***)

1. Kautschuk. Gereinigtes unvulkanisiertes Kautschuk auf Bändern findet Verwendung als sogen. Isolierband für Kupferkabel. Vulkanisiert, d. h. mit 2 bis 35 % Schwefel vermischt und unter Druck auf 120 bis 150° C erhitzt, bildet es Weichkautschuk, lederhartes Kautschuk oder Hartkautschuk. Diese besitzen groſse Elastizität und Festigkeit, Luft- und Wasserbeständigkeit, hohe Isolation gegen Elektrizität und Beständigkeit gegen eine groſse Anzahl von Säuren und Laugen.

Nach den von der Versuchsanstalt Groſs-Lichterfelde und der Phys.-Techn. Reichsanstalt an Hartkautschuk von Dr. Heinr. Traun & Söhne

---

*) Firmen s. im Adreſsbuch der deutschen Gummi-, Guttapercha- und Asbest-Industrie 1910. Union, Deutsche Verlagsgesellschaft, Berlin SW.

**) Dr. Chr. Heinzerling u. Wilh. Pahl in den Verhandlungen des Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1891. — Dr. Eugen Obach, Die Guttapercha. Dresden 1899. — Ed. Debes, Vortrag vor der Schiffbautechn. Gesellschaft Nov. 1900 und V. d. I. 1901.

***) W. Venerand, Asbest und Feuerschutz, Wien 1886. — Union, Deutsche Verlagsgesellschaft, Das Ganze der Asbestverarbeitung, 2. Aufl., Berlin 1910.

Digitized by Google

in Hamburg erfolgten Feststellungen hatte reines Hartkautschuk vom spez. Gew. 1,15 bei 15° C eine Zerreifsfestigkeit von 6 kg/qmm, eine Druckfestigkeit von 5,8 kg/qmm an der Quetschgrenze bzw. 40,6 kg/qmm an der Bruchgrenze. Letztere Zahl sank bei 140° auf 5 kg/qmm. Der spez. Leitungswiderstand betrug $56 . 10^{10}$ Megohm-cm. Dr. Trauns sogen. Eisengummi vom spez. Gew. 1,5 hatte bei 15°C eine Zerreifsfestigkeit von 3,6 kg qmm, eine Druckfestigkeit von 8,7 kg/qmm an der Quetsch- und von 22,5 kg/qmm an der Bruchgrenze, welche Zahlen bis 90° C noch wesentlich stiegen und selbst bei 160° C erst äufserst wenig abnahmen. Der spez. Leitungswiderstand betrug $15 . 10^{10}$ Megohm-cm.

Reines Hartkautschuk findet Verwendung im Wassermesserbau und im Apparatebau der Hochspannungs- und Schwachstromtechnik (Induktorbau, drahtlose und gewöhnliche Telegraphie, Telephonie). Wärmebeständiges Hartkautschuk (Eisengummi, Isolast) dient vornehmlich der Starkstromtechnik (Apparate, Schalttafeln, Schleifkontakte für elektrisch betriebene Fahrstühle und für Automobil-Zündapparate). Lederhartes Hartkautschuk wird angewendet in der Starkstromtechnik (Isolatoren für elektrisch betriebene Bahnen, isolierte Montagewerkzeuge, Akkumulatorenkasten), in der chemischen und elektrochemischen Industrie (Rohrleitungen, Armaturen, Pumpen, Zentrifugen, Behälter, Rührwerke, Kochkessel; u. zw. mit oder ohne Metalleinlage). Elastisches Weichkautschuk ist aufser für Luftballone und in der Fahrrad- und Automobilindustrie unentbehrlich als Dichtungsmittel für Wasser und Dampf bis 180° C (u. a. Dr. Trauns Idealgummi-Qualitäten), als Schutzmittel gegen Rosten (Gummierung von Schiffswellen und kupfernen Leitungsrohren auf Seeschiffen, Auskleidung von Räumen zum Schutz gegen Säuredämpfe), als Isolations- und schalldämpfendes Mittel an Maschinen in bewohnten Räumen, zu Ventilklappen, Membranen usw. Aus Weichkautschuk sind in der Röntgentechnik für die Strahlen undurchlässige Schutzstoffe (Antixplatten) geschaffen.

2. **Guttapercha,** wie Gummi aus dem erstarrten Milchsaft gewisser Tropenbäume gewonnen, spez. Gew. rd. 1,0, wird bei etwa 60° so plastisch, dafs sie leicht jede Form annimmt und sie beim Erkalten in den feinsten Einzelheiten beibehält. Sie ist unempfindlich gegen konzentrierte Laugen und verdünnte Säuren, unverwüstlich unter Wasser, ferner ein vortrefflicher Isolator für Elektrizität.

Verwendung weitaus am meisten in der Schwachstromtechnik zur Isolation von Untersee- und unterirdischen Kabeln, zu Schläuchen, Pumpen, Spritzen, Flaschen für chemische, medizinische und andere Zwecke, zu Treibriemen, zu Abdrücken, Klischees, zu Zahnplomben, zur Anfertigung wasserdichter Gewebe.

3. **Asbest.** Der a) Serpentinasbest (hauptsächlich „Canadafaser") Härte 3 bis 4, spez. Gew. 2,3 bis 2,8, und der b) Hornblendeasbest (Italien, Böhmen u. a.), Härte 5,5 bis 6, spez. Gew. 2,9 bis 3, finden durch ihre vorzüglichen Eigenschaften, nämlich bei a): feinste weiche Fasern, spinnfähig, schlechter Leiter für Wärme und Elektrizität, feuerfest, leicht mit anderen Stoffen zu verbinden; bei b) aufserdem Säurebeständigkeit, steigende Verwendung in der Technik: als Faser zum Klären und Schönen von Getränken sowie zum Füllen von

Digitized by Google

Matratzen und Schnüren; gesponnen und verwebt zu feuerfesten Geweben für Theaterdekorationen (auch Appretur und Farbe feuersicher), für Kleidungsstücke, Feuerwehrschirme, -schutzwände und -matratzen, zu den Glühstrumpffäden, zu Filtergeweben in der chemischen Industrie (letzteres b). Geflochten zusammen mit Fäden aus Baumwolle, Hanf u. a., auch mit Blei- und Messingdraht zu Schnüren für beste, hitzebeständige Packungen. Mit Gummi zu Dichtungsplatten, -ringen und -rahmen, mit bestem Gummi zu den Hochdruckdichtungsplatten (Klingerit- u. a. It-Platten) sowie in besonderer Verbindung zu den Marine-Blockpackungen. Mit geringem Kaolinzusatz zu den Asbestpappen (bis 30 mm stark) und -papieren. Mit überwiegendem Portlandzement innig gemengt und gepreßt zu dem Asbestzementschiefer (Eternit und Asbestolith S. 691). Mit Kieselgur (5- und mehrfache Menge) zu Isoliermitteln für Dampfkessel und -leitungen sowie zum Feuerschutz des Eisens (Plutonit). Letztere mit geringen Klebstoffzusätzen.

VIII. Wasserglas, Kitte, Asphalt, Dachpappe u. a.

1. Wasserglas.*) Kieselsaures Kali oder Natron ist in Wasser löslich. Dicke, ölige, ätzende Flüssigkeit mit 33 oder mit 66 % Wasserglas; wohlverschlossen aufzubewahren, da sonst die Kohlensäure der Luft zersetzend wirkt. Außer dem Kali- und dem Natronwasserglas hat man ein Doppelwasserglas.

Anwendungen: Schutz für Holz, Pappe, Zeug gegen Feuer, auch Schwamm und Wurmfraß. Kalk- und Zementputz, noch feucht, mit verdünntem Kaliwasserglas (1 : 2) überstrichen, erhält eine sehr harte, gegen Feuchtigkeit widerstandsfähige Oberfläche (Waschküchen, Wetterwände). Aehnlich wird der Untergrund hergestellt für das stereochromische Malverfahren. Zum Silikatisieren der weichen (Pariser u. a.) Kalksteine, jetzt hierzu durch das bessere Fluatieren ersetzt (Keßlersche Fluate, H. Hauenschild, Berlin NW). Ein wichtiges Mittel zur Herstellung von Kitten.

2. Kitte.**) Die betreffenden Flächen sind völlig zu reinigen, der Kitt ist in dünner, gleichmäßiger Schicht aufzutragen und vor der Erhärtung jede Erschütterung fernzuhalten.

1. Käsekitt. Zu Pulver gelöschter Kalk mit feinem Sande oder Ziegelmehl (1 : 1) vermischt und mit Wasser zu steifem Mörtel angemacht, dann mit dreifacher Menge Käsequark (durch Auspressen der Molke aus der geronnenen Magermilch erhalten, jetzt auch als trockenes Pulver im Handel) verrührt; guter Steinkitt. Aehnlich für Steinfugen der Zementkitt aus Zementpulver mit $^1/_4$ Ziegelmehl, mit saurer Milch zu zähem Teig verarbeitet. Holzkitt: Gepulverter Aetzkalk, mit zerriebenem, trockenem Quark (1 : 1) gemengt und mit 1 G.-T. Eiweiß verrührt.

2. Oelkitt. Leinölfirnis mit Bleimennige oder Bleiglätte, zusätzlich Kreide, Ton usw., gemischt. Glaserkitt besteht aus Leinölfirnis und

---

*) H. Zwick, Das Wasserglas, seine Bedeutung für die Industrie. Zürich 1877.
**) Leonhardt, Kitfabrikation. Halle a. S. 1883.

Digitized by Google

Schlämmkreide, für besondere Zwecke hierzu noch Bleimennige. Verhärteter Glaserkitt wird aufgeweicht mit Kalilauge und Schmierseife. — Zur Beseitigung nasser Stellen in Mauern dient Mastixzement, d. i. Kalksteinpulver, feiner Sand, Bleiglätte, mit Leinölfirnis durchgearbeitet. — Zum Belegen von Terrassen, Treppen usw. wird Oelzement verwendet, d. i. Schamottemehl, feinste Bleiglätte und heifses gekochtes Leinöl.

3. Harzkitt, heifs aufzutragen, wasserbeständig, verträgt keine Hitze. Zusammensetzung (in G.-T.) für Holzfugen: Kolophonium (2) und Ziegelmehl (1); für Holz (oder Glas) auf Eisen: Schellack (1) mit gepulvertem Bimsstein (1) zusammengeschmolzen. — Steinkitt: Pech (2), Kolophonium (1) mit Mennige (1) und Ziegelmehl ($^2/_6$). — Brunnenmacherkitt: Ziegelmehl (2) in siedend heifsem Teer (1) eingerührt. — Aus Kautschuk (1) und Schellack (1), in Steinöl (36) gelöst, besteht der für alle Zwecke vorzüglich brauchbare Marineleim.

4. Glyzerinkitt aus Bleiglätte und wenig verdünntem Glyzerin, vorzüglich gegen Laugen, Säuren, Petroleum usw.

5. Wasserglaskitt. Wasserglas mit Kreide gibt eine wasserfeste, harte Masse. Für Steine: Wasserglas mit Roman- oder Portlandzement, sehr schnell erhärtend. Für Metalle, Stein und Holz: Wasserglas, Kreide und Zinkstaub.

6. Rostkitt (für Eisen auf Eisen oder Stein auf Eisen): Schwefelblumen (1) und Salmiak (2) unter stetem Rühren mit Wasser (oder Essig) bei Zusatz von Eisenfeilspänen zu einem steifen Brei gemengt.

7. Magnesiakitt. Gebrannte Magnesia, in 30prozentiger Magnesiumchloridlösung verrührt, erhärtet zu steinharter Masse (Sorels Zement). Dient zu allen Steinholzarten (S. 689) sowie zum Inkrustatmarmor, auch zu künstlichen Mühlsteinen. — Ueber den Sklerolithzement S. 690. — Vortrefflich ist Meyers Steinkitt, Freiburg i. B.

8. Kitte für Eisen in Stein, zum Dichten von Rohren usw.: reiner Portlandzement; ferner Spenzemetall, ein Gemisch von Schwefel mit Schwefelmetallen, Schmelzpunkt 160°; der Metallzement von P. Bassermann in Ziegelhausen a. N., Schmelzpunkt 119°, sehr dünnflüssig werdend, Druckfestigkeit $K \sim 1000$ kg/qcm; der Atlas-Bleizement von den A.-B.-C.-Werken in Cöln a. Rh., Schmelzpunkt 119°, erhärtet sofort, spez. Gew. 1,9, also 6mal so ergiebig als Blei. Die drei letzteren sind widerstandsfähig gegen Wasser, Säuren und Oele.

8. Asphalt wird sowohl das harzige Erzeugnis (Erdpech) als auch der davon durchdrungene natürliche Asphaltstein (d. i. ein Kalkstein mit etwa 10 % Asphaltgehalt) genannt, aus dem das Erdpech ausgeschmolzen wird. Gudron besteht aus echtem Trinidadasphalt mit 25 % Rückständen aus der Destillation des Petroleums; wird in Fässern geliefert. Asphaltmastix (in schwarzen Broten von 25 kg Gewicht), aus gepulvertem Asphaltstein und geschmolzenem Goudron hergestellt.

Gufsasphalt [für wasserundurchlässige Flächen in Kellern, Höfen, Stallungen usw., für Bürgersteige, Trockenschichten usw.] ist Asphaltmastix in faustgrofsen Stücken mit 4 bis 7 % Gudron bei 160° geschmolzen und dann mit 50 % reinem (nicht lehmigem), trockenem, grobem Sande oder feinem Kies zu Brei verarbeitet. In 1,5 bis 1 cm

Digitized by Google

starker Schicht auszubreiten, sofort mit Sand zu bestreuen und abzuklopfen oder abzuwalzen.

Stampfasphalt (für Strafsen): Zerschlagener Asphaltstein wird bei 120° zum Zerfallen gebracht; das warme Pulver wird auf die 15 bis 20 cm starke, trockene Betonunterlage (S. 704) 4 bis 6 cm hoch ausgebreitet und mittels heifser Eisenrammen, Plätteisen und Walzen befestigt und auf Steinhärte gebracht. — Für Bürgersteige u. a. sehr geeignet sind die Stampfasphaltplatten 25 . 25 cm und 3 bis 5 cm stark, Preis 4,50 bis 6,20 ℳ/qm (u. a. Herm. Consbruch, Hamburg). Aus gepulvertem Gufsasphalt durch Pressen der erwärmten Masse hergestellt (D. R.-P.) sind die bewährten Homogenplatten von Schliemann & Co., Hannover-Linden in verschiedenen Gröfsen. Preis für 3 bis 5 cm starke 3,50 bis 5 ℳ/qm ab Fabrik.

Asphaltfilzplatten, einfache 0,7 cm, doppelte 1 cm stark, aus verfilzter Pflanzenfasermasse hergestellt, die völlig mit sogen. Asphalt durchtränkt und dann mit grobem Sande bestreut wird. Liefern wegen der Zähigkeit der Masse bessere Trockenschichten als Glas, Schiefer und auch als Dachpappe. Zu Unterlage und Schallschutz werden die Isolierfilze von Adlershof bei Berlin (darunter der Eisenfilz für Maschinen usw.) empfohlen.

4. Dachpappe u. a. Mittel. a) Teerpappe und Asphaltpappe. Die gewöhnliche Dachpappe wird hergestellt, indem man gute Pappe minutenlang mit kochendem Steinkohlenteer tränkt und nach dem Abtropfen mit grobem Sande bestreut; Gewicht bis 3 kg/qm. Vorteilhaft ist die „endlose" (etwa 1 m breite und bis 20 m lange) Rollenpappe. Gute Dachpappe mufs vom Teer völlig durchdrungen sein, so dafs das Innere keine trockenen Stellen aufweist. — Besser, aber wesentlich teurer ist der Asphaltdachfilz, aus besonders verfilztem Stoff und Asphalt hergestellt.

b) Ruberoid (Ruberoid-Ges. in Hamburg) ist eine Dachpappe, die durch Imprägnierung von Filz mit einer gummiähnlichen Masse und Ueberziehen mit einer härteren, ziemlich glatten Deckmasse hergestellt ist. Gibt ohne besonderen Schutzanstrich eine dichte und wetterbeständige, feuersichere, stets elastisch bleibende Bedachung (in Braun, Rot, Grün), die sich bereits vorzüglich bewährt hat. Auch besonders zu Trockenschichten, da es einen Druck von 200 kg/qcm aushält. In Rollen zu 20 qm und 1 bis 2 mm Stärke 15 bis 19 ℳ für 1 Rolle. — Aehnlich das Astralit-Dach von Elliesen u. Michaelis in Hamburg und das Semptalin von C. F. Beer Söhne in Cöln.

c) Wasserdichte Leinenstoffe (Weber-Falckenberg in Berlin SW) geben eine feuer- und sturmsichere, äufserst leichte und billige Bedachung, in verschiedenen Farben geliefert. Länge bis 60 m, Breite bis 165 cm. Preise 2 bis 3,50 ℳ/qm, je nach Farbe, wozu noch die wetterfeste Streichmasse. Sehr gut bewährt.

d) Asphaltsteinpappe mit Drahtgeflechteinlage (L. Lindenberg, Stettin) ist besonders geeignet für Stall- und Fabrikgebäude.

e) Die **Biehnsche Grundwasserabdichtung** (Hans Biehn & Co., Berlin W) wird hergestellt aus 3 Lagen Asphaltfilzpappe mit 3 heifs aufgetragenen Anstrichen eines vorwiegend aus gereinigtem Trinidadasphalt bestehenden Asphaltkitts. Preis je nach den Verhältnissen

Digitized by Google

3 bis 6 ℳ/qm. (Untergrundbahnen von Berlin, Pest, Hamburg u. a.) — Den gleichen Zwecken dient der seit Jahrzehnten bewährte **Tektolith** von A. F. Malchow, Leopoldshall, bestehend aus einem äufserst festen, aber geschmeidigen Gewebe, beiderseits mit bestem Naturasphalt überzogen. Rollen von 1 . 10 m. Preis verlegt mit Goudronanstrich 2,50 bis 3 ℳ/qm.

IX. Nutzhölzer.

Das ältere, um die Achse des Stammes liegende Holz wird allmählich dichter und härter, zugleich trockener und auch meist dunkler gefärbt: der Kern (das Reifholz). Der äufsere, weichere und hellere Splint vermittelt allein das Wachsen des Baumes. Da das Kernholz (Reifholz) in jeder Beziehung am widerstandsfähigsten ist, müssen alle wichtigeren Bauteile möglichst daraus geschnitten sein.

Das **Gefüge des Holzes** zeigt sich in den drei Schnitten: Der Hirnschnitt (Querschnitt), winkelrecht zur Stammachse, zeigt den Kern und Splint, die Jahresringe und Markstrahlen; der Radialschnitt, durch die Achse gelegt, zeigt u. a. das Mark in Form der Spiegel; der Sehnenschnitt, durch eine Sehne parallel zur Achse gelegt, zeigt die Jahresringe als mann gfaltig geformte Längsstreifen. Nach diesen drei Schnitten unterscheidet man die Flächen eines Holzstücks in „Hirnholz", „Spiegelholz", „Langholz".

Physikalische Eigenschaften des Holzes.

1. Spezifisches Gewicht ist bei demselben Holze je nach Kern und Splint verschieden, besonders aber je nach dem Grade der Trockenheit. Allgemein enthält grünes Holz i. M. von 27 % (Esche) bis 61 % (Kiefer) Wasser und ist 33 bis über 50 % schwerer als ausgetrocknetes Holz. — Spezifische Gewichte verschiedener Holzarten S. 614.

2. Nach der Härte ordnen sich die Hölzer wie folgt. Hart sind: Weifsbuche, Eiche, Rotbuche, Ahorn, Esche und Ulme; mittelhart: Erle, Lärche und Kiefer; weich: Tanne, Fichte, Birke, Linde, Pappel und Weide. Die Härte der einzelnen Hölzer wechselt mit dem Standort, Klima usw.

Widerstand der Holzarten gegen einen rechtwinklig zur Stammachse geführten Sägeschnitt: Rotbuche = 1, Kiefer = 0,53, Tanne = 0,66, Fichte = 0,60, Eiche = 1,03, Birke und Espe = 1,35, Weifsbuche, Linde, Weide und Silberpappel = 1,87.

3. Der Widerstand beim Spalten ist am geringsten in der Fläche der Spiegel; im Sehnenschnitt meist $1^1/_3$- bis $1^1/_2$ mal so stark. Schwerspaltig sind: Weifsbuche, Ulme und Esche; ziemlich leichtspaltig: Lärche, Erle, Kiefer und Eiche; leichtspaltig: Tanne, Fichte, Pappel.

4. Biegsamkeit und Zähigkeit. Junges Holz, frisch gefällt, ist am biegsamsten. Holz wird durch Wasserdampf ganz erweicht; es läfst sich dann nach Wunsch formen, behält die Form nach dem Trocknen bei und wird sehr hart (gebogene Möbel; geschweifte Kiefernholzbretter). Ebenso ist junges Holz zäher als dasselbe Holz im Alter. Trockene alte Hölzer vertragen keine Ueberlastung und plötzliche Erschütterung: Gerüsteinstürze durch das Aufwerfen der Steinlasten.

Digitized by Google

5. Ueber die Festigkeit*) und Elastizität einiger Holzarten s. S. 497.

6. Die Wärmeausdehnung des völlig trockenen Holzes ist fast verschwindend, zumal in der Richtung der Stammachse (S. 369: Vorzug der Holzmafsstäbe).

Fällen des Holzes. Als beste Fällzeit gilt der Winter, da angeblich das Sommerholz die Schwammbildung begünstigt.**) Nach anderer Ansicht ist sorgfältig getrocknetes Sommerholz ebenso gut und brauchbar wie Winterholz. Die Zeit vom August bis zum Oktober gilt als die ungünstigste Fällungszeit.

Durch die Jodprobe kann die Fällungszeit eines Holzes in manchen Fällen festgestellt werden, indem das Stärke enthaltende Holz dabei eine blaue Färbung annimmt.

Trocknen des Holzes. An der Luft gibt frisches Holz sein Wasser allmählich ab bis zur völligen Lufttrockenheit, wobei es noch 10 % (Nadelholz) bis 17 % (Laubholz) Wasser enthält. Das natürliche Austrocknen in luftigen, vor Sonnenschein und Nässe (auch vom Boden her) geschützten Schuppen (Zimmerholz) oder in gewärmten Lagerräumen (Tischlerholz) dauert je nach Art und Verwendung des Holzes 1 bis 4 Jahre, bei Eichenholz wenigstens 1 Jahr länger.

Das künstliche Austrocknen (für Pitchpinedielen unumgänglich) geschieht in besonderen Trockenanstalten mit Hülfe eines heifsen Luftstromes, der bei Eichenholz 40°, bei anderen Laubhölzern 30 bis 40°, bei Nadelhölzern 80 bis 95° für dünnere, 50° für dickere Stücke haben soll. Wirkt der Luftstrom täglich 12 st, so rechnet man

bei einer Dicke von	2,5	5	7,5	10	15	20 cm
die Trockenzeit	1	2	3	4	7	10 Wochen.

Schwinden und Quellen des Holzes.

Das bei dem Trocknen eintretende Schwinden ist verschieden stark, je nach der Art des Holzes und nach der Geschwindigkeit des Trocknens, stets aber beim Splint viel stärker als beim Kern. Es ist in der Richtung der Stammachse äufserst gering (bei den wichtigsten Bauhölzern um 0,1 bis 0,2 %), in der Richtung des Hirnschnitthalbmessers gröfser (ebenso bis zu 3 %) und am gröfsten in der Richtung der Sehne eines Hirnschnittes (ebenso bis gegen 7 %); s. Tafel S. 721.

Die Lavesschen Versuche zur Ermittlung der in nachstehender Tafel enthaltenen Schwindmafse wurden mit sehr dünnen Holzstäbchen angestellt, deren Länge erst in grünem und vollkommen mit Wasser durchzogenem Zustande, dann nach längerem Trocknen (bei 14 bis 16°) gemessen wurde. Aus dem Unterschied ergibt sich das spezifische Schwindmafs des Holzes in Prozenten der ursprünglichen Abmessungen.

Getrocknetes Holz nimmt leicht Wasser wieder auf und dehnt sich dadurch bis zum früheren Volumen aus: das **Quellen.** Dabei entwickelt das Holz aufserordentliche Energie (Spalten der festesten Steine mittels ausgetrockneter Holzkeile). Durch das verschiedene Verhalten von Kern und Splint beim Schwinden und Quellen entstehen die zum Teil starken Formveränderungen der geschnittenen Hölzer: das **Werfen** (Arbeiten, Verziehen, Reifsen) des Holzes. Der ganzgelassene Stamm reifst im Splintring, da dieser sich stärker zusammenzieht, wogegen

*) Ueber Prüfung von Holz betreffs Festigkeit und anderer Eigenschaften vgl. die vom Internat. Kongrefs f. d. Mat.-Prfg. d. Technik, Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Rudeloff. Bericht 23d.

**) Fällzeit des Holzes, Zentralbl. Bauv. 1885 S. 93.

Digitized by Google

nur das Ausbohren des Kernes hilft. Die aus dem Stamme geschnittenen Bohlen und Bretter wölben sich beim Trocknen, u. zw. wird die nach der Stammachse gekehrte, „rechte" (oder Bund-) Seite gewölbt. Bei einseitigem Druck ist diese rechte oder Kernseite womöglich dem Druck entgegen (z. B. bei Fufsböden nach oben) zu legen. Wasser oder Feuchtigkeit einseitig läfst man am besten auf die „linke" (oder Splint-) Seite wirken. Sehr wichtig ist das trockene Verlegen der Hölzer (Parkett), die Anordnung von Fugen zwischen Schalbrettern u. a., die Anwendung von Keilen bei den Hölzern der Rüstung, das nur einseitige Nageln von Deckleisten u. v. a. Zusammensetzung der gestemmten Tischlerarbeiten aus zahlreichen Teilen in wechselnder Richtung. Gesperrtes Holz (das Koptoxyl von Harras in Böhlen i. Thür. und das Stereoxyl von der Westdeutschen Holzindustrie in Holsterhausen i. Westf.) zu Täfelungen, Türen u. a.

Arten der Zerstörung des Holzes.

1. Alles Faulen geht von der Zersetzung gewisser Saftbestandteile aus und wird meist von Pilzen eingeleitet und gefördert. Das Ersticken oder Anlaufen (Blau- bzw. Braunwerden) des grünen Holzes im Splint ist unschädlich, falls es rasch geschnitten und gut getrocknet wird. Das gewöhnliche Verfaulen oder 1. die nasse Fäule, die eine braune nasse Masse liefert, tritt ein, wenn das Holz mit nasser Erde usw. in Berührung steht oder abwechselnd nafs und trocken wird. Seltener ist 2. die Trockenfäule, wobei eine trockene mürbe helle Masse entsteht, sowie 3. die Humifizierung (beginnende Kohlebildung, Braunkohle, Torf), durch Berührung mit Mörtel gefördert. (1. und 3. sind Reduktionsvorgänge, 2. ein Oxydationsvorgang.)

Schwindmafse der wichtigsten Holzarten.

Holzarten	Gröfse des Schwindens in der Richtung		
	der Achse %	des Halbmessers %	der Sehne %
Ahorn	0,072	3,35	6,59
Birke	0,222	3,86	9,30
Eiche, alt	0,130	3,13	7,78
Erle	0,369	2,91	5,07
Esche, alt	0,187	3,84	7,02
Fichte (Rottanne)	0,076	2,41	6,18
Kiefer (Föhre)	0,120	3,04	5,72
Lärche	0,075	2,17	6,32
Linde	0,208	7,79	11,50
Mahagoni	0,110	1,09	1,79
Pappel	0,125	2,59	6,40
Rotbuche	0,200	5,03	8,06
Tanne (Weifstanne), jung	0,122	2,91	6,72
Ulme (Rüster)	0,124	2,94	6,22
Weide	0,697	2,48	7,31
Weifsbuche	0,400	6,66	10,30

Digitized by Google

2. Die Schwammbildung,*) am gefährlichsten vom echten oder tränenden Hausschwamm, meist nur in Häusern vorkommend, neuerdings auch an Kiefernstämmen im Wald (Grunewald bei Berlin) beobachtet, aber auch u. a. vom Lohbeet-Löcherpilz herrührend, wird vor allem durch Feuchtigkeit, stillstehende Luft und Lichtmangel begünstigt. Sie wächst äufserst schnell auch durch das Mauerwerk weiter und zerstört alles Holz vollständig, unter Verbreitung gesundheitsschädlichen Geruches. Ein schwammverdächtiges Haus ist unverkäuflich (Reichsgericht).**)

3. Der Wurmfrafs ist die zerstörende Einwirkung verschiedener Insekten und ihrer Larven: Bohr- oder Klopfkäfer in Bauholz und Möbeln (Totenuhr); Borkenkäfer in Nadelholzbäumen; Spiefsbock in Eichen und Zimmerbock in Kiefern; Weidenbohrer (Schmetterling, dessen Raupe Weiden, Ulmen, Erlen, Eichen, Kiefern anbohrt); Holzwespe und ihre Larven; Bohr- oder Pfahlwurm und Bohrassel, die beide nur im Seewasser leben und, besonders der erstere, in den Häfen grofse Verwüstungen anrichten.

4. Das Feuer ist besonders für die harzreichen Nadelhölzer gefährlich, weniger für die Eiche, am wenigsten für die Harthölzer. u. a. Karri und Jarrah (S. 728).

Schutz gegen die Zerstörung des Holzes.

1. Die Balkenköpfe sind vor der unmittelbaren Berührung mit dem Mauerwerk mit folgenden Mitteln zu schützen: Benageln mit Dachpappe, besser mit Kosmos-Falztafeln (A. W. Andernach in Beuel a. Rh.). Einen mittelbaren Schutz bietet eine gute Trockenschicht, welche die Erdfeuchtigkeit am Aufsteigen im Mauerwerk hindert. Gute Mittel dazu sind Asphaltfilzplatten, Ruberoid (S. 718), Bleiblech zwischen Dachpappe (Siebel in Düsseldorf); weniger Gufsasphalt und Zement; ungeeignet Glas oder Schiefer. Das Unterlassen einer wirksamen Isolierung wird u. Umst. als grober Verstofs anerkannt (Reichsgericht 1905). Wichtig ist ferner das gehörige Austrocknen des Baues, wo nötig künstlich, durch die Trockenheizungen S. 696.

Gegen das Reifsen duch Einwirkung der Sonnenwärme schützt man Holz durch einen Anstrich aus 2 R.-T. Steinkohlenteer, 1 R.-T. Holzteer, mit etwas Harz aufgekocht und mit etwas trocken gelöschtem Kalk verrührt. Die gewöhnliche Einwirkung von Nafs und Trocken wird durch Einreiben von Wachs (Parkett), durch Anstriche mit Leinölfirnis, guten Oelfarben, Holzteer, Avenarius-Carbolineum usw. ferngehalten; letzteres wohlfeile Mittel ist besonders zu empfehlen (bei einmaligem Anstrich 1 kg für 4 bis 6 qm). Vor dem Anstreichen soll das Holz mindestens lufttrocken, besser künstlich ausgetrocknet sein. — Das Ankohlen von Pfählen usw. ist von zweifelhafter Wirkung.

Ein bewährtes Mittel ist die Entfernung des Saftes. Sie kann erfolgen durch Auswachsen (die weiter grünende Krone des im

*) Vgl. das Merkblatt zur Hausschwammfrage vom Innungsverband deutscher Baugewerksmeister. Berlin 1910. — Die Merulinsfäule der Bauhölzer, 6. Heft der Hausschwammforschungen. Jena 1913.

**) Mez und Kummler, Haftpflicht bei Hausschwamm und Trockenfäule. Berlin 1910. Spielmeyer.

Digitized by Google

Frühjahr gefällten Baumes entzieht dem Stamm den Saft) oder durch Auslaugen (indem man die Stämme in fliefsendes Wasser mit dem Stammende zu Berg legt; günstige, auslaugende Wirkung des Wassers beim Flöfsen), ferner durch Dämpfen des frischen Holzes in geschlossenen Behältern mittels überhitzten Wasserdampfes (60 bis 80 st) und nachheriges Austrocknen.

Sehr erprobt ist die mehr oder weniger tiefgehende Durchdringung des Holzes mit fäulniswidrigen Stoffen: Metallsalzen oder Kreosotöl (schweres Teeröl), durch Imprägnieren (Durchtränken) oder nur durch Eintauchen. Das erstere lohnt sich am meisten bei Buche und bei Kiefer, weniger bei Eiche.

Durchtränken mit Kreosotöl. Die Hölzer werden, nachdem sie bei 100 bis 140° 3 bis 4 st lang ausgedörrt sind, in einem Kessel 1 st lang in einem Vakuum von $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ at belassen, worauf das auf etwa 50° vorgewärmte Kreosotöl eingeführt und etwa 60 bis 70 min unter einem Druck von 6 bis 10 at eingepreßt wird. — Der Siedepunkt des Oels soll zwischen 180 und 400° liegen, sein spez. Gew. 1,0 bis 1,1 und sein Gehalt an sauren Bestandteilen 6 bis 8 % betragen. Oelverbrauch bei Kiefernholz 140 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 80 bis 90 kg/cbm, bei Buchenholz 270 bis 320 kg cbm. — Für besondere Zwecke wird jetzt dem obigen Oel 50 % Rohanthracen zugesetzt und mit dieser dickflicheren Masse noch gröfserer Erfolg erzielt.

Gegen diese Vollimprägnierung sind Oelverbrauch und Kosten gering bei der (von der Preufsischen Staatsbahn jetzt allgemein vorgeschriebenen) Rüpingschen Hohlimprägnierung (Rütgerswerke A.-G., Berlin W 35) oder dem Teeröl-Sparverfahren: Die unter Druckluft (4 at) gesetzten Hölzer werden unter verstärktem Druck (8 at) mit dem Oel, soweit angängig, gefüllt, worauf dieses dann beim Nachlassen des Druckes von der inneren Luft gröfstenteils wieder herausgedrängt wird. Bei gleicher konservierender Wirkung beträchtliche Ersparnis an Oel (z. B. 63 kg statt 320 kg/cbm) und an Kosten (9 ℳ statt 20 bis 23 ℳ/cbm).*)

Durchtränken mit Zinkchlorid. Das dem vorigen ganz ähnliche Verfahren, wobei von der 3 % Zinkchlorid ($ZnCl_2$) haltenden Lösung bei Buchen- und Kiefernholz 160 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 90 bis 110 kg/cbm verbraucht werden, macht indessen das Holz sehr hygroskopisch; auch wird das Salz leicht ausgewaschen (was bei einem organischen Zinksalz weniger der Fall ist, Patent Wiese, 1901). Die reine Zinkchloridtränkung wird deshalb fast gar nicht mehr angewendet, und auch die „Gemischtimprägnierung" mit Teeröl und Zinkchloridlösung (Verbrauch für eine Buchenholzschwelle 15 kg Oel und 18 kg Lösung) hat sich wenig bewährt.

Durchtränken mit Kupfervitriol. Eine Lösung von 1,5 G.-T. Kupfervitriol auf 100 G.-T. Wasser wird durch den Druck einer Flüssigkeitsäule aus einem 10 bis 12 m höher stehenden Gefäfs von der Hirnfläche des Wurzelendes aus durch den (vor höchstens 10 Tagen gefällten) Stamm getrieben; der Zellsaft fliefst am Zopfende ab, und schliefslich erscheint die blaue Vitriollösung. Dauer der Tränkung einer 10 m langen Telegraphenstange (Nadelholz) etwa 13 Tage. 1 cbm Holz nimmt 9,5 kg Kupfervitriol auf. Kosten etwa 8 ℳ/cbm. — Geschnittene Hölzer läfst man in einer zementierten Grube 6 bis 14 Tage in der Lösung liegen. Das Kupfervitriol darf kein Eisenvitriol enthalten, das verwendete Wasser mufs kalkfrei sein, alle Eisenteile sind fernzuhalten. — Dieses Verfahren wird für Telegraphenstangen vielfach (siehe jedoch unten), für Eisenbahnschwellen kaum noch angewendet.

Aufnahme von Quecksilberchlorid (Sublimat). In hölzernen Bottichen (keine Eisenteile!) wird eine Sublimatlösung (1 $HgCl_2$: 150 Wasser) hergestellt, in die z. B. Nadelholzschwellen 8 bis 10 Tage, Eichenholzschwellen 12 bis 14 Tage eingelegt werden, wobei jede Schwelle etwa 0,125 kg Sublimat, und zwar bis 2 mm unter der Oberfläche aufnimmt. Kosten auf 1 Eisenbahnschwelle 0,75 bis 1,00 ℳ. Die Arbeiter sind vor der Einwirkung des höchst giftigen Sublimats zu schützen. Aus demselben Grund ist dieses übrigens weniger angewendete Verfahren nur für Telegraphenstangen, Grubenhölzer, Schwellen, Dachstühle u. a., nicht für Wohnungen, Ställe u. a. zulässig.

Die Anwendung aller Metallsalze bringt eine gewisse Brüchigkeit hervor und macht ein langes Austrocknen vor dem Gebrauch nötig. Dagegen leistet die Oeltränkung, abgesehen vom schlechten Aussehen und Geruch, die vorzüglichsten Dienste, indem die Festigkeit des Holzes erhöht und die Wasseraufnahme verhindert wird.

---

*) Die Schwellentränkanstalt Zernsdorf in Glasers Annalen 1913

Digitized by Google

2. Schwamm in Bauwerken wird verhütet durch sorgfältiges Fernhalten aller Keime (verdächtiger Bauschutt) und alles dessen, was das Wachsen des Pilzes befördert (Wasser, Urin), daher Trockenhalten alles Holzwerkes und Anbringung von Luftgängen um dasselbe herum. — Wird der Schwamm bei seinem Auftreten frühzeitig erkannt, so kann er durch Entziehen von Feuchtigkeit, z. B. nach dem höchst wirksamen Verfahren von Kothe & Emge in Hannover, beseitigt werden, ferner durch Anstreichen mit Sublimatlösung oder mit Avenarius-Carbolineum von R. Avenarius & Co. in Stuttgart (Preis dieses zwar stark riechenden und dunkel färbenden, aber vorzüglichen altbewährten Mittels 29,5 bis 35 ℳ/100 kg bei 200 bzw. 100 kg Entnahme) oder mit dem wasserlöslichen, gelben Antinonnin der Farbenfabriken vorm. Friedr. Bayer & Co. in Elberfeld (Preis 6,75 bis 7,75 ℳ/kg bei 20 bis 1 kg Entnahme), dessen 2prozentige Lösung warm aufgestrichen wird; wegen seiner Geruchlosigkeit besonders im Inneren geeignet, zumal dabei die Farbe des Holzes unverändert bleibt. Ebenfalls sehr wirksam sind neben dem Mikrosol von Rosenzweig & Baumann in Kassel (Preis 7,25 ℳ/kg) das wasserabweisende, durch Kupfersalze besonders wirksame Barol (Preis 24 bis 34 ℳ/100 kg bei 200 bis 30 kg Entnahme) und das wasserlösliche, aber schwer auswaschbare farblose Antorgan (Preis 45 bis 55 ℳ/100 kg); beide von der Chem. Fabr. Flörsheim a. M. Neu wird empfohlen das wasserlösliche gelbe Raco von Avenarius in Stuttgart (Preis 7,50 ℳ/kg) sowie das Mykantin von den Höchster Farbwerken (Preis 2 ℳ/kg). Kochsalzlösung, die immer noch empfohlen wird, sowie manche teuren Geheimmittel sind als unwirksam zu verwerfen.

Bei starken Schwammwucherungen ist alles davon Befallene rücksichtslos zu entfernen und zu verbrennen, bevor die Ersatzteile, sorgfältig angestrichen, eingebracht werden.

3. Wurmfraß wird durch Anstrich mit fettigen und harzigen Stoffen (wie Petroleum, Holzteer u. dgl.) verhindert. Nach alter Erfahrung soll der Wurm nicht in Hölzer gehen, die lotrecht entgegen ihrer Wachstumsrichtung gesetzt sind. — Vom Wurm ergriffenes Holz versieht man mit mehrmaligem Anstrich von Seifensiederlauge mit Kochsalz [26 T. Lauge : 3 T. Salz] oder von Karbolsäure oder von einem der obigen Schwammvernichtungsmittel. Auch tötet man die Larven durch Benzindämpfe (Vorsicht!), ferner durch Eintröpfeln von roher Salzsäure oder Sublimatlösung in die Wurmlöcher. — Pfähle für Seewasser werden sorgfältig durchtränkt mit Teeröl, besser noch, wenn dieses durch Rohanthracenzusatz dicklich gemacht ist. Auch mit Kupfervitriol, fest in schiefgebohrte Löcher eingeführt, hat man (in Norwegen) guten Erfolg gegen die Bohrmuschel gehabt. Schutz vor der letzteren gibt das Spezialmittel Sotor von Avenarius in Stuttgart (Preis 66 ℳ 100 kg).

4. Schutz gegen Feuer ist insoweit möglich, als das Brennen mit Flamme verhindert wird. Hierzu ein Ueberzug mit Lehmteig oder Gipsmilch, besser ein 5- bis 6mal wiederholter Anstrich mit sehr dünner Wasserglaslösung, die mit etwas Ton oder Kreide oder Schwerspat versetzt ist; oder mit einer Chlorkalziumlösung, in der man gebrannten Kalk gelöscht hat; oder mit der Feuerschutz-

Digitized by Google

masse von Hülsberg & Co., Charlottenburg (bei Brandproben 1901 gut bewährt). Neuer und seit 1904 vom Berliner Polizeipräsidium zugelasssen ist das Verfahren der Deutschen Gautschin-Gesellschaft, Charlottenburg (Preis der Gautschinlösung 15 ℳ/100 l). — Mit einer gesättigten Lösung von schwefel- und phosphorsaurem Ammoniak unter Druck getränktes Holz (englischer Kriegsschiffbau) ist selbst durch Stichflamme nur zum Verkohlen zu bringen.

Das Feuerfangen von Holzverkleidungen und das Durchschlagen des Feuers durch Balkendecken (Speicher) wird verhindert durch Aufnageln oder Einlegen von Asbestpappe (S. 716), 5 mm bis mehrere cm stark. (Brennproben Stettin 1901.) Ebenfalls wirksam ist der Drahtziegelputz von Staufs & Ruff in Kottbus sowie der Asbestmörtel auf Drahtgewebe von Sauerzapf in Dresden. — Mit einer aus Lehm, Gips und Gaswasser bestehenden Masse wird beim Gernentzdach (in vielen Gegenden bis auf weiteres zugelassen) das Stroh und Reth feuersicher gemacht. Hans am Ende, Das feuersichere Strohdach. Worpswede 1908.

Dauer des Holzes. Immer trocken gehalten sowie immer unter Wasser, ist die Dauer des Kiefern-, Lärchen- und auch Fichtenholzes sehr bedeutend, die des Eichenholzes unbegrenzt. Die Grundpfähle werden 30 cm unter dem niedrigsten Grundwasserstand gekappt.

Dagegen hält kein Holz dem Wechsel von Nafs und Trocken, also dem Wetter ausgesetzt, auf die Dauer stand. Man rechnet für Eiche 100, Kiefer und Lärche 40 bis 85, Fichte 40 bis 67, Pappel 20 bis 30 Jahre. Im Boden eingegrabenes Holz hält sich in Ton-, Lehm- oder nassem Sandboden am besten, weniger gut in trockenem Sandboden, am schlechtesten in Kalkboden. Vorzüglichen Schutz gewährt auch hier das Avenarius-Carbolineum.

Holz als Ware.

1 Festmeter (fm) = 1 cbm fest zusammenhängender Holzmasse; 1 Raummeter (rm) = 1 cbm geschichteten Holzes = 0,7 bis 0,8 fm.

Zunahme der Stärke eines Baumstammes vom Zopfende an für 1 m Länge: bei Nadelhölzern 1,0 bis 1,5 cm; bei Laubhölzern 1,5 bis 2,5 cm.

Wald-Nutzholz wird gehandelt und eingeteilt in:

a. Langholz:
   1. Stämme über 14 cm Zopfstärke (Wahlhölzer), ferner Schneidehölzer und gewöhnliche Rundhölzer (in fm);
   2. Derbstangen von 7 bis 14 cm Durchm. (in fm) und Lattstämme, Gerüststangen, Leiterbäume, Hopfenstangen usw. 1. bis 3. Klasse (Stückzahl);
   3. Reiserstangen unter 7 cm Durchm. [Hopfen- und Bohnenstangen, Baumpfähle, Schricken (für Absteifung und Gerüstzwecke), Zaunstöcke usw.] (Stückzahl);

b. Schichtholz (in rm):
   1. Derbholz; 2. Derb-Grubenholz; 3. Reiserholz.

Handels-Nutzholz wird gehandelt und eingeteilt in

a. Rundholz (in fm): 1. Mühlwellen, Hammerachsen, Sägeblöcke usw.; 2. gewöhnliches Rundholz;

Digitized by Google

b. Kantholz (in fm): 1. splintfreie Balken; 2. scharfkantige Balken; 3 vollkantige Balken; 4. baumkantige Balken; 5. Pfosten;
c. Breitschnittholz: 1. Planken, 10 bis 15 cm stark (in fm); 2. Bohlen, 5 bis 10 cm stark (in fm); 3. Bretter, Borde, Dielen, 1,5 bis 4,5 cm stark (kantig nach qm, „preufsische" Stammdielen nach Stückzahl);
d. Latten (in m): 1. Dachlatten, 2,5 . 5 cm bis 4 . 6 cm stark; 2 Doppellatten, 5 . 8 cm stark; 3. Spalierlatten, 1,5 . 2,5 cm bis 2 . 4 cm stark;
e. Brennholz: 1. Scheitholz, gespalten, über 14 cm Durchm. (in rm); 2. Knüppelholz, 7 bis 14 cm Durchm. (in rm); 3. Reiserwellen, Hölzer unter 7 cm Durchm. (Stückzahl).

Das Baurundholz (Langholz, unbeschlagenes Ganzholz) zerfällt nach der Stärke und Länge in folgende Arten:

Art	Zopfdurchmesser cm	Länge m
Aufsergewöhnlich starkes Holz . .	35 und mehr	14 und mehr
Gewöhnliches starkes Holz . . .	25 bis 35	12 bis 14
Mittelbauholz (Riegelholz) . . .	20 „ 25	9 „ 12
Kleinbauholz (Sparrholz)	15 „ 20	9 „ 11
Bohlstämme	13 „ 15	7 „ 9
Latistämme	8 „ 13	7 „ 9

Sägeblöcke haben eine mittlere Länge von 8 m bei 35 bis 50 cm Zopfstärke. — Das Ganzholz (beschlagen und unbeschlagen) liefert gehälftet das Halbholz und geviertelt das Kreuzholz (besonders geschätzt für feine Zimmerarbeiten). Roh mit der Axt beschlagenes Ganzholz (austrocknungs- und versandfähiger als unbeschlagenes) ohne scharfe Kanten wird waldkantig (waldkantig, baumkantig) genannt. — Spaltholz wird durch Längsteilung der mehrfach quer durchschnittenen Stämme mittels Keile oder Axt erhalten, ist fester und weniger dem Werfen ausgesetzt als Schnittholz; wird u. a. zu Holznägeln, Hammerstielen sowie als Stakholz für Windelböden benutzt.

Das Baukantholz (Verbandholz) ist im Handel in allen Abmessungen von 7 . 7 cm bis 28 . 30 cm und mehr erhältlich.

Im Jahre 1898 hat der Innungsverband deutscher Baugewerksmeister folgende Normalien aufgestellt:*)

1. Normalprofile für Bauhölzer in cm.

8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
8/8	8/10	10/12	10/14	12/16	14/18	14/20	16/22	18/24	20/26	22/28	24/30
.	10/10	12/12	12/14	14 16	16/18	16/20	18/22	20/24	24/26	26/28	28/30
.	.	.	14/14	16/16	18/18	18/20	20/22	24/24	26/26	28/28	.
.	.	.	.	.	.	20/20	.	.	.	.	.

*) Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 5. Juli 1898, Zentralbl. Bauv. 1898 S. 378.

Digitized by Google

2. **Normalien für Schnittholz** (Bretter, Bohlen, Pfosten, Latten). In Längen von 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 7 und 8 m. In Stärken von 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 und 15 cm. Besäumte Bretter in Breiten von cm zu cm steigend.

Eisenbahnschwellen. Näheres s. III. Bd. Eisenbahnbau; über Durchtränkung S. 723.*) — Lieferungsbedingungen:

Vollständig gesundes, kerniges Holz, frei von Rinde (bei Eichenholz auch frei von Splint), frei von jeder Fäulnis; keine lockere und schwammige Beschaffenheit, kein Drehwuchs, keine Risse und losen Jahresringe. Zulässig sind nur gesunde Aeste, die nicht mehr als $^1/_6$ des Querschnitts einnehmen. Dürre Aeste müssen ausgehauen werden, doch darf dabei höchstens $^1/_{12}$ des Querschnitts verloren gehen; die Schienenauflager müssen hiervon frei und vollständig sein.

Zulässige Längenabweichungen ± 5 cm; die Mitte des Schienenauflagers höchstens um 3 cm aus der Mittellinie. Schwellen, welche kleine Abweichungen von den verlangten Abmessungen haben, sonst aber gut sind, werden um 20 % billiger übernommen, jedoch soll die Zahl dieser sogen. Klassenschwellen $^1/_{10}$ der Lieferung nicht überschreiten.

Weichenschwellen müssen im Querschnitt vollständig rechteckig (30 . 18 cm) sein und dürfen keine Wahnkantung haben.

Die mittlere Dauer der Eisenbahnschwellen in geeigneter Bettung (und ferner bei guter Durchtränkung, vgl. III. Bd. Eisenbahnbau) sowie die Kosten einer Vollbahnschwelle (ungetränkt) sind folgende:

Holzart	natürlich	getränkt mit Teeröl	Schwellenpreis
Kiefern- und Lärchenholz . .	7 bis 9 Jahre	15 bis 20 Jahre	2,5 bis 3,5 ℳ
Fichten- und Tannenholz . .	4 „ 5 „	8 „ 15 „	1,5 „ 2,5 „
Buchenholz	$2^1/_2$ „ 3 „	25 „ 35 „	3,2 „ 4,2 „
Eichenholz	15 „ 20 „	20 „ 30 „	4,5 „ 6,0 „

Schwellen aus **Garaboto-Quebrachoholz** (in ungeschütztem Zustande) sollen ungleich längere Dauer haben. Versuche damit werden auf preußischen Bahnen angestellt.

Telegraphenstangen und Masten für elektrische Leitungen aus Kiefern-, Fichten-, Tannen- und Lärchenholz (Eichenholz selten). Stangenlängen 7, 8,5 und 10 m. Zopfdurchmesser der geschälten Stange 15 cm; Verjüngung vom Stammende zum Zopfende auf 1 m Länge etwa 1 cm. Mindestdurchmesser am Stammende bei 7 m Stangenlänge 22 cm, bei 8,5 m 23,5 cm und bei 10 m 25 cm.

Für Nebenlinien werden auch 7 m lange Stangen mit 12 cm Zopfstärke benutzt. — Sonstige wesentliche Bedingungen: gerader Wuchs, gesunder Stamm, keine Astlöcher oder Spaltstellen, wirkliches Stammende eines Baumes. Die Durchtränkung der frischen, noch ungeschälten Stangen mit Kupfervitriol (S. 723) ist jetzt seitens der Reichspostverwaltung zugunsten des Teerölsparverfahrens (s. oben) fast ganz verlassen. Ungeschützt haben sie etwa 7,7 Jahre, geschützt mit Kupfervitriol 11,7, mit Sublimat 13,7, mit Teeröl 20,6 Jahre Gebrauchsdauer.

Holzstiele für Handwerkzeuge: Hammer-, Hacken-, Picken- und Axtstiele aus Eschen-, Weißbuchen- und amerikanischem Hickoryholz; Beilstiele auch aus Rotbuchenholz. Spaten-, Schaufel- und Gabelstiele sowie Turngeräte und Ruder aus Eschenholz.

*) Ueber die Verwendung von **Buchenschwellen** auf preuß. Staatseisenbahnen Zentralbl. Bauv. 1898 S. 127 ff., auf der französ. Ostbahn ebendas. 1898 S. 263.

Digitized by Google

Brennholz. 1 cbm Scheitholz (Klobenholz) enthält etwa 0,7 fm Holz, 1 cbm Knüppelholz enthält 0,60 bis 0,65 fm Holz. — Weiteres S. 456.

Bauholzarten.

Da Deutschland seinen Bedarf mit eigenem Holz nicht decken kann, ist es in steigendem Maße auf andere Länder angewiesen, besonders Rußland, Skandinavien und Nordamerika. Neuerdings werden auch aus Südamerika, Australien und Ostasien sowie aus unseren Kolonien (Ostafrika, Kamerun) Bauhölzer eingeführt.

Die zu Bauzwecken verwendeten wichtigsten Holzarten sind:

Eiche (Sommer- oder Stieleiche und Winter- oder Steineiche), wertvollstes Holz überhaupt, in jeder Hinsicht das beste, sowohl für Hoch-, Tief-, wie Mühlen-, Schiff- und Wasserbau.

Kiefer (Föhre), vorzüglich im Trockenen (bestes Zwischendecken- und Dachholz) sowie unter Wasser (Grundpfähle), auch verhältnismäßig dauerhaft im Wechsel von naß und trocken (Bauten im Freien).

Pitchpine (Pechkiefer) von Kanada (das Kernholz des Baumes), in jeder Hinsicht vorzügliches Holz, zu manchen Zwecken dem Eichenholz gleichgeschätzt, dabei viel billiger als dieses. Für Deutschland nicht mehr zu entbehren. — Das viel hellere Splintholz, als Redpine gehandelt, weniger wertvoll.

Lärche, wertvollstes einheimisches Nadelholz; Verwendung (bei uns selten) wie Eiche oder Kiefer, z. B. zu Grundpfählen.

Fichte (Rottanne), im Trockenen (einfacherer Hausbau) oder aber ganz unter Wasser haltbar (besonders lange Grundpfähle), dagegen nicht im Wechsel von naß und trocken. Unterscheidung von Kiefer durch den Wuchs der Aeste.

Tanne (Weißtanne, Edeltanne) verhält sich wie Fichte. Seltener.

Ulme (Rüster) überall trefflich zu verwenden, besonders im Mühlen-, Wasser- und Schiffbau.

Rotbuche hält sich, wenn ganz im Wasser befindlich, sehr gut, aber nicht im Wechsel von naß und trocken; zu Schiffs- und Grundbauten sowie Parkett.

Erle, vorzüglich zum Grund-, Wasser- und Mühlenbau.

Ahorn (besonders der Zuckerahorn) wegen seiner außerordentlichen Härte und Zähigkeit zu Fußböden für Speicher, Karrenbahnen (statt Eisen) u. a. geeignet.

Andere einheimische Hölzer, wie Esche, Weißbuche, Pappel usw., werden nur stellenweise als Bauhölzer verwendet. Von ausländischen sind noch zu nennen: das indische Teakholz, noch fester und dauerhafter als Eichenholz, höchst geschätzt für allerbeste Fenster, Türen und Schränke sowie für den Schiffbau; das Quebrachoholz vom Laplata; das Bongossiholz von Kamerun, jetzt als Eisenholz verkauft. Die westaustralischen Harthölzer Tallow, Karri und Jarrah (sämtlich Eukalyptusarten) von den ausgezeichnetsten Eigenschaften für alle Bauzwecke, u. a. Pflaster, Parkett, Dübel.

Digitized by Google

X. Schmiermittel.*)

Eigenschaften eines guten Schmiermittels sind:

1. Möglichst geringe innere Reibung (geringe Kohäsion) sowie genügende Adhäsion an den Gleitflächen.

Die Teilchen müssen äufserst leicht gegeneinander verschiebbar sein, um auch die kleinsten Unebenheiten der Gleitflächen jederzeit auszufüllen und um nicht ihrerseits durch zu grofse innere Reibung ein Hindernis für die Bewegung abzugeben. Das Mittel mufs ferner fest an den Gleitflächen haften, damit es sie möglichst voneinander trennt und nur allmählich ihrem Drucke weicht.

2. Möglichste Unveränderlichkeit a) gegenüber der Einwirkung der Luft, b) gegenüber den Druck- und Temperaturänderungen.

zu a) Verharzung und dadurch Krustenbildung — durch Wärme und Staub begünstigt.

zu b) Verdampfung (z. B. Mineralöle bei etwa 150° im Dampfzylinder und Schieberkasten) und Zersetzung (besonders durch den Wasserdampf). Entwicklung brennbarer Gase aus dem Oel durch Erwärmung, weshalb u. a. Petroleum und Beimischungen desselben ganz unzulässig sind. Wichtigkeit des Entflammungspunktes. — Kältebeständigkeit bei Wintertemperaturen (Eismaschinen, Kältekompressoren z. B. — 30°)

3. Völlige Säurefreiheit.

Die Gleitflächen (wie auch zufällig von dem Schmiermittel berührte Maschinenteile) leiden sehr durch die geringsten Spuren freier unorganischer Säure (Schwefelsäure), die übrigens selten bei Mineralölen vorkommt; organische Säuren, in den Fetten enthalten oder daraus bei der Zersetzung sich bildend, sind erfahrungsgemäfs in geringen Mengen ungefährlich.

4. Reinheit von festen Beimengungen, ungelösten wie auch gelösten.

Solche Beimengungen (Gewebeteile, Schleim bei Pflanzenölen, Hautteile bei Talg, Koksteile bei Mineralölen, beschwerende Verfälschungen bei allen) erzeugen selbst Reibung und veranlassen Krustenbildung, Verstopfung der Zuflufskanäle usw. Die von den Gleitflächen unvermeidlich abgeriebenen feinen Metallteilchen machen die Schmiere selbst nach einiger Zeit für die Flächen äufserst gefährlich; deshalb ist die Erneuerung der Schmiere notwendig.

5. Wasserfreiheit.

Die bei der Dochtschmierung verwendeten Oele dürfen höchstens Spuren Wasser enthalten, da dieses die Saugfähigkeit der Dochte vermindert.

Ein wirtschaftlich vorteilhaftes Schmiermittel mufs eine gewisse Zähflüssigkeit (Viskosität) besitzen, doch nur so weit, dafs die dadurch bewirkte Erhöhung der inneren Reibung (Arbeitsverlust und Erwärmung) nicht den Vorteil des geringeren Verbrauches aufhebt.

Bei der **Wahl des Schmiermittels**, die sich nach dem jeweiligen Verwendungszweck zu richten hat, sind zu berücksichtigen: 1. der spezifische Druck der Flächen, 2. deren Gleitgeschwindigkeit, 3. die Temperatur bei der Schmierwirkung.

Bei geringem Druck und grofser Geschwindigkeit z. B., wie bei den Spindeln der Spinnmaschinen, ist die Dünnflüssigkeit erstes Erfordernis, weil mit der Geschwindigkeit die innere Reibung wächst; daher dünnflüssiges Mineralöl allein oder mit geringem Zusatz von fettem Oel.

---

*) L. F. Andés, Vegetabilische und Mineralmaschinenöle, Wien 1893. — Kapff, Wertbestimmung von Schmierölen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 553 ff. — J. Grofsmann, Die Schmiermittel usw., 2. Aufl., Wiesbaden 1909. — Anleitung zur Einrichtung und Instandhaltung von Triebwerken, herausgegeben von der BAMAG., Berlin NW und Dessau. — D. Holde, Die Untersuchung der Schmiermittel, 3. Aufl., Berlin 1909.

Digitized by Google

Die Starrschmiere, ein dickflüssiges Fett (Staufferfett), empfiehlt sich da, wo eine Oelschmierung aus verschiedenen Gründen untunlich ist. Neu ist hierbei die Dauerschmierung mit Spezialfetten (Calypsol, Sternoline, Astroline u. a.).

Das in den Abtropfbehältern der Lager aufgefangene Schmieröl ist mit Metallteilchen, Staub usw. so stark verunreinigt, dafs es in diesem Zustande nur zu anderen Zwecken (Schmirgeln, Löcherbohren usw.) gebraucht werden darf. Bei der sehr reichlichen Schmierung rasch umlaufender Maschinen (Gasmaschinen, Dynamomaschinen usw.) empfiehlt es sich, das Tropföl durch völlige Reinigung wieder gebrauchsfähig zu machen.

Aus den zur Reinigung verwendeten Putzstoffen läfst sich das Schmieröl durch eine Schleuder zum Teil wiedergewinnen. Eine vollständige Befreiung des Putzstoffes von Oel und Fett geschieht durch Waschen mit Benzin (Rührwerk in geschlossenem Behälter).

1. Fette Oele und Fette.

Die Pflanzen- und Tierfette sind in ihrer Anwendung zu Schmierzwecken jetzt durch die Mineralöle sehr zurückgedrängt worden; meistens werden sie in geringem Prozentsatz den Mineralölen zugesetzt.

Von den **Pflanzenölen**, deren Farbe im raffinierten Zustande hellgelb bis wasserhell ist, sind die wichtigsten:

Rüböl (Rapsöl), zu den nicht trocknenden Oelen gehörend, noch ein sehr häufig gebrauchtes Schmiermittel, dessen Verwendung jedoch durch den hohen Preis (etwa 75 ℳ/100 kg) eingeschränkt ist. Wird mit anderen Pflanzenölen und mit Mineralölen verschnitten. Helles (gereinigtes) Rüböl vorteilhafter als weniger helles (rohes). Spez. Gew. i. M. 0,914.

Oliven- oder Bauмöl, meist grünlich, besitzt ebenfalls gute Schmierfähigkeit, trocknet auch nicht, enthält aber häufig freie Fettsäuren. Wegen des hohen Preises selten unvermischt. Verfälschungen mit Leinöl und Mohnöl, die stark trocknen, oft aber auch mit Baumwollsamen-, Sesam- u. a. Oelen. Spez. Gew. i. M. 0,918.

Rizinusöl, sehr zähflüssig, ist unter Umständen ein gutes Schmiermittel, das sich aber nicht mit Mineralölen mischen läfst; deshalb jetzt gern ersetzt durch das Blown oil.

Von den **Tierfetten** sind folgende zu nennen:

Talg, Rinder- und Hammeltalg, ist nur verwendbar, wenn völlig schwefelsäurefrei. Guter Talg enthält wenig Fettsäure, wird nicht leicht ranzig. Spez. Gew. i. M. 0,948.

Anwendung des Rindertalges zum Einfetten der Ledertreibriemen (s. unter XI) sowie von Maschinenteilen. Friktionsschmiere, Adhäsionsfett usw. sind neuerdings brauchbare Ersatzmittel für Talg.

Klauen(Knochen-)öl, nicht ranzig werdend und nicht trocknend, dient häufig für feinere Maschinen, gibt raffiniert das feine Uhrenöl.

Spermacetiöl, aus dem Walrat, das dünnflüssigste Fett, wird nicht ranzig und trocknet nicht; ausgezeichnetes Schmiermittel für feinere Maschinen.

Schmalzöl und Talgöl dienen als feine Maschinenöle, für sich oder mit Mineralöl gemischt.

2. Mineralöle. Die rohen Mineralöle (Erdöl, Steinöl), werden durch Destillation in leichte, dünne Oele (Brenn-, Gas-, Putzöl) und in

Digitized by Google

schwere, zähflüssige (Schmieröle) geschieden. Letztere reinigt man durch Filtrieren oder durch Destillieren, Behandeln mit Schwefelsäure und nachher mit Natronlauge.

Die Mineralöle bleiben an der Luft (bis auf die Farbe) unverändert, d. h. sie bilden keine Säure, verdicken nicht und trocknen nicht ein. In der Wärme verdunsten sie mehr oder weniger. Farbe sehr verschieden: hellgelb, gelbrot bis schwarzbraun. Von den Fettölen durch einen andersfarbigen Schimmer, bläulich und grünlich, bei auffallendem Lichte unterscheidbar. Im allgemeinen zeichnen sich die russischen Oele vor den amerikanischen durch Kältebeständigkeit aus. Spez. Gew. 0,850 bis 0,960.

Während man die Mineralöle nur für untergeordnete Zwecke taugen, kommen einige den besten Fettölen als Schmiermittel mindestens gleich. Da sich die Fettöle in hohen Temperaturen zersetzen und auch ihr Preis höher ist, haben die russischen und amerikanischen Mineralöle in Deutschland die Fettöle gröfstenteils verdrängt.

Aus der Zähflüssigkeit eines Mineralöls läfst sich, wenigstens beim Vergleiche von Oelen gleicher Herkunft, auf seine Schmierfähigkeit schliefsen, so dafs ein zähflüssiges Mineralöl auch zugleich schmierfähiger ist.

Die Verdampfbarkeit (um so geringer, je höher der Flamm- und der Brennpunkt) ist sehr zu berücksichtigen bei den Mineralölen, die zum Schmieren der unter Dampf gehenden Maschinenteile dienen sollen. Als Heifsdampföle (12 bis 16 at) haben sich neuerdings*) reine Mineralöle weniger geeignet erwiesen als solche, die bis zu 5 % tierische Fette enthalten.

Als bedeutende Schmierölwerke in Deutschland sind zu nennen: Deutsche Vacuum Oel A.-G., Hamburg; Petroleum-Raffinerie vorm. Aug. Korff, Bremen; Oelwerke Stern-Sonneborn, Hamburg-Cöln; Salzberger Oelwerke, Salzbergen; Mineralölwerke Albrecht & Co., Hamburg; Deutsche Erdölwerke, Wilhelmsburg a. E.

Beispiele von Mineralölen (nach Dr. E. Oberländer, Hamburg).

Herkunft	Spez. Gew. bei 15°	Erstarrt bei °C	Farbe im durchfallenden Lichte	Flammpunkt (offener Tiegel) °C	Brennpunkt °C	Viskosität**) bei 20°	Viskosität**) bei 50°
Deutsch	0,927	— 12	rötlichgelb	187	224	45	6,7
Galizisch	0,892	2	hellgelb	171	205	5,2	1,8
Rumänisch	0,926	0	grünrot	183	228	28,5	4,6
Amerikanisches Pale Oil	0,905	0	grünlichgelb	200	248	12,5	3,0
„ Neutralöl	0,875	— 3	braungelb	200	245	9,0	2,5
Russisches Maschinenöl	0,909	— 15	rötlichgelb	203	250	40,0	6,3
„ Spindelöl	0,898	— 20	hellgelb	180	225	13,0	3,2

3. Harzöle trocknen leicht zu harten Krusten ein und sind nur zu untergeordneten Zwecken (Wagenschmiere u. a.) zu verwenden.

4. Gemischte Oele und Fette. Die konsistenten Maschinenfette sind meistens Mischungen oder Lösungen von Kalkseife mit Mineralöl.

*) Vortrag von Dr. Eger (Bayerische Staatsbahnen) vor dem Deutschen Verband f. d. Mat.-Prfg. d. Technik. Nürnberg 1906.

**) Wasser hat bei 20° die Viskosität = 1.

Digitized by Google

Wegen der grofsen inneren Reibung als Schmiermittel nur unter Umständen zu empfehlen. Die Zahnradschmiere ist aus Talg und Oelen, gewöhnlich mit Zusatz von Harz und Pechen, von Graphit oder Talk, zusammengemischt.

5. Graphit (ausschliefslich in völlig reinem und sehr fein gemahlenem Zustand) kann nur als eine Art Poliermittel dienen, um Unebenheiten im Lager auszugleichen.

6. Unter dem Namen: **wasserlösliche Oele** finden milchähnliche Emulsionen von seifen- bzw. ammoniakhaltigen Oelen an Stelle von Seifenwasser beim Bohren zum Kühlen und Schmieren vorteilhafte Verwendung.

7. Von modernen Schmiermitteln für besondere Zwecke seien folgende angeführt: für Sauerstoff-Kompressionszylinder wässerige Glyzerinlösung; für Flüssige-Luft-Maschinen leichtflüssige Vaselinöle; für Transformatoren (nur von wenigen Fabriken hergestellte) Transformatorenöle die den gewaltigen Einwirkungen chemisch und physikalisch gewachsen sein müssen (Prüfung durch mehrtägigen Sauerstoffstrom bei 120° Erhitzung, ferner durch die „Teerzahl" nach den von der „Vereinigung der Elektrizitätswerke" aufgestellten Normen); für Turbinen die äufserst flüssigen Turbinenöle, möglichst widerstandsfähig gegen alle chemischen Einflüsse (Teerzahl), gut vom Kondenswasser zu trennen usw.

Die **Prüfung der Schmiermittel** erfolgt nach vorgeschriebenen physikalisch-chemischen Untersuchungsverfahren wesentlich auf spezifisches Gewicht, Freiheit von Wasser, Säure und fremden Beimengungen, Erstarrungspunkt, Verharzungsfähigkeit, Verdampfbarkeit bei höheren Temperaturen, Flammpunkt (Flammpunktprüfer für verschiedene Zwecke), Flüssigkeitsgrad (Viskosität) bei verschiedenen Temperaturen mit dem Englerschen Viskosimeter (die russischen, englischen und amerikanischen Normen der Bewertung sind alle verschieden!).*) Da die richtige Wahl des im einzelnen Falle geeignetsten Schmiermittels wirtschaftlich von erheblicher Bedeutung ist, so sollte man bei gröfseren Bezügen stets die sorgfältigste Untersuchung und Prüfung vorhergehen lassen. — „Grundsätze für die Prüfung von Mineralschmierölen, von Mineralöl, Gasöl, Putzöl, Benzin und Paraffin" hat der Deutsche Verband f. d. Materialprüfungen der Technik zuletzt 1909 aufgestellt.

Da nicht selten Oele verschiedener Herkunft, die nach den vorgeschriebenen Prüfungen wesentlich gleiche Ergebnisse aufweisen, gleichwohl bei der praktischen Verwendung grofse Unterschiede zeigen und deshalb wirtschaftlich durchaus verschieden zu bewerten sind, so legt man neuerdings der praktischen Prüfung grofsen Wert bei. Hierzu sind Betriebsversuche von den Oelwerken Stern-Sonneborn sowie von der D. V. O. C. an grofsen und kleinen Betrieben angestellt worden. Vgl. die von der D. V. O. C. herausgegebene „Schmiertechnik" und den Bericht von Kefsler, Z. f. angew. Chemie 1910 S. 1697; ferner Z. d. V. d. I. 1909 S. 2128. — In anderer Weise dient dazu die Ossag-Oelprüfmaschine der O.S.S., Hamburg-Cöln. Indem sie die Reibungswerte von Maschinenölen im Vergleich zueinander selbsttätig verzeichnet, gibt sie wertvolle Anhaltspunkte zur wirtschaftlichen Be-

*) Näheres hierüber sowie auch über die gangbarsten Verfälschungen der Schmiermittel s. A. Künkler, Die Maschinenschmierung (die Schmiermittel und ihre Untersuchung). Mannheim 1893. — D. Holde, Vergleichende Schmieröl-Untersuchungen 1889/94. Berlin 1895. — D. Holde, Die Untersuchung der Schmiermittel. 3. Aufl. Berlin 1909. — Fr. Schreiber, Z. f. angew. Chemie 1905 S. 726.

Digitized by Google

wertung der Oele. Sie erlaubt auch die Beobachtung des „Verhaltens und der Veränderung der Zylinderöle in Gasen und Dämpfen". Vgl. die Vorträge von Wendt, u. a. im Berliner Bez.-Ver. dtsch. Ing., Z. d. V. d. I. 1911 S. 1530.

Besondere Bedingungen für die Lieferung von Mineralschmieröl (Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 4. Februar 1892, durch interne Bestimmungen wiederholt erweitert, zuletzt Juni 1910) bestimmen folgendes:*)

Das Mineralschmieröl soll zum Schmieren von Eisenbahnfahrzeugen, Dampfmaschinen und Werkzeugmaschinen Verwendung finden, als Sommer- und Winteröl geliefert werden und folgenden Bestimmungen genügen: Das spez. Gewicht soll bei 20° nicht unter 0,900 und nicht über 0,940 sein. Der Flüssigkeitsgrad (Zähflüssigkeit), bezogen auf Wasser bei 20° = 1, festgestellt mit geeichtem Englerschen Viskosimeter, soll bei den nachstehenden Wärmegraden zwischen den angegebenen Grenzen liegen:

Wärmegrade	20°	50°	Wärmegrade	20°	50°
Sommeröl, obere Grenze	60	10	Winteröl, obere Grenze	45	7,5
untere „	40	7	untere „	25	4,5

Flammpunkt: Im offenen Tiegel bis auf 160° erhitzt, soll das Sommeröl, bis auf 145° das Winteröl keine entflammbaren Dämpfe entweichen lassen. Kältepunkt: Das Winteröl soll bei — 20°, das Sommeröl bei — 5° noch fliefsend sein, d. h. es soll, einem gleichbleibenden Drucke von 50 mm Wassersäule ausgesetzt, in einem Glasröhrchen von 6 mm innerer Weite noch mindestens 10 mm hin steigen (auch hierfür genau vorgeschriebener Apparat). Ferner soll das Oel wasserfrei und frei von Mineralsäuren sein; es darf ferner organische Säuren höchstens 0,3 % (auf SO_3 berechnet) enthalten und nur schwachen Geruch besitzen. Es soll sich 1 R.-T. Oel in 40 R.-T. eines beglaubigten Petroleumbenzins von 0,70 spez. Gewicht vollkommen lösen lassen. Das Oel darf keine fremdartigen Beimengungen enthalten und selbst nach 24stündigem Stehen einen Niederschlag von höchstens 0,2 % bilden; auch darf es kein Trocknungsvermögen besitzen, d. h., in dünnen Lagen längere Zeit der Luft ausgesetzt, weder verharzen, noch zu einer firnisartigen Schicht eintrocknen.

Ebenso sind **besondere Bedingungen für die Lieferung von Putzöl, rohem und gereinigtem Rüböl, Stellwerköl, Rindstalg, Oel zur Gasbereitung, Petroleum** und **Spiritus** für die preufsischen Staatseisenbahnen, zuletzt März 1907, aufgestellt worden.

XI. Ledertreibriemen.

Die faſsähnlich gewachsene Haut wird durch Zurichten zur flachen Kerntafel ausgestreckt, deren zu Treibriemen benutzbarer Teil 1,2 bis 1,5 m lang und nahezu ebenso breit ist.

Der Wert und die Uebertragungskraft eines Riemens hängt, aufser von Herkunft, Rasse, Geschlecht, Alter usw. und Beschaffenheit des Tieres, besonders ab von der Gerbung und Zurichtung der Haut. Daher ist es geboten, sich über diese Verhältnisse genau zu unterrichten.

Riemen aus Wirbelbahnen (Rückgrat des Tieres, Längsachse) haben rechts und links fast gleiche Streckungsverhältnisse, laufen deshalb am geradesten und ruhigsten und sind somit für grofse Geschwindigkeiten (> 10 m/sk) zu empfehlen. Da hierbei der harte und wenige elastische Mittelrücken auf dem Scheitel der balligen Scheibe laufen

*) Zentralbl. Bauv. 1892 S. 87; als Sonderdruck zu beziehen von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 66.

Digitized by Google

muſs und aufserdem der Mittelrücken nicht schnurgerade, sondern etwas sichelförmig gewachsen ist, sind für derartige einfache Riemen mit > 25 m/sk Geschwindigkeiten mit Vorteil Riemscheiben zu verwenden, die in der Mitte auf etwa 50 mm Breite zur Aufnahme des Mittelrückens muldenartig vertieft sind (D. R.-P. von C. Otto Gehrckens).

Einfache Riemen kann man von Mittelstücken schwerster Häute bis rd. 1 m breit schneiden; breitere Riemen müssen auch der Breite nach aus zwei oder mehreren Häuten zusammengesetzt werden.

Solche Doppelriemen aus Mittelrücken lassen sich derartig versetzen, dafs ein geeigneter Streifen für den Scheitel der balligen Scheibe entsteht. Da jetzt 1 m breite und noch breitere Riemen, mit Geschwindigkeiten von 50 m/sk und darüber, angewendet und voraussichtlich Breite und Geschwindigkeit noch weiter erheblich gesteigert werden, ist es geboten, hierzu nur mit ganz besonderer Sorgfalt hergestellte Riemen zu verwenden.

Bei langsamem Lauf und nicht zu kleinen Scheiben kann man Riemen aus Seitenleder benutzen, weil unter diesen Bedingungen die verschiedenen Faserspannungen mehr Zeit haben, sich auszugleichen; diese Riemen dürfen aber in der Breite 200 mm nicht viel überschreiten, da sonst die Spannungen der beiden Seiten zu ungleich werden.

Bei Los- und Festscheiben benutzt man die schärfere Spannung der einen Seite, indem man sie beim Laufe auf der Losscheibe zunächst der Festscheibe legt, weil ein Riemen leicht auf die Festscheibe, aber schwer zurück auf die Losscheibe zu führen ist. Die sich einseitig streckenden Teile (Seiten und Flanken) finden vortreffliche Verwendung zu Halbkreuzriemen. Riemen aus quergeschnittener Bullenschulter, für landwirtschaftliche Maschinen wohlgeeignet, stellen sich sehr billig im Preise.

Aus der Dicke oder aus dem Gewicht eines Riemens allein läfst sich nicht auf seine Güte als Uebertragungsmittel schliefsen; letztere leidet sogar bei kleinen Scheibendurchmessern unter der Dicke. Die Dicke läfst sich durch übertriebene Schwellung, das Gewicht durch Vollstopfen der Poren mit Gerbmaterial vergröfsern, was ebenso verwerflich ist wie das Hineinbringen von Beschwerungsmitteln, wie Traubenzucker, Schwerspat u. a.

Nach C. Bach*) ist die Zugfestigkeit des Leders für die Beurteilung der Uebertragungsfähigkeit und des Wertes eines Riemens nicht entscheidend, sondern seine Elastizität. Die Verwendung und Behandlung des Riemens mufs derart sein, dafs seine Elastizität möglichst erhalten bleibt.

Der festeste Teil des Leders liegt etwa auf $^1/_3$ der Dicke von der Fleischseite aus. Auf der inneren Hälfte der Dicke ist der Angriff aber am größten. Aus diesem Grunde und weil auch die Haut so ihre natürlichen Biegungsverhältnisse beibehält, soll im allgemeinen die Fleischseite (und nicht die Haarseite) die Scheibenoberflächen berühren. Auch bei Doppelriemen läfst sich dies jetzt (nach D. R.-P. von C. Otto Gehrckens) erreichen.

Die Dehnung ist in einzelnen Streifen der Kernhaut aufserordentlich verschieden und selbst bei benachbarten Streifen an mehreren Stellen des Flankenstücks ungleich, was teilweise daher rührt, dafs beim

*) C. Bach, Die Maschinenelemente, 11. Aufl. (unter Riemenbetrieb); Stuttgart 1913. Ferner C. Bach, Elastizität von Treibriemen und Treibseilen. Z. d. V. d. I. 1887 S. 921 u. 945.

Digitized by Google

Zurichten zur flachen Kerntafel einzelne Teile gestreckt, andere ungestreckt gelassen werden. Die Herstellung gerader Treibriemen bedingt deshalb eine genaue Kenntnis der Haut und ihrer Streckungsverhältnisse in der Kerntafel.

Die Länge der einzelnen Bahnen eines Riemens beträgt, entsprechend der Länge der Kerntafel (s. oben), 1200 bis 1500 mm. Die Verbindungsstellen breiter Riemen werden (je nach der Beschaffenheit der zu verbindenden Enden) 200 bis 400 mm lang, so dafs jede Haut eine Baulänge von 1000 bis 1300 mm liefert.

Die Verbindung erfolgt am besten durch Leimen (Leim aus Flechsen mit Zusatz von Hausenblase), Abschrägen der Enden mittels Lederhobels. Zugfestigkeit der Verbindungsstellen 200 bis 300 kg/qcm. Auch für feuchte Räume hat man jetzt haltbaren Leim. Wenn derselbe auch Uebelstände besitzt, unterbleibt doch das den Riemen bedeutend schwächende Nähen jetzt fast immer.

Behandlung der Riemen. Reinigung möglichst monatlich, gründlich nach Jahresfrist durch Abbürsten sowie Abwaschen mit warmem Wasser (Leimstellen schonen!) und nachfolgendes Einfetten. Letzteres möge man aufserdem dann und wann wiederholen. Es geschieht mit etwas warmem Rindertalg, der aber keine harzigen Teile enthalten darf, weil solche die Bewegung der Fasern erschweren, statt sie wie Schmiermittel zu erleichtern.

Digitized by Google

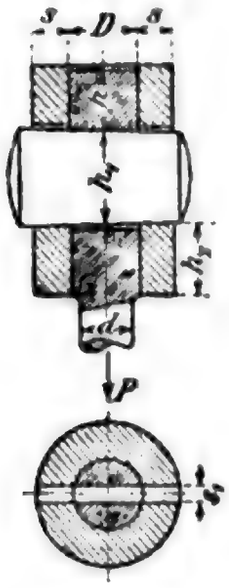
6. ABSCHNITT.
Maschinenteile.*)

I. Hülfsmittel zur Verbindung von Maschinenteilen.

A. Keile.

Allgemeines über die Keilkette und die Kräftezerlegung am Keil (S. 254). — Im folgenden sind die Kräfte ausgedrückt in kg, die Längen in cm und die zulässigen Spannungen in kg/qcm.

Abb. 1.



a. Querkeile.

1. Keile für ruhende Belastung.

Es wird bestimmt (Abb. 1)

der Durchm. d durch $P = k_z \frac{\pi d^2}{4}$,

„ „ D „ $P = k'_z \left(\frac{\pi D^2}{4} - s_1 D \right)$;

darin bedeutet:

k_z die zulässige Spannung im Stangenquerschnitte $^1/_4 \pi d^2$,

k'_z die zulässige Spannung in dem durch das Keilloch $s_1 D$ geschwächten Querschnitte des Stangenkopfes $^1/_4 \pi D^2 - s_1 D$.

Da im Stangenkopf die Verteilung der Spannungen nicht gleichmäfsig ist, so mufs $k'_z < k_z$ gewählt werden.

Man setze etwa $$k'_z = \frac{\pi}{4} k_z.$$

Mit dem üblichen Werte für die Keilstärke $s_1 = 0{,}25\, D$ folgt dann aus den beiden Gleichungen für P:

$$D \sim {}^4/_3\, d.$$

Die Pressung k in der Berührungsfläche $s_1 D$ zwischen Keil und Stange ergibt sich dabei aus

$$k_z \frac{\pi d^2}{4} = k s_1 D = k \frac{1}{4} D^2, \qquad \text{mit } k \sim 1{,}75\, k_z.$$

*) Die unter I, II aufser Lagerungen, IV, V u. VI behandelten Maschinenteile im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 11. Aufl. 1913, I. Bd., Alfred Kröner Verlag Leipzig, bis einschl. Riemen- und Seiltrieb; der Rest nach 10. Aufl. 1908.

Digitized by Google

Wird dieser Wert auch gegenüber der Hülse, die die Stange umschliefst, zugelassen, so folgt aus

$$2 k s s_1 = k D s_1 \qquad \text{für: } s = 0{,}5\, D.$$

Für die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung*) beanspruchten Keiles gilt

$$\frac{P}{2}\left(\frac{D}{2}+\frac{s}{2}-\frac{D}{4}\right) = k_b \frac{s_1 h_1^2}{6}, \quad \text{woraus mit}$$

$$s_1 = 0{,}25\, D, \qquad s = 0{,}5\, D, \qquad P = k_z \frac{\pi d^2}{4}:$$

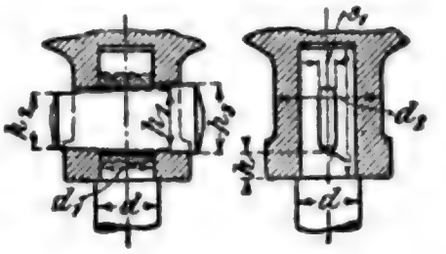
$$h_1 = d\sqrt{\frac{3\pi}{2}\frac{k_z}{k_b}} \text{ folgt.}$$

Wird, wie vielfach üblich, für die Stange Schweifs- oder Flufseisen, für den Keil Stahl gewählt, so wird beispielsweise für $k_z = 900$ kg/qcm und $k_b = 1350$ kg/qcm: $h_1 \sim 1{,}75\, d \sim 1{,}33\, D$.

Der Anzug des Keiles darf zu $^1/_{20}$ bis $^1/_{15}$ genommen werden. Die Abmessung h kann man für rechteckige Keile schätzen zu

$$h = 0{,}67 \text{ bis } 0{,}75\, h_1.$$

Abb. 2.

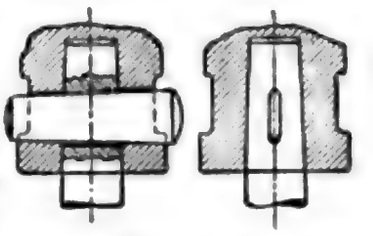


Die Höhe h_2 kann gleich h genommen werden, sofern die auf die Hülse einwirkenden [auf Ausscheren der beiden Stücke $s_1 h_2$ (Abb. 1 S. 736) gerichteten] Kräfte nicht eine gröfsere Abmessung erfordern. Die Hülse kann an dieser Stelle durch einen Ringwulst (Abb. 2) verstärkt werden.

2. Keile für wechselnde Belastung.

Um die Vorspannung durch das Anziehen des Keiles, die bereits im unbelasteten Zustande bei den **Spannungsverbindungen** vorhanden sein mufs, zu berücksichtigen, kann mit der 1,25 fachen Stangenkraft gerechnet werden.

Abb. 3.



Beispiel. Für die Verbindung nach Abb. 2 der Kolbenstange A einer Dampfmaschine mit dem Kreuzkopf (s. den betr. Abschn.) betrage die Kolbenstangenkraft $P = 10\,000$ kg, der Durchm. der Kolbenstange $d = 8{,}2$ cm. Kolbenstange, Kreuzkopf und Keil seien aus Flufsstahl.

Die ringförmige Anlagefläche der Stange d gegen die Hülse (Abb. 2) kann auch durch kegelige Gestaltung des Stangenkopfes ersetzt werden (Abb. 3).

Soll in der Ringfläche $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ die Spannung $k = 1000$ kg/qcm nicht überschritten werden, so mufs sein: $\frac{\pi}{4}(8{,}2^2 - d_1^2)\,1000 = 1{,}25 \cdot 10\,000$,

mithin $d_1 \sim 7$ cm.

*) Den Keil nur auf Scherfestigkeit zu berechnen, ist nicht richtig.

Digitized by Google

Für die Keildicke gilt, wenn zwischen Keil und Stange die gleiche Pressung*) zugelassen wird: $s_1 \cdot 7 \cdot 1000 = 1{,}25 \cdot 10000$, also $s_1 = 1{,}8$ cm.

Der Hülsendurchm. d_2 folgt aus $(d_2 - d_1)\, s_1 \cdot 1000 = 1{,}25 \cdot 10000 = s_1 d_1 \cdot 1000$

zu $$d_2 = 2\, d_1 = 14 \text{ cm}.$$

Dieses Mafs mufs in dem Verstärkungswulst vorhanden sein, wenn man die angenommenen Beanspruchungen in der Keilauflagefläche zulassen will, die Hülse nach ihrer sonstigen Beanspruchung durch die Kolbenstangenkraft aber dünnwandiger gehalten sein könnte. — Anderseits kann unter Beibehaltung dieses Mafses $d_2 = 14$ cm für den Hülsendurchmesser der Ringwulst zur Vergröfserung der Keilauflagefläche und zur Herabminderung des Wertes h benutzt werden.

Die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung beanspruchten Keiles ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 10000 \left(\frac{7{,}0 + 3{,}5}{2} - \frac{3{,}5}{2} \right) = 1000 \cdot \frac{1{,}8\, h_1^2}{6},$$

mithin $$h_1 = 8{,}6 \text{ cm}.$$

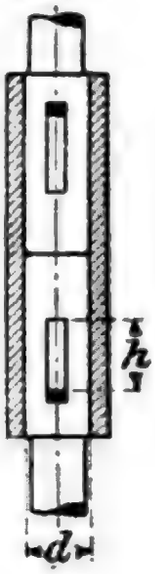
Für h ergibt sich nach 1. der Mittelwert $h = 0{,}7\, h_1 = 6$ cm.

Für die Keilneigung genügt 1 : 25; ferner ist

$$l = 6{,}0 + 8{,}6 + 6{,}0 = 20{,}6 \text{ cm}.$$

Abb. 4.

Abb. 5.



Scharfe, einspringende Ecken in den Keillöchern vermeiden. Zweckmäfsig abgerundete Schmalseiten (Abb. 4), wobei dann h kleiner ($= 0{,}4$ bis $0{,}5\, h_1$) sein darf; doch empfiehlt es sich, den Wert $h = 0{,}7\, h_1$ beizubehalten.

Bei Keilen, die **bei voller Belastung eingetrieben** (angezogen) werden, darf die Pressung in den Gleitflächen das zulässige Mafs nicht überschreiten (Sicherheit gegen Anfressen). Dies Mafs hängt ab von der Güte der Ausführung, vom Stoff, sowie davon, ob der Keil häufig gelöst wird.

Abb. 5: **Gestängeschlofs**, Verdopplung der Keilverbindung Abb. 1 S. 736; Stangenköpfe beim Anziehen der Keile gegeneinander gepreſst.

Weitere Keilverbindungen, Sicherungen (durch Vorstecker, Endschraube oder Quer-Druckschraube) finden sich bei Kurbeln, Schubstangen und Kreuzköpfen.

b. Längskeile.

Für Hohlkeile und Flachkeile (Abb. 6 u. 7) gilt etwa:

$$b = 0{,}8\sqrt{d} \text{ bis } \sqrt{d}; \qquad h = 0{,}4\sqrt{d}.$$

Für **Nutenkeile** (Abb. 8): $b = 0{,}8\sqrt{d}$ bis $\sqrt{d}$; $h = 0{,}5\sqrt{d}$.

Abb. 6.

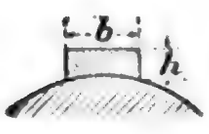


Abb. 7.

Abb. 8.

Abb. 9.

Für **Tangentialkeile** (Abb. 9): $b = 0{,}25\, d$; $h = 0{,}25\, b$,
worin d den Durchm. der Welle, b die Breite und h die Höhe der Keile in cm bedeutet.

*) Neuere preufs. 4/4 gekuppelte Güterzuglokomotiven (Heifsdampf) haben am Keil $k = 1600$ bis 1700 kg/qcm; $k_b = 2700$ kg/qcm; in der Stange $k_z = 1120$ kg/qcm.

Digitized by Google

Keile für übliche Wellen.*)

Durchmesser der Welle mm	Hohlkeil, Abb. 6		Flachkeil, Abb. 7		Nutenkeil, Abb. 8				Tangentialkeil, Abb. 9	
	b mm	*h* mm	*b* mm	*h* mm	*b* mm	*h* mm	*a* mm	*c* mm	*b* mm	*h* mm
20— 29	11	4	11	4	11	5	3	2	.	.
30— 39	13	5	13	5	13	6	4	2	.	.
40— 49	14	6	14	6	14	7	4	3	.	.
50— 64	16	6	16	6	16	8	5	3	.	.
65— 79	18	7	18	7	18	9	5	4	.	.
80— 89	21	8	21	8	21	10	6	4	.	.
90— 99	25	10	25	10	25	12	7	5	.	.
100—119	30	12	30	12	30	15	9	6	32	10
120—139	.	.	.	.	35	18	11	7	38	12
140—159	.	.	.	.	40	20	12	8	46	15
160—179	.	.	.	.	45	23	14	9	50	16
180—200	.	.	.	.	50	25	15	10	57	18

Für Wellen von 200 bis 980 mm Durchm. hat die Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg (für Nutenkeile und Tangentialkeile) eine Keiltafel aufgestellt.

Neben dem flachen Keil vielfach **Quadrat-** und **Rundkeil** (Abb. 10 u. 11).

Der Quadratkeil schwächt Welle und Nabe mehr als der Flachkeil, bietet aber gröfsere seitliche Anlageflächen und ist in sich widerstandsfähiger gegen Stauchen und Verbiegen. — Der Rundkeil verspannt Nabe und Welle radial und tangential, ebenso der die Welle mehr schonende **„Alfakeil“** von v. Bechtolsheim (Abb. 12). Für **Quadrat-** und **Rundkeile:** $a = 0{,}6\sqrt{d}$ bis $0{,}7\sqrt{d}$ in cm. Für **Alfakeile:** $a \sim 0{,}25\,d$.

Abb. 10.

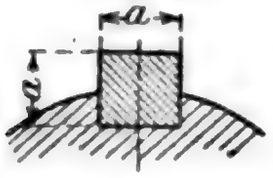


Abb. 11.

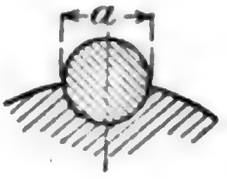
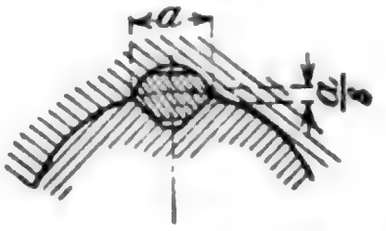


Abb. 12.



Die **Längskeile**, besonders als Rechteck, Quadrat und Rundkeil werden häufig **ohne Anzug** — Nut und Feder — verwendet.

Für schwere Räder, namentlich wenn der Drehsinn wechselt, besonders geeignet die Tangentialkeilanordnung (Abb. 13). Einen **Halbrundkeil**

Abb. 13.

*) Nach Angaben der Bamag-Dessau. — Die beim Eisenwerk Wülfel, bei Polysius, Dessau, und bei der Peniger Maschinenfabrik, Penig i. Sachsen, gebräuchlichen Maße weichen davon und unter sich um geringe Unterschiede ab. Näheres ist in den Preislisten der betr. Firmen zu vergleichen.

Digitized by Google

(Keil Woodruff), dessen Nut mit Hülfe eines besonderen Schlitzfräsers leicht und billig herstellbar ist, zeigen Abb. 14 u. 15. Die A.-G. Ludw. Loewe & Co., Berlin, fertigt diesen Keil nach ihren Normalien für Wellen von 10 bis 40 mm in Längen l von 13 bis 38 mm, Höhen h von 5.8 bis 16,7 mm und Breiten b von 3 bis 8 mm.

Abb. 14.

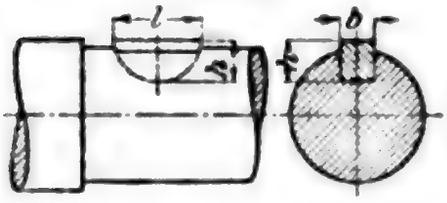


Abb. 16.

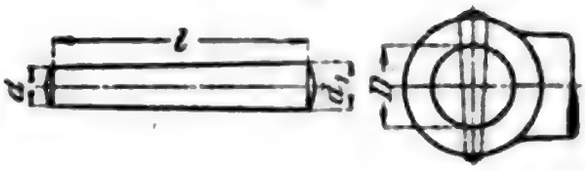


Abb. 15.

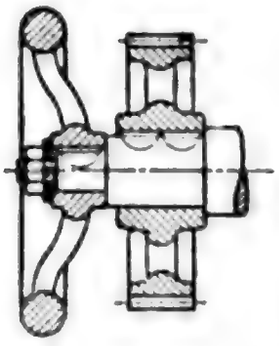


Abb. 17.

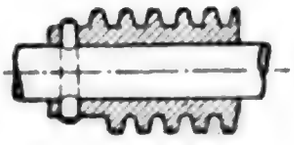
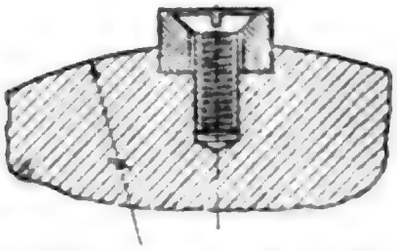


Abb. 18.



Zur Befestigung leichter Kurbeln und Getriebe (Abb. 16 u. 17) auf ihren Wellen dienen **konische Stifte**, für die die A.-G. Ludw. Loewe & Co. in Berlin Normalien angegeben hat.

Abb. 18: Mit der Welle durch Schraube verbundener Flachkeil für solche Fälle, wo sich der auf der Welle sitzende Teil verschiebt.

B. Schrauben.

Verzeichnung der Projektion der zylindrischen **Schraubenlinie** S. 117. Statt durch einen Punkt (S. 117 unter 1.) kann die Schraubenlinie auch entstehen durch Aufwickeln der Ebene vom Steigungswinkel α auf den Mantel des geraden Kreiszylinders; bildet hierbei der eine Schenkel von α einen Kreis, rechtwinklig zur Zylinderachse, so beschreibt der andere die Schraubenlinie.

Ist der Halbmesser des Zylinders $= r$, so ist die Ganghöhe (Steigung) der Schraubenlinie $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$.

a. Gewindearten.

1. S. I.-Gewinde*) (System International) (Abb. 19), vereinbart Oktober 1898 in Zürich von deutschen, schweizerischen, französischen und belgischen Ingenieuren. Dem Gewindequerschnitte liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel 60°) zugrunde; an der Spitze ist

*) Neuer Bestrebungen für Vereinheitlichung des Schraubengewindes: Schlesinger Mitt. Forschungsarb., hrsg. v. V. d. I., Heft 142 und Z. d. V. d. I. 1913 S. 1840.

Digitized by Google

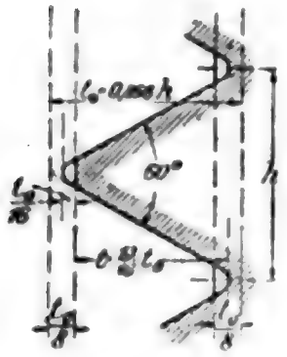
die Dreieckhöhe $t_0 = 0{,}866\,h$ um $^1/_8\,t_0$ durch Abflachung, im Grunde durch Ausrundung um $^1/_{16}\,t_0$ verringert, so dafs die wirkliche Gangtiefe einschl. des Spielraumes $t = {}^{13}/_{16}\,t_0$ beträgt (Tafel S. 743).

2. Whitworthsches Gewinde (Abb. 20). Dem Gewindequerschnitte liegt ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel 55^0 zugrunde; innere und äufsere Abrundung um $^1/_6\,t_0$ mit dem Halbmesser $0{,}143\,t_0$. Ist d der äufsere Durchm. des Gewindes und d_1 der Kerndurchm., so ist die Ganghöhe $h = n\,d$ gewählt, wobei für $d = {}^1/_4$ bis 6 Z. engl. der Zahlenwert n sich von $^1/_5$ bis $^1/_{15}$ ändert. Da

$$t_0 = {}^1/_2\,h \operatorname{ctg} 27{}^1/_2{}^0 = 0{,}96049\,h \quad \text{und} \quad t = {}^2/_3\,t_0 = 0{,}64033\,h,$$

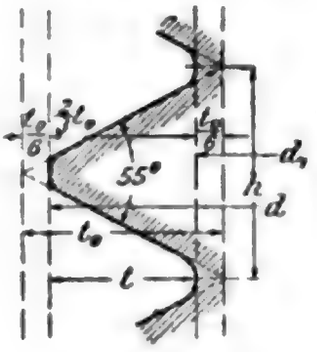
so ist $$d_1 = d - 2t = d - 1{,}28065\,h = d\,(1 - 1{,}28065\,n).$$

Abb. 19.



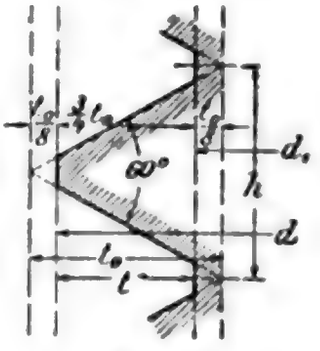
S. I.
(International)

Abb. 20.



Whitworth.
(Englisch)

Abb. 21.



Sellers.
(Amerikanisch)

Tafeln S. 743 bis 747. In manchen (süddeutschen) Werken wird das Whitworth-Gewinde geändert angewendet, so dafs ihm nur die Ganghöhen h entlehnt sind, während die Durchm. d in Stufen von 3 mm einander folgen; also: $d = 12, 15, 18, 21, 24$ mm, usw.

Feingewinde. Für Mutterschrauben mit Feingewinde wird empfohlen:

bei $d =$	2	$2^1/_4$—3	$3^1/_4$—$3^3/_4$	4—$4^1/_2$	$4^3/_4$—$5^1/_4$	$5^1/_2$—8,	über 8 Z. engl.
Gänge auf 1 Z. engl.	7	6	5	$4^1/_2$	4	$3^1/_2$	3.

3. Sellersches Gewinde (Abb. 21). Dem Gewindequerschnitte liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel 60^0) zugrunde mit Abflachung der Spitze wie des Grundes je um $^1/_8$ der Dreieckhöhe t_0 (Tafel S. 748). Die Ganghöhe ist $h = n\,d$, wobei für $d = {}^1/_8$ bis 6 engl. Z. der Zahlenwert n sich von $^1/_5$ bis $^2/_{37}$ ändert. Da

$$t_0 = {}^1/_2\,h \operatorname{ctg} 30^0 = 0{,}86603\,h \quad \text{und} \quad t = {}^3/_4\,t_0 = 0{,}64952\,h,$$

so ist $$d_1 = d - 2t = d - 1{,}29904\,h = d\,(1 - 1{,}29904\,n).$$

4. Löwenherzgewinde für die Schrauben der Feinmechanik von 1 bis 10 mm (Abb. 22 S. 742). Die Ganghöhe h ist gleich t_0; dem Gewindequerschnitt liegt das in das Quadrat $h\,t_0$ eingezeichnete gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenwinkel $53^0\,8'$ zugrunde mit Ab-

Digitized by Google

flachung der Spitze wie des Grundes um je $^1/_8$ der Dreieckhöhe t_0. (Wie bei Sellers.) Es wird also

$t = 0{,}75\, t_0 = 0{,}75\, h$ und $d_1 = d - 1{,}5\, t_0 = d - 1{,}5\, h$ (Tafel S. 749).

5. Flachgängiges, trapezförmiges und **rundes Gewinde** (für Bewegungs- und Preſsschrauben, Abb. 23 bis 26). Man hat hier bei der Bestimmung von d und d_1 ziemlich freie Hand und braucht sich

Abb. 22.

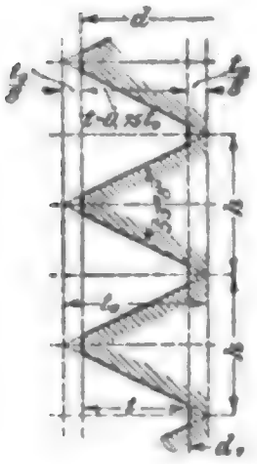


Abb. 23.

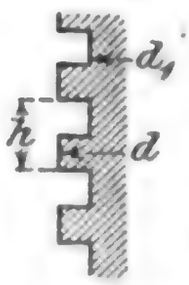


Abb. 24.

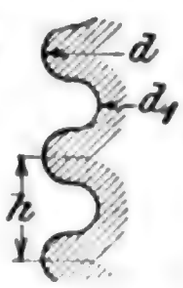
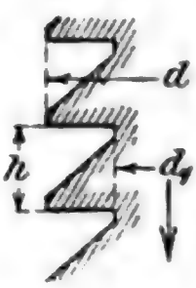


Abb. 25.

Abb. 26.



im allgemeinen an kein System zu halten, wie bei den scharfgängigen Schrauben. Gewindetiefe $\sim \frac{d_1}{8}$.

Trapezförmiger Gewindequerschnitt (Abb. 25 u. 26) wird gewählt, wenn der Druck nur in einer Richtung auf die Schraube wirkt (Stell- und Preſsschrauben).

b. Berechnung der Schrauben.

Es bezeichne

Q die in der Richtung der Schraubenachse wirkende Kraft in kg,
k_z die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
d_1 den Kerndurchm. der Schraube in cm,
d den äuſseren Gewindedurchm. (Bolzendurchm.) in cm.

Mutterschrauben*)

der Akt.-Ges. für Stahl- und Eisenindustrie „Archimedes" in Berlin u. Breslau.

Mutterhöhe = Bolzendurchmesser.

Bolzen-durchm. mm	Schlüssel-weite mm	Kopfhöhe 4-kantig mm	Kopfhöhe 6-kantig mm	Bolzen-durchm. mm	Schlüssel-weite mm	Kopfhöhe 4-kantig mm	Kopfhöhe 6-kantig mm
5	9,5	3	3,5	15	25	10,5	12
6	11	4	5	16	27	12	13,5
7	12	4,5	6	18	29,5	13	14
8	14	5,5	7	19	32	14	15
9	15,5	6	7,5	20	32	15	16
10	17	6,5	8	22	36,5	16	17
11	19	7,5	9	25	41,5	18	19
12	20,5	8	9,5	29	47	21	23
13	22	9	10,5	32	52	23	23
14	24	10	11,5				

*) Ueblich bei den meisten deutschen Schraubenfabriken (sogen. Eisengewindeschrauben).

Digitized by Google

S. I.-Gewinde.

(Gewindequerschnitt Abb. 19 auf S. 741.)

Aeufserer Gewinde-Durchmesser d	Kern-durch-messer d_1	Gang-höhe h	Gang-tiefe t	Schlüssel-weite s_0	Aeufserer Gewinde-Durchmesser d	Kern-durch-messer d_1	Gang-höhe h	Gang-tiefe t	Schlüssel-weite s_0
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
6	4,59	1	0,705	12	33	28,08	3,5	2,46	50
7	5,59	1	0,705	13	36	30,37	4	2,815	54
8	6,24	1,25	0,88	15	39	33,37	4	2,815	58
9	7,24	1,25	0,88	16	42	35,67	4,5	3,165	63
10	7,89	1,5	1,055	18	45	38,67	4,5	3,165	67
11	8,89	1,5	1,055	19	48	40,96	5	3,52	71
12	9,54	1,75	1,23	21	52	44,96	5	3,52	77
14	11,19	2	1,405	23	56	48,26	5,5	3,87	82
16	13,19	2	1,405	26	60	52,26	5,5	3,87	88
18	14,48	2,5	1,76	29	64	55,56	6	4,22	94
20	16,48	2,5	1,76	32	68	59,56	6	4,22	100
22	18,48	2,5	1,76	35	72	62,85	6,5	4,575	105
24	19,78	3	2,11	38	76	66,85	6,5	4,575	110
27	22,78	3	2,11	42	80	70,15	7	4,925	116
30	25,08	3,5	2,46	46					

Gewichte schweifseiserner Muttern, Köpfe, Unterlegscheiben und Bolzen (Whitworthsches Gewinde).

Gewinde-Durchm.	Gewicht der Mutter	d. sechseckigen Kopfes	des quadrat. Kopfes	d. Unterlegscheibe	von 100 mm Bolzen	Gewinde-Durchm.	Gewicht der Mutter	d. sechseckigen Kopfes	des quadrat. Kopfes	d. Unterlegscheibe	von 100 mm Bolzen
Z. engl.	kg	kg	kg	kg	kg	Z. engl.	kg	kg	kg	kg	kg
1/4	0,005	0,005	0,005	0,003	0,025						
5/16	0,011	0,010	0,012	0,004	0,039	2 1/4	1,788	1,966	2,227	0,487	2,001
3/8	0,020	0,018	0,020	0,007	0,056	2 1/2	2,435	2,686	3,101	0,585	2,470
7/16	0,026	0,024	0,028	0,009	0,076	2 3/4	3,194	3,512	4,055	0,801	2,989
1/2	0,036	0,032	0,037	0,013	0,099	3	3,606	4,491	5,186	1,118	3,557
5/8	0,058	0,054	0,063	0,018	0,154	3 1/4	5,150	5,736	6,624	1,311	4,175
3/4	0,105	0,096	0,110	0,036	0,233	3 1/2	6,229	7,078	8,173	1,646	4,842
7/8	0,137	0,131	0,152	0,049	0,302	3 3/4	7,525	8,619	9,952	1,970	5,558
1	0,187	0,195	0,225	0,058	0,395	4	9,318	10,51	12,14	2,403	6,324
1 1/8	0,274	0,274	0,316	0,062	0,500	4 1/4	10,83	12,49	14,43	2,879	7,139
1 1/4	0,367	0,372	0,429	0,074	0,618	4 1/2	12,72	14,71	16,99	3,454	8,004
1 3/8	0,467	0,473	0,545	0,113	0,747	4 3/4	14,99	17,38	20,07	3,871	8,516
1 1/2	0,572	0,614	0,692	0,170	0,889	5	17,32	20,13	23,25	4,467	9,881
1 5/8	0,736	0,778	0,898	0,196	1,043	5 1/4	19,87	23,16	26,74	5,088	10,90
1 3/4	0,877	0,970	1,120	0,247	1,210	5 1/2	22,90	26,75	30,88	5,954	11,96
1 7/8	1,112	1,191	1,375	0,274	1,389	5 3/4	25,67	30,09	34,75	6,773	13,07
2	1,294	1,405	1,618	0,344	1,581	6	28,98	34,03	39,29	7,664	14,23

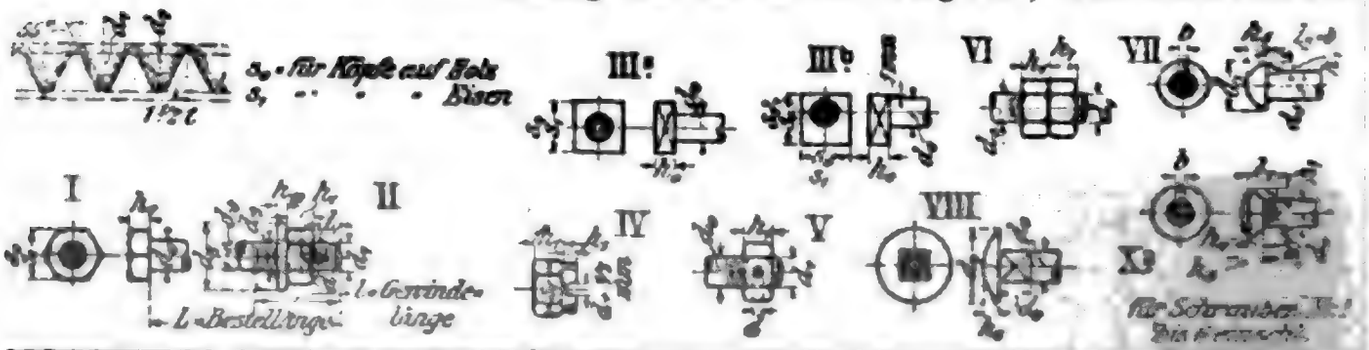
Anmerkung. Diese Tafel ist berechnet nach den Abmessungen von Mutter, Kopf und Unterlegscheibe (S. 746) mit spez. Gewicht des Schweifseisens = 7,8 (Flufseisen 7,85). (Der in der Mutter und der Unterlegscheibe steckende Teil der Schraube ist in den Gewichten der vorsteh. Tafel nicht enthalten, sondern als Bolzenlänge mitzurechnen.)

Digitized by Google

Sohraubentafel (Whit-

(umfassend Schrauben, Muttern.

Gültig für die Güterwagen*) des deutschen



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Abb.							II, IV, V, VI	IV	I, III a. b, IX	X a,	X b	VII	VIII	IX	VII	VIII

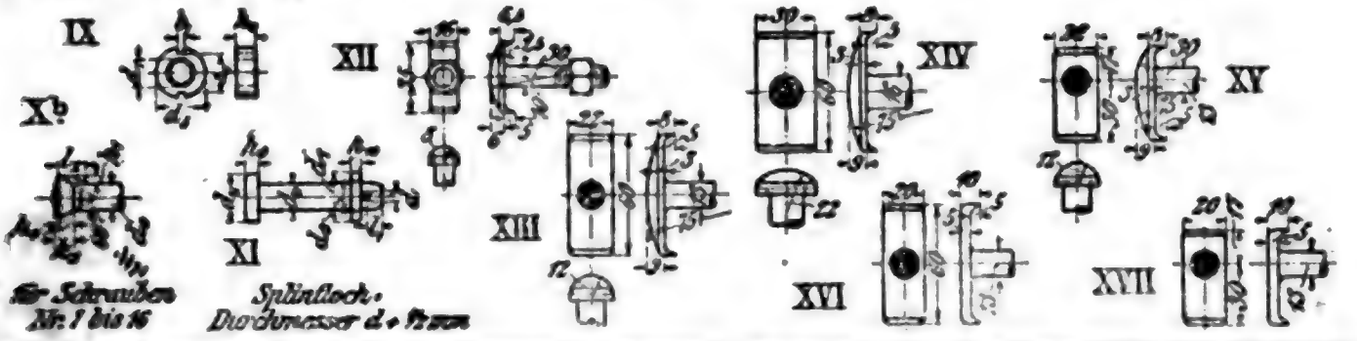
Schrauben

Nr. der Schrauben	Gewinde-durchmesser in den Spitzen d_1		Kerndurchmesser d_2	Zahl der Gänge auf 1 engl. Zoll z	Durchm. im Schaft d_0		Höhe der Mutter und Gegenmutter h_1	Höhe der Krone der Kronenmutter h_2	Höhe des sechs- oder vierekigen Kopfes und der runden Mutter h_0	Höhe des versenkten Kopfes im ganzen h_3	Höhe des versenkten Kopfes im Konus h_4	Höhe des halbrunden Kopfes auf Eisen h_5	Höhe des halbrunden Kopfes auf Holz h_6	Durchmesser der runden Mutter d_8	Durchm. des halbrunden Kopfes auf Eisen d_3	Durchm. des halbrunden Kopfes auf Holz d_4
	engl. Zoll	mm	mm		gedreht**) mm	ungedreht***) mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
2	1/4	6,35	4,72	20	7	6,5	6	—	5	3	2	4,5	4	16	13	18
3	3/8	9,52	7,49	16	10	10	9	—	7	5	4	6	6	23	18	25
4	1/2	12,70	9,99	12	13	13	13	5	9	8	6	9	8	29	23	32
5	5/8	15,87	12,92	11	16	16	16	6	12	8	6	10	9	35	28	40
6	3/4	19,05	15,80	10	20	19	19	7	14	9	7	13	10	42	32	50
7	7/8	22,22	18,61	9	23	23	22	8	16	14	11	14	—	49	38	55
8	1	25,40	21,33	8	26	26	25	9	18	16	13	—	—	55	—	—
9	1 1/8	28,57	23,93	7	30	29	28	10	20	18	14	—	—	60	—	—
10	1 1/4	31,75	27,10	7	33	32	32	11	22	20	16	—	—	65	—	—
11	1 3/8	34,92	29,50	6	36	35	35	—	24	22	18	—	—	70	—	—
12	1 1/2	38,10	32,68	6	40	39	38	—	26	24	20	—	—	75	—	—
13	1 5/8	41,27	34,77	5	43	42	41	—	29	26	21	—	—	80	—	—
14	1 3/4	44,45	37,94	5	46	45	44	—	31	28	23	—	—	85	—	—
15	1 7/8	47,62	40,40	4 1/2	50	48	48	—	34	29	24	—	—	90	—	—
16	2	50,80	43,57	4 1/2	53	51	51	—	36	30	25	—	—	95	—	—

*) Es wird z. Z. (Frühjahr 1914) von Ausschüssen der Verwaltungen geprüft, ob die
**) Schrauben, deren Gewinde auf der Drehbank geschnitten wird, sind am Ende der
***) Diese Zahlen gelten als Höchstmaße. Mindestmaße hierfür sind die Gewinde-

Digitized by Google

worthsches Gewinde)
Scheiben, Bolzen und Splinte).
Staatsbahnwagenverbandes seit November 1913.



18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
I, III a u. b IX	I, II, III a u. b IV	IX	VII, X a u. b	X a u. b	VII, X a u. b	XI			XI	II	II, XI		II, V, XI	II, XI	

Schlüsselweite des vier- u. sechseckigen Kopfes		Breite des Schlitzes der runden Mutter	Nasen			Bolzen			Unterlegscheiben				Splinte		Nr. der Schrauben
						Durchm.			Durchm.						
u. der runden Mutter auf Holz	und der Mutter auf Eisen		Höhe	Länge	Breite	des Schaftes	des Kopfes	Höhe des Kopfes	für gedrehte Bolzen	für Schraubenmuttern	Lochweite	Stärke der Unterlegscheiben	Stärke	Entfernung d. Splintloches vom Ende des Bolzens	
s_0	s_1	b_1	h_7	l_2	b	d_0	d_6	h_9	d_7	d_8	d_9	h_{10}	d	l_1	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
14	11	2	2	7	3	7	15	4	15	16	8	3	2	4	2
20	17	3	3	9	4	10	16	5	16	23	11,5	3	3	6	3
26	22	4	4	11	5	13	22	6	22	29	14,5	4	4	8	4
32	27	5	5	13	6	16	26	7	26	35	17,5	4	5	8	5
40	32	6	5	15	7	20	32	8	32	42	21	5	6	10	6
45	$36^1/_2$	7	6	17	8	23	36	9	36	49	24,5	5	7	10	7
—	41	8	6	20	9	26	40	10	40	55	27,5	6	8	10	8
—	46	9	—	—	—	30	44	10	44	60	31	6	9	12	9
—	51	10	—	—	—	33	48	11	48	65	34	7	10	12	10
—	56	11	—	—	—	36	52	11	52	70	37	7	11	12	11
—	61	12	—	—	—	40	56	12	56	75	41	8	12	14	12
—	65	12	—	—	—	43	60	12	60	80	44	8	12	14	13
—	70	12	—	—	—	46	64	13	64	85	47	9	12	14	14
—	75	12	—	—	—	50	68	13	68	90	51	9	12	16	15
—	79	12	—	—	—	53	70	14	70	95	54	10	12	16	16

Tafel auch für Personenwagen und Lokomotiven gelten soll.
Gewindes mit einer runden, der Gewindetiefe entsprechenden Eindrehung zu versehen.
durchmesser in den Spitzen (ausschl. Nr. 6).

Digitized by Google

Whitworthsches Gewinde.

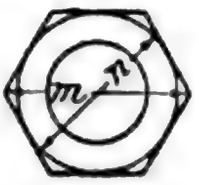
(Gewindequerschnitt Abb. 20 auf S. 741.)

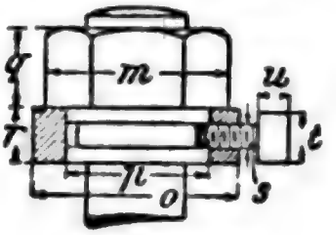
Aeußerer Durchmesser des Gewindes d		Kern- Durchmesser d_1	Kern- Querschnitt $\frac{\pi d_1^2}{4}$	Anzahl der Gewindegänge auf einen engl. Z.	Anzahl der Gewindegänge auf die Länge d	Höhe der Mutter, abgerundet h_1	Höhe des Kopfes, abgerundet h_0	Schlüsselweite, abgerundet s_0	$Q = \frac{1}{4}\pi d_1^2 k_z$, wenn (in kg/qcm) $k_z = 480$	$k_z = 600$
engl. Z.	mm	mm	qcm	engl. Z.	d	mm	mm	mm	kg	kg
$^1/_4$	6,35	4,72	0,175	20	5	6	4	13	85	105*)
$^5/_{16}$	7,94	6,13	0,295	18	$5^5/_8$	8	6	16	140	175*)
$^3/_8$	9,52	7,49	0,441	16	6	10	7	19	210	265*)
$^7/_{16}$	11,11	8,79	0,607	14	$6^1/_8$	11	8	21	290	365*)
$^1/_2$	12,70	9,99	0,784	12	6	13	9	23	375	470*)
$^5/_8$	15,87	12,92	1,311	11	$6^7/_8$	16	11	27	630	785
$^3/_4$	19,05	15,80	1,961	10	$7^1/_2$	19	13	33	940	1175
$^7/_8$	22,22	18,61	2,720	9	$7^7/_8$	22	15	36	1305	1630
1	25,40	21,33	3,573	8	8	25	18	40	1715	2145
$1^1/_8$	28,57	23,93	4,498	7	$7^7/_8$	29	20	45	2160	2700
$1^1/_4$	31,75	27,10	5,768	7	$8^3/_4$	32	22	50	2770	3460
$1^3/_8$	34,92	29,50	6,835	6	$8^1/_4$	35	24	54	3280	4100
$1^1/_2$	38,10	32,68	8,388	6	9	38	27	58	4030	5030
$1^5/_8$	41,27	34,77	9,495	5	$8^1/_8$	41	29	63	4560	5700
$1^3/_4$	44,45	37,94	11,31	5	$8^3/_4$	44	32	67	5430	6780
$1^7/_8$	47,62	40,40	12,82	$4^1/_2$	$8^7/_{16}$	48	34	72	6150	7690
2	50,80	43,57	14,91	$4^1/_2$	9	51	36	76	7160	8950
$2^1/_4$	57,15	49,02	18,87	4	9	57	40	85	9060	11320
$2^1/_2$	63,50	55,37	24,08	4	10	64	45	94	11560	14450
$2^3/_4$	69,85	60,55	28,80	$3^1/_2$	$9^5/_8$	70	49	103	13820	17280
3	76,20	66,90	35,15	$3^1/_2$	$10^1/_2$	76	53	112	16870	21090
$3^1/_4$	82,55	72,57	41,36	$3^1/_4$	$10^9/_{16}$	83	58	121	19850	24820
$3^1/_2$	88,90	78,92	48,92	$3^1/_4$	$11^3/_8$	89	62	130	23480	29350
$3^3/_4$	95,25	84,40	55,95	3	$11^1/_4$	95	67	138	26860	33570
4	101,60	90,75	64,68	3	12	102	71	147	31050	38810
$4^1/_4$	107,95	96,65	73,37	$2^7/_8$	$12^7/_{32}$	108	76	156	35220	44020
$4^1/_2$	114,30	102,98	83,29	$2^7/_8$	$12^{15}/_{16}$	114	80	165	39980	49970
$4^3/_4$	120,65	108,84	93,04	$2^3/_4$	$13^1/_{16}$	121	85	174	44660	55820
5	127,00	115,19	104,2	$2^3/_4$	$13^3/_4$	127	89	183	50020	62530
$5^1/_4$	133,35	120,96	114,9	$2^5/_8$	$13^{25}/_{32}$	133	93	192	55159	68940
$5^1/_2$	139,70	127,31	127,3	$2^5/_8$	$14^7/_{16}$	140	98	201	61102	76378
$5^3/_4$	146,05	133,05	139,0	$2^1/_2$	$14^3/_8$	146	102	209	66740	83420
6	152,40	139,39	152,6	$2^1/_2$	15	152	106	218	73250	91560

Schlüsselweite $s_0 = 5 + 1{,}4\,d$; Unterlegscheibe Durchm. $= 1{,}3\,s_0$, Dicke $= 0{,}1\,s_0$.
Schraubenabmessungen der Firma „Archimedes" S. 742.

*) Q ist (S. 749) für **reine Zugbeanspruchung** berechnet. — Bei Beanspruchung auf Drehung, z. B. durch Nachziehen im Betriebe, müssen die Werte von Q (S. 749) u. Umst. auf weniger als die Hälfte herabgesetzt werden. — Besondere Vorsicht bei den kleinen Durchm. bis etwa $^3/_4$ Z. (Bach, 11. Aufl. S. 152 u. 153.)

Schrauben mit Pennscher Sicherung [für Schiffsmaschinen]. (Whitworthsches Gewinde.)*)





Äußerer Durchmesser des Gewindes	Schraubenköpfe, 6-eckig, quadratisch oder rund		Schraubenköpfe, rund, eingelassen		Mutter						Stellschraube		
	Flachkant oder Durchmesser	Höhe	Durchmesser	Höhe									
d					*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*
engl. Z	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
3/4	31	14	28	13	31	27	35	26	12	12	5	10	8
7/8	35	16	32	15	36	31	40	29	15	12	5	10	8
1	40	18	37	17	40	35	46	33	18	12	5	10	8
1 1/8	45	20	41	19	46	40	50	37	20	13	5	10	8
1 1/4	49	22	46	21	52	45	57	42	23	13	5	10	8
1 3/8	54	24	50	23	57	49	62	46	26	13	5	10	8
1 1/2	58	26	55	25	62	54	68	50	27	15	6	13	10
1 5/8	63	28	59	27	67	58	73	54	30	15	6	13	10
1 3/4	67	30	64	29	73	63	79	59	33	15	6	13	10
1 7/8	72	32	68	31	77	67	85	63	33	18	8	16	11
2	76	34	73	33	83	72	90	68	36	18	8	16	11
2 1/4	85	38	82	37	93	81	101	77	42	18	8	16	11
2 1/2	94	42	91	41	104	90	112	86	48	18	8	16	11
2 3/4	103	46	100	45	114	99	123	95	50	21	10	20	13
3	112	50	109	49	125	108	134	104	55	21	10	20	13
3 1/4	121	54	118	53	135	117	145	113	60	21	10	20	13
3 1/2	130	58	127	57	145	126	156	122	61	25	11	22	14
3 3/4	139	63	136	61	156	135	166	131	66	25	11	22	14
4	148	68	145	65	166	144	177	140	71	25	11	22	14
4 1/4	157	73	154	69	177	153	188	149	73	28	13	24	16
4 1/2	166	78	162	73	187	162	200	158	78	28	13	24	16
4 3/4	175	83	170	77	197	171	210	167	83	28	13	24	16
5	184	88	178	81	207	179	220	175	84	32	14	28	17
5 1/4	193	93	186	85	216	187	230	183	89	32	14	28	17
5 1/2	202	98	194	89	225	195	240	191	90	36	16	31	19
5 3/4	211	103	202	92	234	203	250	199	95	36	16	31	19
6	220	108	210	95	244	211	260	207	98	38	16	31	19

*) Die Abmessungen der Schrauben verschiedener Werften weichen voneinander ab; die Werte der Tafel sind als **Mindestmaße** für Köpfe, Muttern und Stellschrauben anzusehen; besonders werden die Stellschrauben und entspr. die Unterlegringe häufig kräftiger ausgeführt.

Digitized by Google

Sellersches Gewinde.

Aeufserer Gewinde-Durchm. d	Ganghöhe h	Zahlenwert n	Aeufserer Gewinde-Durchm. d	Ganghöhe h	Zahlenwert n	Aeufserer Gewinde-Durchm. d	Ganghöhe h	Zahlenwert n
engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)	engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)	engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)
1/8	0,0250	0,2000	1 1/8	0,1429	0,1270	3 1/4	0,2857	0,0879
9/16	0,0417	0,2222	1 1/4	0,1429	0,1143	3 1/2	0,3077	0,0879
1/4	0,0500	0,2000	1 3/8	0,1667	0,1212	3 3/4	0,3333	0,0889
5/16	0,0556	0,1778	1 1/2	0,1667	0,1111	4	0,3333	0,0833
3/8	0,0625	0,1667	1 5/8	0,1818	0,1119	4 1/4	0,3478	0,0818
7/16	0,0714	0,1633	1 3/4	0,2000	0,1143	4 1/2	0,3636	0,0808
1/2	0,0769	0,1538	1 7/8	0,2000	0,1067	4 3/4	0,3810	0,0802
9/16	0,0833	0,1481	2	0,2222	0,1111	5	0,4000	0,0800
5/8	0,0909	0,1455	2 1/4	0,2222	0,0988	5 1/4	0,4000	0,0762
3/4	0,1000	0,1333	2 1/2	0,2500	0,1000	5 1/2	0,4211	0,0766
7/8	0,1111	0,1270	2 3/4	0,2500	0,0909	5 3/4	0,4211	0,0732
1	0,1250	0,1250	3	0,2857	0,0952	6	0,4444	0,0741

Gewindequerschn. Abb. 21 auf S. 741; Bedeutung von n s. Text unter S. S. 741.

Gewinde für Gasrohre.*)

Vorgeschlagen vom Vereine deutscher Ingenieure, vom Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner, vom Vereine deutscher Zentralheizungsindustrieller und vom Verbande deutscher Röhrenwerke, 1903.

Lichter Rohrdurchmesser D		Aeufserer Rohr- und Gewindedurchm. d	Kerndurchmesser d_1	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.	Lichter Rohrdurchmesser D		Aeufserer Rohr- und Gewindedurchm. d	Kerndurchmesser d_1	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.
engl Z.	mm	mm	mm		engl. Z.	mm	mm	mm	
1/4	6,35	13	11,3	19	1 1/2	38,10	48	45	11
3/8	9,52	16,5	14,8	19	1 3/4	44,45	52	49	11
1/2	12,70	20,5	18,2	14	2	50,80	59	56	11
5/8	15,87	23	20,7	14	2 1/2	63,50	76	73	11
3/4	19,05	26,5	24,2	14	3	76,20	89	86	11
1	25,40	33	30	11	3 1/2	88,90	101,5	98,5	11
1 1/4	31,75	42	39	11	4	101,60	114	111	11

*) Journ. Gasb.-Wasserv. 1903 S. 693 u. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1236. Das unabänderliche Mafs des Rohres ist sein äufserer Durchm. — Verschiedenheiten der Wandstärken werden durch Aenderung des inneren Durchm. herbeigeführt. Die Bezeichnung nach der lichten Weite in Zoll engl. ist also nur Handelsbezeichnung einer Rohrsorte. Das äufsere Mafs des (Whitworth)-Gewindes ist gleich dem äufseren Rohrdurchm.

Die Internationale Kommission für Vereinheitlichung der Gasrohrgewinde hat im November 1913 zu Paris neue Vorschläge aufgestellt. Die endgültige Festsetzung der neuen Normalien geschieht voraussichtlich erst Ende 1914 durch einen in Paris gewählten Ausschufs.

Digitized by Google

Löwenherzgewinde.

Gewindequerschnitt Abb. 22 S. 742.

Aeufserer Gewindedurchm. d mm	Kerndurchm. d_1 mm	Ganghöhe h mm	Aeufserer Gewindedurchm. d mm	Kerndurchm. d_1 mm	Ganghöhe h mm	Aeufserer Gewindedurchm. d mm	Kerndurchm. d_1 mm	Ganghöhe h mm
1	0,625	0,25	2,6	1,925	0,45	5,5	4,15	0,9
1,2	0,825	0,25	3	2,25	0,5	6	4,5	1
1,4	0,95	0,3	3,5	2,6	0,6	7	5,35	1,1
1,7	1,175	0,35	4	2,95	0,7	8	6,2	1,2
2	1,4	0,4	4,5	3,375	0,75	9	7,05	1,3
2,3	1,7	0,4	5	3,8	0,8	10	7,9	1,4

1. Der Kern wird nur auf Zug (oder Druck) beansprucht.

Findet statt bei Schrauben, die ohne ihre Last angezogen werden. Hierfür ist zulässig

$$Q = {}^1/_4 \pi d_1^2 k_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für die üblichen schmiedeisernen Schrauben [Voraussetzung Belastungsweise II (S. 502 u. 503)] sei: $k_z = 480$ kg/qcm.

Werden die Schrauben auf der Drehbank oder mittels zweckmäfsigen, scharfen Schneidzeuges hergestellt, so dafs der Stoff gesund bleibt, so darf für Schmiedeisen gewählt werden: $k_z = 600$ kg/qcm; für Stahl: $k_z = 640$ kg/qcm oder $k_z = 800$ kg/qcm.

Für schmiedeiserne Schrauben mittlerer Stärke ($d = 1{,}2$ bis $3{,}0$ cm) ergibt sich mit $k_z = 480$ oder 600 etwa

$$Q = 240\, d^2 \quad \text{oder} \quad Q = 300\, d^2.$$

Die Höhe h_1 der Mutter ergibt sich unter Berücksichtigung der im Gewinde auftretenden Biegungs- und Scherspannungen, wenn Bolzen und Mutter aus gleichem Stoffe sind, zu etwa $h_1 = d$; für die Höhe h_0 des Kopfes genügt $h_0 = 0{,}7\, d$. Die Schlüsselweite s_0 ist aus den Tafeln S. 742 bis 747 zu ersehen.

Ist der Bolzen aus Schmiedeisen, die Mutter aus Bronze [Belastungsweise II (S. 502 u. 503), $k_b = 300$ kg/qcm], so ergibt sich die Mutterhöhe $h_1 \sim 1{,}5\, d$. Will man $h_1 = d$ beibehalten, so ist der Schraubendurchm. d um 20 bis 25 % zu vergröfsern.

Gufseisernes Gewinde ist zu vermeiden. Muttern aus Gufseisen $h_1 \geqq 1{,}5\, d$, möglichst $h_1 = 2\, d$. — Läfst sich eine so hohe Mutter nicht unterbringen, so mufs der Bolzendurchm. entspr. vergröfsert werden.

2. Der Kern wird auf Zug (oder Druck) und auf Drehung beansprucht.

1. Diese Beanspruchung findet statt bei Schrauben, die mit der Last Q angezogen werden. Dabei darf der Flächendruck k in den Berührungsflächen von Mutter und Schraube eine gewisse Gröfse nicht überschreiten. Bei z tragenden Gängen ist zulässig:

$$Q \leqq z\, {}^1/_4 \pi (d^2 - d_1^2)\, k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für Befestigungs- und Stellschrauben sei, wenn Schmiedeisen auf Schmiedeisen oder auf Bronze gleitet, $k \leqq 150$ kg/qcm, wenn Flufsstahl auf Flufsstahl oder auf Bronze gleitet, $k \leqq 200$ kg/qcm.

Digitized by Google

Die Pressung zwischen der Mutter und Unterlage (beide aus Schmiedeisen) soll nicht über 200 kg/qcm sein.

Für Bewegungs- und Prefsschrauben ist höchstens die Hälfte dieser Werte zu rechnen. Je sicherer das Schmiermittel zwischen den Gleitflächen bleibt, um so höher darf k werden.

2. Das den Schraubenbolzen auf Drehung beanspruchende Moment ist für **scharfgängige** Schrauben höchstens

$$M_d = Q r \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1{,}12\,\mu}{1 - 1{,}12\,\mu \operatorname{tg}\alpha}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04$, $\mu = 0{,}15$ und $r = {}^1/_4 (d + d_1) \sim 0{,}55\, d_1$, so ergibt sich

$$M_d = 0{,}11\, Q\, d_1.$$

Da $\sigma = \frac{Q}{{}^1/_4 \pi d_1^2}$ und $\tau_{max} = \frac{M_d}{{}^1/_{16} \pi d_1^3} = \frac{0{,}11\, Q}{{}^1/_{16} \pi d_1^2}$, so folgt nach S. 584, 3., für Schweifseisen mit $k_z = 600$ kg/qcm, $k_d = 360$ kg/qcm, also $\alpha_0 = \frac{600}{1{,}3 \cdot 360} \sim \frac{4}{3}$:

$$k_z = \frac{Q}{{}^1/_4 \pi d_1^2} \left(0{,}35 + 0{,}65 \sqrt{2{,}38}\right) = \frac{Q}{{}^1/_4 \pi d_1^2} \cdot \frac{4}{3}, \text{ mithin}$$

$$Q = {}^3/_4 \cdot {}^1/_4 \pi d_1^2 k_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die zulässige Belastung ist rund dreiviertel der unter 1. erlaubten. Will man also bei einer mit der Last Q anzuziehenden schmiedeisernen Schraube den Kerndurchm. bestimmen, so suche man in der Tafel S. 746 das zu ${}^4/_3 Q$ gehörige d_1; umgekehrt ist die für ein bekanntes d_1 zulässige Belastung Q nur das ${}^3/_4$(bis ${}^1/_2$)fache der S. 746 gegebenen beiden Werte. Um so vorsichtiger rechnen, je kleiner der Durchm. der Schraube ist! — Schrauben unter ${}^3/_4$ Zoll = 19 mm Durchm. sollten bei Beansprchg. auf scharfes Nachziehen vermieden werden.

Die Höhe der **Mutter** für Schrauben, die mit der Last angezogen werden, sei bei scharfgängigen Befestigungsschrauben $h_1 = d$, wenn Mutter und Schraube aus gleichem Stoff sind; für eine schmiedeiserne Schraube mit Bronzemutter genügt $h_1 \sim 1{,}2\, d$. Will man im letzteren Falle $h_1 = d$ beibehalten, so ist der Schraubendurchm. d um etwa 10 % zu vergröfsern.

Die meisten Befestigungsschrauben (wie **Fundamentanker, Flanschenschrauben** usw.) erleiden dadurch, dafs sie bereits von vornherein angezogen und während des Betriebes auch nachgezogen werden müssen, eine zusätzliche Beanspruchung. Für die gebräuchlichen scharfgängigen Schrauben ($d \geqq 1{,}6$ cm) wähle man, um diesem Umstande Rechnung zu tragen: $Q = 135\, d^2$ bis $Q = 170\, d^2$.

3. Für den Kerndurchm. **flachgängiger** Schrauben erlangt man einen Annäherungswert, indem man nach 1. den Kern (bei überschläglicher Berücksichtigung der Drehungsbeansprchg.) mit ${}^1/_2\, k_z$ bis ${}^3/_4\, k_z$ auf Zug berechnet. Für den abgerundeten Wert d_1 wird das Gewinde usw. bestimmt und nun die Festigkeitsrechg. auf Zug und Drehung nochmals durchgeführt und d_1 nötigenfalls berichtigt. Meistens tritt zu dem beanspruchenden Drehmomente

$$M_d = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = Q r \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h} \text{ (S. 254)}$$

Digitized by Google

noch ein zweites, herrührend von den Reibungswiderständen in der Stützfläche der Schraube, das bei der genaueren Rechnung berücksichtigt werden mufs.

Erfährt die Schraube Druckbeanspruchung, so ist sinngemäfs in gleicher Weise vorzugehen; hierbei darf nicht übersehen werden, ob Knickung (Fall 2, Abb. 5, S. 513) möglich ist.

Beispiel: Die flufsstählerne, flachgängige Spindel einer Schraubenpresse hat einen Kerndurchm. $d_1 = 8$ cm, einen äufseren Durchm. $d = 10$ cm, also eine Gangtiefe $t = 1$ cm; Ganghöhe des dreigängigen Gewindes $h = 2$ engl. Z. $= 5{,}08$ cm. — Wie grofs ist die Beanspruchung bei einer Druckkraft von 35 t, wenn die Konstruktion derart ist, dafs Knickung nicht in Frage kommt, und das die Schraube auf Drehung beanspruchende Moment durch die vorstehende Gleichung bestimmt wird?

Es ist für den mittleren Schraubenhalbm. $r = {}^1/_4\,(10 + 8) = 4{,}5$ cm und die Reibungszahl $\mu = 0{,}1$:

$$M_d = 35000 \cdot 4{,}5\,\frac{5{,}08 + 2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}1}{2\pi \cdot 4{,}5 - 0{,}1 \cdot 5{,}08} = 44850 \text{ cmkg}.$$

Die im Kernquerschnitte durch dieses Moment hervorgerufene Drehungsbeanspruchung τ_{max} ist nach S. 563:

$$\tau_{max} = \frac{44850}{{}^1/_{16}\,\pi\,8^3} = 446 \text{ kg/qcm},$$

die Druckspannung ist

$$\sigma = \frac{35000}{{}^1/_4\,\pi\,8^2} = 696 \text{ kg/qcm}$$

und somit nach S., S. 584, die gröfste im Querschnitte der Spindel auftretende Hauptspannung [da für die Belastungsweise II, S. 503, unter Voraussetzung vorzüglichen Eisens mit $k = 1000$ kg/qcm und $k_d = 800$ kg/qcm, $\alpha_e = 1000 : (1{,}3 \cdot 800) \sim 1$]:

$$\sigma_{max} = 0{,}35 \cdot 696 + 0{,}65\,\sqrt{696^2 + 4 \cdot 446^2} = 243{,}6 + 785{,}4 = 979 \text{ kg/qcm},$$

also noch etwas unterhalb der zulässigen Normalspannung $k = 1000$ kg/qcm.

Bei Verwendung von guter Bronze für die Mutter soll nach S. 749 der Druck in der Berührungsfläche $k \leqq {}^1/_2 \cdot 200$ kg/qcm sein. Wählt man $k = 95$ kg/qcm, so wird (nach Gleichung (2), S. 749) für die Anzahl z der vollständig tragenden Gewindegänge:

$$35000 = z \cdot {}^1/_4\,\pi\,(10^2 - 8^2)\,95, \text{ woraus } z = 13,$$

so dafs eine Mutterhöhe $h_1 = 13\,(2 : 3) = 8^2/_3$ engl. Z. $= 22$ cm genügt.

Vgl. auch „Schrauben und Verschraubungen" II. Bd., S. 88.

Steinschraube (mit vier eisernen Beilagen, die sich gegen die Seitenflächen des pyramidenförmigen Ankerschaftes anlegen und deren Zwischenräume durch Zement auszugiefsen sind), Abb. 27 S. 752. $l \geqq 5d + 5$ cm. Oder auch Befestigung nur mit Blei oder Zement (sogenannter Metallzement von Hauser & Co. in Zürich).

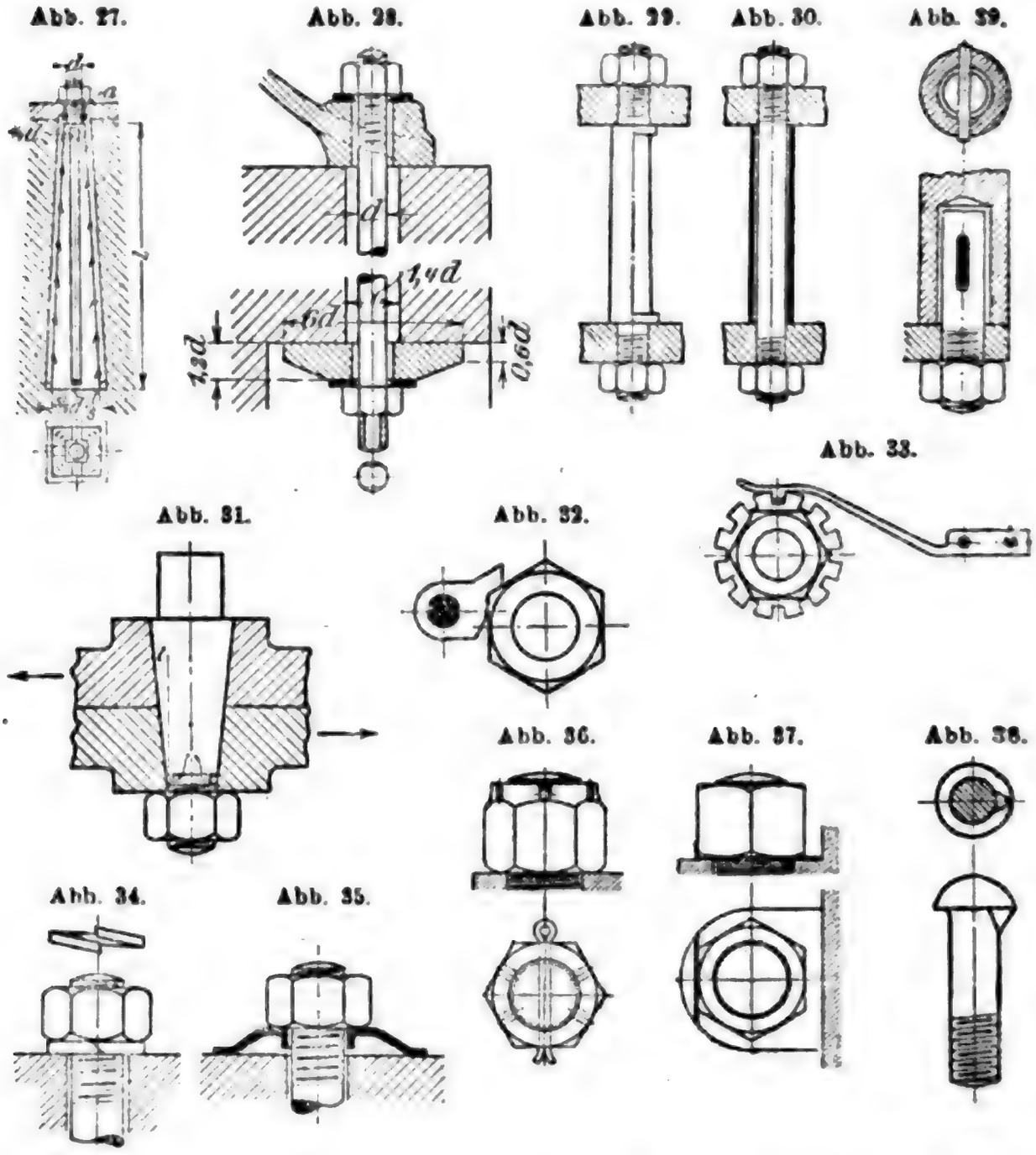
Fundamentanker (nach A. Pfarr), Abb. 28 S. 752. Unten zwei ebene Flächen angefeilt zum Festhalten des Ankerbolzens mit dem Schlüssel.

Abstandhaltende Schraubenbolzen (Abb. 29 u. 30 S. 752). — **Schraube** zur Aufnahme von Querkräften mit kegelig eingeschliffenem Schaft (Abb. 31 S. 752).

Schraubensicherungen (s. auch die Skizzen am Kopf der Tafel S. 744 bis 747) durch Gegenmutter, durchgebohrten Stift und Vorsteckstift oder -keil. — Weitere Mittel zur Sicherung der Mutter gegen Drehen: Legeschlüssel (Abb. 32 S. 752); auslösbare, in eine Verzahnung an der Mutter einschnappende Federklinke (Abb. 33 S. 752) oder federnde Unterlegscheiben (Abb. 34 u. 35 S. 752). — Abb. 36 S. 752 zeigt die vielfach, auch im Automobilbau angewendete Kronenmutter. — Abb. 37 S. 752 Sicherung durch eine Unterlegscheibe, deren einer Rand gegen die Mutter aufgebogen ist, während der andere Rand gegen einen

Digitized by Google

Konstruktionsteil undrehbar anliegt, häufig, auch im Dampfturbinenbau, angewendet. Häufig wird der dem aufgebogenen Rand gegenüberliegende Teil der Unterlegscheibe um einen Flansch o. dgl. nach unten



umgeschlagen. — Eine selbstsichernde Mutter, die im aufliegenden Teil von zwei Seiten so eingeschnitten ist, dafs sie federt und dadurch sichert, stellt die Schraubenfabrik G. Colshorn, Frankfurt a. M., her.*) — Verhinderung des Drehens des Schraubenbolzens beim Anziehen der Mutter: durch Vierkant oder Nase am Bolzen (Abb. 33), Anschlagflächen neben dem Bolzenkopf oder Durchsteckkeil (Abb. 39).

*) Zeitschr. für Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge v. 15. Mai 1910.

Digitized by Google

C. Niete.

a. Allgemeines.

Die **Löcher** für die Vernietung werden durch Lochen (Stanzen) oder durch Bohren hergestellt. Unter allen Umständen müssen die Löcher der zu vernietenden Platten gut aufeinander passen.

Das Lochen ist billiger, setzt gutes Eisen von genügender Zähigkeit voraus. Gestanzte Löcher fallen nicht zylindrisch, sondern etwas kegelförmig aus, u. zw. weiter auf der Blechseite, die sich beim Lochen unten befindet.

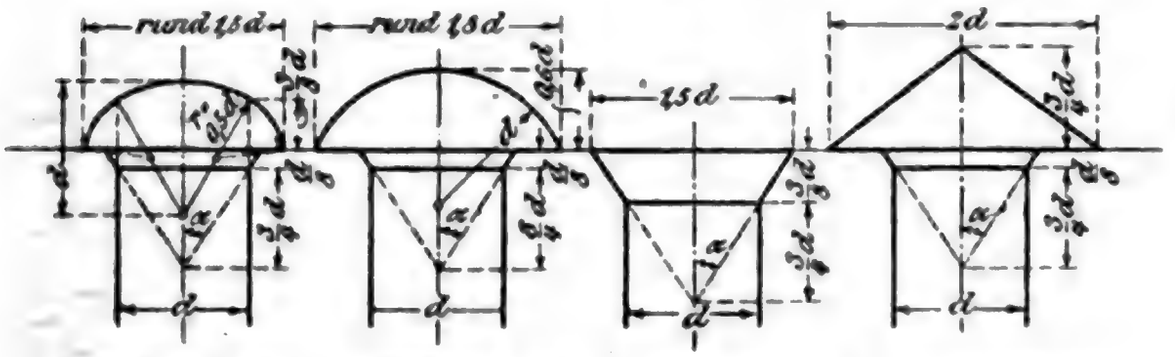
Das Bohren der Löcher ermöglicht, besonders durch gemeinsames Bohren der zusammengepafsten Bleche, Träger usw. mit tragbaren Bohreinrichtungen,*) genauere Arbeit und soll da angewendet werden, wo hierauf, sowie im Falle des Nichtausglühens darauf Wert zu legen ist, dafs die Zähigkeit des Eisens nicht beeinträchtigt wird. Der Durchm. des Nietloches ist etwa 1 bis 2 mm gröfser als der des Nietschaftes.

Flufseisen soll nur gebohrt werden. — Vgl. die Vorschriften unter 5. bis 7., S. 762.

Die **Niete** bestehen aus vorzüglichem, zähem Flufseisen oder Tiegelstahl, selten noch aus Schweifseisen. Formen der Schliefsköpfe Abb. 40 bis 43, wovon Abb. 40 u. 42 die Köpfe der Normalniete für Eisenkonstruktionen darstellen.**) Den vier Köpfen liegt der gleiche Versenkungswinkel α (zu der Frage, ob die Niete ein Versenk haben sollen oder nicht, s. weiter unten) zugrunde; es ist $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$; C. Bach wählt statt dessen bei übrigens gleichen Abmessungen $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}2$. Als Ueberschufs an Schaftlänge zur Bildung des erhabenen Schliefskopfes ist erforderlich $^4/_3\,d$ bis $^7/_4\,d$.

Die in Abb. 42 u. 43 dargestellten Köpfe werden ohne Schellhammer erzeugt. Die durch versenkte Niete bewirkte besondere

Abb. 40. Abb. 41. Abb. 42. Abb. 43.



Geschellter Kopf für feste Verbindungen	Geschellter Kopf für feste und dichte Verbindungen	Gehämmerter, versenkter Kopf	Gehämmerter, erhabener Kopf
$G = 4{,}4\ d^3$.	$G = 7{,}06\ d^3$.		$G = 6{,}13\ d^3$.

Schwächung des Blechquerschnitts erfordert u. Umst. eine Vergröfserung der Nietentfernung.

G ist nach Abb. 40, 41 u. 43 das Gewicht von **1000** Nietköpfen in kg, wenn der Schaftdurchm. d in cm ausgedrückt wird.

*) Z. d. V. d. I. 1903 S. 696.

**) Deutsches Normalprofil-Buch für Walzeisen, 5. Aufl. 1897 S. 25 u. 26.

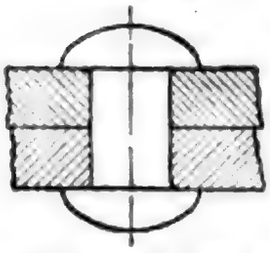
Digitized by Google

Gewichte eiserner Schliefsköpfe.

d	G in kg, entspr. Abb.			d	G in kg, entspr. Abb.			d	G in kg, entspr. Abb.		
mm	40	41	43	mm	40	41	43	mm	40	41	43
8	2,3	3,6	3,1	18	25,7	41,2	35,8	28	96,6	155,0	134,6
10	4,4	7,0	6,1	20	35,2	56,5	49,0	30	118,8	190,6	165,5
12	7,6	12,2	10,6	22	46,9	75,2	65,3	32	144,2	231,3	200,9
14	12,1	19,4	16,8	24	60,8	97,6	84,7	34	172,9	277,5	240,9
16	18,0	28,9	25,1	26	77,3	124,1	107,7	36	205,3	329,4	286,0

Die üblichen Nietstärken liegen zwischen 8 und 30 mm, bei Schiffskesseln bis 36 mm (Maschinennietung).

Abb. 44.



Niete ohne das „kleine Versenk" (also ohne den kegeligen Uebergang zwischen Schaft und Kopf, Abb. 44, 48 u. 52) werden von einer Reihe von Firmen seit Jahren im **Kesselbau** verwendet. Die Nietlöcher werden vom Grat befreit, so dafs das fertige Niet am Nietkopf und am Schliefskopf (Setzkopf) nur den naturgemäfsen Uebergang zwischen Kopf und Schaft hat.

Für **Eisenkonstruktionen** haben die preufsischen Minister der öffentlichen Arbeiten und für Handel und Gewerbe übereinstimmend verfügt (St. u. E. v. 22. Sept. 1909 S. 1500), dafs in den Fällen, in denen bisher noch Schweifseisen für die Niete von Eisenkonstruktionen verlangt wurde, Flufseisenniete, u. zw. ohne das kleine Versenk zugelassen werden sollen.

Diesem Erlafs liegen die im Königl. Materialprüfungsamt zu Grofs-Lichterfelde-West auf Veranlassung des „Vereins deutscher Brücken- und Eisenbaufabriken" ausgeführten Versuche zugrunde (St. u. E. 16. Juni 1909 S. 899 ff.). Diese Versuche erstreckten sich auf zwei Versuchsreihen, von denen die eine Aufschlufs geben sollte über den Einflufs des Versenks auf Gleitwiderstand und Abscherfestigkeit von Nietverbindungen, während die andere Versuchsreihe Schlagzugversuche umfafste, bei denen das Niet nur in seiner Achsrichtung stofsweise belastet wurde. — Zugleich sollte mit diesen Versuchen der Einflufs verschiedener Nietweisen (Handnietung, Lufthammernietung, Kniehebelnietung — beide mit Druckluft) auf die Haltbarkeit der Verbindung festgestellt werden.

Aus den Versuchen geht unzweifelhaft hervor, dafs das „kleine Versenk" keinen Einflufs auf die Haltbarkeit der Nietverbindungen hat. Auch sprangen bei den Schlagversuchen die Köpfe weder bei den Nieten mit, noch ohne Versenk ab.

Hiernach wird in dem Bericht über die Versuche dringend empfohlen, in Zukunft das in der Herstellung teure und umständliche, bei Massenherstellung oft geradezu schädliche „Versenk" fortfallen zu lassen, die Niete nur mit der kleinen Ausrundung (Abb. 44) unter dem Kopf zu versehen und die Lochränder nur abzugraten. — (Etwas anders Bach, 11. Aufl. S. 183/184.)

Versuche mit Nickelstahlnieten, die E. Preufs in der Materialprüfungsanstalt der Techn. Hochschule zu Darmstadt ausgeführt hat (St. u. E. 28. Juli 1909 S. 1143 ff.), haben ergeben, dafs die Festigkeit von Ueberlappungsnietungen mit Flufseisenblechen und Nickelstahlnieten etwa 2- bis 2,5 mal so grofs war als bei Schweifseisennieten (bei doppelter Laschennietung nur etwa 1,5 mal so grofs), dafs aber der Gleitwiderstand kaum vergröfsert wird.*) Letzterer wird dagegen vergröfsert, wenn der Nietstempel nach der Kopfbildung noch auf den Schliefskopf einwirkt.

*) Neuere Versuche St. u. E. 1912 S. 23, 242 u. 993; 1913 S. 1551.

Digitized by Google

b. Berechnung der Vernietungen.

Alle **Längenabmessungen** sind im folgenden in **cm** ausgedrückt.

Das heifs eingezogene Niet zieht sich beim Erkalten zusammen; hierdurch werden die Platten aufeinandergedrückt und Längsspannungen im Nietschafte hervorgerufen. Mit der Zusammenziehung in Richtung der Nietachse ist eine solche winkelrecht dazu verknüpft, u. zw. aus Anlafs des Erkaltens und infolge der mit Längsspannungen (Längsdehnungen) stets verbundenen Querzusammenziehung (S. 481).

Der Nietschaft könnte mithin selbst dann, wenn er sich im heifsen Zustand an die Lochwand anlegen würde, diese nach seinem Erkalten nicht mehr berühren. Solange also kein Gleiten der durch die Niete verbundenen Platten gegeneinander stattgefunden hat, wird der Nietschaft nicht durch Kräfte beansprucht sein können, die von der Lochwand winkelrecht zu seiner Achse geäufsert werden müfsten. Die Berechnung der Nietverbindungen mufs daher nicht von der Beanspruchung der Niete auf Scherfestigkeit, sondern von dem in der Verbindung vorhandenen Widerstande gegen Gleiten ausgehen.

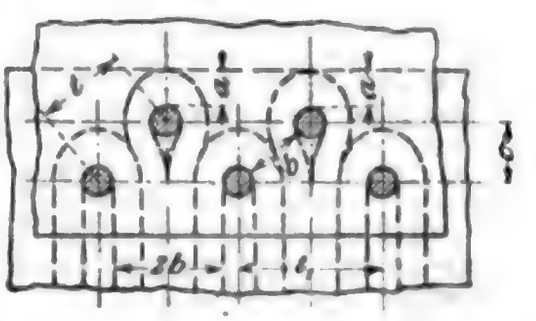
Nach Versuchen von C. Bach*) beträgt der mittlere Gleitwiderstand für jedes Paar Berührungsflächen bei sachgemäfs ausgeführter Nietung (einreihiger Ueberlappungsnietung) nach Verstemmung etwa $R = 1000$ bis 1800 kg/qcm Nietquerschnitt. Durch doppelseitige Verstemmung wird der Gleitwiderstand um etwa 30 % gegenüber unverstemmten Nietungen erhöht.**) Näheres über die zulässige Belastung S. 756, 757 ff.***)

*) Z. d. V. d. I. 1895 S. 301; 1892 S. 1142 u. 1305; 1894 S. 1231; auch Bach, Maschinenelemente, 11. Aufl. 1913 S. 195 ff.

**) Berichte über Versuche von Ch. Frémont über den Gleitwiderstand und über einen Aufsatz desselben Verfassers über Nietverbindungen St. u. E. 18. August 1909 S. 1289; 11. Mai 1910 S. 795 und 8. Juni 1910 S. 947.

***) Bei der bisher üblichen Berechnung der Nietverbindungen wird R vernachlässigt und (den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechend) nur die Scherfestigkeit des Nietquerschnitts in Rechnung gezogen. Die vernieteten Platten werden als lediglich durch Zug (oder Druck) beansprucht angesehen und die sich hierbei ergebenden grofsen Biegungsspannungen des Schaftes und der Bleche aufser acht gelassen.

Abb. 45.



Als Beispiel (vgl. auch Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten S. 760 ff.) für den Gang dieser Berechnungsweise diene die einschnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 45). Man denkt sich (nach J. W. Schwedler) zu jedem Niet (vom Durchmesser d) einen diesen seilartig umschliefsenden Blechstreifen von der Breite $^1/_2 b$ und der Dicke s und nimmt an, dafs der Nietschaft, die durchschnittliche Schubspannung k_s erfahrend, die Kraft $^1/_4 \pi d^2 k_s$ durch die Lochleibung hindurch auf die beiden Enden des ihn umschlingenden Bandes übertrage und dabei in diesem die Zugspannung k_z wachrufe, so dafs

$$\frac{\pi}{4} d^2 k_s = 2 \frac{b}{2} s k_z.$$

Wird $k_s \sim k_z$ angenommen und wird das Abrosten der Bleche dadurch berücksichtigt, dafs statt der Blechdicke s nur $0{,}8\,s$ in die Rechnung eingesetzt wird, so ergibt sich

Digitized by Google

I. Dampfkesselnietungen.

Sie müssen dicht und fest sein. Das Dichthalten einer Nietnaht wird bei Plattendicken von etwa 7 mm aufwärts durch Verstemmen erzielt.*) (Abschrägung des Plattenrandes etwa 1 : 3.)

Die Allgemeinen Polizeilichen Bestimmungen**) über die Anlegung von Land- und Schiffsdampfkesseln vom 17. Dezember 1908 (für das Reich) [im folgenden A. P. B. genannt, II. Bd. S. 67 ff.] gestatten Schweifseisen- wie Flufseisenbleche und Schweifseisen- wie Flufseisenniete.

Sie enthalten genaue Bestimmungen über die aus Betriebsüberdruck und Zugfestigkeit des Bleches folgenden Blechdicken, über die zulässige Belastung des Nietschaftes (höchstens 7 kg/qmm für Nieteisen bis zu 35 kg/qmm Zugfestigkeit), über Zug- und Biegeproben, über Zugfestigkeit der Bleche, Stauchproben der Niete usw., ferner über Vernietung, Schweifsung und Bearbeitung im Feuer und Berechnung der Abmessungen (II. Bd. S. 81).

Die Festigkeit gut und mittels Ueberlappung geschweifster Nähte kann nach A. P. B. zu 0,7 des vollen Bleches gerechnet werden.

Ferner darf nach A. P. B. die Zugbeanspruchung des Bleches unter Annahme gleichmäfsiger Spannungsverteilung über den Querschnitt in keiner Nietreihe die Grenze $\frac{K}{x}$ überschreiten.

Danach ist zu wählen (II. Bd. S. 82) $K = 33$ bis 44 kg/qmm; $x = 4{,}75$ bis 4.

Die Blechdicke soll nicht geringer als 7 mm genommen werden; nur bei kleinen Kesseln (z. B. für Feuerspritzen oder Kraftfahrzeuge) sind allenfalls dünnere Bleche zulässig. — Bleche, bei denen eine höhere Zugfestigkeit als 36 kg qmm in Anspruch genommen werden soll, dürfen zu Mantelteilen nur verwendet werden, wenn die Verarbeitung kalt oder rotwarm stattfindet, wenn ihre Verbindung in den Längsnähten durch Doppellaschennietung erfolgt und die Nietung maschinell hergestellt wird.

I. Ueberlappungsnietungen.

Hierfür wähle man nach bewährten Ausführungen von Dampfkesseln,***) Blechdicke s (in cm), den Nietdurchm.: $d = \sqrt{5s} - 0{,}4$ cm,

für $s =$	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2 cm
wird $d =$	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6 cm

---

$$b = 1{,}25\,\frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{s}; \text{ ferner}$$

$$t = b + d; \qquad t_1 = 2b + d; \qquad c = \sqrt{d^2 - (\tfrac{1}{2}t_1)^2}.$$

Wird Ausscheren des Randes (statt des beim Bruche tatsächlich stattfindenden Aufreifsens) vorausgesetzt, so folgt aus $\frac{1}{4}\pi d^2 k_z = 2as\,k'_s$ mit k'_s (Blech) $= k_s$:

$$a = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{2s}.$$

Wird die Kraft, welche die Nietverbindung beansprucht, fortgesetzt gesteigert, so überschreitet sie den Widerstand R: die Platten gleiten, der Nietschaft gelangt zur Anlage, und schliefslich wird nach vorhergegangener, meist ziemlich weitreichender Formänderung (Streckung der Löcher in Richtung der Zugkraft, Rissigwerden der Lochränder, Abscheren der Niete oder Reifsen der Platten) die Verbindung durch Bruch zerstört.

*) „Versuche mit autogen geschweifsten Blechen und Kesselteilen" Bach Z. d. V. d. I. 1910 S. 831; Heft 83 u. 84 Mitt. Forschungsarb.

**) „Vorschriften betr. die Anlegung, Untersuchung u. den Betrieb von Land- u. Schiffsdampfkesseln mit Bau- und Materialvorschriften." Sechste vermehrte Aufl. Hagen i. Westf. Verlag von Otto Hammerschmidt 1910. — „Die Grundlagen der deutschen Material- und Bauvorschriften für Dampfkessel" von R. Baumann, Berlin 1912.

***) Hierzu und für die Abb. 46 bis 53 Bach, Maschinenelemente 11. Aufl. 1913 S. 203 ff.

Digitized by Google

1. Einschnittige, einreihige Vernietung (Abb. 46).

Man wähle die Nietteilung $t = 2d + 0{,}8$ cm und die Entfernung der Lochmitten vom Blechrande $e = 1{,}5d$. Diese Angaben gelten auch für einseitig gelaschte Nietverbindungen. — Die zulässige Beanspruchung der Niete im Betriebe (Widerstand gegen Gleiten) soll bei gutem Nieteisen und sorgfältiger Ausführung 600 bis 700 kg/qcm im Nietquerschnitt nicht überschreiten. Nach Bach ist die Blechstärke

$$s = D \frac{p}{2k_z} \cdot \frac{t}{t-d}.$$

Darin bedeutet D den Kesseldurchm. in cm, p den gröfsten Betriebsüberdruck in at, k_z die zulässige Zugbeanspruchung des Bleches, t die Teilung und d den Nietdurchm. Die im vollen Blech bei gleichmäfsiger Verteilung herrschende Spannung ist $\sigma_v \leqq 700 \frac{^1/_4 \pi d^2}{st}$.

Abb. 46.

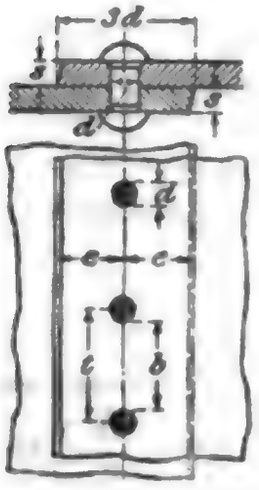


Abb. 47.

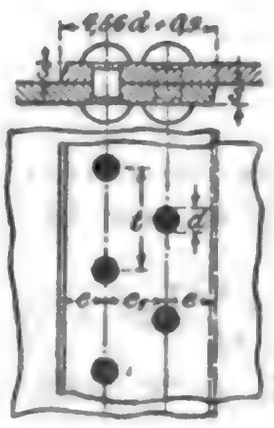
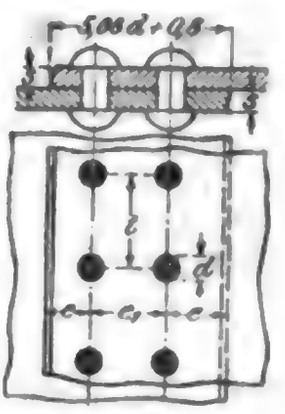


Abb. 48.



Ueber die Bestimmung der Blechstärke nach den **A. P. B.** II. Bd. S. 82.

2. Einschnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 47: Niete mit Versenk und Abb. 48: Niete ohne Versenk).

Man wähle den Nietdurchm. d und den Randabstand e wie vorstehend unter 1.; ferner sei für die Zickzacknietung (Abb. 47)

die Nietteilung: $t = 2{,}6d + 1{,}5$ cm
und die Entfernung: $e_1 = 0{,}6t$;

für die Kettennietung (Abb. 48) nehme man dagegen

die Nietteilung $t = 2{,}6d + 1{,}0$ cm und die Entfernung $e_1 = 0{,}8t$.

In beiden Fällen soll nach Bach die zulässige Belastung der Niete im Betriebe 550 bis 650 kg/qcm Nietquerschnitt nicht überschreiten, so dafs (vgl. unter 1.) $\sigma_v \leqq 650 \cdot {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_2 st)$.

3. Einschnittige, dreireihige Vernietung (Abb. 49 S. 758).

Man wähle d und e wie vorstehend unter 1.; dagegen sei

$$t = 3d + 2{,}2 \text{ cm}, \quad e_1 = 0{,}5t;$$

$$\sigma_v = 500 \cdot {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_3 st) \text{ bis } 600 \cdot {}^1/_4 \pi d^2 : ({}^1/_3 st).$$

Digitized by Google

II. Zweiseitige Laschennietungen.

1. Zweischnittige, einreihige Vernietung (Abb. 50).

Abb. 49.

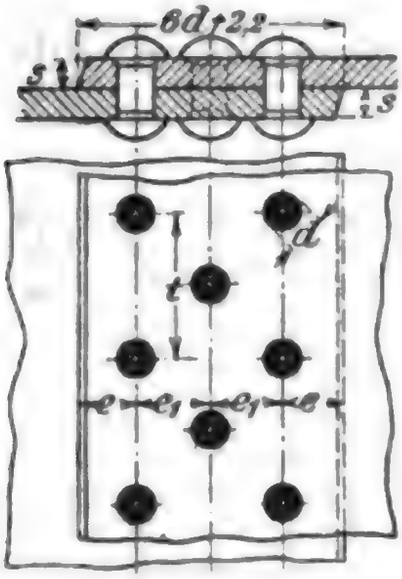
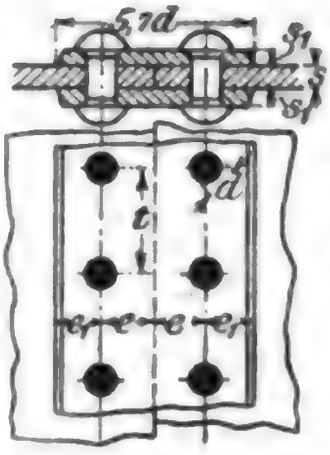


Abb. 50.



Die Laschendicke sei mit Rücksicht auf Verstemmen und Abrosten

$$s_1 = {}^5/_8 s \text{ bis } {}^7/_8 s.$$

Man wählt auch wohl die Lasche im Kesselinneren*) etwas stärker als die Aufsenlasche wegen der verschiedenen Abnutzung. Ferner sei

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}5 \text{ cm};$$
$$t = 2{,}6\,d + 1{,}0 \text{ cm};$$
$$e = 1{,}5\,d;$$
$$e_1 = 0{,}9\,e.$$

Da der Gleitwiderstand hier in zwei Paar Flächen, also doppelt auftritt, kann man die zulässige Belastung der Niete im Betriebe zu 1000 bis 1200 kg/qcm im Nietquerschnitt annehmen, so dafs (vgl. S. 755)

$$\sigma_v = 1000\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{s\,t} \text{ bis } 1200\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{s\,t}.$$

Dabei soll nach den **A. P. B.** für doppeltgelaschte, maschinengenietete Nähte die Zugbeanspruchung des Bleches (II. Bd. S. 82) $\leqq \frac{K}{4}$ sein.

Man geht hier bis zu $^1/_4$ der Zugfestigkeit des Bleches, weil das Blech in der Lochlinie gegen Rosten geschützt ist und die Biegungsbeanspruchung wegfällt. Hierin liegt ein Vorzug der zweiseitigen Laschennietung gegenüber der Ueberlappung.

2. Zweischnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 51).

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}6 \text{ cm}; \quad t = 3{,}5\,d + 1{,}5 \text{ cm}; \quad e = 1{,}5\,d;$$
$$e_1 = 0{,}5\,t; \quad \text{Randabstand} = 0{,}9\,e; \quad s_1 = {}^5/_8\,s \text{ bis } {}^7/_8\,s;$$
$$\sigma_v = 950\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{{}^1/_2\,s\,t} \text{ bis } 1150\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{{}^1/_2\,s\,t}.$$

Die wellenförmige Begrenzungslinie der Laschen, in Abb. 51 nur links gezeichnet, bezweckt, die Ueberlaschung an jeder Stelle so weit zu vermindern, dafs das Verstemmen zu einer dichten Verbindung führt. Bei genügender Dicke der Laschen empfiehlt es sich, die gerade Begrenzung, weil einfacher, beizubehalten.

Wird in der äufseren Naht nach Abb. 51 jedes zweite Niet fortgelassen, so wähle man $d = \sqrt{5s} - 0{,}6$ cm; $t = 5\,d + 1{,}5$ cm; $e = 1{,}5\,d$; $e_1 = 0{,}4\,t$; Randabstand $= 1{,}5\,d$; $s_1 = 0{,}8\,s$; σ_v wie vorstehend. Ganze Laschenbreite $10\,d + 1{,}2$ cm.

*) „Soll man die Nietnähte auf der Innenseite der Dampfkessel verstemmen?" Bach, Z. d. V. d. I. 1912 S. 2071.

Digitized by Google

3. Zweischnittige, dreireihige Vernietung (Abb. 52).

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}7 \text{ cm}; \qquad t = 6\,d + 2{,}0 \text{ cm};$$

$e = 1{,}5\,d$; $e_1 = {}^3/_8\,t$, $e_2 = 0{,}3\,t$; Laschendicke $s_1 = 0{,}8\,s$;

$$\sigma_v = 900\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{n\,s\,t} \text{ bis } 1100\,\frac{{}^1/_4\,\pi\,d^2}{n\,s\,t},$$

Abb. 51.

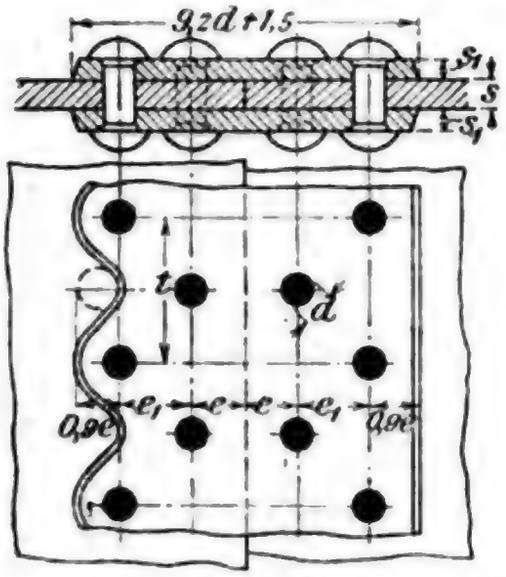
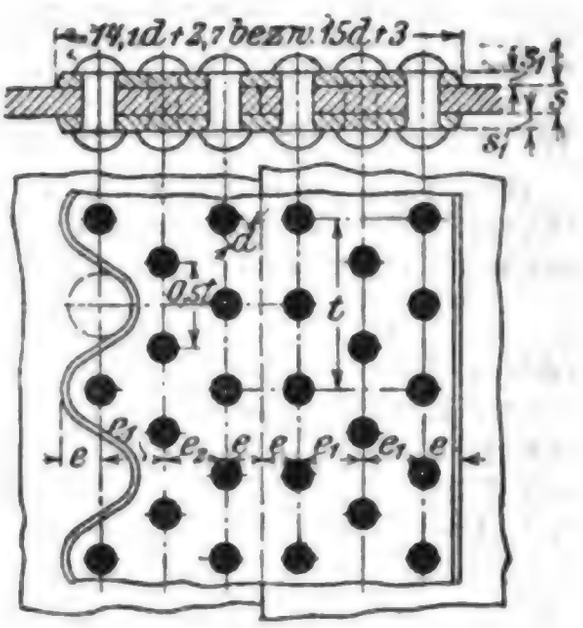


Abb. 52.

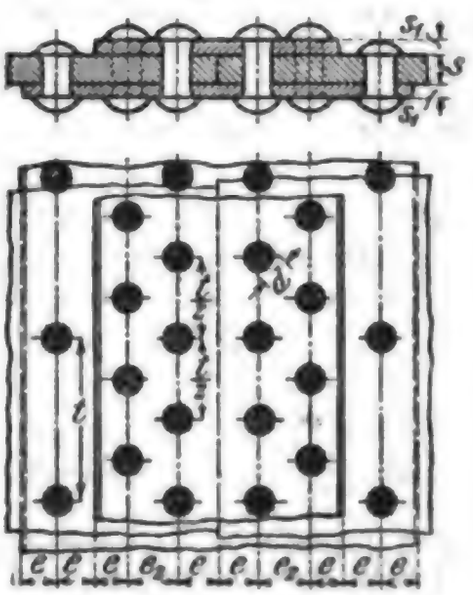


wobei für die linke Seite der Abb. 52 $n = {}^1/_5$, für die rechte $n = {}^1/_6$ gilt. Die vorstehende Bemerkung über die wellenförmige Begrenzung unter 2. gilt auch hier.

III. Zweiseitige Laschennietung mit ungleich breiten Laschen.

Um das kostspielige wellenförmige Ausschneiden der Laschen (Abb. 51 u. 52) zu vermeiden, macht man vielfach die äufsere Lasche schmaler als die innere. Es entsteht dann die sogenannte zweieinhalbfache Nietung, bei der die inneren vier Nietreihen zweischnittig, die äufseren einschnittig sind (Abb. 53). Die Mafse für d, t, e, e_2 und s_1 sind dieselben wie für die zweischnittige dreireihige Nietung (Abb. 52). — Angewendet z. B. bei den ${}^3/_5$ gekuppelten Schnellzuglokomotiven der Preufsischen Staatsbahn.*)

Abb. 53.



Weiteres über Dampfkesselnietungen, besonders über die Wahl der Vernietung, II. Bd., Abschn. Kraftmasch. (Teile d. Dampfkessel).

*) Metzeltin in Z. d. V. d. I. 1909 S. 643.

II. Nietungen für Flüssigkeits- und Gasbehälter usw.

Meist einschnittige, einreihige Vernietung (S. 757). Die Blechdicke s wird hierbei in der Regel mehr durch Rücksicht auf Abrosten u. dgl. als durch den inneren Druck bestimmt. Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}4 \text{ cm};$$

$$\text{Nietteilung } t = 3d + 0{,}5 \text{ cm}; \qquad \text{Randabstand } e = 0{,}5\,t.$$

Niete von 0,8 cm Durchm. an abwärts werden meist kalt eingezogen und vernietet. — Platten unter 0,5 cm lassen sich erfahrungsmäfsig nicht mehr verstemmen. Gewöhnlich wird dann ein mit Mennige getränkter Leinwand- oder Papierstreifen von der Breite der Ueberlappung zwischen die abzudichtenden Flächen gelegt. Zuweilen verwendet man auch mit Mennigekitt behandelte Lederschnur u. dgl.

III. Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten.

Hier kann nach Mafsgabe des auf S. 755 ff. Gesagten vorgegangen werden. Von einem Verstemmen wird bei diesen Nietungen abgesehen. Den Nietdurchm. wähle man im allgemeinen zu

$$d = \sqrt{5s} - 0{,}2 \text{ cm},$$

wenn s die Plattendicke in cm bedeutet.

Die Mehrzahl der Mitglieder des Vereins deutscher Brücken- und Eisenbaufabriken hat sich dahin geeinigt, in der Regel nur noch Niete von 12, 16, 20, 23 und 26 mm Durchm. zu verwenden. — Die Vorschläge des Vereins sind von vielen Behörden, u. a. vom Preufs. Min. der öffentlichen Arbeiten, angenommen.*)

Für einreihige, einschnittige Vernietung mit 600 kg/qcm Nietquerschnitt zu übertragender Kraft wird die Nietteilung

$$t = \frac{\pi d^2}{4s} + d$$

mit der Beschränkung, dafs $t \geqq 2{,}5d$ und der Randabstand

$$e = 1{,}5d \text{ bis } 2{,}0d.$$

Zwei- und mehrreihige Vernietungen pflegt man auf Grund des Vorstehenden nach dem Schwedlerschen Verfahren (Fufsnote S. 755) zu bestimmen. — Ist k_z die zulässige Zugspannung des Flufseisens, aus dem die Niete hergestellt sind (gewöhnlich $k_z = 750$ kg/qcm), so wählt man $k_s = 0{,}8\,k_z = 600$ kg/qcm als zulässige Schubspannung im Nietschaft und nimmt an, dafs n Niete von d cm Durchm., wenn sie in m Querschnitten (meist ein- oder zweischnittig) beansprucht werden, eine Kraft (in kg) übertragen von

$$P \leqq 600 \cdot {}^1\!/_4\, \pi\, d^2\, m n.$$

Bei mehrschnittigen Vernietungen ist auch darauf zu achten, dafs der **Leibungsdruck** k (Druck zwischen Nietschaft und Lochwand) das für zulässig erachtete Mafs nicht überschreitet. Empfohlen wird hierfür $k = 1{,}8\,k_z$ bis $2{,}2\,k_z$, im Mittel $k = 2k_z$. Es mufs also sein

$$P \leqq k\, s_s\, d\, n,$$

wenn hierbei s_s die in der einen der beiden Kraftrichtungen beanspruchte geringste Gesamtplattendicke (in cm) bedeutet. Das sich

*) Z. d. V. d. I. 20. August 1910 S. 1403, wo auch die Zeichen angegeben sind, durch die sich die fünf Nietarten in der Zeichnung unterscheiden sollen.

Digitized by Google

aus den beiden letzten Formeln ergebende gröfsere n ist der Ausführung zugrunde zu legen.

Heftniete halten die verbundenen Teile nur zusammen und übertragen keine Kräfte. Ihr Abstand ist bei den der Witterung ausgesetzten Eisenverbindungen wegen des wasserdichten Fugenschlusses und zur Vermeidung von Rost nicht zu grofs zu wählen. Bei Verbindung zweier Winkeleisen oder zweier solcher mit zwischenliegendem Stehbleche sei der Abstand der Heftniete höchstens $8d$; bei Verbindung eines Bleches oder Flacheisens mit einem Winkeleisen darf bei einer Blechdicke $s = 8$ bis 11 mm die Heftnietentfernung höchstens $5d$ betragen und bei $s > 11$ mm höchstens $6d$. — Der gröfste Abstand der Randniete vom Blechrande soll bei Blechdicken $s \leqq 14$ mm nicht mehr als $2{,}5d$ und bei $s > 14$ mm höchstens $2{,}8d$ sein.*)

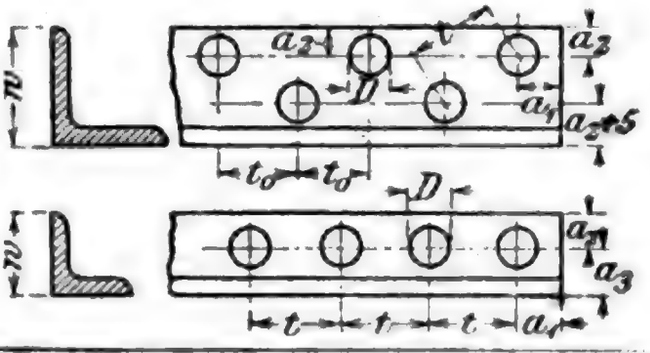
Falls sich die Stäbe, die durch die Vernietung Kräfte aufeinander übertragen sollen, nicht unmittelbar berühren, sind entsprechend mehr Niete anzuordnen. — Sämtliche auf Zug beanspruchten Verbindungsstücke sind mit Spannung einzusetzen.

Die Summe der Dicken der zu vernietenden Teile soll 3 bis $4d$ nicht überschreiten, da bei gröfserer Nietlänge als etwa $5{,}5d$ ein Stauchen durch den ganzen Nietschaft hindurch nicht möglich ist und beim Erkalten sich die Längsspannungen leicht bis zum Absprengen des Kopfes steigern. Können längere Niete nicht vermieden werden, so sind sie nur so weit zu erwärmen, als es die Bildung des Schliefskopfes und die Erzeugung des Widerstandes gegen Gleiten erfordert.

Stählerne kegelförmige Schraubenbolzen mit aufgesetztem Vierkant zum sauberen Einschleifen des Kegels (mit $^1/_{20}$ bis $^1/_{10}$ Auszug) bilden einen guten, aber teuren **Ersatz langer Niete** (Abb. 31 S. 752).

Für **Winkeleisen** empfiehlt es sich, folgende Mafse innezuhalten [auf andere Profile sinngemäfs anzuwenden] (Abb. 54 u. 55). Abb. 54 gilt nur für Winkeleisen von $w \geqq 100$ mm. Der Durchmesser D des Nietkopfes ist $D \sim 1{,}5\,d$ (Abb. 40 S. 753).

Abb. 54. u. 55.



Nietdurchm.	D	t_{min}	t	t_{max}	$t_{0\,min}$	$a_{1\,min}$	a_1	$a_{2\,min}$
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$d = 16$	24	40	50	100 bis 120	35	25	30	25
$d = 18$	27	45	55	110 „ 135	40	27	35	27
$d = 20$	30	50	60	120 „ 150	40	30	40	30
$d = 22$	33	55	65	130 „ 165	45	33	45	33
$d = 24$	36	60	70	140 „ 180	45	36	50	36
$d = 26$	39	65	75	150 „ 195	50	40	55	40

$a_2 = 0{,}5\,w + 5$ mm; $\quad w_{min} = 3\,d$.

*) A. Meyerhof, Die Schwedlerbrücken zu Breslau. Z. d. V. d. I. 1906 S. 202 ff.

Digitized by Google

Von dem Verbande deutscher Arch.- und Ing.-Vereine, dem V. d. I. und dem V. d. Eisenhüttenleute sind im Jahre 1908 (1910) **Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen, für Brücken und Hochbau** aufgestellt worden.

Diese Normalbedingungen gliedern sich in folgende vier Abschnitte:

I. Das Prüfungsverfahren;
II. Güte der Baustoffe;
III. Herstellung der Eisenkonstruktion;
IV. Abnahme.

Davon sind unter Mitwirkung des Deutschen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik und des Vereins deutscher Brücken- und Eisenbau-Fabriken im Jahre 1910 abgeändert die Abschnitte I und II, unverändert geblieben sind die Abschnitte III und IV der in 11. Aufl. 1908 in Otto Meifsners Verlag, Hamburg, erschienenen Normalbedingungen. Der für die Herstellung der Nietverbindungen wichtigste § 6 **Bearbeitung** des Teiles III lautet:

Die sämtlichen Konstruktionsteile müssen genau den Zeichnungen entsprechen und folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die durch Nietung oder Verschraubung zu vereinigenden Eisenteile sind genau anzurichten, so dafs die Fugen dicht schliefsen. — Das Verstemmen der Fugen vor Prüfung und Abnahme ist nicht gestattet.

2. Sämtliche Eisenteile müssen, entsprechend den in den Zeichnungen angegebenen Abmessungen, aus dem Ganzen gewalzt bzw. geschmiedet oder gegossen sein und dürfen nicht durch Zusammenschweifsen einzelner Teile gebildet werden. Ausnahmen sind besonders festzustellen.

3. Jede Bearbeitung des Materials, insbesondere des Flufseisens und Flufsstahls, hat entweder im kalten oder mindestens im rotwarmen Zustande zu erfolgen. Jede Bearbeitung oder Materialbeanspruchung in einem zwischenliegenden Wärmezustande (sog. Blauwärme) ist tunlichst zu vermeiden. Hat trotzdem eine solche stattgefunden, so ist das fertige Gebrauchstück in geeigneter Weise auszuglühen.

4. Wird Flufseisen mit der Schere geschnitten, so ist das neben dem Schnitte befindliche Eisen in mindestens 2 mm Breite durch Hobeln oder Fräsen zu beseitigen; ausgenommen sind unwesentliche Teile, Futterstücke usw.

5. Alle Schrauben- und Nietlöcher, mit Ausnahme derjenigen in Futterplatten, welche gelocht werden dürfen, sind zu bohren. Der an den Löchern entstandene Grat mufs vor dem Zusammenlegen und Nieten der Stücke sorgfältig entfernt werden.

6. Die Nietlöcher müssen den vorgeschriebenen Durchmesser und die in der Zeichnung vorgeschriebene Stellung und Versenkung erhalten.

7. Die zusammengehörigen Nietlöcher müssen gut aufeinander passen. Verschiebungen sind bis höchstens 5 % des Lochdurchmessers zulässig; sie müssen jedoch durch Aufreiben mit der Reibahle ausgeglichen werden. In derartig aufgeriebene Löcher sind entsprechend stärkere Nietbolzen einzuziehen.

8. Die Niete sind im hellrotwarmen Zustande, nach Befreiung von dem etwa anhaftenden Glühspan, in die gehörig gereinigten Nietlöcher unter gutem Vorhalten (wo tunlich, mit Nietwinden) einzuschlagen. Sie müssen die Löcher nach der Stauchung vollständig ausfüllen. — Setz- und Schliefskopf müssen zentrale Lage haben, gut und vollanliegend ausgeschlagen sein, und es darf dabei keine Vertiefung entstehen. Der etwa entstandene Bart ist sorgfältig zu entfernen. Die Nietköpfe dürfen keinerlei Risse zeigen.

Die Niete zu verstemmen, ist nicht gestattet. — Nach dem Vernieten ist zu untersuchen, ob die Niete vollkommen festsitzen und nicht prellen. Alle nicht fest eingezogenen oder den sonstigen vorstehenden Bedingungen nicht entsprechenden Niete sind wieder herauszuschlagen und durch vorschriftsmäfsige zu ersetzen. In keinem Falle ist es gestattet, die Niete im kalten Zustande nachzutreiben.

9. Die vorkommenden Schraubengewinde müssen nach der Whitworthschen Skala rein ausgeschnitten sein. Die Muttern dürfen weder schlottern, noch zu festen Gang haben. Die Köpfe und Muttern müssen mit der ganzen zur Anlage bestimmten Fläche aufliegen. — Bei schiefen Anlageflächen sind die Köpfe, soweit sie nicht genau angepafst werden, ebenso wie die Muttern, mit entsprechend schiefen Unterlegplatten zu versehen. — Sind nach Angabe der Zeichnungen oder der Bedingungen gedrehte Schraubenbolzen zu verwenden, so müssen diese in die für sie bestimmten Bohrlöcher genau passen.

10. Die Konstruktionsteile sind auf sicheren Unterlagen zusammenzupassen. Hierbei ist darauf zu achten, dafs keiner dieser Teile in eine einseitige Spannung gezwängt wird, dafs ihre Verbindung vielmehr gelöst werden kann, ohne dafs die betreffenden Stücke

Digitized by Google

auseinanderfedern. Sollten sich bei der Vernietung einzelne Konstruktionsteile verziehen, so müssen die Verbindungen gelöst und die vorhandenen Fehler sorgfältig beseitigt werden.

Das Nieten auf dem Bauplatze ist soviel wie irgend möglich zu beschränken.

III. Nietungen für Maschinenteile

zur Uebertragung von Kräften mit fortwährend wechselnder Richtung. Solche Verbindungen werden (nach Bach z. B. bei Wasserradwellen) hergestellt durch Einziehen von Nieten im kalten Zustande derart, dafs der Nietschaft nicht nur das Loch ausfüllt, sondern mit Gewalt eingetrieben wird und sich also mit einem gewissen Drucke gegen die Lochwand legt. — Teuer und meist ersetzt durch Verwendung kegelförmiger Schraubenbolzen nach Abb. 31, S. 752.

II. Maschinenteile der drehenden Bewegung.

A. Zahnräder.

Nach der gegenseitigen Stellung der Wellen sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Für **parallele** Wellen: zylindrische Räder, Stirnräder.
2. Für **sich schneidende** Wellen: Kegelräder.
3. Für **sich kreuzende** (geschränkte) Wellen: hyperboloidische oder zylindrische Schraubenräder **oder** Schnecke und Schneckenrad.

a. Verzahnung (s. auch Mechanik S. 212).

1. Allgemeines.

Die gemeinsame Berührungsnormale der Zahnprofile, d. h. die Zahndruckrichtung, teilt in jedem Augenblick des Eingriffs die Räderzentrale im umgekehrten Verhältnis der Achsenwinkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2. (Ueber ω S. 146 ff.)

Für jedes Räderpaar ist das Verhältnis $\omega_1 : \omega_2$ in der Regel unveränderlich; nur ausnahmsweise ist $\omega_1 : \omega_2$ veränderlich (bei unrunden Rädern, S. 778, periodisch veränderlich). Für gleichbleibende Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten geht die Zahndruckrichtung stets durch den Berührungspunkt der beiden Teilkreise; diese wälzen sich aufeinander ab, ohne zu gleiten. Bei unrunden Rädern treten an die Stelle der Teilkreise andere Wälzungskurven, deren Form von dem Veränderlichkeitsgesetze der Uebersetzung abhängt. (Festigkeitsberechnung S. 779.)

Ist t die Teilung, d. h. der Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte, gemessen als Bogen auf dem Teilkreise, so ist bei z Zähnen und dem Teilkreishalbmesser r:

$$2\pi r = zt \quad \text{(Tafel S. 764).}$$

Damit sich für den Teilkreishalbm. r und für den Achsenabstand zweier Räder ein rundes Mafs ergibt, wählt man die Teilung t in einfachem Verhältnis zu π, also $t = m\pi$ mm, dann ist

$$2r = zm.$$

Digitized by Google

Tafel von $\left(\frac{r}{l}\right) = \frac{z}{2\pi}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,159	0,318	0,477	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,592	1,751	1,910	2,069	2,228	2,387	2,546	2,706	2,865	3,024
20	3,183	3,342	3,501	3,661	3,820	3,979	4,138	4,297	4,456	4,615
30	4,775	4,934	5,093	5,252	5,411	5,570	5,730	5,889	6,048	6,207
40	6,366	6,525	6,685	6,844	7,003	7,162	7,321	7,480	7,639	7,799
50	7,958	8,117	8,276	8,435	8,594	8,754	8,913	9,072	9,231	9,390
60	9,549	9,708	9,868	10,027	10,186	10,345	10,504	10,663	10,823	10,982
70	11,141	11,300	11,459	11,618	11,777	11,937	12,096	12,255	12,414	12,573
80	12,732	12,892	13,051	13,210	13,369	13,528	13,687	13,846	14,006	14,165
90	14,324	14,483	14,642	14,801	14,960	15,120	15,279	15,438	15,597	15,756
100	15,916	16,075	16,234	16,393	16,552	16,711	16,870	17,030	17,189	17,348
110	17,507	17,666	17,825	17,985	18,144	18,303	18,462	18,621	18,780	18,939
120	19,099	19,258	19,417	19,576	19,735	19,894	20,053	20,213	20,372	20,531
130	20,690	20,849	21,008	21,168	21,327	21,486	21,645	21,804	21,963	22,122
140	22,282	22,441	22,600	22,759	22,918	23,077	23,237	23,396	23,555	23,714
150	23,873	24,032	24,192	24,351	24,510	24,669	24,828	24,987	25,146	25,306
160	25,465	25,624	25,783	25,942	26,101	26,261	26,420	26,579	26,738	26,897
170	27,056	27,216	27,375	27,534	27,693	27,852	28,011	28,170	28,330	28,489
180	28,648	28,807	28,966	29,125	29,285	29,444	29,603	29,762	29,921	30,080
190	30,239	30,399	30,558	30,717	30,876	31,035	31,194	31,354	31,513	31,672
200	31,831	31,990	32,149	32,308	32,468	32,627	32,786	32,945	33,104	33,263
210	33,423	33,582	33,741	33,900	34,059	34,218	34,377	34,537	34,696	34,855
220	35,014	35,173	35,332	35,492	35,651	35,810	35,969	36,128	36,287	36,446
230	36,606	36,765	36,924	37,083	37,242	37,401	37,560	37,720	37,879	38,038
240	38,197	38,356	38,515	38,675	38,834	38,993	39,152	39,311	39,470	39,629
250	39,789	39,948	40,107	40,266	40,425	40,585	40,744	40,903	41,062	41,221
260	41,380	41,539	41,699	41,858	42,017	42,176	42,335	42,494	42,654	42,813
270	42,972	43,131	43,290	43,449	43,608	43,768	43,927	44,086	44,245	44,404
280	44,563	44,722	44,882	45,041	45,200	45,359	45,518	45,677	45,837	45,996
290	46,155	46,314	46,473	46,632	46,792	46,951	47,110	47,269	47,428	47,587
300	47,747	47,906	48,065	48,224	48,383	48,542	48,701	48,861	49,020	49,179
310	49,338	49,497	49,656	49,816	49,975	50,134	50,293	50,452	50,611	50,770
320	50,930	51,089	51,248	51,407	51,566	51,725	51,885	52,044	52,203	52,362
330	52,521	52,680	52,839	52,999	53,158	53,317	53,476	53,635	53,794	53,954
340	54,113	54,272	54,431	54,590	54,749	54,908	55,068	55,227	55,386	55,545
350	55,704	55,864	56,023	56,182	56,341	56,500	56,659	56,818	56,978	57,137
360	57,296	57,455	57,614	57,773	57,932	58,092	58,251	58,410	58,569	58,728
370	58,887	59,047	59,206	59,365	59,524	59,683	59,842	60,001	60,161	60,320
380	60,479	60,638	60,797	60,956	61,115	61,275	61,434	61,593	61,752	61,911
390	62,070	62,230	62,389	62,548	62,707	62,866	63,025	63,185	63,344	63,503

Digitized by Google

Winkelgeschwindigkeit ω für $n = 0$ bis $n = 509$ Umläufe in der Minute.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,1047	0,2094	0,3142	0,4189	0,5236	0,6283	0,7330	0,8378	0,9425
10	1,0472	1,1519	1,2566	1,3614	1,4661	1,5708	1,6755	1,7802	1,8850	1,9897
20	2,0944	2,1991	2,3038	2,4086	2,5133	2,6180	2,7227	2,8274	2,9322	3,0369
30	3,1416	3,2463	3,3510	3,4558	3,5605	3,6652	3,7699	3,8746	3,9794	4,0841
40	4,1888	4,2935	4,3982	4,5029	4,6077	4,7124	4,8171	4,9218	5,0265	5,1313
50	5,2360	5,3407	5,4454	5,5501	5,6549	5,7596	5,8643	5,9690	6,0737	6,1785
60	6,2832	6,3879	6,4926	6,5973	6,7021	6,8068	6,9115	7,0162	7,1209	7,2257
70	7,3304	7,4351	7,5398	7,6445	7,7493	7,8540	7,9587	8,0634	8,1681	8,2729
80	8,3776	8,4823	8,5870	8,6917	8,7965	8,9012	9,0059	9,1106	9,2153	9,3201
90	9,4248	9,5295	9,6342	9,7389	9,8437	9,9484	10,053	10,158	10,263	10,367
100	10,472	10,577	10,681	10,786	10,891	10,996	11,100	11,205	11,310	11,414
110	11,519	11,624	11,729	11,833	11,938	12,043	12,147	12,252	12,357	12,462
120	12,566	12,671	12,776	12,881	12,985	13,090	13,195	13,299	13,404	13,509
130	13,614	13,718	13,823	13,928	14,032	14,137	14,242	14,347	14,451	14,556
140	14,661	14,765	14,870	14,975	15,080	15,184	15,289	15,394	15,499	15,603
150	15,708	15,813	15,917	16,022	16,127	16,232	16,336	16,441	16,546	16,650
160	16,755	16,860	16,965	17,069	17,174	17,279	17,383	17,488	17,593	17,698
170	17,802	17,907	18,012	18,117	18,221	18,326	18,431	18,535	18,640	18,745
180	18,850	18,954	19,059	19,164	19,268	19,373	19,478	19,583	19,687	19,792
190	19,897	20,001	20,106	20,211	20,316	20,420	20,525	20,630	20,735	20,839
200	20,944	21,049	21,153	21,258	21,363	21,468	21,572	21,677	21,782	21,886
210	21,991	22,096	22,201	22,305	22,410	22,515	22,619	22,724	22,829	22,934
220	23,038	23,143	23,248	23,353	23,457	23,562	23,667	23,771	23,876	23,981
230	24,086	24,190	24,295	24,400	24,504	24,609	24,714	24,819	24,923	25,028
240	25,133	25,237	25,342	25,447	25,552	25,656	25,761	25,866	25,970	26,075
250	26,180	26,285	26,389	26,494	26,599	26,704	26,808	26,913	27,018	27,123
260	27,227	27,332	27,437	27,541	27,646	27,751	27,855	27,960	28,065	28,170
270	28,274	28,379	28,484	28,588	28,693	28,798	28,903	29,007	29,112	29,217
280	29,322	29,426	29,531	29,636	29,740	29,845	29,950	30,055	30,159	30,264
290	30,369	30,473	30,578	30,683	30,788	30,892	30,997	31,102	31,206	31,311
300	31,416	31,521	31,625	31,730	31,835	31,940	32,044	32,149	32,254	32,358
310	32,463	32,568	32,673	32,777	32,882	32,987	33,091	33,196	33,301	33,406
320	33,510	33,615	33,720	33,824	33,929	34,034	34,139	34,243	34,348	34,453
330	34,558	34,662	34,767	34,872	34,976	35,081	35,186	35,291	35,395	35,500
340	35,605	35,709	35,814	35,919	36,024	36,128	36,233	36,338	36,442	36,547
350	36,652	36,757	36,861	36,966	37,071	37,176	37,280	37,385	37,490	37,594
360	37,699	37,804	37,909	38,013	38,118	38,223	38,327	38,432	38,537	38,642
370	38,746	38,851	38,956	39,060	39,165	39,270	39,375	39,479	39,584	39,689
380	39,794	39,898	40,003	40,108	40,212	40,317	40,422	40,527	40,631	40,736
390	40,841	40,945	41,050	41,155	41,260	41,364	41,469	41,574	41,678	41,783
400	41,888	41,993	42,097	42,202	42,307	42,412	42,516	42,621	42,726	42,830
410	42,935	43,040	43,145	43,249	43,354	43,459	43,563	43,668	43,773	43,878
420	43,982	44,087	44,192	44,296	44,401	44,506	44,611	44,715	44,820	44,925
430	45,029	45,134	45,239	45,344	45,448	45,553	45,658	45,763	45,867	45,972
440	46,077	46,181	46,286	46,391	46,496	46,600	46,705	46,810	46,914	47,019
450	47,124	47,229	47,333	47,438	47,543	47,647	47,752	47,857	47,962	48,066
460	48,171	48,276	48,381	48,485	48,590	48,695	48,799	48,904	49,009	49,114
470	49,218	49,323	49,428	49,532	49,637	49,742	49,847	49,951	50,056	50,161
480	50,265	50,370	50,475	50,580	50,684	50,789	50,894	50,999	51,103	51,208
490	51,313	51,417	51,522	51,627	51,732	51,836	51,941	52,046	52,150	52,255
500	52,360	52,465	52,569	52,674	52,779	52,883	52,988	53,093	53,198	53,302

Digitized by Google

Man nennt $m = t : \pi$ den **Modul** der Teilung.

Beispiel: Zwei Räder haben 20 und 80 Zähne, der Modul $m = t : \pi$ sei 8. Dann ist der Halbmesser des ersten Rades:

$$r_1 = \frac{z_1 \cdot m}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ mm},$$

des zweiten Rades: $r_2 = \frac{z_2 \cdot m}{2} = \frac{80 \cdot 8}{2} = 320$ mm.

Der Achsenabstand beider Räder ist also

$$r_1 + r_2 = 80 + 320 = 400 \text{ mm}.$$

Teilung t = Zahnstärke s + Zahnlückenweite. Für unbearbeitete Räder:

$$\textbf{Zahnstärke } s = \frac{19}{40}\, t, \qquad \textbf{Lückenweite} = \frac{21}{40}\, t,$$

entsprechend einem Flankenspielraum $= {}^1/_{20}\, t$, der bei bearbeiteten Rädern auf die Hälfte oder bis auf null vermindert werden kann, so dafs die Zahnstärke $s = {}^{39}/_{80}\, t$ bis $s = {}^1/_2\, t$ wird.

Kopfhöhe gewöhnlich $= 0{,}3\, t$, Fufshöhe $= 0{,}4\, t$, gesamte Zahnhöhe oder Zahnlänge also $= 0{,}7\, t$. — Vielfach werden Zahnräder nur durch die Zähnezahl z und durch den Modul m bestimmt. Die Kopfhöhe des Zahnes wird dann gleich m, die Fufshöhe gleich 1,16 m.

Uebersetzungsverhältnis:

$$\frac{\text{Zähnezahl des treibenden Rades}}{\text{Zähnezahl des getriebenen Rades}} = \frac{\text{Umlaufzahl des getriebenen Rades}}{\text{Umlaufzahl des treibenden Rades}}$$

zweier zusammen arbeitenden Räder

$$\varphi = r_1 : r_2 = z_1 : z_2 = n_2 : n_1 = \omega_2 : \omega_1,$$

worin r_1 und r_2 die Teilkreishalbmesser,
z_1 „ z_2 die Zähnezahlen,
n_1 „ n_2 die minutlichen Umdrehungszahlen und
ω_1 „ ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten des treibenden und des getriebenen Rades bedeuten.

2. Stirnräder mit Zykloidenverzahnung.

(Kreisbogenförmige Eingrifflinie.)

1. Bestimmung der Zahnprofile (Abb. 56).

T_1 und T_2 sind die durch $z \cdot t$ gegebenen Teilkreise, W_1 und W_2 die gewählten Wälzungskreise oder Rollkreise. (Gröfse der Wälzungskreise S. 768 unter Ziffer 4.)

Wälzt man Wälzungskreis W_1 auf Teilkreis T_1 ab, so beschreibt Punkt O das Fufsprofil OH_1 (Hypozykloide); wälzt man W_1 auf dem anderen Teilkreise T_2 ab, so beschreibt O das zugehörige Kopfprofil OE_2 (Epizykloide) des anderen Rades. Wälzt man W_2 auf T_1 und auf T_2 ab, so ergeben sich die Epizykloide OE_1 als Kopfprofil des ersten Rades und die Hypozykloide OH_2 als zugehöriges Fufsprofil des anderen Rades.

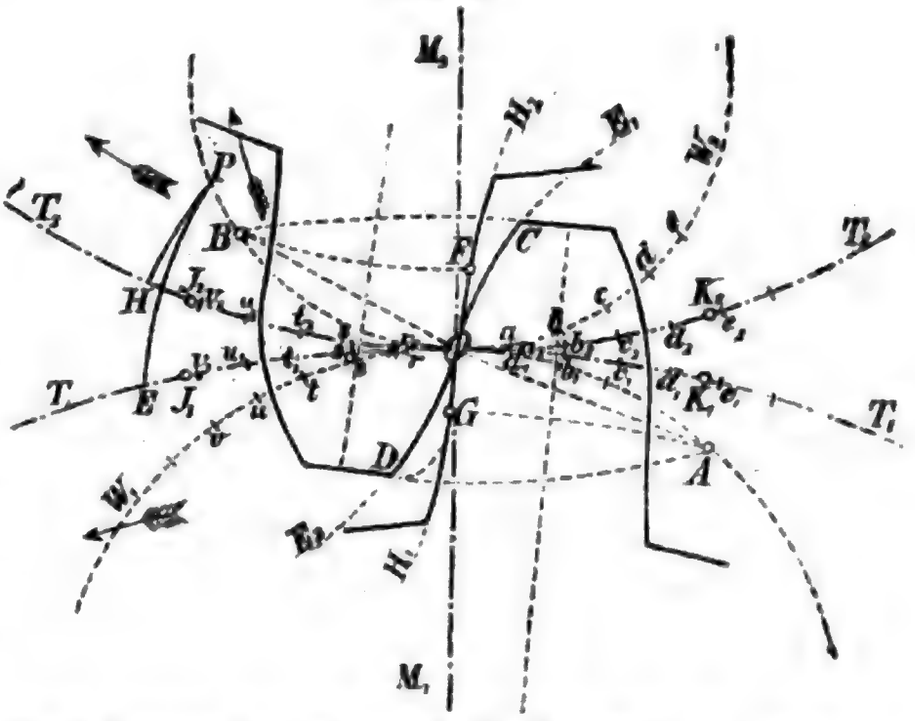
Hierzu trage man auf beiden Teilkreisen und auf dem Wälzungskreise W_2 gleiche Bogen $Oa_1 = Oa_2 = Oa$, $a_1b_1 = a_2b_2 = ab$ ... ab

Digitized by Google

und beschreibe mit aO, bO, cO ... der Reihe nach um die Punkte a_1, b_1, c_1 ... auf T_1 und um die entspr. Punkte a_2, b_2, c_2 ... auf T_2 Kreisbogen, die als Umhüllung die Epizykloide OE_1 und die Hypozykloide OH_2 geben, sobald man ab, bc ... genügend klein wählt.

Wird entsprechend auf der anderen Seite mit dem Wälzungskreise W_1 verfahren, so ergeben sich die Epizykloide OE_2 und die Hypozykloide OH_1 unter Benutzung der zusammengehörigen Teilpunkte r, s, t ..., r_2, s_2, t_2 ... und r_1, s_1, t_1 ...

Abb. 56.



Zahneingriff zu beiden Seiten der Zentrale M_1M_2, wie er durch Benutzung von zwei Wälzungskreisen erzielt wird, liefert unter sonst gleichen Verhältnissen stets günstigere Verzahnungen als einseitiger Eingriff, da bei gleicher Länge der Eingriffstrecke die Zahndruckrichtungen weniger weit von der gemeinsamen Tangente der Teilkreise abweichen, für die der Zahndruck am kleinsten wird.

Die Kopfkreise schneiden auf der **Eingriffinie**, die bei der Zykloidenverzahnung das zur Räderzentrale symmetrisch gelegene Spiegelbild des abgewälzten Teiles vom Wälzungskreise ist, die benutzte **Eingriffstrecke** BOA ab. Dieser entspricht der gleich grofse **Eingriffbogen** J_1OK_1 bzw. J_2OK_2 der Teilkreise, der gröfser als t sein mufs. **Eingriffdauer** $\varepsilon = \dfrac{\text{Eingriffbogen}}{\text{Teilung}} > 1$ (möglichst $\geqq 1{,}2\ t$) ist bei der gewählten Zahnlänge $0{,}7\ t$ im allgemeinen gesichert. Bei Trieblingen mit geringer Zähnezahl (3 bis 5) ist die Zahnlänge nach Bedarf aus dem Eingriffbogen zu bestimmen.

2. **Zahnreibung** (s. auch Mechanik S. 255*). Die Zahnköpfe gelangen ganz zum Eingriff, die Zahnfüfse nur auf einer kurzen Strecke OG und OF. Zur Ermittlung von G und F dienen die Kreisbahnen der Punkte A und B um ihre Radmittelpunkte.

Bezeichnet P den mittleren Zahndruck, der durch die Grenzrichtungen OA und OB bestimmt ist, μ die Reibungszahl, so ist der verhältnismäfsige **Arbeitsverlust** durch gleitende Reibung in Teilen der Nutzarbeit $\mathfrak{V} = \mu \dfrac{(OD - OG + OC - OF)\,P}{(OA + OB)\,P}$.

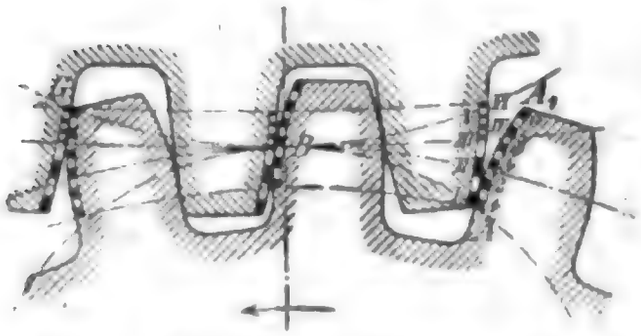
*) M. Kohn, Zahnreibung, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1114; J. Goebel, Die Reibung der Zahnräder, Z. d. V. d. I. 1896 S. 459; Büchner, Z. d. V. d. I. 1902 S. 159 u. 278.

Digitized by Google

Diese Formel setzt die Zahnform als bekannt voraus; sie liefert gute Näherungswerte, berücksichtigt aber nicht den Wechsel in der Gröfse des Zahndruckes und den Umstand, dafs abwechselnd ein und zwei, oder zwei und drei Zähne arbeiten.

3. Gleiten. Die durch die Reibungsarbeit erzeugte Abnutzung ist am Zahnfufs bedeutender als am Kopf, weil sie sich am Kopf auf eine gröfsere Strecke verteilt. Ein Bild von der Aenderung des Gleitens erhält man nach Lasche*) gemäfs Abb. 57. Man teilt das arbeitende Profil AA_1 des treibenden Zahns in gleich lange Strecken 1, 2, 3, usw. Zu diesen Flankenteilen bestimmt man die entspr. Strecken auf der angetriebenen Zahnflanke I, II, III, usw. Das Verhältnis der Längen je zweier zusammen arbeitenden Strecken bestimmt das Mafs des Gleitens.

Abb. 57.



Bei Zykloidenzähnen ist dieses Verhältnis auf jeder Seite der Teilkreise über die ganze Länge der zusammen arbeitenden Profile unveränderlich.

4. Wahl der Wälzungskreise. Gröfsere Wälzungskreise vergröfsern die Eingriffstrecke und verkleinern den Normaldruck P; anderseits verkleinert sich die benutzbare Fufsprofilstrecke unter Vergröfserung des Reibungsweges. Die günstigsten Verhältnisse ergeben sich im allgemeinen für Wälzungskreise, deren Durchm. etwas kleiner ist als der Halbmesser des umschliefsenden Teilkreises.

Vergröfserung des Wälzungskreisdurchm. bis zum Halbmesser des umschliefsenden Teilkreises liefert geradlinige, radiale Fufsprofile, weitere Vergröfserung konvex unterschnittene Zahnwurzeln von abnehmender Länge bis zur Beschränkung auf einen Punkt für den Grenzfall: Wälzungskreis = Teilkreis (S. 769 Abb. 58). Ueberschreitungen des Falles: Wälzungskreisdurchm. = Teilkreishalbmesser sind selbst bei kleinen Trieblingen für Handbetrieb zu vermeiden.

5. Satzräder. Wählt man bei Rädern gleicher Teilung beide Wälzungskreise von gleicher Gröfse für alle Zähnezahlen, so erhält man einen Rädersatz, dessen einzelne Räder, ganz beliebig miteinander gepaart, richtig arbeiten können, da ihre Eingrifflinien kongruent sind und der Teilkreis (oder die Zentrale) jede der beiden Eingrifflinien in zwei sich deckende Teile zerlegt.

Für Satzräder macht man gewöhnlich den Halbmesser der Wälzungskreise

$$= 0{,}875\, t = 2{,}75\, t : \pi.$$

Hierbei wird für $z = 11$ das Fufsprofil gerade, für $z < 11$ unterschnitten; die Verzahnung ist indes (für Satzräder) bis $z = 7$ herunter brauchbar. $\tau = 1{,}22$ bis $1{,}60$.

Die Abhängigkeit der Krümmung der benutzten Eingrifflinie von dem kleinsten Rade im Satze liefert ungünstige Verzahnungsverhältnisse für die gröfseren Räder und verbietet eine allgemeine Durchführung der Satzräderverzahnung.

*) Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417 ff.; Büchner, Abnutzungs- und Reibungsverhältnisse der Stirnzahnräder (mit anderer zeichnerischer Darstellung) Z. d. V. d. I. 1902 S. 159 u. 278).

Digitized by Google

Aus diesem Grunde sind wichtige Triebwerkräder stets als **Einzelräder** zu entwerfen; sie erfordern für ruhigen Gang eine Eingriffdauer $\varepsilon \geqq 2$ und demnach grofse Zähnezahl, in der Regel $= 24$ bis 36. Bei Rädern für Handbetrieb begnügt man sich mit 10 Zähnen als der unteren Grenze und geht bei Zahnstangentrieblingen für Wagenwinden sogar auf $z = 4$ herab, bei etwa $\varepsilon = 1{,}2$.

6. **Künstliche Lückenprofilierung.** Nimmt man den Wälzungskreis mit dem Teilkreise zusammenfallend an, so schrumpft das Fufsprofil auf einen Punkt zusammen, und der Gegenzahnkopf erfordert eine künstliche Vertiefung der Lücke für seine Bahn. Auch sonst kann das Zahnwurzelprofil von dem äufsersten Punkte seines Eingriffs ab ausschliefslich mit Rücksicht auf die Bahn des Eckpunktes des Gegenzahnkopfes ausgebildet werden, wovon bei stark unterschnittenen Zahnwurzeln Gebrauch zu machen ist. Die relative Kopfbahn GD (Abb. 56 S. 767) wird eingehüllt durch Kreisbogen, die mit den Halbmessern OD, r_2D, s_2D, t_2D ... um die Mittelpunkte O, r_1, s_1, t_1 ... beschrieben sind. Das wirkliche Zahnfufsprofil GH_1 mufs noch einigen Spielraum lassen, wodurch eine etwaige kleine Verschiebung des Rades in Richtung der Zentrale berücksichtigt wird; jedenfalls läfst sich eine erhebliche Verstärkung des Fufsprofils erreichen, das in G in die benutzte Profilstrecke OG übergeht.

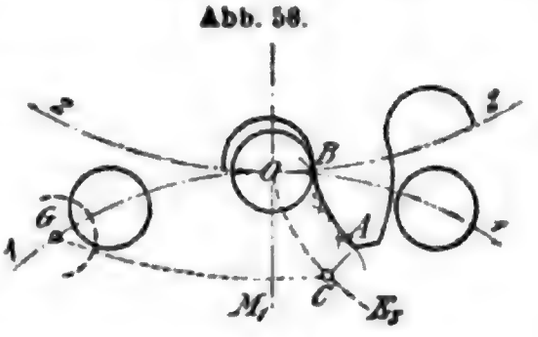
7. **Hohlräder** erhalten bei der Zykloidenverzahnung umgekehrt wie Vollräder Hypozykloiden als Zahnköpfe, Epizykloiden als Zahnfüfse.

8. **Zahnstangen** mit Zykloidenverzahnung werden kaum noch hergestellt. — Es wird dafür allgemein Evolventenverzahnung gewählt.

Bei allen Zykloidenrädern sind die Zahnformen nach Schablonen auszuführen.

Triebstockverzahnung*) (Abb. 58) entsteht bei Wahl einseitiger Eingrifflinie (Eingriff beginnt bei O auf der Zentrale M_1), sobald der eine benutzte Wälzungskreis gleich dem umschliefsenden Teilkreise ist und das hierdurch auf einen Punkt beschränkte Fufsprofil durch einen gleichachsigen Kreis zu einem Zylinder erweitert wird. Durchm. dieses Kreises $= {}^{19}/_{40}\,t$. Dies ergibt für das Gegenprofil die der Epizykloide OE_2 entsprechende Aequidistante BA. Zahnkopfhöhe durch Eingriffbogen $OG > t$ bestimmt. Die Verzahnung wird für Voll- und Hohlräder wie für Zahnstangen und Gallsche Ketten besonders im Kranbau vielfach angewendet.

Abb. 58.



Grisson-Getriebe (D. R. P. 93 236, ausgeführt von E. Becker, Berlin-Reinickendorf-Ost), Ersatz für Schneckengetriebe, doppelte oder dreifache Vorgelege, für grofse Uebersetzungen (1 : 5 bis 1 : 50), eine Art von Stirnrädern mit Triebstockverzahnung. Das grofse Rad enthält zwischen drei Kranzscheiben zwei um eine halbe Teilung gegeneinander versetzte Reihen von (z. B. je sechs) Triebstöcken, die zur Verminderung der Reibung als Hohlzylinder um schwächere Zapfen drehbar sind.

*) Bach, Konstruktion der Zahnflanke aus der gewählten Eingrifflinie, 11. Aufl., S. 299 u. 315.

Digitized by Google

Rollen und Bolzen aus hartem Stahl werden nach dem Härten nach Grenzlehren mit 0,01 mm Toleranz geschliffen. Das kleine Rad, ebenfalls aus hartem Stahl, hat zwei um 180° gegeneinander versetzte Daumen, die je ein einzähniges Rad darstellen. — Es werden Daumenräder mit Bohrungen von 10 bis 100 mm Durchm. und Triebstockräder mit 5 bis 30 Bolzen geliefert.

Wirkungsgrad (nach Versuchen von E. Roser*) = 0,86 bis 0,96 bei 1 : 18 Uebersetzung ins Langsame; 0,53 bis 0,90 ins Schnelle. Die höchste zulässige Umfangskraft P (am Halbmesser R wirkend) mufs mit der minutlichen Umlaufszahl n des Rades für Dauerbetrieb in der Beziehung stehen $Pn \leqq 200\,000$. (Gröfstwerte von Pn für Stahldaumen 274 000, für Daumen aus Stahlguſs 314 000.)

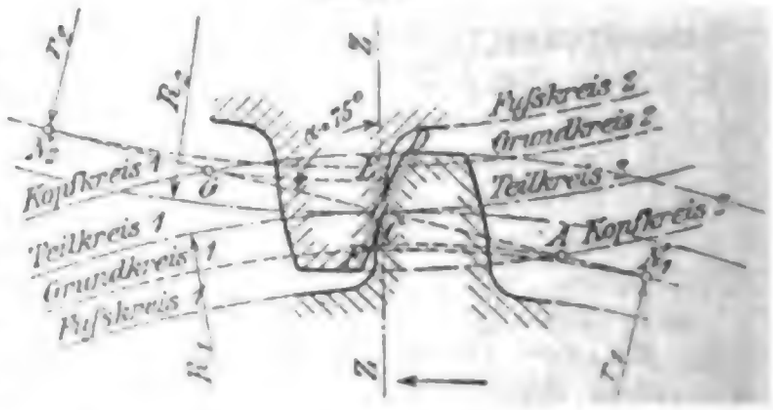
Grisson-Getriebe sind besonders anwendbar bei Uebersetzungen vom Schnellen ins Langsame (Antrieb durch Elektromotoren, Dampfturbinen usw.). Bei hoher Umlaufzahl zweiseitige Lagerung des Daumenrades erforderlich. — Das Getriebe wird bei Umfangsgeschw. über 1 m/sk, in Oelkasten eingebaut, mit Ringschmierlagern geliefert.

8. Stirnräder mit Evolventenverzahnung.

(Gerade Eingrifflinie.)

1. Gegeben die Teilkreise 1 und 2 (Abb. 59); die Erzeugende $N_1 O N_2$ schneidet sich in O mit der Zentrale Z in der Regel in einem Winkel $\alpha = 75^0$. Durch punktweises Abwälzen (Auftragen gleicher Teilstrecken ähnlich Abb. 56) der Geraden $N_1 N_2$ auf den sie berührenden Grundkreisen 1 und 2 entstehen die Evolventen COD und EOF. — Kopf- und Fufskreise im Abstande 0,3 und 0,4 t von den Teilkreisen. (Ausnahmen S. 771 u. 772). Liegt der Fufskreis innerhalb des Grundkreises, so werden die Evolventenflanken radial bis zum Fufskreis verlängert und mit Abrundungen in den Zahnkranz übergeführt. (Für $\alpha = 75^0$ stets, wenn $z < 74$.)

Abb. 59.



Die Erzeugende $N_1 N_2$ ist die **Eingrifflinie,** die Richtung des Normaldruckes fällt mit dieser Linie zusammen; Begrenzung der Eingriffstrecke durch die Schnittpunkte A und B der beiden Kopfkreise.

Zahnstärke, Ermittlung der benutzten Fufsprofilstrecken OF und OG sowie Bestimmung der Zahnreibung wie bei Zykloidenverzahnung.

$$\text{Eingriffdauer } \tau = \frac{\text{Eingriffstrecke} \times \text{Teilkreishalbmesser}}{\text{Grundkreishalbmesser} \times \text{Teilung}} > 1.$$

Aus der Entstehung der Profile ergibt sich:

*) E. Roser, Untersuchung des Grisson-Getriebes. Stuttgart 1901.

Digitized by Google

α) Die benutzbare Eingriffstrecke mufs zwischen $N_1 N_2$ liegen, weil der Fortsetzung über N_1 oder N_2 hinaus als Zahnprofil ein neuer Evolventenzweig entsprechen würde, der nicht ausführbar ist.

β) Greift AG über $N_1 N_2$ hinaus, so ist die Kopfhöhe des Zahnes und damit die Eingriffdauer oder, wenn dies nicht statthaft, der Winkel α zu verkleinern. Die hiermit verbundene Verschlechterung der Verzahnung bestimmt die kleinste zulässige Zähnezahl und die höchstens zulässige Kopfhöhe.

γ) Der Winkel α mufs stets kleiner sein als 90^0, weil für 90^0 die Strecke $N_1 N_2 = 0$ wird. Meist wählt man $\alpha = 75^0$ ($= 45^0 + 30^0$). Dann ist $z_{min} = 14$ und $r = 1$ bis 2,5.

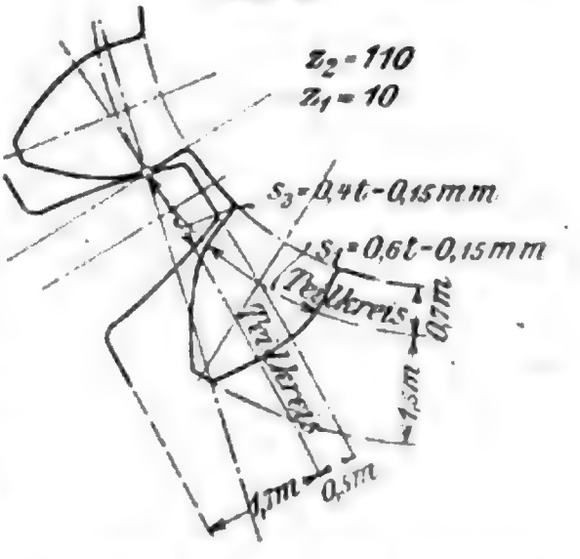
δ) Der Eingriff reicht nie über den Grundkreis hinaus; daher radiale Verlängerungen der Fufsprofile innerhalb der Grundkreise statthaft.

ε) Die jedesmalige gemeinschaftliche Tangente beider Grundkreise wird die neue Eingrifflinie; die Gestalt der erzeugten Evolventen und das Uebersetzungsverhältnis bleiben ungeändert. Daher kann die Entfernung der Achsen geändert werden, solange die Eingriffdauer $r > 1$ bleibt.

Aufzeichnung üblicher Evolventenverzahnung sehr einfach nach „Grants Odontograph".*)

Alle Evolventenräder mit gleicher Teilung sind **Satzräder**, sobald die Erzeugende gegen die gemeinsame Mittellinie dieselbe Neigung hat. Die frühere Angabe, dafs Evolventen als Satzräder nur für $z \geqq 30$ zu empfehlen sind, kann nicht mehr aufrecht erhalten werden.

Abb. 60.



Der Grundkreis kommt, je kleiner z ist, dem Teilkreis immer näher, so dafs die Zähne (mit radialen Flanken) immer mehr unterschnitten werden und die nutzbare Zahnflanke kleiner wird, doch ist dies und die Schwächung des Zahnfufses bis zu $z = 20$ bedeutungslos. Bei kleineren Zähnezahlen wird die Schwächung des Zahnfufses vermieden und die nutzbare Zahnflanke vergröfsert durch Verlegung des Teilkreises derart, dafs bei kleinen Triebrädern der Fufskreis sehr nahe an den Teilkreis, dagegen bei den grofsen Rädern [oder bei der Zahnstange, entspr. bei der Schnecke (Abb. 71 S. 776)] der Kopfkreis nahe an den Fufskreis rückt. Abb. 60 (über die Gleitverhältnisse unter 4.) zeigt eine Verzahnung für ein Radpaar mit den Zähnezahlen von 10 und 110. Modul $m = \frac{t}{\pi} = 16$; Teilung $t = 16\,\pi = 50{,}265$ mm; Zahnhöhe $h = 2{,}2$ m. Fufs- und Kopfkreise in Modulmafs in der Abbild. bestimmt. Zahnstärke des kleinen Rades im

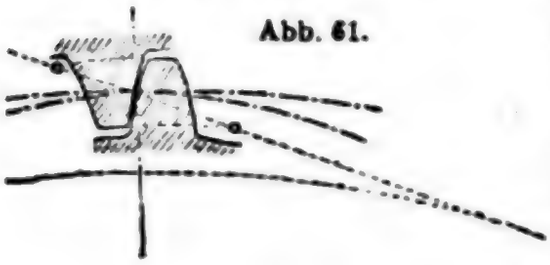
*) Beschrieben und für metrische Modulteilungen zurechtgemacht im Katalog der Firma Friedrich Stolzenberg & Co. G. m. b. H. in Berlin-Reinickendorf-West. — Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge 25. Sept. 1918 S. 548 ff.

Digitized by Google

Teilkreis $s_1 = 0{,}6\,t - 0{,}15$ mm, des grofsen Rades $s_2 = 0{,}4\,t - 0{,}15$ mm. — Allgemein wird angegeben, wenn der Teilkreis $= zm$ ist, für den Fufskreis des kleinen Rades: $d = (z - 1{,}4)\,m$; für den Kopfkreis $d = (z + 3)\,m$, dagegen für das grofse Rad: Fufskreis $d = (z - 3{,}4)\,m$, Kopfkreis $d = (z + 1)\,m$.

2. **Hohlräder** häufig angewendet. Vorteile (bei richtiger Ausführung): längerer Zahneingriff, geräuschloser Gang — ferner Raumersparnis, auch durch Ausnutzung des grofsen Rades als Riemenscheibe, als Zahnrad mit Aufsenverzahnung usw. Im übrigen wie Vollräder zu behandeln; konkav gekrümmte Zahnflanken (Abb. 61).

Abb. 61.



3. **Zahnstangen** erhalten, ihren unendlich grofsen Teil- und Grundkreisen entsprechend, auch Evolventen von unendlich grofser Krümmung, d. h. geradlinige Profile, winkelrecht zur gewählten Eingrifflinie.

Abb. 62.

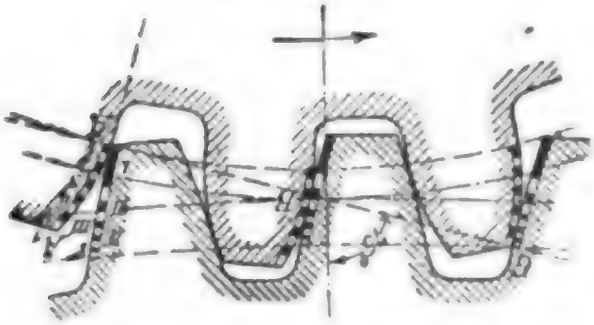


Abb. 63.

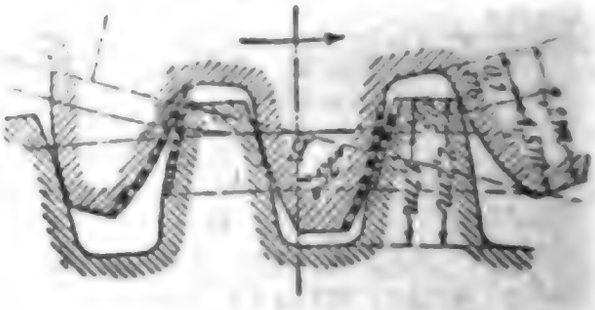


Abb. 64.

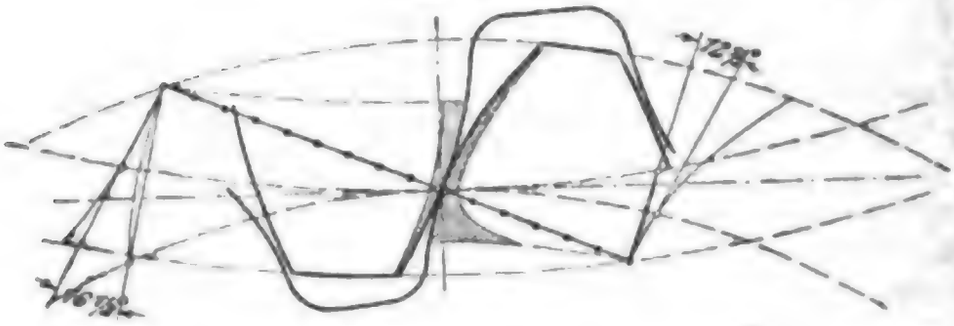
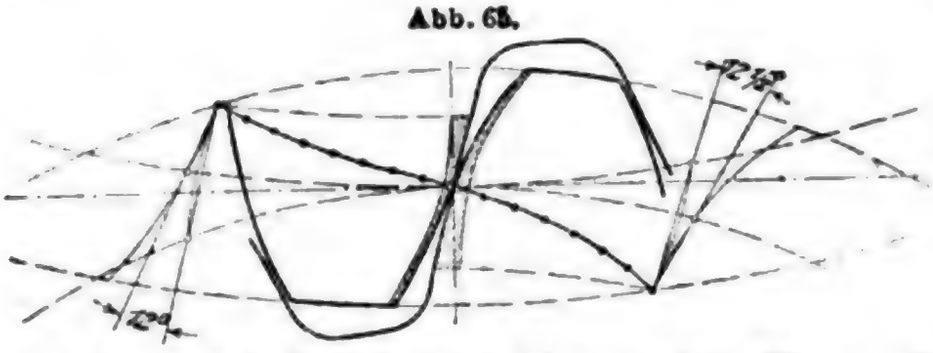


Abb. 65.



Evolventenprofile lassen sich mit einer Schablone für den Grundkreis durch eine Uhrfeder mit zwei Nadelfüfsen, von denen man den einen am Umfange der Schablone einsetzt, unmittelbar am Arbeitstücke vorreifsen.

4. **Gleitverhältnisse.** Die Untersuchung nach S. 768 führt hier zu Abb. 62. — Das Gleiten ist am Kopfende des gröfseren Rades besonders stark. Die AEG*) zu Berlin kürzt daher die Kopfhöhe des grofsen Rades unter $0{,}3\,t$ und ver-

*) Lasche in Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417 u. 1487 ff.

Digitized by Google

kleinert damit die Eingriffstrecke vor der Zentrale; Umgekehrtes findet statt bei dem kleinen Rade (Abb. 63, auch Abb. 60).

Abb. 64 zeigt in der Darstellungsweise von Büchner*) die ungleiche Verteilung der Abnutzungen bei Evolventenverzahnungen auf die Flanken von Kopf und Fufs des Zahnes.

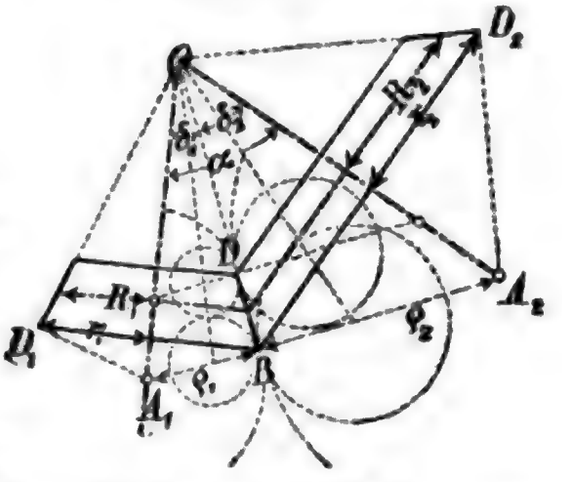
B. Franz sucht durch seine Ozoidenverzahnung**) (Vereinigung von Zykloide und Evolvente — Eingrifflinie in der Mitte gerade, an den Enden leicht gekrümmt) die Abnutzung gleichmäfsiger auf Kopf- und Fufsflanke zu verteilen (Abb. 65).

Wahl zwischen Evolventen und Zykloiden.

Evolventen liefern einfachere, leichter herstellbare Zahnformen. Evolventenzähne gestatten im neuen Zustande Aenderung der Achsenentfernungen der Räder (s. o. unter 1. ε), auf welchen Umstand u. a. bei Zahnradlokomotiven, bei Stirnrädern für Blechwalzen, bei Wechselrädern usw. geachtet werden mufs. Bei gleicher Teilung ist der Fufs des Evolventenzahnes stärker als der des Zykloidenzahnes, ein Vorteil, wenn die Festigkeit die Teilung bestimmt. (Krafträder z. B. für Winden, Krane u. dgl.)

Zykloiden ergeben zwar bessere Gleitverhältnisse und geringere spez. Zahnpressungen, weil sich ein konvexes Profil in ein konkaves einschmiegt, doch sind die Vorteile der einfacheren Zahnform bei **Evolventenrädern** [Erzeugung der Evolvente im Abwälzverfahren (für alle Zähnezahlen einer Teilung nur ein Schraubenfräser), während bei **Zykloiden** für jede Zähnezahl ein Werkzeug anzufertigen ist, von dessen Genauigkeit die Richtigkeit der Zahnform abhängt] und der gröfseren Unempfindlichkeit gegen Unterschiede in der Achsenentfernung so grofs, dafs oft ausschliefslich Evolventenräder angewendet werden.***)

Abb. 66.



4. Kegelräder.

Kegelräder müssen sich in einer gemeinsamen Kegelseite berühren, die Spitzen der Kegel zusammenfallen. Teilkreise: die Grundkreise der sich berührenden Kegelstümpfe (**Grundkegel**, Abb. 66).

Nach dem gebräuchl. Näherungsverfahren erfolgt die Verzahnung auf den Mantelflächen der **Ergänzungskegel** $A_1 D_1 B$ und $A_2 D_2 B$, deren Erzeugende $A_1 B$ und $A_2 B$ winkelrecht auf der Erzeugenden BO der Grundkegel stehen, indem man diese Mantelflächen als Kreisausschnitte

*) Büchner, Abnutzungs- und Reibungsverhältnisse der Stirnzahnräder, Z. d. V. d. I. 1902 S. 159 u. 278.

**) Vgl. Die Werkzeugmaschine, Zeitschr. f. prakt. Fabrikbetriebe, 15. Okt. 1913 S. 1 und die Broschüre „Ozoidenverzahnung" von Bernhard Franz, herausgegeben von Friedr. Stolzenberg & Co., Berlin-Reinickendorf-West.

***) Vorteile und Nachteile des Teilverfahrens u. des Abwälzverfahrens: Werkst.-Technik 1908 S. 295, 318 u. 546 sowie Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge 1910 S. 297; 1912 S. 314.

Digitized by Google

in die Zeichenebene abwickelt und die Kreise mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 wie die Teilkreise von Stirnrädern benutzt. Das Verfahren genügt nur für nicht zu kleine Zähnezahlen (> 24); streng genommen sind die Zahnprofile auf Kugelflächen zu verzeichnen.

Abb. 68.

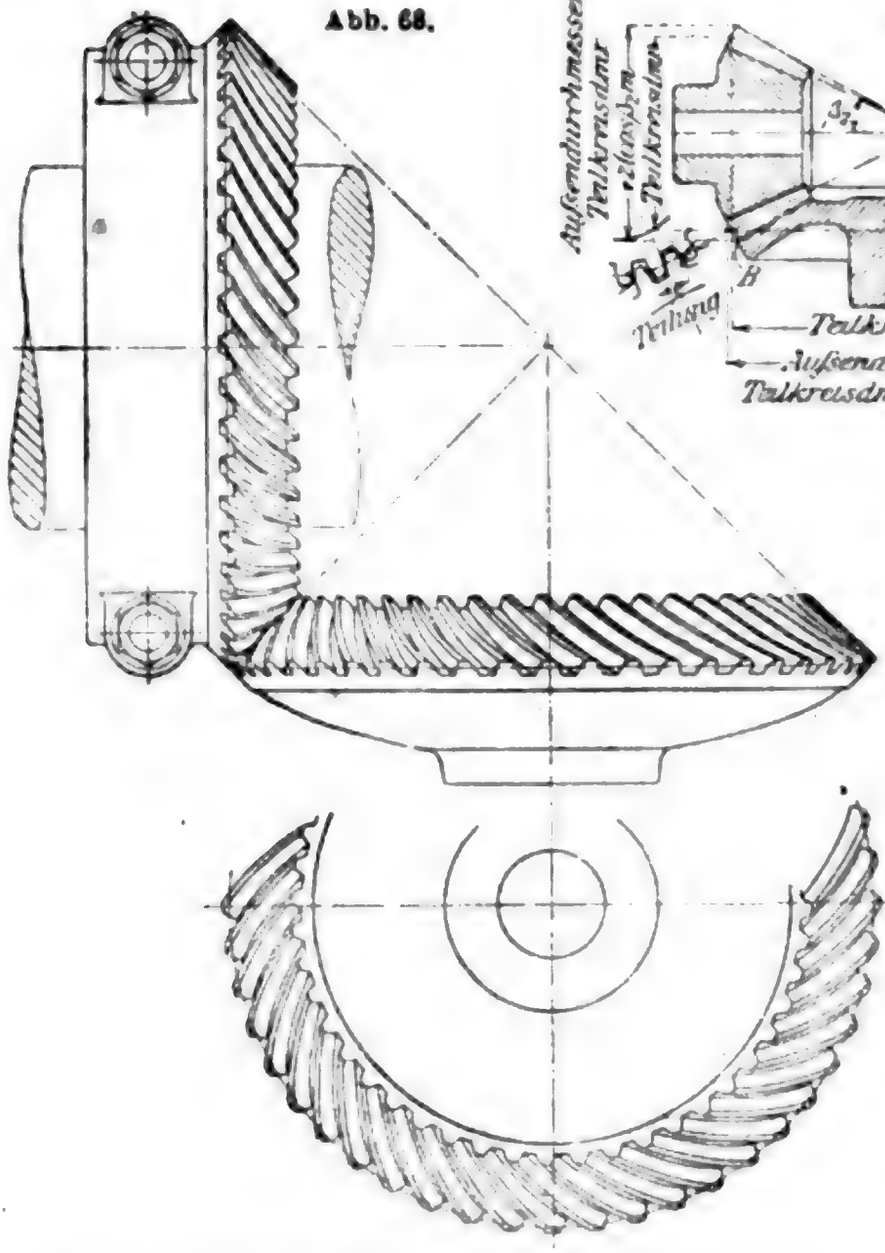
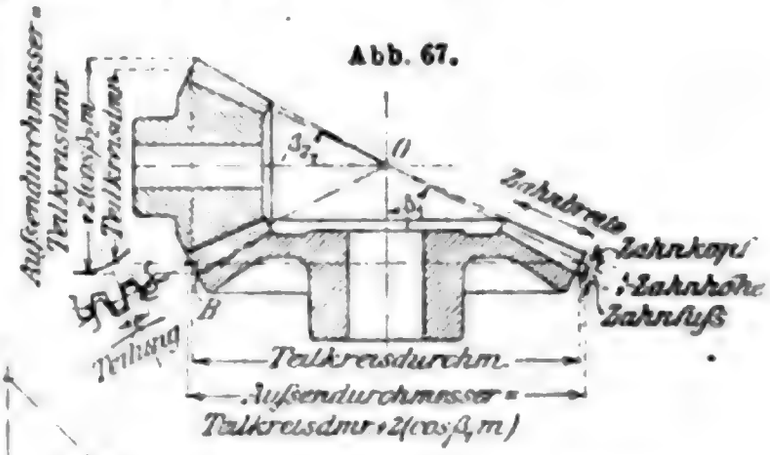


Abb. 67.



Teilung und Zahnstärke werden auf den wirklichen Teilkreisen mit den Halbmessern r_1 und r_2, die Zahnhöhe in der Richtung $A_1 A_2$, die Zahnbreite $b = B D$ in der Richtung $B O$ gemessen. Die Zahnstärke wird für die mittleren Grundkegelstumpfkreise mit den Halbmessern R_1 und R_2 mittels der Beziehung

$$2 \pi R = z t$$

berechnet.

Bezeichnen z_1 und z_2 die zugehörigen Zähnezahlen, so ist das Uebersetzungsverhältnis $\varphi = z_1 : z_2 = r_1 : r_2 = \sin \delta_1 : \sin \delta_2$, ferner

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_2 + z_1 \cos \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_1 + z_2 \cos \alpha},$$

$$r_1 = R_1 + \frac{b}{2} \sin \delta_1 \quad \text{und} \quad \sin \delta_1 = \frac{z_1 \sin \alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}.$$

Für $\alpha = 90^0$ (Winkelräder) ist

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2}, \qquad \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1},$$

$$\sin \delta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Digitized by Google

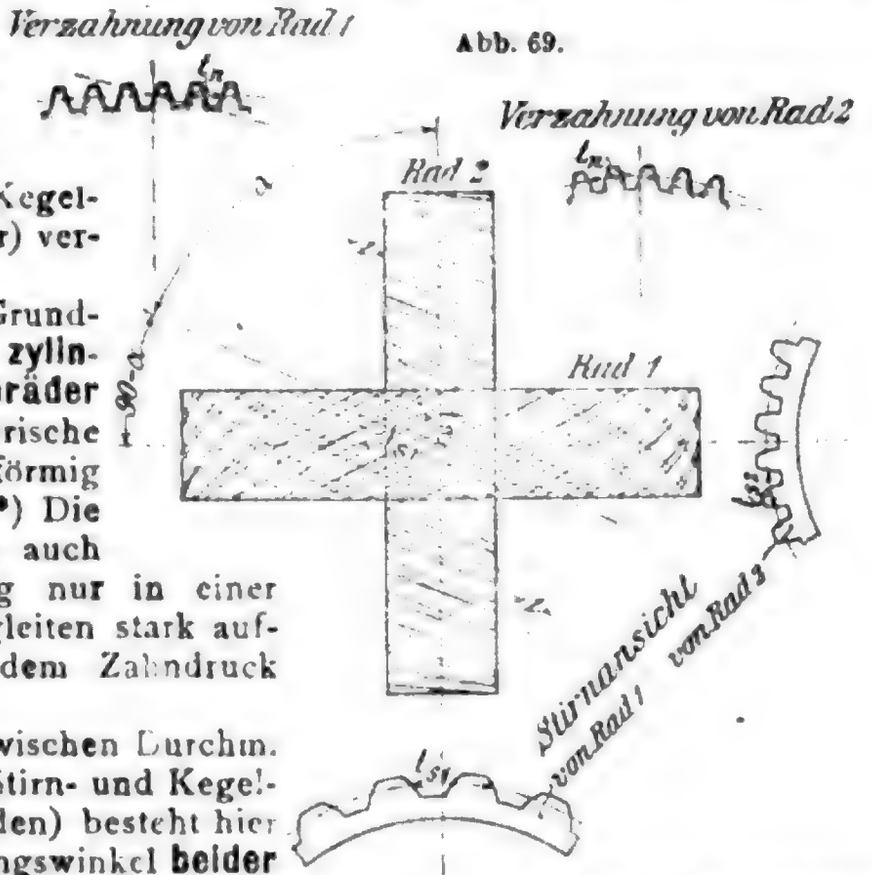
Die Zähne selbst ergeben sich als abgestumpfte Pyramiden und verjüngen sich sämtlich nach der gemeinsamen Kegelspitze O (Abb. 67). Zahnprofile vorteilhaft auch für den Punkt D (Abb. 66) verzeichnen. Zugehörige Halbmesser der Hülfsverzahnungskreise ermitteln unter Wahl entspr. Eingrifflinien proportional denen für die Grundkreise. — Kegelräder sind als Einzelräder mit Zykloiden- oder meist Evolventenverzahnung (mit $z > 20$) zu entwerfen.*)

Kegelräder mit spiraligen Zähnen**) (Abb. 68) gefräst nach Patent Polanowsky fertigt die Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk, A. G., an. Die Räder haben äufserst ruhigen Gang; besonders als Steuerräder verwendet.

5. Räder für sich kreuzende Wellen.

Grundform entweder das Hyperboloid oder der Zylinder. **Hyperbelräder** werden wegen der teuren Herstellung, des grofsen Arbeitsverlustes und der starken Abnutzung fast stets durch Einschaltung einer Hülfswelle (zwei Paar Kegelräder oder ein Kegel- und ein Stirnräderpaar) vermieden.

Abb. 69.



Bei zylindrischer Grundform ergeben sich **zylindrische Schraubenräder** (Abb. 69), d. s. zylindrische Räder mit schraubenförmig gewundenen Zähnen.*) Die Zähne berühren sich auch bei guter Ausführung nur in einer kleinen Fläche und gleiten stark aufeinander; je nach dem Zahndruck rasche Abnutzung.

Proportionalität zwischen Durchm. u. Zähnezahlen (bei Stirn- und Kegelrädern immer vorhanden) besteht hier nur, wenn der Steigungswinkel **beider** Räder $\alpha = 45^0$ ist. Für das schneller lfd. Rad (bei ungleichen Steigungswinkeln) empfiehlt sich Stahl, für das langsamer lfd. Phosphorbronze; für höchste Geschwindigk. gehärt. Stahl. Gufseisen nur verwendbar für geringe Geschw. und kleinen Zahndruck. Ursprünglich fast ausschliefslich angewendet als Steuerungsräder an Motoren, jetzt vielfach, auch an Werkzeugmaschinen benutzt.

---

*) Bestimmung des Winkels für beliebige konische Räder Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge v. 25. Dez. 1907, auch 1910 S. 237; Z. f. prakt. Maschinenbau 1910 S. 871. — Zu beachten Stolzenbergs Rechenwinkel zur Bemessung von Kegelrädern (in dem Katalog der Firma beschrieben und dargestellt).

**) Kegelräder mit gefrästen Pfeilzähnen Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge 1910 S. 342.

*) Bach, Masch.-Elem., 11. Aufl. 1913 S. 349 ff.

Digitized by Google

6. Schnecke und Schneckenrad.

Bei Antrieben durch Elektromotoren haben die Schneckentriebe zur Verminderung der Umlaufzahlen erhöhte Bedeutung erhalten. Versuche*) haben gezeigt, dafs bei richtiger Formgebung Nutzeffekte von 90% erreichbar sind. — Zähnezahl vorteilhaft gröfser als 25 zu wählen, damit mehr als zwei Zähne des Schneckenrades in Eingriff sind. Je gröfser die Zähnezahl des Schneckenrades, um so besser die Wärmeabfuhr. Je höher die Gangzahl der Schnecke (ein- bis fünffach), um so besser der Wirkungsgrad.**)

Zykloidenverzahnung kaum noch angewendet. — Ernst sagt in dem Aufsatz „Ueber die Eingriffsverhältnisse der Schneckengetriebe mit Evolventen- und Zykloidenverzahnung und ihr Einflufs auf die Lebensdauer der Triebwerke":***) „Evolventenschnecken sind den Zykloidenschnecken nicht nur wegen der leichteren genauen Herstellung, sondern auch wegen der günstigeren und störungsfreieren Eingriffsverhältnisse vorzuziehen". — Allerdings ist das Schneckengetriebe für Aenderungen des Achsenabstandes, wie sie für Stirnräder zulässig sind (S. 773), nicht unempfindlich, da hier nur die Mittelebene reine Evolventenverzahnung hat, in allen übrigen Eingriffebenen aber die Schnittprofile dem Evolventengesetz nicht entsprechen. Die genaue Lage der Radmittelebenen ist beim Betriebe dauernd zu sichern.

Abb. 70.

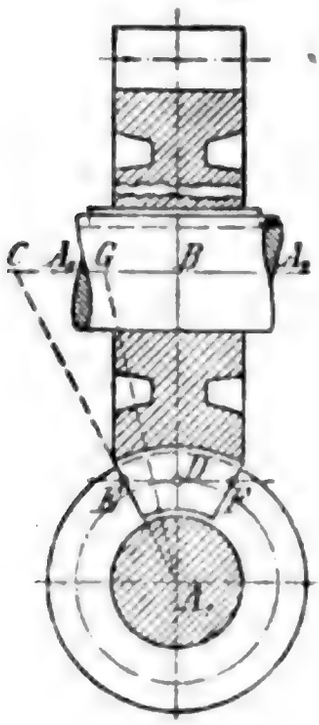
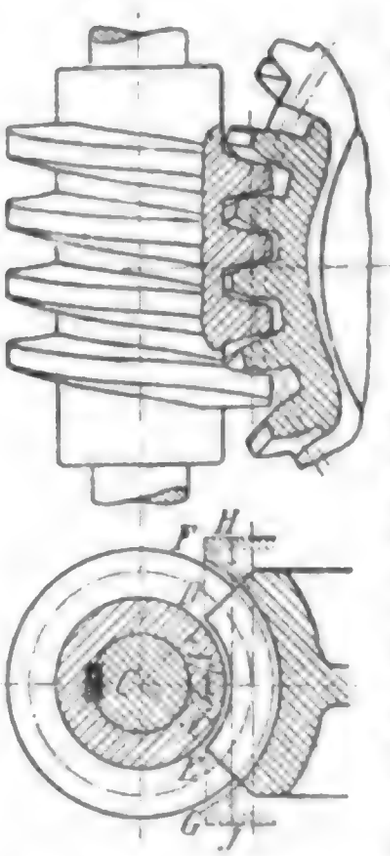


Abb. 71.



Evolventenverzahnung (Abb. 70 u. 71). Die Verzahnung z. B. für die durch die Schneckenachse gehende Schnittebene $A_1 C$ (Abb. 70) erfolgt so, dafs der Eingriff der einer Zahnstange, deren Mittelebene in $A_1 C$ liegt, mit einem Stirnrade vom Halbmesser CE ist; die Verzahnung für die Stirnfläche ist also mit den Teilkreishalbm. CE und $A_1 E$ zu entwerfen unter Beachtung des bereits vorliegenden Schraubengangprofils, zu dem die gesuchte Zahnform das Gegenprofil bildet. Entsprechend die Verzahnung für die beliebige Schnittebene $A_1 G$. Reichlicher Spielraum der Räder ist notwendig; die Zähne liegen anfangs

*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 915, Schneckengetriebe mit hohem Wirkungsgrad.
**) Anleitung zum Entwerfen von Schneckentrieben, Katalog von Otto Gruson & Co., Magdeburg-Buckau.
***) Z. d. V. d. I. 1900 S. 1229 ff., insbesondere S. 1473.

Digitized by Google

nur mit den Ecken an. Ausfräsen der Zahnlücken mittels einer Frässchnecke, deren Profil dem der Betriebsschnecke entspricht, gibt gute Zahnform für das Schneckenrad.*) Parallelschnitte zu $A_1 B$ nach dem unten aufgeführten Aufsatz von Stribeck geben ein gutes Bild über Eingriff- und Gleitverhältnisse sowie über die Gröfse des Druckfeldes.

Zylindrischer Zahnkranz (Abb. 70 oben) zu vermeiden; die Zähne gewähren nur geringe Anlage an die Schneckengänge. Bei grofsen Kräften allgemein hohlgedrehter Zahnkranz (Abb. 70 unten u. 71); Zentriwinkel 2β (Abb. 71) so grofs zu wählen, als es die Rücksicht auf Vermeidung zu spitzer Zahnformen in den durch D und E bestimmten Schnitten gestattet. Die Begrenzung der Zahnköpfe nach DF und EG (punktiert) vergröfsert das sog. Eingriffsfeld des Zahnes und der Schnecke ein wenig. — Begrenzung nach HJ (Abb. 70, Abdrehen des Schneckenrades bis auf den Halbm. des Mittelschnitts) ermöglicht die Ausnutzung der günstigsten Teile des Eingriffs, setzt aber grofse Räder mit reichl. Zähnezahl voraus, wenn die Zahnpressung in zulässigen Grenzen bleiben soll.

Nach Stribeck wird der Zentriwinkel 2β des Schneckenrades (Abb. 71) bestimmt durch: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a}{r:t+0{,}6}$.

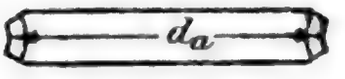
r ist der Teilkreishalbm. der Schnecke in cm, t die Teilung in cm, a ein Zahlenwert, der von der Zähnezahl z abhängt:

$z =$	28	36	45	56	62	68	76	84
$a =$	1,9	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9.

Evolventenschnecken mit einer Kopfhöhe bis $0{,}25\,t$ ergeben bei Rädern mit mindestens 30 Zähnen günstige Eingriffsfelder für Schraubensteigungen bis 18^0 (im Teilkreise gemessen) und gestatten die Ausnutzung des gröfseren Wirkungsgrades steilgängiger Schnecken ohne erhebliche Zunahme der spez. Pressung.

Für Schraubenräder mit 30 und mehr Zähnen wird der Teilkreisdurchm. gewählt $d = \dfrac{z\,t}{\pi}$ und der Durchm. d_a (Abb. 72) des **Aufsenkreises**

Abb. 72.



$$d_a = d + \frac{2\,t}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um die Unterschneidung des Zahnfufses von $z < 30$ ab zu vermeiden, empfiehlt Stolzenberg & Co.

$$\left.\begin{array}{l} \text{statt Teilkreis — Hülfskreis: } d_1 = \dfrac{z\,t}{\pi}\cdot 0{,}937 + \dfrac{2\,t}{\pi} \\ \text{und Aufsenkreis: } \qquad d_{a1} = d_1 + \dfrac{2\,t}{\pi} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Der Durchm. d_{a1} des Aufsenkreises ist um $\dfrac{2\,t}{\pi}$ gröfser als der

*) Grundlegend für Schneckengetriebe, aufser dem Aufsatz von Ernst die Arbeit von Stribeck, Z. d. V. d. I. 1897 S. 936 ff. und 1898 S. 1156 ff.; s. auch Bach, 11. Aufl. 1913 S. 353. — Betriebserfahrungen an Schneckengetrieben, Z. d. V. d. I. 1913 S. 806.

Digitized by Google

Durchm. d_1 des Hülfskreises, da der Zahnkopf, gemessen vom Hülfskreis ab, gleich $\frac{t}{\pi}$ (gleich dem Modul m) ist.

Abb. 73 zeigt links ein Schneckenrad von 15 Zähnen, wie es nach Gl. (1) S. 777 mit $d = \frac{z\,t}{\pi}$ aussehen würde, und rechts das nach Gl. (2) S. 777 mit Hülfskreis vom Durchm. d_1 ausgeführte Rad mit gleicher Zähnezahl. (Ueber Baustoff von Schnecke und Schneckenrad, Aufnahme des Achsialdruckes usw. S. 786 ff.)

Abb. 73.

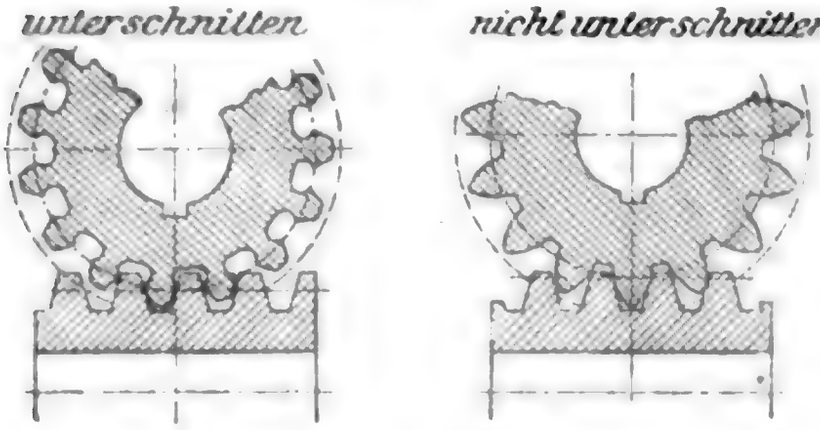
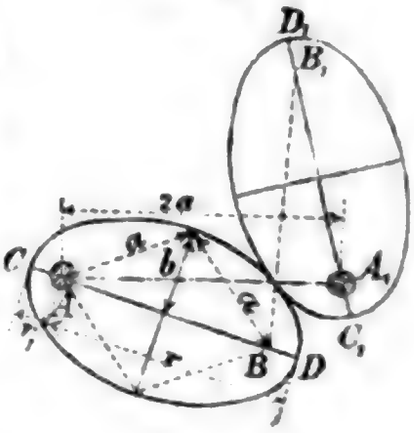


Abb. 74



7. Elliptische Räder.

Nur als Stirnräder zur Uebertragung periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeiten ausführbar. Die Zähne werden so gestellt, dafs ihre Mittellinien in die Normalen der Ellipsen fallen. Zahnform wie bei Kreisrädern, Ellipsen (Abb. 74) statt der Teilkreise. Es bezeichne

A den Drehpunkt des treibenden Rades,
A_1 den Drehpunkt des getriebenen Rades,
a die halbe grofse Achse, b die halbe kleine Achse der beiden Ellipsen,
A, B, A_1, B_1 die Brennpunkte der Ellipsen,
ω die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades A,
ω_1 die gröfste, ω_2 die kleinste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades A_1,
r und r_1 s. Abb. 74.

α) **Uebersetzungsverhältnis** für die Berührung im Punkte D ist

$$\varphi_1 = \frac{A\,D}{A_1\,C_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega},$$

im Punkte C

$$\varphi_2 = \frac{A\,C}{A_1\,D_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega_2}{\omega} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = V.$$

β) Wenn die Entfernung der beiden Wellen $A\,A_1 = 2\,a$ und das Verhältnis V gegeben ist, so findet man b und somit die **Form** der elliptischen Räder durch die Gleichung

$$b = \frac{2\,a\,\sqrt{V}}{V + 1}.$$

Digitized by Google

b. Berechnung der Zähne.*)

1. Stirnräder mit geraden Zähnen.

Es bezeichne (alles in cm)

r den Teilkreishalbmesser, t die Teilung } z die Zähnezahl $= 2\pi r : t$,

b die Zahnbreite $= \psi t$,

l die Zahnlänge, in der Regel $= 0{,}7\ t$,

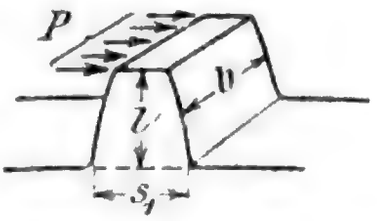
s die Zahndicke, auf dem Teilkreise gemessen,

P den Zahndruck in kg, bestimmt durch das zu übertragende Drehmoment $M_d = Pr$ in cmkg,

n die minutliche Umlaufzahl des Rades,

N die zu übertragende Leistung in PS.

Abb. 75.



α) Berechnung mit Rücksicht auf Festigkeit (Krafträder), wie z. B. bei den Rädern der von Hand betriebenen Winden, Krane usw.

Bei guter Lagerung der Räder und geschnittenen Zähnen ist der Zahndruck über die ganze Breite b gleichmäfsig verteilt. Beim ungünstigsten Angriff von P (an der Spitze des Zahnes, Abb. 75) ist

$$Pl = Wk_b,$$

$$P\,0{,}7\,t = \frac{1}{6}\,b\,s_1^2 k_b. \qquad \text{Hierbei sei } s_1 \sim \frac{t}{2}, \qquad P = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}07\ k_b\,b\,t,$$

$$\boldsymbol{P = c\,b\,t.}$$

Für Gufseisen ($k_b = 300$ kg/qcm) $c = 0{,}06$ bis $0{,}07 \cdot 300 = 18$ bis 21.

Bei selten voll beanspruchten Winden ist für Gufseisen $c = 24$ bis 28 zulässig. (Zahnwurzelstärke mit 0,5 bis 0,55 t vorausgesetzt.) Die **Zahnbreite** b wird vielfach $= 2\,t$ genommen; bei genauer Ausführung und Lagerung oft $b \leqq 3\,t$ (S. 781). Bei unbearbeiteten Zähnen und schlechter Lagerung, z. B. bei den Rädern von Hand getriebener Winden usw., greift P u. Umst. an einer Zahnecke an. Dann trägt der Zahn, auch wenn $b > 2\,t$, nur in einer Länge von $b \sim 2\,t$.

Hierbei ist angenommen, dafs nur ein Zahn kämmt. Ergibt sich aus der Verzahnung, dafs dauernd zwei Zähne die Kraft übertragen, so kann dies berücksichtigt werden. Weicht l erheblich von der Annahme $0{,}7\,t$ ab, so ist dies besonders zu beachten. Mit Rücksicht auf zufällige Mehrbelastung sei bei Windenrädern $t \geqq 2{,}5$ cm.

Für andere Stoffe ist c nach folgendem Verhältnis zu wählen (Gufseisen $= 1$ gesetzt):

Gufsstahl $= 3{,}0$ bis $3{,}3$; Stahlgufs $= 2$; Deltametall $\sim 2{,}5$; Phosphorbronze, Rotgufs 1,7 bis 1,3, Rohhaut etwa gleich 1 bis 0,8.

Für Nickelstahl (Automobilbau, Luftschiffmotoren) (naturhart) kann das Verhältnis (Gufseisen gleich 1 gesetzt) angenommen werden mit 6, für Chromnickelstahl (Räder in Oel gehärtet) mit 8 bis 10 (S. 489).

Nach Angabe der Neuen Automobil-Gesellschaft in Berlin-Oberschöneweide ergeben sich aus dem gröfsten Moment des Motors

*) Vgl. auch Stribeck, Berechnung der Zahnräder, Z. d. V. d. I. 1894 S. 1182.

Digitized by Google

oder beim Bremsen aus dem gröfsten Moment der Treibräder bei Personen- und Lastwagen Biegungsbeanspruchungen der Zähne bis zu 8000, ja 11 000 kg/qcm. Das entspricht in der obigen Formel $P = cbt$ Werten von $c \sim 490$ bis 700. Verwendet wird für diese Räder Chromnickelstahl, der in Oel gehärtet eine Festigkeit von 12 000 bis 15 000 kg/qcm bei einer Dehnung von 10 bis 6 % hat.

β) Berechnung mit Rücksicht auf Abnutzung **(Triebwerkräder, Arbeitsräder).** Auch hier gilt $P = cbt$.

Der Wert von c wird beeinflufst durch die spez. Pressung, durch Gleiten, Schmierung und durch die Umfangsgeschwindigkeit.

Die Firma Fried. Krupp, Grusonwerk, Magdeburg-Buckau, legt der Berechnung auf Biegung ($P \cdot l = W \cdot k_b$) folgende, mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit abnehmende Werte von k_b zugrunde:

1. Werte k_b, für bearbeitete Zähne.

Zulässige Biegungsbeanspruchung in kg/qcm für **bearbeitete** Zähne von Stirn- und Kegelrädern.

Werkstoff	Umfangsgeschwindigkeit in m in 1 sk														
	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gufseisen	470	450	440	430	380	350	320	300	280	260	240	220	200	180	170
Stahlgufs	960	940	920	900	830	770	710	650	600	560	520	490	460	430	410
Geschm. 8.-M.-St.	1400	1370	1340	1300	1200	1130	1060	1000	930	860	800	750	700	650	620
Stahlbronze	1100	1080	1060	1040	970	900	840	790	740	700	660	630	600	580	550
Phosphorbronze	800	780	770	750	690	640	590	550	510	470	440	410	390	370	350
Rotgufs	620	600	580	560	490	440	400	360	330	300	270	250	230	210	200
Rohhaut	470	450	440	430	380	350	320	300	280	260	240	220	200	180	170
Holz	230	230	220	220	200	180	160	150	130	120	110	100	90	80	70

2. Werte k_b, für rohe Zähne.

Zulässige Biegungsbeanspruchung in kg/qcm für **rohe** Zähne von Stirn- und Kegelrädern.

Werkstoff	Umfangsgeschwindigkeit in m in 1 sk								
	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6
Gufseisen	400	390	380	370	320	290	260	230	200
Stahlgufs	930	910	880	860	780	700	630	560	500
Phosphorbronze	750	730	710	690	630	570	510	450	400
Rotgufs	540	520	510	490	440	400	360	320	290

Aus der ersten Tafel folgen durch Multiplikation mit 0,06 die **Werte c für bearbeitete Zähne.** — Formel $P = cbt$.

Werkstoff	Umfangsgeschwindigkeit in m in 1 sk														
	0,25	0.5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gufseisen	28,2	27	26,4	25,8	22,8	21	19,2	18	16,8	15,6	14,4	13,2	12	10,8	10,2
Stahlgufs	57,6	56,4	55,2	54	49,8	46,2	42,6	39	36	33,6	31,2	29,4	27,6	25,8	24,6
Geschm. 8.-M.-St.	84	82,2	80,4	78	72	67,8	63,6	60	55,8	51,6	48	45	42	39	37
Stahlbronze	66	64,8	63,6	62,4	58,2	54	50,4	47,4	44,4	42	39,6	37,8	36	34,8	33
Phosphorbronze	48	46,8	46,2	45	41,4	38,4	35,4	33	30,6	28,2	26,4	24,6	23,4	22,2	21
Rotgufs	37,2	36	34,8	33,6	29,4	26,4	24	21,6	19,8	18	16,2	15	13,8	12,6	12
Rohhaut	28,2	27	26,4	25,8	22,8	21	19,2	18	16,8	15,6	14,4	13,2	12	10,8	10,2
Holz	13,8	13,8	13,2	13,2	12	10,8	9,6	9	7,8	7,2	6,6	6	5,4	4,8	4,2

Digitized by Google

Aus der zweiten Tafel folgen durch Multiplikation mit 0,06 die **Werte c für rohe Zähne.** — Formel $P = cbt$.

Werkstoff	Umfangsgeschwindigkeit in m in 1 sk								
	0.25	0.5	0,75	1	2	3	4	5	6
Gufseisen	24	23,4	22,8	22,2	19,2	17,4	15,6	13,8	12
Stahlgufs	55,8	54,6	52,8	51,6	46,8	42	37,8	33,6	30
Phosphorbronze	45	43,8	42,6	41,4	37,8	34,2	30,6	27	24
Rotguís	32,4	31,2	30,6	29,4	26,4	24	21,6	19,2	17,4

Fr. Stolzenberg & Co. wählt bei vorzüglicher Ausführung und dauernd guter Instandhaltung für Gufseisen (ebenfalls abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit):

bei $v =$	0,25	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13	15 m
$c =$	28	27,5	26	24	22,5	20	17,5	15	14	13	12

Für die oben unter α) genannten Stoffe gelten auch hier gleiche Verhältniszahlen, je nach Ausführung und Wartung.

Rädern, deren Zähne die Eingriffflanke wechseln oder die sehr stofsen, überhaupt solchen Rädern, deren Zähne dem Einflusse wechselnder Kräfte in den getriebenen oder treibenden Massen ausgesetzt sind, gibt man möglichst reichliche Abmessungen. Aus diesem Grunde werden z. B. Räder für Mahlgänge bei Holz auf Eisen mit $c = 2$ bis 3 entworfen, während ein gewöhnliches Rad vielleicht mit $c = 6$ bis 9 zu belasten sein würde.

Bei grofsen Uebersetzungen mit hintereinander geschalteten Zahnrädern sind **elastische Zwischenglieder** einzuschalten. Starre Verbindungen haben vielfach Brüche von Zahnrädern, die an sich richtig bemessen sind, im Gefolge. Als **elastische Zwischenglieder** werden benutzt elast. Kupplungen; oft genügen lange, mit dem Motor fest gekuppelte Wellen. (Vgl. den immer noch zu wenig beachteten Aufsatz von Lasche, „Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung.")*)

γ) Aus dem zu übertragenden Drehmomente M_d (in cmkg) oder aus der zu übertragenden Leistung N (in PS) bestimmt sich die Teilung t (in cm), wie folgt. Nach S. 187 ist

$$Pr = M_d = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ in cmkg.}$$

Da $P = cbt = c\psi t^2$ und $r = zt : 2\pi$, so ergibt sich

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi M_d}{c\psi z}} \quad \text{oder} \quad t = 10 \sqrt[3]{\frac{450}{c\psi z} \frac{N}{n}}.$$

δ) **Zahnbreite** $b = \psi t$. Das **Verhältnis** ψ wähle man

$\psi = 2$ für Krafträder (Windenräder u. dgl.),

$\psi = 2$ bis 3 für gewöhnliche Triebwerkräder,

$\psi = 3$ bis 5 für Triebwerkräder, die grofse Mengen mechanischer Arbeit zu übertragen haben (z. B. verzahnte Schwungräder der Dampfmaschinen).

*) Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417 ff., insbesondere S. 1561 u. 1565.

Digitized by Google

$t = 130$ und $b = 600$ mm sind Werte, die für gewöhnlich nicht überschritten werden, doch kommen Räder bis $t = 250$ und $b = 900$ mm vor.

ε) Für die **Zähnezahl** z gilt

$z \geqq 10$ bis 11 für Krafträder (unter bes. Umst. noch weniger),

$z \geqq 24$ für Arbeitsräder; je gröfser die Zähnezahl, um so ruhiger der Gang. — Bei Rädern mit Holzzähnen und bei geteilten Rädern soll z ein Vielfaches der Armzahl sein. Wünschenswert, aber nicht notwendig, auch bei den übrigen Rädern.

Das **Uebersetzungsverhältnis** zweier Räder sei bei **gleichmäfsigem Zahndruck** möglichst 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 usw., um ein gutes Einarbeiten der Zähne herbeizuführen.

Bei **periodischer Veränderlichkeit** des Zahndruckes (z. B. bei verzahnten Schwungrädern, dem Rade eines Hammerwerkes, Antrieben von Pumpen usw.) erscheint es dagegen rätlich, um ungleichmäfsige Abnutzung zu vermeiden, Verhältnisse wie 1 : 2, 1 : 3 usw. nicht zu wählen, sondern etwa 2 : 3, 2 : 5 usw. oder 3 : 4, 3 : 5 usw. oder gar die bei gleichmäfsigem Zahndruck durchaus zu verwerfenden Zähnezahlen, z. B. 29 : 45 oder 23 : 48 usw.

Mit dem Uebersetzungsverhältnis geht man nicht ohne Not unter 1 : 10, doch wird es heute vielfach schon 1 : 15 und kleiner angenommen (Abb. 60, S. 771 mit 1 : 11); für Arbeitsräder bei langsamem Gange, wenn möglich, nicht unter 1 : 6 (wobei dann für das kleine Rad $z_{min} = 36$ bis 40), bei raschem Gange etwa nur bis 1 : 5. Uebersetzung von der Dampfmaschinenkurbelwelle in der Regel etwa 1 : 4 (wobei $z_{min} = 54$ bis 72).

ζ) **Holzzähne** (Kämme) (Abb. auf S. 790) gibt man dem einen Rade des Paares, z. B. bei Wasserturbinenantrieb und anderen Haupttransmissionen, bei gröfserer Geschw. in der Absicht, einen ruhigen, womöglich geräuschlosen Gang zu erzielen. In der Regel erhält das gröfsere der beiden Räder die Holzzähne; nur dann nicht, wenn die Kraftübertragung periodisch stark veränderlich ist und die Ursache hierzu von der Welle ausgeht, auf der das gröfsere Rad sitzt.

Die Teilung*) ist bei Kammrädern etwa $^1/_{10}$ stärker zu wählen als für gufseiserne Räder gleicher Leistungsfähigkeit.

η) **Rohhauträder.** Zur Erzielung eines möglichst ruhigen Ganges bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten bis 12 m ($n = 400$ bis 1000) werden Zahnräder und Kämme derart angefertigt, dafs Stücke aus besonders hergerichteter Rohhaut unter hohem Drucke und bei Verwendung eines besonderen Bindemittels zusammengepreſst und dann wie ein Eisenrad oder wie ein Holzkamm bearbeitet werden. Die Räder erhalten Seitenscheiben aus Stahl oder aus Bronze, die miteinander vernietet oder verschraubt werden. Die Räder müssen ausgebuchst werden (Abb. 76 u. 77 nach Bauart der Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk). Die Keilbuchse (Abb. 76) wurde gewählt, um genaues Rundlaufen zu erzielen.

Rohhaut mufs stets mit einem Gegenrade (meist aus Gufseisen, selten Stahl) arbeiten, das sauber gefräste Zähne hat. Bronze ver-

*) Krell, Teilung für zusammenarbeitende Zahnräder aus verschiedenem Material. „Die Fördertechnik" 1913 S. 164.

Digitized by Google

meidet man. Manchmal werden die Rohhautzähne, ähnlich wie bei Holzkämmen, stärker gemacht als die Eisenzähne des Gegenrades. — Rohhaut gegen Nässe und Hitze, auch gegen Mineralöl empfindlich; nur mit Oliven- oder Rüböl schmieren. — Ersatzräder aus Rohhaut werden am besten in geschlossenen Blechbüchsen, mit Rüböl übergossen, an kühlem Orte aufbewahrt.

Berechnung oben unter 1 α) und β).

Die Firma C. A. Loewe, Berlin N, gibt auf 1 cm Zahnbreite die folgende Belastung k_1 als zulässig an:

für $t =$	2 bis 3	3 bis 5	bis 8	10	12	15	18	22	26 π
$k_1 =$	8 „ 10	10 „ 12	14	16	18	20	24	30	40 kg

und erachtet in der Biegungsformel $P \cdot l = W \cdot k_b$ eine Biegungsbelastung k_b von 100 bis 120 kg/qcm noch für zulässig.

Abb. 76.

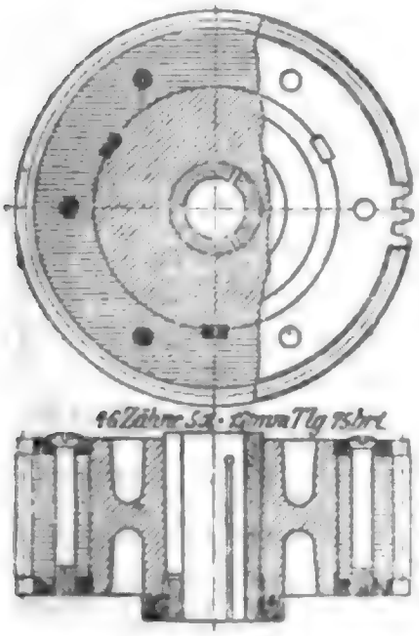
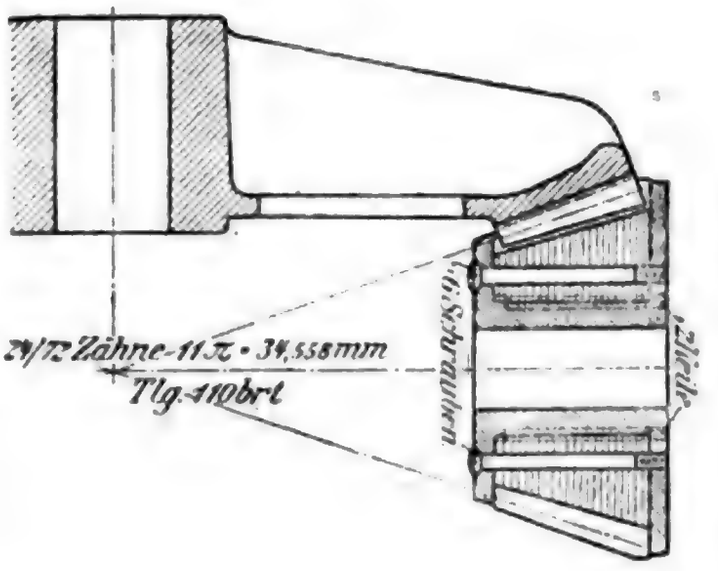


Abb. 77.



Mit der Zähnezahl geht man nicht gern unter 11, mit der Teilung nicht unter 7 bis 8 mm. Das gröfste Rad von C. A Loewe hatte 700 mm Durchm. und 300 mm Breite.

Vulkanfiber wird für Räder kleiner Teilung noch gelegentlich verwendet, hat aber kaum halb so grofse Festigkeit als Rohhaut.

Ersatz für Rohhaut: Räder aus gepreſstem Holzstoff und von Otto Gruson & Co., Magdeburg, gefertigte Räder aus **Unica-Papierstoff.** — Die Firma gibt an, dafs Unica-Papierstoff von hornartiger Beschaffenheit, sehr fest und elastisch sei und eine um 50 % gröfsere Biegungsfestigkeit habe als Rohhaut. — Räder aus Unica-Papierstoff erhalten Seitenscheiben wie Rohhaut-Getriebe; Naben oder Buchsen aus Metall bei der Härte des Stoffes nicht nötig. Für hochbeanspruchte Getriebe (Walzwerke usw.) werden zwischen die Lagen der Unica-Stoffräder Stahlscheiben eingefügt. Diese als Panzergetriebe bezeichneten Räder laufen zwar nicht so geräuschlos wie die reinen Unica- oder Rohhauträder, haben aber erheblich höhere Festigkeit.

Digitized by Google

9) Die **Zahnstärke** (im Teilkreise gemessen) wird genommen bei Eisen auf Eisen:

für roh bleibende Zähne . . . . . $s = {}^{19}/_{40}\, t$,
für bearbeitete Zähne . . . . . $s = {}^{19}/_{40}\, t$ bis ${}^{39}/_{80}\, t$,
[bei Werkzeugmaschinen usw. geht man bis $s = {}^{1}/_{2}\, t$];

bei Holz*) auf Eisen entweder für den Eisenzahn $s = {}^{19}/_{40}\, t$ und für den hölzernen Zahn $s = {}^{19}/_{40}\, t$ bis ${}^{39}/_{80}\, t$, oder

für den Eisenzahn . . . . . $s = {}^{16}/_{40}\, t = 0{,}4\, t$,
für den Holzzahn . . . . . $s = {}^{23}/_{40}\, t$ bis nahe $0{,}6\, t$.

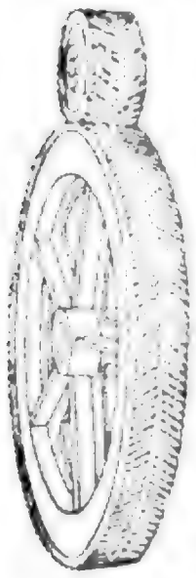
Zahnfufs (die Zahnwurzel) in der Regel $0{,}4\, t$, Zahnkopf (die Zahnkrone) $0{,}3\, t$ hoch, so dafs die Zahnlänge $l = 0{,}7\, t$ oder in Modulmafs $l = 2{,}16$ m (S. 255). Hiernach beträgt der Spielraum in der Richtung des Umfanges zwischen zwei unbearbeiteten Zähnen ${}^{1}/_{20}\, t$, zwischen zwei bearbeiteten Zähnen ${}^{1}/_{40}\, t$ (bis herab auf null), der Spielraum in der Richtung des Halbmessers ${}^{1}/_{10}\, t$ für beide Fälle. — Abweichungen für Zahnfufs und -kopf S. 771.

2. Stirnräder mit einfach schrägen Zähnen und mit Winkelzähnen.

Ruhiger Gang (grofse Eingriffdauer), daher für Präzisionsräder sehr geeignet, sowie grofse Widerstandsfähigkeit. Die Zähne sitzen schraubenförmig auf dem Grundzylinder.

1. **Einfach schräge Zähne** erhalten Evolventenverzahnung wie gerade Zähne. Sprung (t_0) ist der Teilkreisbogen, um den die beiden Stirnflächen eines Zahnes gegeneinander versetzt sind. Ist γ der zum Sprung gehörige Zentriwinkel, r der Teilkreishalbmesser, also $t_0 = r\gamma$, so ergibt sich der Neigungswinkel der Schraubenlinie im Teilkreise aus $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{t_0} = \dfrac{b}{r\gamma}$. Zahnreibung S. 255. Arbeitsverluste durch den aus der Schrägstellung der Zähne folgenden seitlichen Druck (Lagerreibungen). Zur Verringerung des letzteren β grofs, mindestens 70 bis 80°, sogar $86\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$ ($t_0 = 0{,}06\, b$).

Abb. 78.



Räder mit **zweifach** (links und rechts) **schrägen** Zähnen, die im Aussehen völlig den unter 2. noch zu besprechenden Pfeilrädern gleichen, werden **in der Mitte** der Radbreite **geteilt**, genau zentriert und zusammengeschraubt. Vorteil: Achsialdruck aufgehoben.

Die Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk, A. G. fertigt unter dem Namen Wüst-Getriebe Zahnräder mit links und rechts schräg stehenden, um die halbe Teilung versetzten Zähnen, bei denen der Achsialdruck ebenfalls aufgehoben ist. Ruhiger Gang bei langer Eingriffdauer (Abb. 78).

Derartige Räder oder auch getrennt auf gleicher Welle sitzende Räder mit links und rechts schrägen Zähnen werden zur Herabsetzung der Umlaufzahl der Schraubenwelle bei Turbinenantrieb verwendet. So ist in „La Nature“ vom 7. Mai 1910 ein „réducteur de vitesse Westinghouse“ beschrieben, bei dem zwei kleine Räder von 35 Zähnen mit unter 20° links und rechts schräg stehenden Zähnen (angeblich mit

*) S. Fufsnote auf S. 782.

Digitized by Google

30 m/sk Umfangsgeschw.) auf zwei entspr. Räder von 176 Zähnen arbeiten. — Umlaufzahlen: 1500 und 300 bei 6000 PS. — Aehnliche Anlage, Uebersetzung von 1:20, kurz beschrieben: Z. d. V. d. I. 1910 S. 992 u. 1132; dabei haben die grofsen Räder etwa 2600 mm Durchm., die kleinen 127 mm (vgl. Scientific American, 25. Okt. 1913 S. 317 u. Engineer 1913 S. 244).

2. **Winkelzähne (Pfeilräder).** Der bei Rädern mit einfach schrägen Zähnen auftretende Achsialdruck ist wie bei den Rädern mit zweifach schrägen Zähnen aufgehoben, die Festigkeit der Zähne ist durch das Zusammenlaufen in der Pfeilspitze gröfser als bei einfach oder zweifach schrägen Zähnen. Bestimmung der Teilung t und Berechnung wie üblich.

Zahnhöhe 0,6 bis 0,7 t, Zahnfufs 0,35 bis höchstens 0,4 t, Zahnkopf 0,25 bis höchstens 0,3 t. Zahnstärke im Teilkreise $s = 0{,}46\,t$, wirkliche Zahnstärke $s_1 = s \sin\beta$ (= rd. $0{,}377\,t$ bei $\beta = 55^0$).

Gebräuchliche Zahnbreite $b = 4\,t$, Sprung $t_0 = r\gamma = 1{,}4\,t$ (gemessen im Teilkreise), daraus $\beta = 55^0$ (Abb. 79); bei Kammwalzen mit wenigen Zähnen (Abb. 80): $b = 5\,t$, $t_0 = 1{,}75\,t$, $\beta = 55^0$.

Abb. 79.

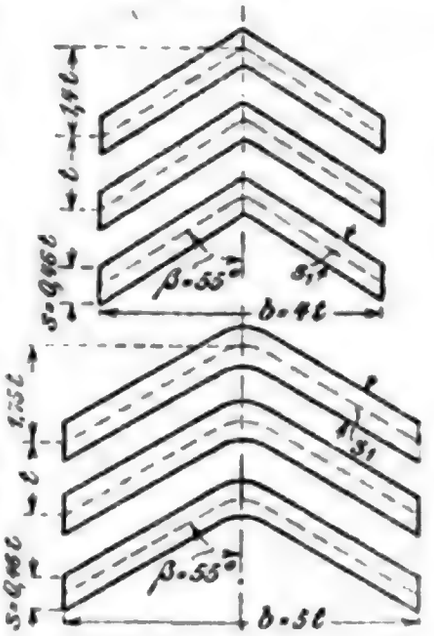
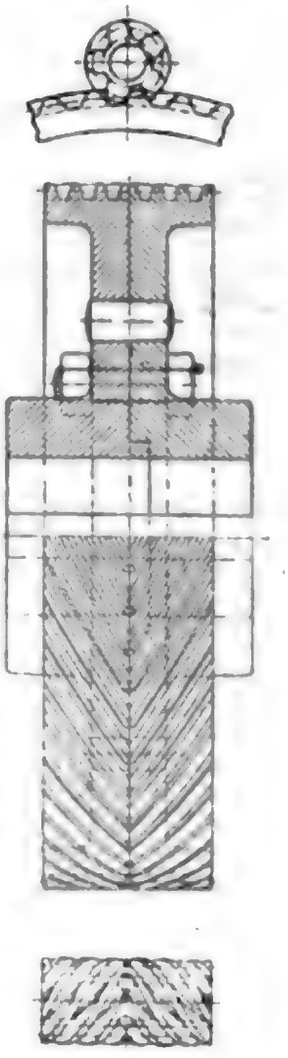


Abb. 80.

Abb. 81.



Bei gewähltem Sprung ist die Zahnform so auszuführen und besonders für Evolventenverzahnung der Winkel zwischen der Erzeugenden und der Räderzentrale (etwa 68 bis 72°) so klein zu wählen, dafs beim Formen das Modell für die Zahnlücke herausgezogen werden kann; bei gegebener Zahnform ist der Sprung entspr. klein zu wählen.*)

Pfeilräder mit gefrästen Winkelzähnen werden ausgeführt mit Zähnezahlen bis herab zu 5, ja 3. Das kleine Rad (aus Stahl) erscheint dann als Doppelschnecke**) (Abb. 81). Versuche von Bach***) mit zwei Räderpaaren von 5 und 50 bzw. 3 und 30 Zähnen der Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk haben Nutzeffekte von 91,7 bis 93,9 % ergeben bei Umlaufzahlen von 277 bis 824 bis 1670, entspr. 0,5 bis 1,51 bis 3,07 m Umfangsgeschw. im Teilkreis. Das Radpaar von 5 und 50 Zähnen hatte 21,98 mm Teilung. Radbreite 86 mm, Teilkreisdurchm. 34,98 und 349,8 mm, der halbe Winkel an der Spitze

*) Stirnräder mit gefrästen Pfeilzähnen: Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge 1910 S. 329.

**) Uebersetzung von Dampfturbine auf Schiffsschraubenwelle: Z. f. Turbinenw. 1909 S. 496; 1910 S. 75. $N = 6000$ PS, $n_1 = 1500$, $n_2 = 300$.

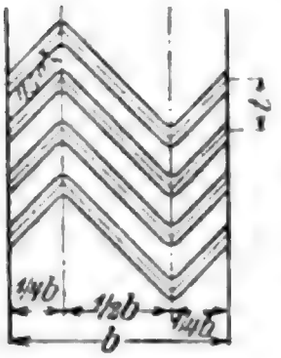
***) Z. d. V. d. I. 1908 S. 661.

Digitized by Google

betrug 29° 45′ 40″. Bei dem anderen Radpaar $s = 3$ und 30 war die Teilung 36,62 mm, der halbe Winkel an der Spitze 18° 56′ 30″. Die kleinen Räder waren aus Stahl, die grofsen (geteilt) aus Gufseisen.

Die Zahnräderfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk gibt für die Berechnung von Pfeilrädern auch bei grofsen Uebersetzungen (bis 1:15), wenn das gröfsere Rad aus Gufseisen besteht, folgende Werte von c an:

Abb. 82.



bei einer Umfangsgeschw. im Teilkreis

$v =$	0,25	1	3	5	7	9	11	13	15 m/sk
$c =$	32	28	24	22	20	18	16	14	12.

Für Phosphorbronze können die Werte um 70 bis 100 % höher angenommen werden.

Bei der Drehung mit voreilender Winkelspitze sind die Zähne widerstandsfähiger als bei der entgegengesetzten Drehung. Mufs das Rad wechselweise nach beiden Seiten umlaufen, so ist durch Anordnung von Seitenscheiben die Widerstandsfähigkeit der Zähne nach aufsen hin zu erhöhen, auch empfiehlt sich seitliche Abschrägung des Zahnkopfes, oder es wird, wie bei dem System Citroën, ausgeführt von der Bergischen Stahlindustrie in Remscheid, die Zahnform Abb. 82 gewählt, die auch bis zu völligem W ausgestaltet wird. Nach diesem System werden auch Kegelräder hergestellt.

3. Kegelräder.

Die Zahnstärke der Kegelräder wird für die mittleren Halbmesser R_1 und R_2 (Abb. 66 S. 256) in derselben Weise berechnet, wie dies unter **1.** für die Stirnräder gezeigt worden ist.

4. Schnecke und Schneckenräder.*)

Verhältnismäfsiger Arbeitsverlust $\mathfrak{B}_s$ S. 256. Verzahnung S. 776. — Bei der Berechnung der Teilung t ist von der Gleichung

$$P = c b t$$

(S. 779) auszugehen und im Mittel (bei unvollkommenen Zähnen) die Zahnbreite zu wählen $b = 1{,}5\,t$, bei kleinem Schneckendurchm. weniger, bis auf etwa $b = t$ herab; bei richtig gestalteten Zähnen sei (im Zahngrunde) $b = 2{,}5\,t$ und mehr; für Gufseisen ist bei geschnittener Verzahnung

$c = 20$ bis 30 kg/qcm, wenn nur die Festigkeit in Betracht kommt (bei Schraubenflaschenzügen und ähnlichem stark unterbrochenem Betrieb, bei dem selten mit der Höchstlast gearbeitet wird, kann c erheblich gröfser werden).

Nach Stribeck ist bei Gleitgeschwindigkeiten von 4 m/sk im eingelaufenen Zustande der Räder $c = 20$ noch zulässig.

Für gute Phosphorbronze für das Rad und harten Stahl für die Schnecke, bei grofsen Umdrehungszahlen benutzt, ist, wenn die Festigkeit mafsgebend ist, $c = 32$ bis 50 zu setzen.

Für Dauerbetrieb (Rücksicht auf Erwärmung und Abnutzung mafsgebend) gibt Stolzenberg & Co., wenn die Schnecke im Oelbad (Abb. 83 nach einer Bauart der Deutschen Waffen- u. Munitionsfabriken) läuft und für gute Wärmeabfuhr gesorgt ist, folgende Zahlen:

*) Stribeck, Z. d. V. d. I. 1897 S. 936; 1898 S. 1156; Ernst, Z. d. V. d. I. 1900 S. 1229; Ernst, Hebezeuge, 4. Aufl., Bd. 1 S. 201.

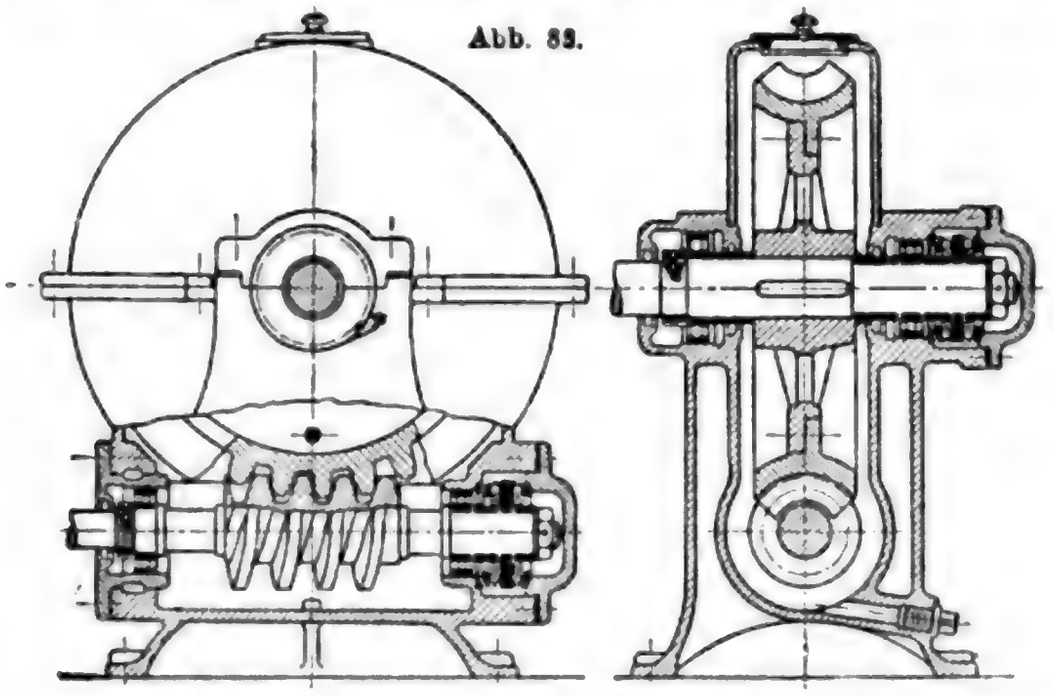
Digitized by Google

Umfangsgeschwindigkeit v der Schnecke:

1	2,5	4	5,5	7	m/sk
$c =$ 30 bis 40	25 bis 30	20 bis 24	15 bis 18	10 bis 12.	

Für Dauerbetrieb nur Phosphorbronze für das Rad und am besten naturharter Stahl (poliert) für die Schnecke. — Man wird auch bei Dauerbetrieb, wenn die Wärmeabfuhr so grofs ist, dafs

Abb. 83.



die Temperatur des Oels nicht über 60° steigt, mit c höher gehen können. — Zu beachten, dafs bei Rädern grofser Zähnezahl mehr Zähne mit der Schnecke in Eingriff sind als bei kleiner Zähnezahl.

Das zum Drehen der Schneckenwelle erforderliche Antriebmoment beträgt nach S. 254 (mit Zuschlag von 2 bis 10 % für die Lagerreibung):

$$M_d = (1{,}02 \text{ bis } 1{,}1)\, Pr \frac{h + 2\pi r\mu}{2\pi r - \mu h} \text{ cmkg},$$

worin bezeichnet

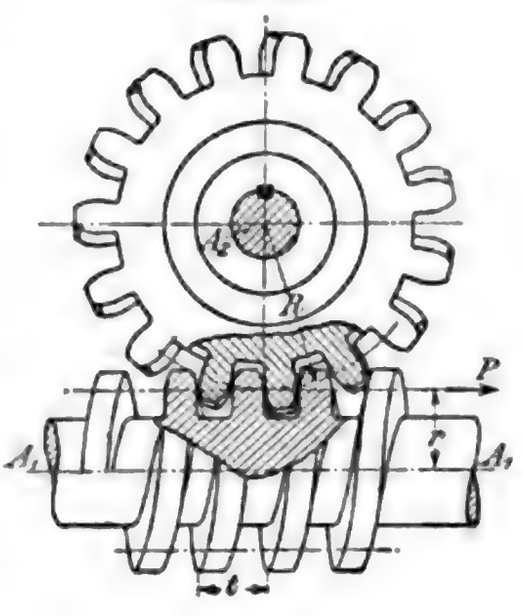
P den Zahndruck des Schneckenrades in kg, am Halbm. des Schneckenrades als Hebelarm wirkend (Abb. 84),

r den mittleren Schneckenhalbmesser bis zum Teilkreise des Schraubenrades in cm,

h die Ganghöhe der Schnecke in cm, und zwar für die eingängige Schraube $h = t$, für die m-gängige Schnecke $h = mt$,

μ die Reibungszahl (bei guter Oelung und glatten Oberflächen für Gufseisen = 0,1, für Stahl auf Phosphorbronze = 0,03, sonst höher).

Abb. 84.



Digitized by Google

Ist z die Zähnezahl des Schneckenrades, so ist bei m-gängiger treibender Schnecke das Uebersetzungsverhältnis

$$\varphi = m : z = n_2 : n_1,$$

worin entsprechend S. 765 n_1 die Umlaufzahl der treibenden und n_2 die der getriebenen Welle bedeutet.

Das Uebersetzungsverhältnis soll nicht kleiner sein als 1 : 6 oder 1 : 7, als günstigste Zahlen werden angegeben 1 : 10 bis 1 : 20.*)

Abb. 85.

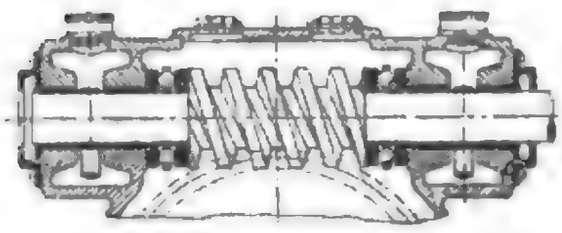


Abb. 86.

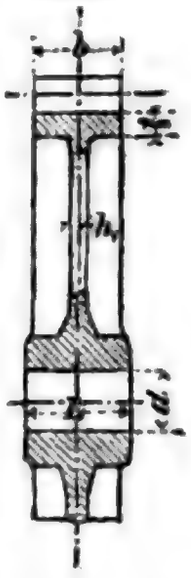
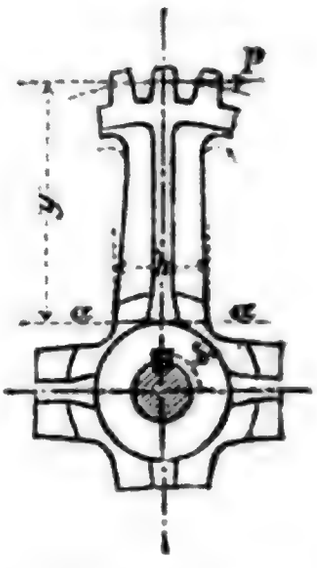


Abb. 87.



Soll die Anordnung selbsthemmend sein, so muſs (S. 253)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} \leqq \mu,$$

also für Guſseisen $\leqq 0{,}1$ sein.

Sind Erzitterungen zu befürchten, z. B. bei Fahrstühlen, so muſs für die Selbsthemmung $\operatorname{tg}\alpha$ noch geringer gewählt werden, bis auf $^1/_{12}$ herab; der Wirkungsgrad sinkt hierbei auf $\eta = 0{,}40$, und die Folge dieser groſsen Arbeitsverluste ist starke Abnutzung der aufeinander gleitenden Flanken. Soll das Getriebe nur für den Ruhezustand selbsthemmend sein, so ergibt sich η bis 0,70.

Gröſsere Wirkungsgrade des Schneckengetriebes ($\eta = 0{,}80$ bis $0{,}90$) werden erzielt bei Anordnung von Schrauben mit gröſserer Steigung, also solchen von zwei- bis fünffacher Gangzahl.

Zur Aufnahme des Achsialdruckes der Schnecke werden auf ihrer Welle Kamm- oder Kugellager angeordnet**) (Abb. 83 u. 85).

Beim Pekrungetriebe***) (Maschinenfabrik Pekrun, Coswig bei Dresden) arbeitet eine in der Regel eingängige Schnecke mit einem Rade zusammen, dessen Zähne aus Rollen bestehen. — Uebersetzung 1 : 3 bis 1 : 20; Nutzeffekt nach Angabe 90 bis 95 %.

c. Radkörper.

1. Für die **Stärke des Zahnkranzes** ist bei gröſseren Teilungen $0{,}5\,t$ ausreichend, mit schwacher Verjüngung (1 : 40 bis 1 : 60) nach auſsen, um das Herausheben des Modells aus der Form zu erleichtern (Abb. 86 u. 87); bei geringer Armzahl oder groſsem Raddurchmesser empfiehlt sich eine mittlere Verstärkungsrippe. Für Kammräder s. Abb. 93 bis 96 S. 790.

2. Unverletzte **Wandstärke der guſseisernen Nabe** (Abb. 86, 87 u. 89): $d = {}^1/_5\,(d_0 + {}^1/_2\,d) + 1$ cm bis ${}^1/_4\,(d_0 + {}^1/_2\,d) + 1$ cm,

---

*) Otto Gruson & Co., Magdeburg-Buckau, baute mit 1 : 20 ein Schneckengetriebe zur Uebertragung von 500 PS bei $n = 1000$ der treibenden Welle.

**) Fröhlich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1856 ff.

***) Z. d. V. d. I. 1912 S. 442.

Digitized by Google

worin bedeutet

d die Bohrung der Nabe in cm,

d_0 die Wellendicke (in cm), die dem zu übertragenden Drehungsmoment $M_d = P r = k_d 0{,}2\, d_0^3$ (S. 568 unter 1) entspricht und aus diesem zu bestimmen ist.

Nabenlänge: $L = 1{,}2\, d$ bis $1{,}5\, d$ und mehr,
oder $L \geqq b + 0{,}05\, r$, wenn r = Teilkreishalbmesser.

Lange Naben erhalten Aussparung (Abb. 89), dabei
$l_1 = 0{,}4$ bis $0{,}5\, d$.

3. **Anzahl der Arme** eines Rades etwa
$i = {}^1/_7 \sqrt{D}$ bis ${}^1/_8 \sqrt{D}$ (D Teilkreisdurchm. in **mm**).

4. Der **Querschnitt** der auf Biegung beanspruchten Arme ergibt sich (Abb. 86 bis 88) aus $Py = k_b W \frac{i}{4}$, worin W das dem Biegungsmoment Py entsprechende Widerstandsmoment des Armquerschnitts bezeichnet. Für gewöhnliche Kraft- und Triebwerkräder ist bei Wahl von k_b die Belastungsweise II (S. 503) zugrunde zu legen.

Für den kreuzförmigen Armquerschnitt mit $h_1 = {}^1/_6\, h$ (Abb. 86 u. 87) wird für $k_b \sim 300$ kg/qcm

$$h = \sqrt[3]{\frac{Py}{2{,}5\, i}}.$$

h verjüngt sich nach dem Kranze auf etwa $0{,}8\, h$.

Abb. 89.

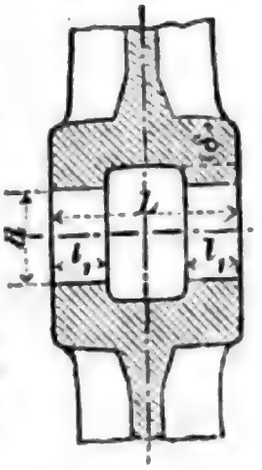


Abb. 88.

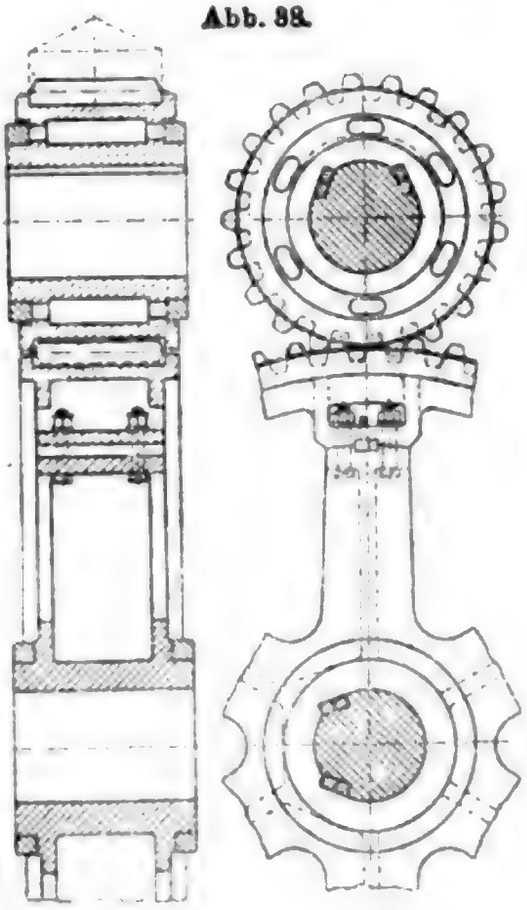
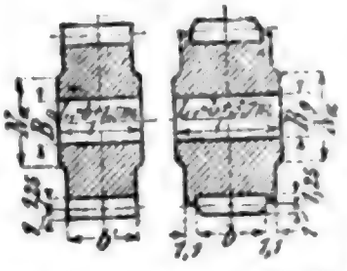


Abb. 90.



Größere Räder*) aus mehreren Teilen zusammengeschraubt (Abb. 88 u. 96). Das Rad Abb. 88 hat Pfeilzähne nach dem darüber angegebenen Winkel; Abb. 96 hat Holzkämme.

Die Abb. 90, 91 u. 92 zeigen die Abmessungen normaler Stirnräder von Otto Gruson & Co., Magdeburg-Buckau. Räder ohne und mit Bordscheiben, und zwar in der oberen Hälfte bei Abb. 91 u. 92 ungeteilt, in der unteren Hälfte geteilt. — Zur Bestimmung der Maße in mm sind die eingeschriebenen Zahlen mit dem jeweiligen Modul ($m = t : \pi$) zu multiplizieren. — Breite der Zähne b von $2{,}5\, t$ wachsend um 0,5 bis $5\, t$; Nabendurchm. $N_a = 1{,}7\, B_0 + 20$ mm.

Zur Vermeidung des Tönens großer Räder kann der Radkranz kastenförmig ausgebildet und mit Zement ausgefüllt werden, oder es werden die Wandungen und Arme des Rades mit Filz bekleidet.

*) Bach, 11. Aufl. 1913 S. 376 ff.

Digitized by Google

Zur Vermeidung starker Beanspruchungen durch Stöfse werden nach J. D. Weitzer*) elastische Zwischenglieder (Druckfedern und Druckwasserkolben) zwischen Zahnkranz und Nabe, die gesondert ausgeführt sind, eingeschaltet.

Für die Abmessungen der **Holzzähne** Abb. 93 bis 96. Der Kamm wird in zwei Teile (Abb. 95 u. 96) geteilt, je nach den Abmessungen

Abb. 91.

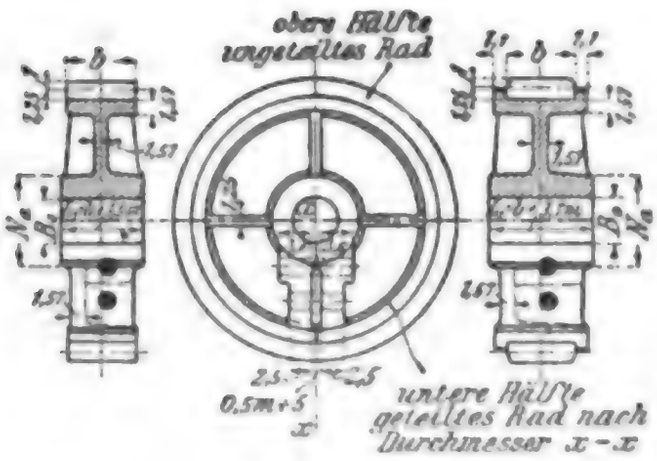


Abb. 92

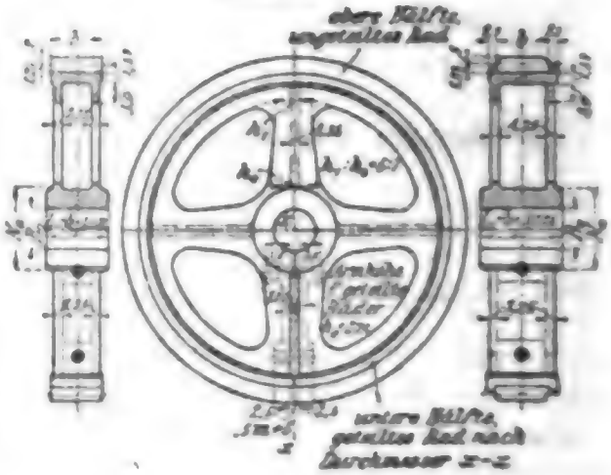


Abb. 93.

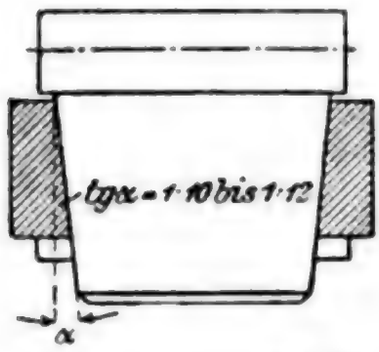


Abb. 94.

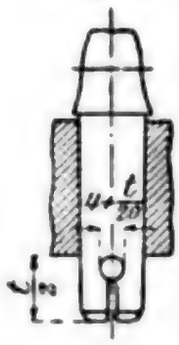


Abb. 95.

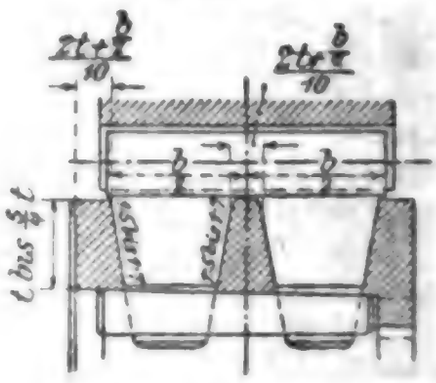
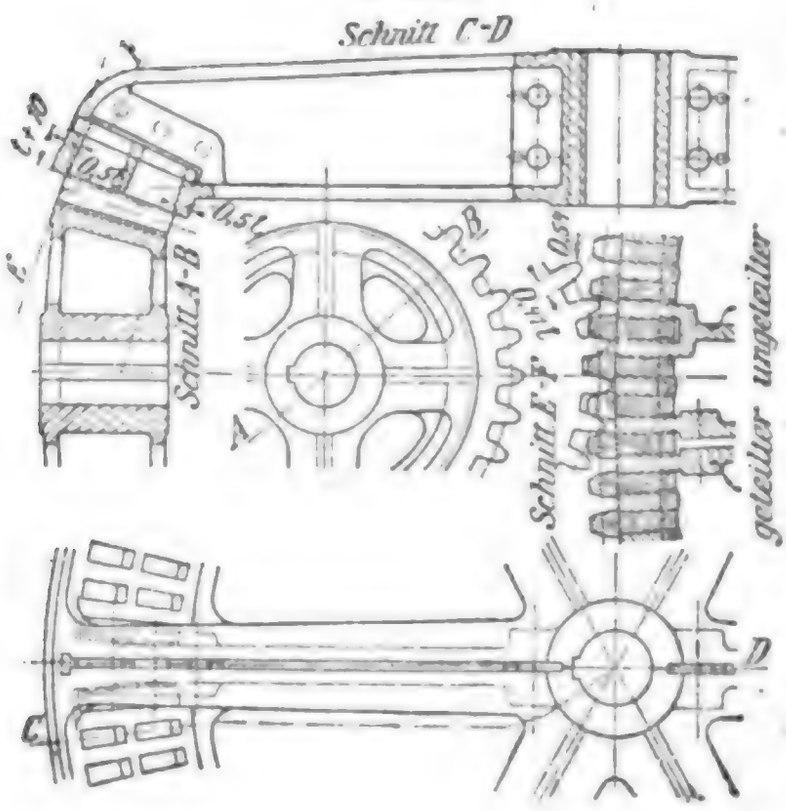


Abb. 96.



der vorhandenen Kämme für $b \geqq 18$ cm. Befestigung der Kämme entweder mit Stiften (Abb. 93 u. 94) oder mit Holzkeilen (Abb. 95 u. 96). Sorgfältiges Einpassen, reichliche Kranzstärken und völlig trockene Kämme (Weifsbuchen) nötig zum sicheren Betriebe. — Bei Rädern mit Holzzähnen: Zähnezahl ein Vielfaches der Armzahl.

Compoundverzahnung von H. Michaelis in Chemnitz. Die arbeitende Zahnflanke ist mit Holz

*) Z. d. V. d. I. 1903 S. 1855 ff.

Digitized by Google

ausgerüstet, wodurch das Ganggeräusch der Eisenzähne und die geringe Festigkeit der Holzkämme behoben werden.

5. Gewichte der Zahnräder.

Die **Gewichtstafel** liefert die annähernden Gewichte der gufseisernen Stirnräder gewöhnlicher Bauart mit geraden Zähnen.

Holzkammräder, Schraubenräder und Stirnräder mit Winkelzähnen (Pfeilräder) wiegen annähernd so viel wie Stirnräder mit Eisenzähnen gleicher Teilung, Zähnezahl und Breite.

Kegelräder wiegen rd. 0,9 mal so viel wie Stirnräder.

Das Gewicht der Stahlgufsräder ist etwa um 8,5 % gröfser als das der gufseisernen Räder gleicher Abmessungen.

Gewichte der Zahnräder.

Nach Otto Gruson & Co. in Magdeburg-Buckau.

Gewicht $G = z(\alpha + \beta b) - \gamma$ kg.

z = Zähnezahl. b = Zahnbreite in mm.

Teilung t mm	4 Arme			6 Arme			8 Arme			10 Arme		
	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
15	0,03	.	0,3	0,04	.	0,5	0,05	.	1,1	0,07	.	1,3
20	0,08	.	0,8	0,10	.	1,3	0,13	.	2,3	0,15	.	3,4
25	0,15	0,01	1,5	0,20	0,01	3,2	0,25	0,01	4,9	0,30	0,01	6,5
30	0,25	0,01	2,7	0,34	0,01	5,2	0,43	0,01	8,5	0,51	0,01	11,1
35	0,40	0,01	4,3	0,54	0,01	8,0	0,68	0,01	12,6	0,81	0,01	17,2
40	0,60	0,01	5,5	0,81	0,01	12,7	1,01	0,02	19,9	1,21	0,02	26,2
45	0,86	0,02	8,1	1,15	0,02	17,5	1,44	0,02	28,0	1,73	0,02	37,3
50	1,18	0,02	11,5	1,58	0,02	24,7	1,98	0,03	38,0	2,38	0,03	51,2
55	1,56	0,02	15,6	2,10	0,03	33,3	2,63	0,03	51,0	3,16	0,03	67,4
60	2,03	0,03	20,5	2,72	0,03	42,0	3,41	0,04	65,5	4,10	0,04	88,8
65	2,58	0,03	24,8	3,46	0,04	54,1	4,34	0,04	83,4	5,22	0,05	112,7
70	3,22	0,04	31,4	4,32	0,05	68,1	5,42	0,05	104,1	6,52	0,05	141,4
75	3,97	0,05	39,3	5,32	0,05	83,7	6,67	0,06	128,3	8,02	0,06	172,7
80	4,81	0,05	46,2	6,42	0,06	102,0	8,09	0,07	155,8	9,73	0,07	209,6
85	5,77	0,06	56,2	7,74	0,07	122,2	9,70	0,07	186,1	11,67	0,08	252,0
90	6,85	0,07	67,6	9,19	0,07	144,9	11,52	0,08	222,3	13,85	0,09	299,7
95	8,06	0,07	77,8	10,80	0,08	170,4	13,55	0,09	260,6	16,29	0,10	353,2
100	9,40	0,08	92,0	12,60	0,09	198,0	15,80	0,10	304,0	19,00	0,11	410,0

Beispiel. Ein Kegelrad aus Stahlgufs mit 1,53 m mittlerem Durchmesser und 96 Zähnen von 150 mm Breite hat eine Teilung von

$$765 : 15{,}279 = \text{rd. } 50 \text{ mm}$$

und (S. 789) $\frac{1}{7}\sqrt{1530} = $ rd. 6 Arme. Mithin ist

$$G = [96\,(1{,}58 + 0{,}02 \cdot 150) - 24{,}7] \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}09 = 415 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}09 = 413 \text{ kg}.$$

Digitized by Google

B. Reib- und Keilräder.*)

1. Es bezeichne

Q den Druck, mit dem die beiden zylindrischen **Reibräder** radial gegeneinandergepreſst werden, in kg,

P die durch das Räderpaar zu übertragende Umfangskraft in kg,

$\mu = \operatorname{tg} \varrho$ die Reibungszahl (S. 243 ff.); man setze:

$\mu = 0{,}10$ bis $0{,}15$ bei Gufseisen auf Gufseisen,
$\mu = 0{,}15$ „ $0{,}20$ „ „ „ Papier,
$\mu = 0{,}20$ „ $0{,}30$ „ „ „ Leder,
$\mu = 0{,}20$ „ $0{,}50$ „ „ „ Holz.

Die kleineren Werte sind zu benutzen, wenn die Reibflächen, wie gewöhnlich, glatt und fest sind. Es ist dann: $P \gtrless Q\mu$.

Zur Aenderung des Uebersetzungsverhältnisses während des Ganges **(Wechselgetriebe)** dienen zwei Reibräder nach Abb. 97, wobei die

Abb. 97.

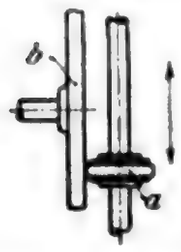


Abb. 98.

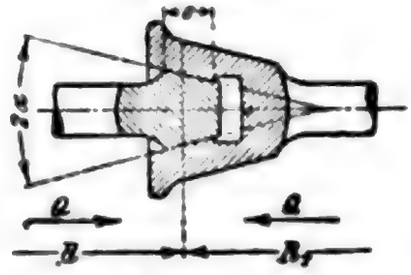
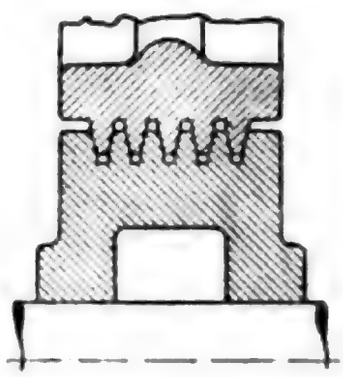


Abb. 99.



Scheibe a mit ihrer Welle oder auf ihrer (durchlaufenden) Welle verschiebbar ist. Die Planscheibe b besteht meist aus Gufseisen, die andere a aus Rohhaut (seltener aus Holz, von dem die Stirnseite arbeiten mufs). — Kann die Scheibe a über die Achsenmitte von b hinaus verschoben werden, so wird mit dem Uebersetzungsverhältnis zugleich bei gleichbleibender Drehrichtung der treibenden Welle der Drehsinn der angetriebenen Welle geändert **(Wendegetriebe** Abb. 103).

2. Für **Keilräder** (Abb. 98), zur Uebertragung gröfserer Kräfte dienend, ergibt sich bei dem Keilnutenwinkel 2α mit den vorstehenden Bezeichnungen nach Bach:

$$P \gtrless Q \frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = Q\mu',$$

woraus z. B. für $\alpha = 15^0$ und $\mu = 0{,}1$ (Gufseisen auf Gufseisen) $\mu' = 0{,}28$ folgt, also $Q \sim 3{,}5\,P$ und $\mu' : \mu = 1 : 0{,}36$. In letzterem Verhältnis wird das zur Uebertragung einer bestimmten Kraft P nötige Q bei Keilrädern geringer als bei zylindrischen Reibrädern. Nachteil (die Ursache starker Abnutzung) bei Keilrädern, dafs nur in einem zylindrischen Schnitte durch jeden Kranz, dem Berührungspunkte der Teilkreise entspr., ein Rollen stattfindet. Dieser Fehler wird um so kleiner, je geringer die radiale Eingrifftiefe e der Räder ist (möglichst $\leqq 0{,}5$ cm).

*) Wirkungsgrad von Reibrädergetrieben (Leder, gepreſstes Papier, Pockholz auf Gufseisen) auf Grund von Versuchen, Z. d. V. d. I. 1897 S. 1862, auch Mitt. Forschungsarb. Heft 10 S. 41 ff.

Digitized by Google

Zur Verminderung des Flächendrucks f. 1 cm Länge der Berührungslinie der Räder macht man sie mehrspurig (Abb. 99). Läfst man nach Bach für $\alpha = 15^0$ bei Gufseisen auf Gufseisen $e = 1$ cm zu und ist z (3 bis 6) die Zahl der Keilrillen, so ist die Umfangskraft (in kg): $P \leqq 20\,z$.

Bei dem Räderpaar Abb. 99 der Masch.-Fabr. Rud. Dinglinger, Cöthen, kann P gleich 100 kg (Q rund 335 kg, Umlaufzahl des kleinen Rades 240 bis 360) gesetzt werden.

Wirkungsgrad der Keilräder (nach Ernst) $\eta = 0{,}88$ bis $0{,}90$.

3. **Kegelförmige Reibräder** (Abb. 100). Mit den Bezeichnungen unter 1 und 2 gilt auch hier die Beziehung unter 2, wobei α der halbe Spitzenwinkel des kleineren, glatten Kegels ist, gegeben durch das Uebersetzungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = r : R$.

Für $\operatorname{tg}\alpha = 1:4$ bis $1:6$ wird $Q = 3{,}3$ bis $2{,}8\,P$, also nicht ungünstiger als bei zylindrischen Keilrädern; hierbei nach Ernst $\eta = 0{,}85$ bis $0{,}92$. Für kleinere Uebersetzungen bis $1:1$ wird Q bis $6{,}5\,P$, also sehr grofs. — Holz (Abb. 101) nur noch selten angewendet; meist Rohhaut oder Papierstoff (Abb. 102) auf Gufseisen. — Bauart der Räder aus Rohhaut wie die der Zahnräder (Abb. 76 u. 77 S. 783).

Abb. 100.

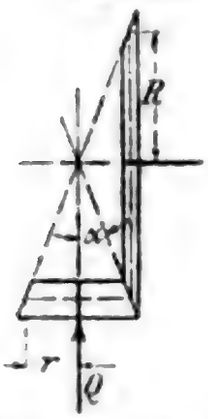


Abb. 103.

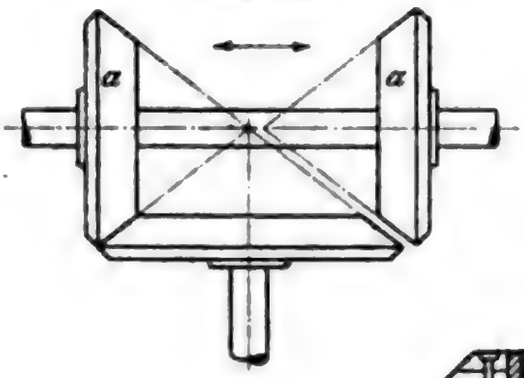


Abb. 102.

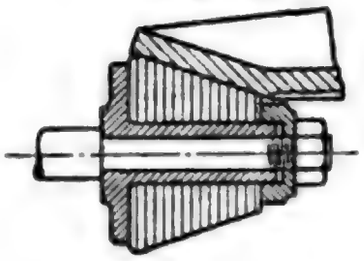


Abb. 101.

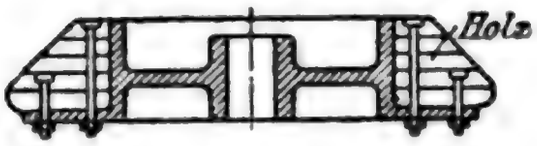


Abb. 103: **Wendegetriebe** mit verschiebbarem Räderpaar $a\,a$.

4. **Reibräder unter Vermittlung eines dritten, den Druck durch sich fortpflanzenden Körpers.** (Triebe von Stevens, Evans, Seybold und C. Hoppe.) — Zwischen den beiden Reibscheiben liegt ein geschlossener, dicker, leicht auswechselbarer Riemen, der eine geringere spez. Pressung ergibt und die Abnutzung aufnimmt (Abb. 104 S. 794).

Reibungsvorgelege des Eisenwerkes Wülfel, Hannover-Wülfel (Wechselgetriebe). Zwei kegelige Trommeln $b\,b$ werden so gegeneinandergepreſst, dafs ein endloser Lederriemen a, der zwischen ihnen läuft, die Bewegung überträgt (Abb. 105 S. 794). Aenderung der Umlaufzahl der getriebenen Trommel durch Verschieben des Lederringes a.

C. Hoppe drückte zwischen den beiden Scheiben zwei elastisch durch Gummibänder o. dgl. miteinander verbundene Rollen an (Abb. 106 S. 794); Kraftübertragung an zwei Stellen.

5. Ein **Reibrädergetriebe**, das zum Antrieb langsam laufender Wellen von der gleichachsig angeordneten, schnell laufenden Welle, z. B. eines Elektromotors, dient, ist unter dem Namen **Zentrator-**

Digitized by Google

kupplung bekannt geworden. Das Getriebe wird für höchstens etwa 7 bis 10 PS vielfach, beispielsweise von der AEG angewendet und von W. H. Hilger & Cie., Masch.-Fabr., Bonn a. Rh., für Uebersetzungen von 12 : 1 bis 7 : 1 gebaut. Beste Uebersetzung $\sim 9 : 1$. — Gegen den Zapfen der schnell lfd. Welle *a* (Abb. 107) liegen vier oder drei Ringe *b* unter dem Druck der Stahlklemmringe *c* und des gufseis. Druckringes *d*. Die Ringe *c* und *d* berühren sich in Kegel-

Abb. 104.

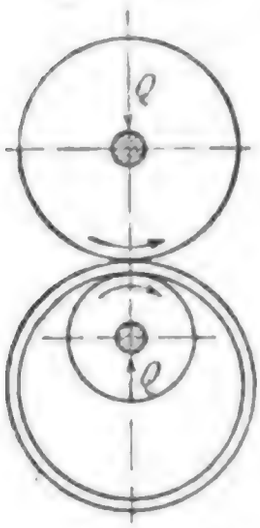


Abb. 105.

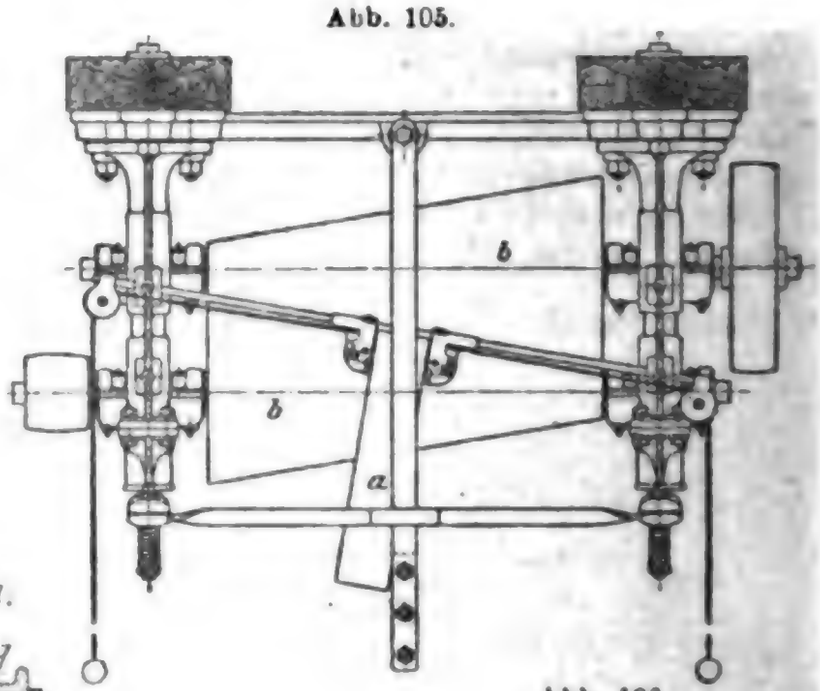


Abb 107.

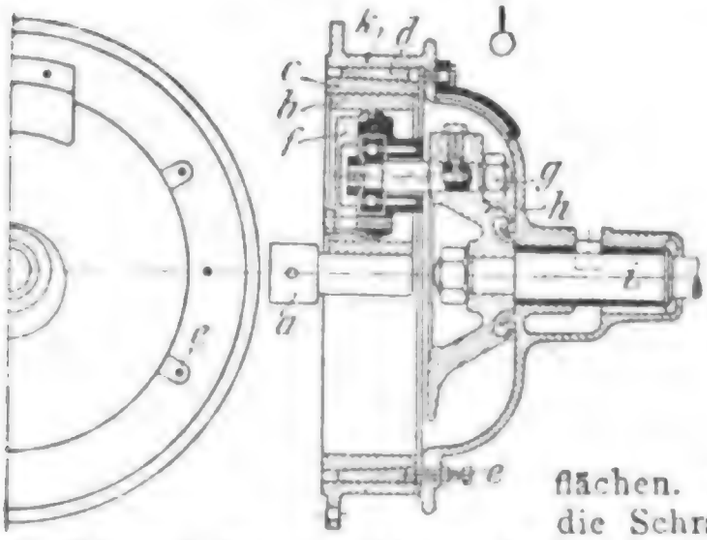
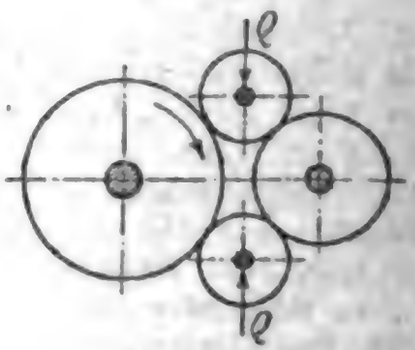


Abb. 106.



flächen. Der Druckring *d* kann durch die Schrauben *e* verstellt werden, um die Ringe *b* bis zur Höchstleistung anzupressen. In den umlaufenden Ringen *b* liegen Leitrollen *f*, die an der Rollbewegung teilnehmen und durch Eingreifen mit einem Ringwulst das Verlaufen der Ringe *b* verhindern. Uebertragung der Bewegung mit verminderter Umlaufzahl auf die Welle *i* durch die Mitnehmerbolzen *g* und die Mitnehmerscheibe *h*. Staub- und wasserdicht in das (stillstehende) Gehäuse *k* eingekapselt.

C. Riemen- und Seilbetrieb.

Ueber den durch Gleiten des Riemens oder Seiles auf den Scheiben entstehenden **Arbeits-** und **Geschwindigkeitsverlust** 𝔙 S. 256 ff.

Digitized by Google

a. Allgemeines.

Ueber die auf Grund der (nicht zutreffenden) Voraussetzung, dafs der Faden vollkommen biegsam sei, aufgestellte Art der Berechnung der Spannkräfte S_1 im ziehenden Faden und S_2 im gezogenen Faden sowie der darauf aufgebauten Berechnung der Riemenleistung vgl. Bach, Maschinenelemente, 11. Aufl. 1913, S. 405 ff.*)

b. Riemenbetrieb.

Die Anordnung mufs — Ausnahme s. Halbkreuztrieb (Abb. 109 S. 799) und Winkeltrieb (Abb. 110 S. 799) — stets derartig sein, dafs bei jeder Scheibe die Mittellinie des auflaufenden Riementeiles in die Mittellinie der Scheibe fällt.

Sind die beiden Wellen parallel und liegen die Scheiben in derselben Ebene, so haben die Scheiben gleiche Drehrichtung beim offenen, dagegen entgegengesetzte Drehrichtung beim gekreuzten Riemen (Abb. 112 S. 800). Kreuzen sich die Wellen und stehen dabei die Mittelebenen der Scheiben winkelrecht aufeinander, so erhält man den Halbkreuzriemen (Abb. 109 S. 799). Diese drei Riementriebe sind selbstleitend, während bei sich schneidenden Wellenrichtungen, d. h. bei dem sog. Winkeltrieb (Abb. 110 S. 799), aufser den beiden Scheiben noch zwei Leitrollen für die Führung des Riemens erforderlich sind. — Auch können Wellen, die sich unter weniger als 90° kreuzen (beispielsw. unter 60°), nicht nach Art des Halbkreuzriemens angetrieben werden. Auch hier müssen Leitrollen verwendet werden.

1. Riemenberechnung.

Ochsenleder, fertig zum Gebrauch, ist gewöhnlich 4 bis 7 (wohl auch 8) mm stark. Die Riemendicke s ist allein für die zulässige Belastung des Riemens und für die von ihm übertragene Umfangskraft P nicht mafsgebend, weil ein Riemen aus bestem (etwa 20 bis 30 cm breitem) Mittelrücken bei schnellerem Laufe ebenso stark beansprucht werden darf als das weniger gleichmäfsige, vielleicht etwas dickere Seitenleder derselben Kernhaut. Hierzu kommt, dafs infolge der Krümmung der Scheiben der Riemen über den Querschnitt nicht gleichmäfsig beansprucht wird und dafs dicke Riemen auf kleinen Scheiben eine erheblich andere Beanspruchung erfahren als dünne Riemen auf grofsen Scheiben. Endlich wächst mit der Riemendicke der Unterschied der Wege der Aufsenseite und der Laufseite beim Rundlauf auf der Scheibe; bei geringer Geschw. ($v \sim 3$ m/sk) haben die Faserspannungen innen und aufsen Zeit, sich auszugleichen, umsomehr als hierbei das gezogene (lose) Riemenstück gespannter ist als bei schnellem Laufe ($v \gtrsim 10$ m/sk);**) bei dicken Riemen und grofsen Geschwindigk. sind daher möglichst grofse Scheiben zu wählen.

Hiernach ist es gerechtfertigt, die zulässige Belastung des Riemens nicht auf 1 qcm Querschnitt, sondern (unter Berücksichtigung der Riemengeschw.) auf 1 cm Breite zu beziehen.

---

*) Ueber die Versuche von A. Friederich im Ingenieurlaboratorium der Königl. Technischen Hochschule in Stuttgart über das Gleiten (Kriechen — Längen und Kürzen) des Riemens auf der Scheibe und über die Reibung zwischen Riemen und Scheibe: vgl. Bach, Maschinenelemente, 11. Aufl. 1913, S. 435. — Weitere Versuche von Friederich (Frühjahr 1914) haben ergeben: 1. Das Gesetz der Reibung fester Körper gilt nur als Grenzfall für den neuen, fettfreien Riemen. 2. Im Betriebe, besonders für stark gefettete Riemen, tritt beim Gleiten an Stelle der Reibung fester Körper mehr oder weniger die innere Reibung des am Riemen und glatter Scheibe haftenden Fettungsmittels, die u. a. mit der Geschwindigkeit wächst und zu Reibungswerten führen kann, die ein Vielfaches der Werte für feste Körper betragen. Alle übrigen Einflüsse (Riemenmaterial) sind dann belanglos gegenüber dem Einflufs des Fettungsmittels. — Vgl. auch Skutsch, „Ueber den Einflufs der elastischen Nachwirkung auf die Leistungsfähigkeit der Riementriebe". Mitt. Forschungsarb. Heft 120, 1911. Skutsch, „Ueber die Reibung von Leder auf Eisen", Dingl. Pol. J. 30. Mai 1914.

**) Gehreckens, Z. d. V. d. I. 1893 S. 15 ff.

Digitized by Google

Zulässige Riemenbelastung p in kg für 1 cm Riemenbreite.

(Nach C. Bach, 11. Aufl. 1913 S. 437.)

Einfacher offener Riemen aus gutem Kernleder auf gufseisernen Scheiben, nahezu wagerechter Betrieb mit hinreichend grofsem Achsenabstande; das ziehende Riementrum liegt unten, das gezogene oben (S. 798).

D mm	$v =$ 3	10	20	30	40 m/sk
200	3	4,5	5,5	6	6
500	5	7	9	10	10
1000	6	8,5	11	12	12
2000	6,5	9,5	12	13	13

Für Doppelriemen von 10 mm Dicke sind diese Zahlen nach Bach, wenn $D > 1{,}00$ m, um 50 bis 60 %, und wenn $D > 2{,}00$ m, bis um 70 % zu erhöhen.

C. Otto Gehrckens*) in Hamburg empfiehlt für günstige Betriebsverhältnisse (S. 798) und für Riemen aus ausgewählten Häuten folgende Werte für p, wobei die **fett** gedruckten für Doppelriemen, die übrigen für **einfache** Riemen gelten. (Zwischenwerte, z. B. für 15 und 25 m/sk als Mittel der Werte für 10, 20 und 30 m/sk.)

mm Durchm.	3	5	10	20	30	40	50 m/sk
100	2 .	2,5 .	3 .	3,5 .	3,5 .	3,5 .	3 . kg
200	3 .	4 .	5 .	6 .	6,5 .	6,5 .	6,5 . "
300	4 **5**	5 **6**	6 **7**	7,5 **9**	8,5 **10**	9 **10**	9 **10** "
400	5 **6,5**	6 **8**	7 **9**	9 **11**	10 **12**	10,5 **12,5**	11 **12,5** "
500	6 **8**	7 **9,5**	8 **11**	10 **13**	11 **13,5**	11,5 **14**	12 **14** "
600	7 **9,5**	8 **11**	9 **12**	11 **15**	12,5 **16**	13 **16,5**	13,5 **17** "
750	8 **11**	9 **12,5**	10 **14**	12 **17,5**	13 **18,5**	13,5 **19,5**	14 **20** "
1000	9 **13**	10 **15**	11 **17**	13 **21**	14 **22**	14,5 **23**	15 **24** "
1500	10 **15**	11 **17**	12 **19**	13,5 **23**	14,5 **26**	15 **27**	15,5 **28** "
2000 "	11 **17**	12 **18**	13 **21**	14 **25**	15 **28**	15,5 **29**	16 **30** "

Die BAMAG, Dessau, gibt folgende Zahlen (**fett** gedruckt gilt für Doppelriemen):

mm Durchm.	3	5	10	15	20	25 m/sk
100	2 .	2,5 .	3 .	3 .	3,5 .	3,5 .
200	3 .	4 .	5 .	5,5 .	6 .	6,5 .
500	5 **8**	7 **9**	8 **10**	9 **11**	10 **12**	11 **13**
1000	6 **10**	8,5 **12**	10 **14**	11 **16**	12 **17**	13 **18**
2000	7 **12**	10 **15**	12 **20**	13 **22**	14 **24**	15 **25**

Mafsgebend für die Wahl von p ist (neben der Geschwindigkeit) der Durchm. der **kleineren** Riemenscheibe. Erfahrungsgemäfs werden bei langsamem Lauf die Riemen meist zu knapp gerechnet. Für steilen Betrieb oder bei kleinem Achsenabstande sind vorstehende Zahlen um etwa 20 % zu vermindern.

Bei Uebersetzungen ins Langsame und bei geringer Riemengeschwindigkeit (3 und 5 m/sk) sind geringere Werte für p zu wählen,

*) Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1893 S. 15, 1900 S. 1509, 1905 S. 1446 und 1910 S. 152.

Digitized by Google

u. Umst. nach C. Bach bis herab auf 0,5 p, sogar 0,33 p. Bei hoher Geschwindigkeit $v > 30$ m/sk hält aber Gehrckens die Uebertragung ins Langsamere für bedeutend günstiger, als bisher angenommen ist.

Bei stark ungleichförmigem Betriebe (Fallhämmer, Walzenstrafsen usw.) ist die Höchstbelastung zugrunde zu legen und p, der Ungleichförmigkeit entsprechend, bis 50 % und mehr niedriger zu wählen; auch empfiehlt Gehrckens, den Riemen dann nicht beliebig breit, sondern lieber doppelt zu nehmen, damit bei der stofsweisen Ueberanstrengung bei genügendem Querschnitt der Ausgleich durch zeitweises Gleiten möglich ist.

Riemen, die durch Gabeln geführt und oft verschoben werden, sind geringer zu belasten. Zu verschieben ist das auflaufende Riementrum.

Für gekreuzte Riemen vermindere man nach C. Bach die Werte von p für offene Riemen je nach Achsenabstand und Riemenbreite um 10 bis 30 %. Gehrckens beansprucht gekreuzte Riemen bei langsamem Lauf mindestens wie offene wegen des gröfseren Umfassungsbogens. — Achsenabstand $e \geqq 20$ mal Riemenbreite. Bei schnellem Laufe sowie bei breiten Riemen ist die Kreuzung möglichst zu vermeiden. — Für Halbkreuz nehme man je nach Achsenabstand und Riemenbreite p geringer als bei offenen Riemen (S. 798).

Die mittels einfachen Riemens **übertragbare Leistung** in PS ist, wenn $P = b$ (Riemenbreite in cm) mal p, und D der Scheibendurchm. in m:

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{p b \pi D n}{60 \cdot 75}; \quad \text{mithin } bD = \frac{4500\,N}{\pi p n} = \frac{1432{,}4}{p}\,\frac{N}{n}.$$

Für mittlere Verhältnisse ($p = 7{,}5$) ergibt sich hieraus die Formel

$$N = b R n,$$

worin b und R (Scheibenhalbmesser) in m auszudrücken sind.

Riemengeschwindigkeit v meist zwischen 5 und 30 m/sk; 40 m/sk bei Elektromotoren und Dampfturbinen nicht mehr selten, notwendig bestes Leder aus Mittelrücken (Wirbelstück der Kernhaut). — Auf der Versuchsmaschine der Techn. Hochschule zu Charlottenburg*) lief ein Riemen von 9 cm Breite von Gehrckens anstandslos mit 60 m/sk. Bei 40 m/sk leistete er 110 PS.

Beispiele. I. Auf einer Riemenscheibe von 2 m Durchm. überträgt ein einfacher offener, wagerechter Riemen von $b = 20$ cm Breite bei einer Geschwindigkeit von $v = 25$ m/sk, da nach der Tafel S. 796 von C. Bach hierfür $p = \frac{1}{2}(12 + 13) = 12{,}5$ kg/cm ist: $N = 12{,}5 \cdot 20 \cdot 25 : 75 = 83{,}3$ PS.

II. Ein offener Doppelriemen erfordert auf einer Scheibe von 1 m Durchm. bei $v = 15$ m/sk, also nach der Tafel von Bach, mit $p = 1{,}50 \cdot \frac{8{,}5 + 11}{2} = 14{,}6$ kg/cm für Uebertragung von 80 PS eine Riemenbreite b (75 . 80) : (14,6 . 15) = 28 cm.

---

*) Kammerer, Versuche mit Seil- und Riementrieben, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1085 und Mitt. Forschungsarb., hrsg. v. V. d. I. Heft 56 u. 57; Versuche mit Riemen besonderer Art, Mitt. Forschungsarb. Heft 132. — Meinungsstreit: Dingler Pol. J. 1913, Bd. 328, Heft 33, 43 u. 48. — Stephan, Ledertreibriemen und Riementriebe. Dingler Pol. J. 1913, Bd. 328, S. 289 ff. — Weitere Versuche mit Riemen u. dgl., Z. d. V. d. I. 1912, S. 1054; Theorie, W. Maier, Z. 1912, S. 2060; Kutzbach, Uebertragungsverluste Z. 1914, S. 1006. — Versuche von Niethammer und Czepek, Z. 1908, S. 668.

Digitized by Google

III. Ein 50 cm breiter Doppelriemen leistet nach Gehrckens bei 30 m sk mit $p = 30$, Scheibendurchmesser 2 m: $N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 50}{75} = 1000$ PS.

Einfache Riemen nicht über 50 bis höchstens 60 cm Breite zu empfehlen, von da ab verdienen **Doppelriemen** den Vorzug. Man lege die Fleischseiten aufeinander und nicht die glatten Haarseiten (Lage des einfachen Riemens S. 734). Doppelriemen leisten bei kleinen Scheiben wenig mehr als einfache Riemen, bei grofsen Scheiben ($R > 1$ m) zeigen sie Mehrleistungen von 70 % und darüber.

Achsdruck.*) Der Druck, den der gespannte Riemen während des Betriebes auf die Welle ausübt, diese auf Biegung beansprucht und die Zapfenreibung erzeugt, kann nach Bach für mittl. Verhältnisse etwa mit der doppelten Spannkraft, mit der der Riemen aufgelegt werden mufs, oder **gleich 3 P** angenommen werden. (Für schnellaufende Riemen kleiner.) Will man sicher gehen, so ist dieser Wert bei Festigkeitsrechnung (Durchbiegung der Welle) sowie bei Bestimmung des Arbeitsverlustes zu erhöhen, da der frisch aufgelegte Riemen meist stärker gespannt wird, als zur Uebertragung von P kg erforderlich.

Folgende **günstige Betriebsverhältnisse** sind für **offene Riemen** anzustreben. Uebersetzung ins Schnelle: höchste Punkte der Scheiben in wagerechter Linie (oder zu dieser unter höchstens 45°); unteres Riemenstück das ziehende (oberes schlaff); Scheibendurchm.-Verhältnis 1 : 1 bis 2 : 1, höchstens bis 5 : 1 (falls keine Spannrolle vorgesehen ist); Scheibendurchm. (auch bei Doppelriemen) womöglich $D \gtrless 100 \times$ (Gesamt-)Riemendicke. Wellenabstand für schmale Riemen (bis $b = 10$ cm) $e = 5$ m, für breitere $e = 10$ m, so dafs schmale Riemen 50 bis 100 mm, breite 100 bis 200 mm durchhängen (e nicht gröfser als 15 bis 18 m); Scheiben winkelrecht zur Wellenachse, genau laufend, sorgfältig abgedreht und ausgewogen; ausgewogene Riemen von überall gleicher Biegungsfähigkeit (auch in der Schlufsverbindung).

Bei Uebersetzung ins Langsame wähle man, wenn der Riemen ohne Spannrolle läuft, (womöglich) für die treibende Scheibe nicht unter 0,5 m, besser nicht unter 1 m Durchm.

Hat sich der eingelaufene Riemen unzulässig gedehnt, so empfiehlt es sich nicht, ihn sofort zu kürzen; besser: die auflaufende Fleischseite mit Rindertalg einfetten. Zunächst beginnt der Riemen zu gleiten; die Erwärmung aber macht das Fett flüssig, so dafs es vom Riemen aufgesogen wird und diesen durch Schwellen bis zu 2 % kürzt und zum Durchziehen veranlafst. — Kolophonium u. dgl. zu vermeiden.

Die beste **Schlufsverbindung** (S. 735) für Riemen ist, ihn durch Leimen endlos zu machen oder zu nähen; für offenen und gekreuzten Lauf ist dies wünschenswert, für Halbkreuz-, Winkel- und Kegelscheibentrieb sowie für schnellen Lauf aber geboten. — Die Kralle hat sich bei $v \lesssim 10$ m/sk bewährt. — Zum Nähen mit Drahtspiralen wird die Riemenverbindemaschine der Falkenauer Maschinenfabrik mit Vorteil verwendet.

Dicke Ansätze im Riemen wirken schädlich durch Stöfse gegen die Scheiben, durch Steifheit und gröfseres Gewicht, hauptsächlich aber, weil der Riemen gezerrt wird, wenn sich eine längere klumpige Verbindung auf die kleine Scheibe legt. Wird das ziehende Riemenstück plötzlich um etwa 5 bis 6 mm gedehnt, so tritt ein Stofs in der Kraft-

*) Vorspannung und Achsdruck bei Riemen- und Seiltrieben, Z. d. V. d. I. 1913, S. 2029 u. 1913, S. 967.

Digitized by Google

leitung ein, der sich z. B. bei elektrischem Licht bemerkbar macht und bei der häufigen Wiederholung zum Bruche des Riemens führt.

Bei **Halbkreuzriementrieb** soll nach Völckers der Wellenabstand (in m) $e \geqq 10\sqrt{b\,D}$ sein, worin b und D ebenfalls in m zu nehmen ist; dabei soll e mindestens das Doppelte des Durchm. der gröfseren Scheibe, nach Gehrckens aber mindestens das Vierfache des Scheibendurchm. oder die zwanzigfache Riemenbreite betragen. — Gehrckens verwendet bei **Halbkreuztrieb** einen Riemen, der aus zwei ungleich breiten, treppenförmig übereinandergelegten Riemen (Abb. 108) besteht. Damit wird bezweckt, dafs die einfache Kante sich dehnen kann, während ein Einreifsen durch die zurückliegende Verdopplung verhindert wird. Durch den Treppenriemen wird der Durchm. der Scheibe bis a vergröfsert, so dafs der Riemen hier einen gröfseren Weg zurücklegen mufs; damit wird der gröfste Zug im Riemen von der gezerrten Kante fort und nach dem Doppelriemen bis a verlegt.

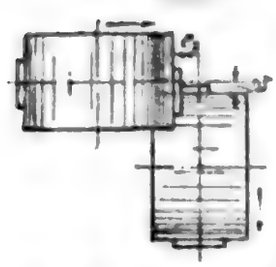
Abb. 108.

Anordnung der genau zylindrisch gedrehten Scheiben nach Bach gemäfs Abb. 109; darin ist die treibende Scheibe um etwa $e_1 = 0{,}1$ bis $0{,}2\,b$, die getriebene um $e_2 = 0{,}5$ bis $0{,}6\,b$ gegen das gezeichnete Mittellinienkreuz verschoben. Die genaue Stellung der Scheiben mufs im Betrieb festgestellt werden. Die getriebene Scheibe mufs sehr breit sein, weil der Riemen im Betrieb auf ihr hin und her wandert. Die Uebertragungskraft ist bis zu 25 % geringer als bei offenem Riemen.

Abb. 109.

Abb. 110.

Für **Winkeltrieb** sind Leitrollen erforderlich (Abb. 110), dabei soll die Leitrolle des ziehenden Riementeils mindestens den Durchm. der treibenden Scheibe (bei Uebersetzung ins Langsame) und deren 1,5fache Breite, dagegen die Leitrolle des losen Riementeils mindestens den Durchm. der getriebenen Scheibe und deren 2- bis 2,5fache Breite erhalten. Gehrckens verwendet für Winkeltrieb einen Mittelleistenriemen, bei dem die Mittellinie durch einen schmäleren Riemen verstärkt ist, weil die Aufsenkanten wechselseitig stärker gezerrt sind als die Mittellinie des Riemens. Riemenverbindung durch Leimen; bei genähten Verbindungen reifsen die Löcher an den Kanten aus.



Kegelscheibentrieb, namentlich offener, verlangt eine bestimmte Riemengeschw., deren Mindestmafs sich nach der Steigung des Kegels richtet. Diese Steigung sei so klein wie möglich, jedenfalls nicht mehr als 10 % ($\operatorname{tg}\alpha < 0{,}1$). Die auflaufenden Riemen sind (am besten durch Rollen) zu führen. Gekreuzter Trieb ist nach Gehrckens dem offenen vorzuziehen, zumal bei Geschw. unter 10 m.

Bei offenem Lauf (Abb. 111 S. 800) verwendet Gehrckens einen in

Digitized by Google

der Mittellinie verstärkten Riemen, bei gekreuztem Lauf einen dreifach treppenartig übereinanderliegenden (Abb. 112). — Die Uebertragungskraft bei Kegelscheiben mufs wesentlich ungünstiger als bei gewöhnlichen zylindrischen oder balligen Scheiben angenommen werden.

Mit zwei Paar kegeligen Trommeln, auf denen (gekreuzt) endlose Riemen laufen, die durch Riemengabeln gleichzeitig verschoben werden können, arbeitet das **Saxonia-Vorgelege** der Peniger Maschinenfabrik und Eisengiefserei, Penig i. Sachsen. Die getriebene Trommel des ersten Trommelpaares ist durch Zahnräder mit einer Trommel des zweiten Paares verbunden. Das Vorgelege ergibt einen Wechsel der Umlaufzahl in den Grenzen von 1 : 16.

Abb. 111.

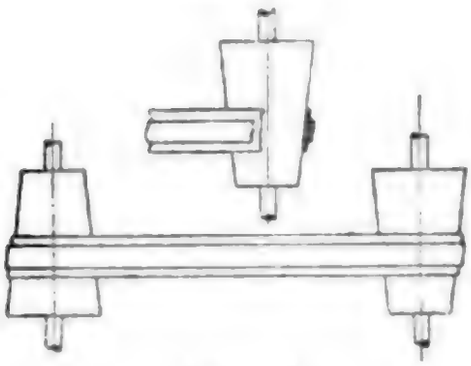


Abb. 113.

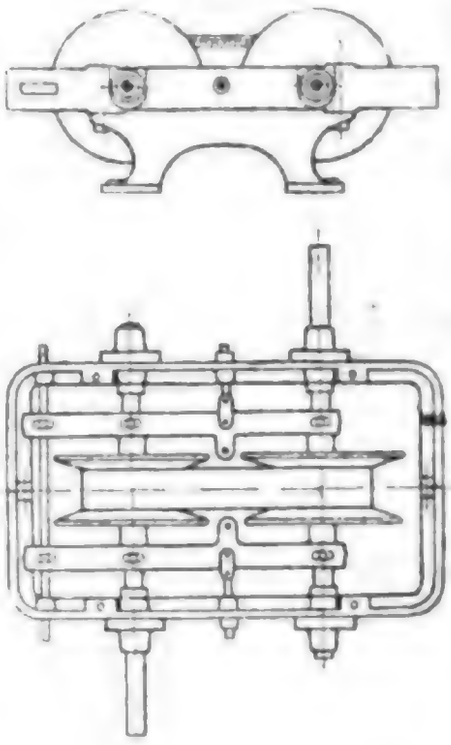
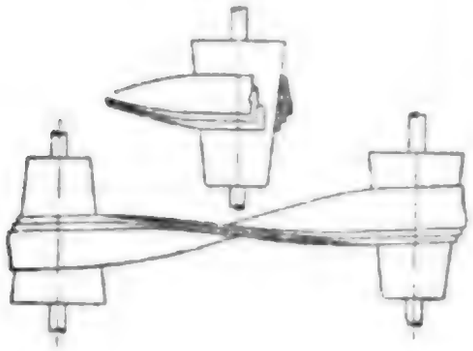
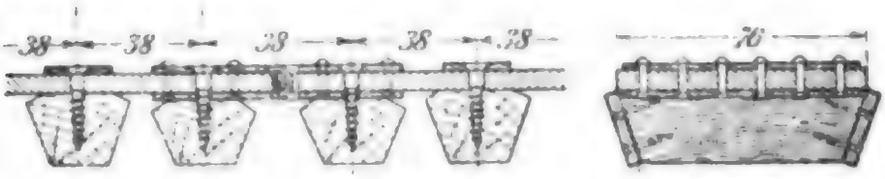


Abb. 112.



Als neuerer Ersatz für Kegelscheiben dient der **Umdrehungsregler** von G. Polysius, Dessau (Abb. 113); auch Ersatz für Stufenscheibenvorgelege, geeignet zum Antrieb von Werkzeugmaschinen. Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges der Maschine dadurch, dafs die Kegelscheiben durch doppelarmige Hebel paarweise einander genähert und voneinander entfernt werden, wodurch der Treibgurt seine Höhenlage zwischen den Scheibenpaaren ändert. — Der Treibgurt besteht aus einem Gummiriemen mit Baumwolleinlage, der mit Rotbuchenholzklötzen besetzt ist, die seitlich an den Teilen, wo sie die Kegelscheiben berühren, mit Leder besetzt sind (Abb. 114). Uebersetzungsverhältnisse bis 1 : 10, wobei die Umlaufzahl der getriebenen Welle bis zu 320 betragen kann; Uebertragungen bis zu 110 PS (bei n/min = 100).

Abb 114.



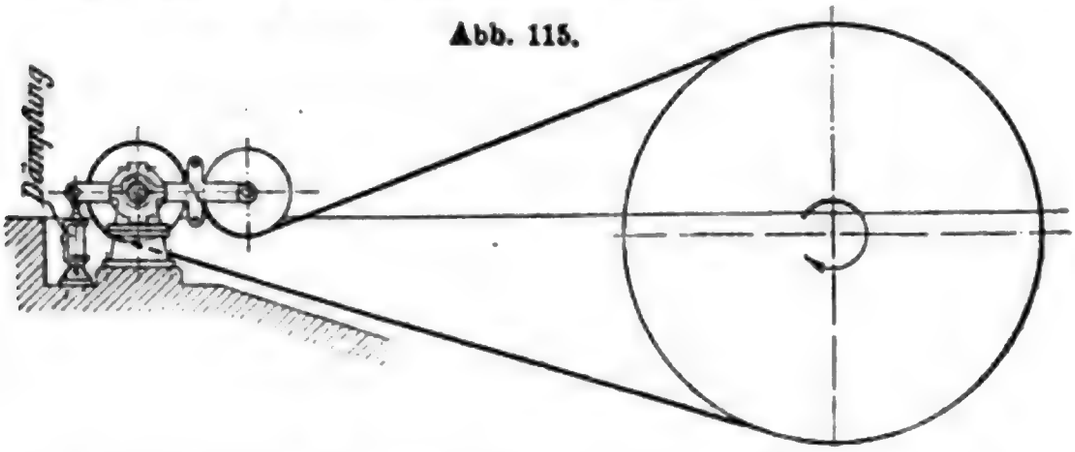
Spannrollen. Richtig bemessen und gelagert — dicht an der kleinen Scheibe, am gezogenen Riemenstück und mit Durchm. mindestens gleich der kleinen Scheibe (wenn möglich 1,5- bis 2 mal so grofs) —, verringert die Spannrolle nach Kammerer den Wirkungsgrad nur wenig (bis um etwa $v = 30$ m/sk), erhöht aber infolge des

Digitized by Google

gröfseren umspannten Bogens die übertragbare Nutzleistung. Auch wird der Riemen geschont, da die richtig angeordnete Spannrolle gestattet, den Riemen mit dem zulässigen Mindestwert der Vorspannung zu betreiben und ihn z. B. über Nacht ganz zu entspannen. — Nach Gehrckens sollte der Durchm. der **Spannrolle**, unabhängig von der Gröfse der kleinen Scheibe, möglichst grofs, mindestens gleich dem Hundertfachen der Riemendicke sein.

Beispiel: **Lenix-Spannrollengetriebe** der BAMAG (Abb. 115), das

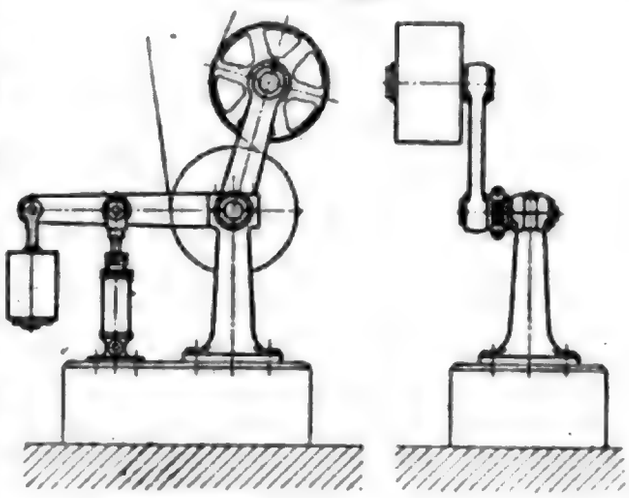
Abb. 115.



auch bei senkrechtem Riemen, kleiner Achsenentfernung und grofsem Uebertragungsverhältnis (bis 15 : 1) vorteilhaft arbeitet.*) Gebaut für Riementriebe bis zu 2400 PS und 140 cm breite Riemen.

Schwingungsdämpfer bei wechselnder Beanspruchung notwendig. Mit Oelbremse arbeitet z. B. die Spannrolle des Eisenwerkes Wülfel (Abb. 116). Rolle bis zu einer Riemenbreite von 300 mm fliegend gelagert, um den Riemen leicht abwerfen zu können. Die Spannrolle hat selbsttätigen Oelumlauf. Angewendet bei Kraftübertragung bis zu 2000 PS.

Abb. 116.



Für feuchte Räume, kurzen Achsenabstand und starke Uebersetzung **Gliederriemen** gebraucht (ähnlich wie Gelenkketten aus Lederlaschen und stählernen Gelenkstiften bestehend), des Gewichtes halber aber nur bei annähernd wagerechtem Lauf. Auch sind **Gummiriemen** hier am Platze. Gehrckens**) empfiehlt gut eingefettete Lederriemen, möglichst leichte Doppelriemen, bei denen die Verbindungsteile der beiden Riemenbahnen einander decken. — **Baumwollenriemen** strecken sich im Betriebe meist stärker als Lederriemen, sind jedoch geschmeidiger und von gleichmäfsigerer Dicke. Sie müssen sorgfältig durchfettet sein, damit der wechselnde Feuchtigkeitsgehalt der Luft nicht zu sehr auf die Länge einwirkt.

*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 636.
**) Z. d. V. d. I. 1899 S. 1631.

Digitized by Google

Gummi-, Balata- und **Baumwollriemen** können nach Bach mit $P = 8$ bis $10\ b\,.\,s$ belastet werden, worin b die Breite, s die Dicke des Riemens in cm bedeutet. — Eingehende Versuche mit diesen Riemen fehlen noch.

Kamelhaarriemen können nach Bach in Stärken von 1 bis 1,4 cm mit 6 bis 25 kg auf 1 cm Breite beansprucht werden. — Für ihre Excelsior-Haartreibriemen hält die Firma Gottfr. Ebell, Neuruppin, bei 0,8 cm Riemenstärke eine Beanspruchung bis zu 15 kg für 1 cm Breite für zulässig. Nach Angabe der mechanischen Treibriemen- und Schlauch-Weberei C. Vollrath & Sohn in Blankenburg (Schwarzatal) kann folgende Erfahrungsformel benutzt werden:

$$N = \frac{v\,.\,b}{3}\ (\text{PS}).$$

v bedeutet die Riemengeschw. in der **Minute**, b die Riemenbreite in **Meter**. — Für breitere Riemen, von 400 mm aufwärts, gilt: $N = \frac{v\,.\,b}{2{,}5}$. Uebliche Geschw. 1200 bis 1500 m in der Minute (20 bis 25 m/sk). — Gröfste Breite 1,50 m; übliche Lagerbreiten bis 0,80 m.

Beispiel: Ein Kamelhaarriemen von 0,75 m Breite hat 25 m/sk Geschw. Er überträgt also: $N = \frac{v\,.\,b}{2{,}5} = \frac{1500\,.\,0{,}75}{2{,}5} = 450$ PS.

Endlos gewebte Kamelhaarriemen können verwendet werden, wenn (z. B. für Dynamos) ein Spannschlitten vorhanden ist.

Mufs der Riemen oft ein- und ausgerückt werden, so ist Baumwoll- und Kamelhaarriemen **nicht** am Platz.

Stahlbänder*) (Kraftbänder) aus gehärtetem Spezialstahl, geliefert in Stärken von 0,2 bis 1,1 mm und in Breiten von 32 bis 250 mm von der Eloesser-Kraftband-G. m. b. H., Charlottenburg 5.

Zulässige Nutzkraft für ein Band $P = 35$ bis 1600 kg (für den Quadratmillimeter Bandquerschnitt 4 bis 6 kg, bei gröfseren Bändern 5 bis 7 kg — bei Parallelbändern etwas niedriger als bei Einzelbändern). — Die Bänder können mit Abstand zu zweien oder dreien nebeneinander auf einer Scheibe (auf Korkbelag) laufen. — Nutzeffekt nach Angabe 99 %. Die Bänder sind fast unempfindlich gegen Temperaturschwankungen und Luftfeuchtigkeit, geeignet für Umlaufzahlen von 1100 bis 475 i. d. Min. (je breiter die Bänder, desto kleiner die Umlaufzahlen).

Der Achsenabstand kann sehr gering sein [angegeben wird $1{,}4\,.\,(d_1 - d_2)$, worin d_1 den Durchmesser der gröfseren Scheibe, d_2 den der kleineren bedeutet]; er kann aber nach Angabe selbst gröfser werden als bei Drahtseilen, da bei dem geringen Gewicht des Bandes der Durchhang klein bleibt. — Das Band wird bei fliegend gelagerten Scheiben geschlossen geliefert.

2. Riemenscheiben.

Meist aus Gufseisen, vielfach auch aus Holz. Schmiedeiserne Scheiben (Nabe aus Gufs oder Stahlgufs, Arme aus schmiedeis. Rundstäben, Kranz aus Blech) wenig beliebt. Die folgenden Angaben gelten für Gufseisen.

Breite des Scheibenkranzes (Abb. 117) für ruhig lfd. Riemen

$$B = 1{,}1\,b + 1{,}0\ \text{cm},$$

für geschränkte oder unruhig lfd. Riemen etwas mehr, bei der getriebenen Scheibe in diesem Falle $B = 2\,b$ und darüber.

---

*) Z. d. V. d. I. 1911 S. 1768 ff.; Dingler Pol. J. 1911 S. 550.

Digitized by Google

Randstärke des Kranzes: $s_1 = 0{,}01\,R + 0{,}3$ cm.

Wölbungshöhe des Kranzes: $w = {}^1/_4\sqrt{B}$ bis ${}^1/_3\sqrt{B}$ (W und B in mm).

Die Wölbung sollte sich nach dem Achsenabstand, dem Uebersetzungsverhältnis, der Höhe der Belastung, Art des Betriebes und nach dem Riemenstoff richten; sie hat den Zweck, kleine, unvermeidliche Aufstellungsfehler der Triebwerke auszugleichen.*)

Bei offenem und bei gekreuztem Riemen soll nur die **getriebene** Riemenscheibe **gewölbt** (ballig) sein. — Alle treibenden Scheiben, ferner beide Scheiben bei Kreuz- und Winkeltrieb (bei letzterem auch die Leitrollen) sowie die Scheiben, auf denen der Riemen verschoben werden muſs oder auf denen mehrere Riemen laufen (mehrfache Scheiben), sind nicht gewölbt (ballig), sondern zylindrisch abzudrehen.

Gehrckens empfiehlt, bei groſser Geschwindigkeit ($v > 30$ m/sk) auch die treibende Scheibe gewölbt auszuführen.

Wagerecht angeordnete Scheiben erhalten notgedrungen einen **Rand**; sonst sind Ränder zu vermeiden, da sie nur den Riemen zerstören, sobald er die Ränder berührt.

Die Scheiben seien gut ausgewuchtet und **glatt**, weil der Riemen auf der Scheibe gleitet, d. h. sich längt oder einkriecht, je nachdem

Abb. 117.

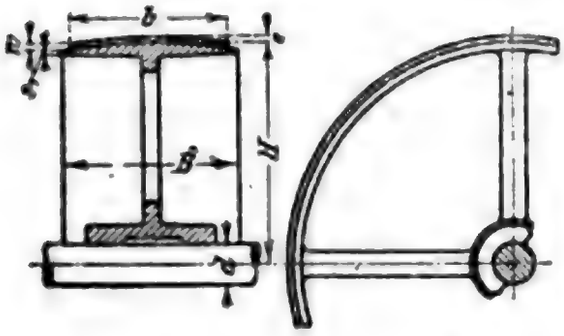
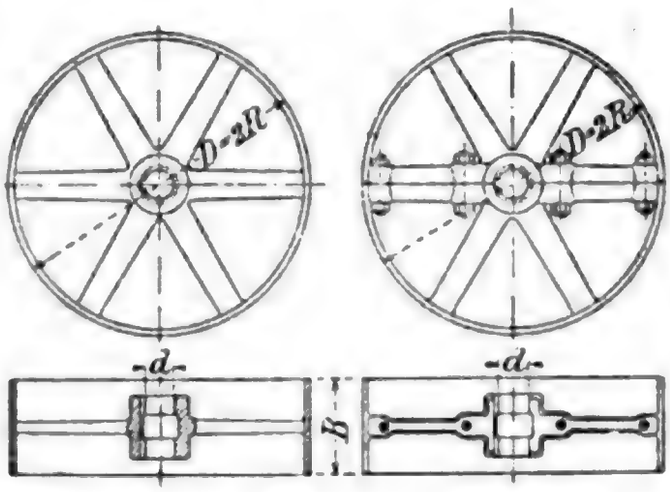


Abb. 118.



er vom gezogenen Riemenstück in das ziehende oder vom ziehenden in das gezogene übergeht; glatte Scheiben ergeben geringere Abnutzung des Riemens als rauhe.

Die **Anzahl der Arme** sei, wenn D der Scheibendurchmesser in **mm** ist, etwa

$$i = {}^1/_7\sqrt{D}.$$

Die Arme werden (bei genügend schwachem Kranze) nur noch gerade hergestellt (Abb. 118); die früher übliche geschwungene Form vergröſsert nur das Gewicht der Scheibe.

Der nach dem Kranze zu mit 5 : 4 sich verjüngende **Armquerschnitt** ist meist ellipsenförmig (Achsenverhältnis 1 : 2 bis 1 : 2,5). Ist bei dem bis zur Wellenachse gerechneten Arme h (in cm) die groſse und 0,4 h die kleine Achse der Ellipse und erfolgt die Kraftübertragung durch ${}^1/_3\,i$ Arme, so ist (bs Riemenquerschn.) mit $k_b = 300$:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2{,}5}{i}\,bsR},$$

worin b, s und R in cm und $bs \geqq 3$ qcm zu setzen ist.

*) Gehrckens, Z. d. V. d. I. 1889 S. 133.

Digitized by Google

Gewichte fertig gedrehter und gebohrter Riemenscheiben nach Abb. 118 in kg.

(Angaben der BAMAG, Dessau.)

Die obere Gewichtsangabe gilt für die ungeteilte, die untere für die geteilte, gebrauchsfertige Scheibe. Die Scheiben sind gerade (nicht ballig) gedreht. Bohrung $< 0{,}1\,D + 20$ mm.

D in mm	Breite B der Scheiben in mm											
	75	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500	600
200	6,5	7,5	8,5	10,0	12	14,5	18	25	30	.	.	.
	7,5	8,5	10,0	11,5	14	16,5	21	28	33			
300	10,0	11,5	13,0	15,0	17	22,0	27	37	43	.	.	.
	11,0	12,5	14,5	16,5	19	26,5	31	43	53			
400	15,0	16,5	18,0	20,0	23	32,0	37	52	58	.	.	.
	16,0	18,0	19,5	21,5	28	36,5	44	61	73			
500	20,0	21,5	23,0	28,0	33	42,0	49	67	74	86	98	.
	21,5	23,5	25,0	31,0	38	47,0	59	81	95	96	108	
600	24,0	25,5	27,0	35,0	42	50,0	61	83	92	106	122	.
	26,0	28,5	30,0	39,0	48	59,0	71	99	117	120	136	
700	28,5	31,0	34,0	43,0	52	62,0	75	100	112	130	146	.
	31,0	34,0	38,0	48,0	59	71,0	85	121	141	148	164	
800	.	39,0	42,0	51,0	62	76,0	89	120	132	154	174	.
		43,0	47,0	58,0	71	85,0	101	145	165	178	192	
900	.	47,0	50,0	59,0	72	90,0	105	141	154	182	204	.
		52,0	56,0	68,0	84	99,0	119	171	191	210	224	
1000	.	55,0	58,0	69,0	84	104	123	165	178	212	236	.
		61,0	63,0	79,0	98	115	137	199	217	244	260	
1100	.	64,0	68,0	79,0	96	122	142	189	202	244	268	.
		71,0	76,0	91,0	113	131	157	229	247	280	298	
1200	.	74,0	80,0	91,0	110	140	162	217	230	280	304	.
		82,0	89,0	103	129	149	177	261	279	318	338	
1300	.	84,0	92,0	105	126	160	184	245	260	316	344	.
		93,0	102	117	146	169	198	295	313	358	382	
1400	.	.	.	119	142	182	207	277	292	354	388	.
				133	164	192	222	331	349	400	428	
1500	.	.	.	135	162	204	231	310	326	394	432	.
				151	183	215	248	369	387	444	478	
1600	.	.	.	153	182	226	258	346	364	438	480	.
				171	203	241	276	409	427	490	530	
1700	.	.	.	171	202	248	286	382	404	484	528	.
				191	225	269	306	451	469	540	586	
1800	.	.	.	191	222	274	316	420	446	534	580	.
				213	249	299	338	495	515	594	642	
1900	.	.	.	211	246	302	346	462	490	586	634	.
				237	275	331	372	541	565	652	704	
2000	.	.	.	.	270	330	378	506	538	642	692	.
					303	365	408	589	619	714	766	
2500	.	.	.	.	416	496	560	776	828	968	1034	1254
					473	561	618	889	927	1078	1136	1376
3000	.		.	.	608	706	784	1116	1188	1372	1456	1748
					693	791	878	1259	1327	1510	1596	1904
3500	.	.	.	.	838	956	1048	1512	1604	1838	1950	2318
					963	1071	1188	1685	1797	2034	2134	2508
4000	.	.	.	.	1096	1234	1346	1932	2050	2334	2486	2938
					1269	1383	1532	2169	2303	2590	2738	3160

Digitized by Google

Die **Naben** können ein wenig schwächer, als für Räder (S. 788) angegeben, gemacht werden. Länge $= B$, wenn $B \geqq 1{,}2\,d$ bis $1{,}5\,d$ ($d =$ Wellendurchm.). Breitere Scheiben erhalten Nabenlänge $< B$. Bei Doppelscheiben genügt als Nabenlänge $^1/_2\,B$, wenn $^1/_2\,B \gtrless {}^5/_4$ bis $^7/_4\,d$. Für $B > 30$ cm gibt man der Scheibe zwei Armsterne.

Bei **Los- oder Leerscheiben** ist das auflaufende Riemenstück zu verschieben. — **Losscheiben** erhalten eine Nabenlänge $\geqq 2\,d$. Achsiale Schubbegrenzung ist vorzusehen. — Bei gröfserem Riemenzug und

Abb. 119.

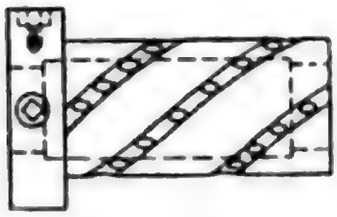
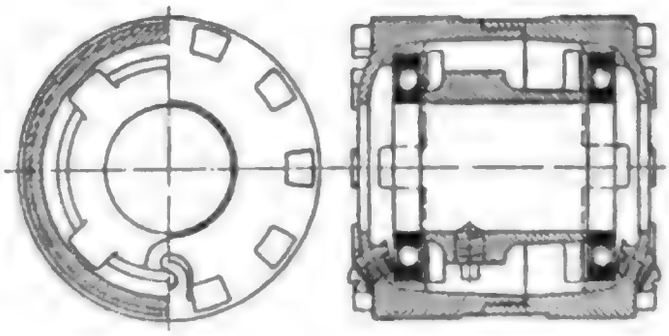


Abb. 120.



langem Leerlauf entsteht leicht Erwärmung und Abnutzung. Um dies zu vermeiden und die Gleitflächen genügend mit Oel zu versorgen, werden Leerlaufbüchsen verwendet (Abb. 119). **Selbstschmierende Kugellagerlaufbüchse** von G. Polysius in Dessau, bei der zwischen den Kugellaufringen eine Büchse sitzt, die mit Armen zum Heben und Abstreifen des Oels versehen ist (Abb. 120). Der äufsere Oelbehälter besteht aus zwei ineinandergeschraubten Muffen.*)

8. Stufenscheiben.**)

Bedingung: Riemenlänge $L =$ konst. — Man ordnet die Stufenscheiben vielfach so an, dafs die verschiedenen Umlaufzahlen der getriebenen Welle eine geometrische Reihe bilden.

Im allgemeinen gegeben: der Achsenabstand e, die Stufenzahl, die minutl. Umlaufzahlen n_{max} und n_{min} der getriebenen Welle, die gleichbleibende minutl. Umlaufzahl n der treibenden Welle und deren gröfster Scheibenhalbm. r_1, dem also auf der getriebenen Welle als kleinster Halbm. entspricht:

$$r_2 = r_1\,(n : n_{max}).$$

Die theoretische Riemenlänge ist:

$$L = \pi\,(r_1 + r_2) + 2\beta\,\frac{\pi}{180}\,(r_1 \mp r_2) + 2\,e\,\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 \mp r_2}{e}\right)^2}, \quad . \quad . \quad (1)$$

$$L \sim \pi\,(r_1 + r_2) + 2e + \frac{(r_1 \mp r_2)^2}{e}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worin $-$ für offene und $+$ für gekreuzte Riemen gilt und der Winkel β in Grad auszudrücken ist, so dafs

$$\sin\beta = \frac{r_1 \mp r_2}{e}.$$

*) Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1767.

**) J. Bartl, Ziviling. Bd. XXVI Heft 1; Kohn, Z. d. V. d. I. 1886 S. 1004; Fischer, Z. d. V. d. I. 1892 S. 576.

Digitized by Google

Darin ist β derjenige Winkel, um den der halbe Umfassungswinkel der gröfseren Scheibe gröfser ist als 90^0.

Soll nun L für ein anderes Halbmesserpaar $(R_1\ R_2)$ denselben Wert besitzen wie für $(r_1\ r_2)$, so mufs für den **gekreuzten** Riemen

$$R_1 + R_2 = r_1 + r_2,$$

d. h. die Summe je zweier zusammengehörigen Halbmesser mufs bei miteinander arbeitenden Stufenscheiben unveränderlich sein.

Daher müssen auch im Falle des gekreuzten Kegeltriebes die Kegelseiten beider Trommeln gleiche Achsenwinkel bilden. — In manchen Fällen können die beiden [einander entgegengesetzt gelagerten] Stufenscheiben (oder Kegeltrommeln) ganz gleich, unter Benutzung desselben Modells, ausgeführt werden.

Wenn für **offene** Riemen $e \geqq 20\,(r_1 - r_2)$ ist, so genügt ebenfalls $R_1 + R_2 = r_1 + r_2 = \text{konst.}$ Ist e aber kleiner und wird z. B. das Uebersetzungsverhältnis $\varphi = R_1 : R_2$ beabsichtigt, so ermittle man (unter Benutzung des Wertes L aus Gleichung (2) R_2 aus der angenäherten Gleichung:

$$R_2^2\,(\varphi - 1)^2 + \pi\,(\varphi + 1)\,e R_2 + 2e^2 = eL,$$

alsdann

$$R_1 = \varphi\, R_2 \quad \text{usw.}$$

Auszuführen ist hierbei das genaue L nach Gleichung (1). — Mittels der für die verschiedenen Scheibenpaare auszurechnenden L lassen sich die gefundenen Halbmesser prüfen. — Bei kleinem e und offenem Riemen kann, streng genommen, ein zusammengehöriges Stufenscheibenpaar nicht gleich ausfallen; auch macht man im Falle des offenen Kegeltriebes die eine Trommel etwas bauchig.

c. Drahtseilbetrieb.

Zur Kraftübertragung auf kleinere Entfernung neuerdings seltener angewendet. Bei gröfseren Entfernungen (schon von 50 m ab) mehr und mehr durch elektrische Kraftübertragung verdrängt.

Drahtseiltransmission nur richtig, wenn die treibende und die getriebene Achse möglichst in derselben wagerechten und genau in derselben senkrechten Ebene liegen. — Spannrollen (wie bei Riemen) oder Spannwagen (wie bei Hanfseilen) unbedingt zu verwerfen wie starkes Spannen des Seiles überhaupt. Seilspannungen werden nur durch das Gewicht des Seiles erzeugt. — Leit- und Tragrollen auch vermeiden, höchstens dürfen Tragscheiben verwendet werden, die so grofs sind wie die Treibscheiben.

Gewichte gufseiserner Drahtseilscheiben

von Felten & Guilleaume Carlswerk in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

6 Arme. Teilung erfolgt in einem Armpaare		Ungeteilte Scheiben								Geteilte Scheiben			
Scheiben-Durchmesser	mm	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250	3500	3600
Gewicht der einrilligen Scheiben	kg	106	135	160	215	270	330	400	575	1025	1200	1410	1600
Gewicht der zweirilligen Scheiben	kg	170	210	255	315	395	510	645	825	1270	1580	1950	2300

Digitized by Google

Triebwerk-Drahtseile

von Felten & Guilleaume-Carlswerk in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

I.

Für übliche Seilscheiben-Durchmesser:

$D = 150\,d$ bis $175\,d$.

Durchmesser des Seiles	Zahl der Drähte im Seile	Dicke der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles
mm	Stück	mm	kg/m
9	36	1,0	0,26
10	42	1,0	0,31
11	36	1,2	0,38
12	42	1,2	0,45
13	36	1,4	0,51
14	42	1,4	0,61
15	48	1,4	0,70
16	42	1,6	0,79
18	48	1,6	0,91
20	48	1,8	1,15
22	54	1,8	1,30
24	60	1,8	1,46
26	60	2,0	1,80

II.

Für kleine Seilscheiben-Durchmesser:

$D = 120\,d$ bis $150\,d$.

Durchmesser des Seiles	Zahl der Drähte im Seile	Dicke der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles
mm	Stück	mm	kg/m
11	48	1,0	0,36
12	54	1,0	0,40
13	60	1,0	0,45
14	64	1,0	0,48
15	72	1,0	0,55
16	64	1,2	0,69
18	72	1,2	0,79
20	80	1,2	0,88
22	80	1,4	1,20
24	88	1,4	1,33
26	80	1,6	1,56
28	88	1,6	1,73
30	80	1,8	1,98
32	88	1,8	2,19
34	96	1,8	2,41

III.

Eisendraht (statt Hanf) in den Litzen.

(Nur für grofse Achsenabstände und grofse Seilscheiben.)

Kleinster zulässig. Seilscheiben-Durchm. mm	Drahtdicke mm	Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m	Kleinster zulässig. Seilscheiben-Durchm. mm	Drahtdicke mm	Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m
1000	1,0	7	24	0,18	1500	1,5	10,5	24	0,41
		9	42	0,32			14	42	0,71
		12	56	0,42			18	56	0,95
1100	1,1	7,5	24	0,22	1600	1,6	11	24	0,46
		10	42	0,38			15	42	0,81
		13	56	0,51			19	56	1,08
1200	1,2	8,5	24	0,26	1700	1,7	12	24	0,52
		11	42	0,46			16	42	0,92
		14	56	0,60			20	56	1,21
1300	1,3	9	24	0,30	1800	1,8	13	24	0,58
		12	42	0,54			17	42	1,03
		15	56	0,71			21	56	1,36
1400	1,4	10	24	0,35	2000	2,0	14	24	0,72
		13	42	0,62			19	42	1,27
		17	56	0,82			23	56	1,68

In Tafel III ist für jede Drahtdicke ein Zwischendurchmesser fortgelassen.

Digitized by Google

Antriebscheibe und getriebene Scheiben müssen möglichst gleichen Durchm. haben. — Uebersetzung mufs also durch Riemenvorgelege hergestellt werden. — Seilscheibendurchm. in der Regel $\geqq 150$ mal Seildurchm.; Scheiben mindestens 1 m grofs.

Der Seilscheibenrille (Abb. 121 u. 123) gibt man die doppelte Seildicke als Tiefe, so dafs das Seil (mittels des Seilauflegers) leicht aufzulegen und abzuschlagen ist; doch wird (Abb. 122) die Rille häufig viel tiefer gemacht (Ausführung von G. Polysius, Dessau). Ausfütterung der Rille bei Trieb- und Zwischenrollen mit Stückchen Hirnleder, seitlich eingeschoben (Abb. 121) oder schräg eingesteckt und dicht aneinandergetrieben und abgedreht (Abb. 122 u. 123). Dauer des Lederfutters 3 Jahre und darüber. Auch Holzfutter (mit radialer Faserrichtung). Die Rillen

Abb. 121.

Abb. 122.

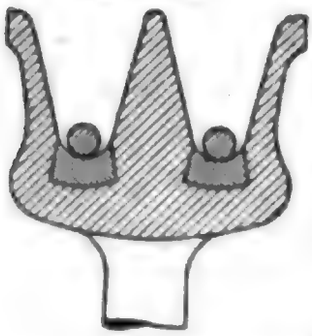


Abb. 123.

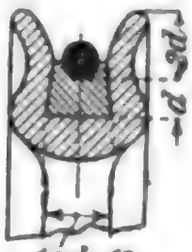
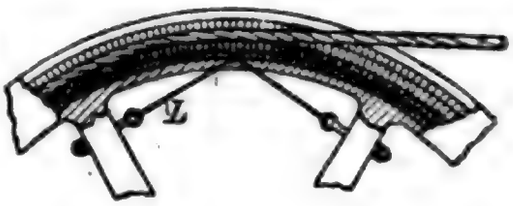


Abb. 124.

Abb. 125.



stets glatt auszudrehen, auf dem Grunde genau nach dem Durchm. des Seiles und so, dafs dieses mit einem Drittel seines Umfanges aufliegt.

Bei der Bauart (Abb. 124 u. 125) von Georg Heckel, G. m. b. H., Drahtseilfabrik, Saarbrücken (St. Johann), sind die Lederplättchen P auf eine Drahtlitze L aufgereiht, die an Armen der Scheibe befestigt ist.

Bei Bestellung von Triebwerk-Drahtseilen und Seilscheiben empfiehlt sich Angabe der zu übertragenden PS, ferner: Achsenabstand, Umdrehungszahlen, Scheibendurchm., Scheibenbohrungen, Rillenquerschnitt; endlich anzugeben, ob die Scheiben mit oder ohne Ledereinlage, geteilt oder ungeteilt zu liefern sind.

Kleinster Achsenabstand der Triebrollen 15 bis 20 m, gröfster 80 bis 125 m. — Seilgeschw. bei kleineren Kräften 6 bis 10 m/sk; bei grofsen Kräften bis 25 m/sk. Umlaufzahl zweckmäfsig um 120; Scheibendurchm. ist entsprechend grofs zu wählen. — Seilscheiben dürfen nicht schlagen und werden deshalb nicht aufgekeilt, sondern mit gespaltener Nabe aufgeklemmt.

Berechnung der Seilstärke: Umfangskraft $P = \frac{N \cdot 75}{v}$ kg.

Dann ist zu wählen

für $P =$	50	60	70	85	100	120	140	160	180
ein Seil von	9	10	11	12	13	14	15	16	18
$P =$	210	240	270	300	330	365	400	445	500 kg
	20	22	24	26	28	30	32	34	37 mm Durchm.

Im Freien: Seile aus verzinktem Draht. Verbindung der Seilenden durch Verspleifsen, auch durch Seilschlösser.

Digitized by Google

d. Hanfseil- und Baumwollseilbetrieb.*)

1. Seile. Die geschlagenen Rundseile bestehen meist aus drei Litzen, jede aus einer gröfseren Zahl von Fäden gesponnen. Ist d der Seildurchm. und δ der Litzendurchm., so ist $d \sim 2{,}2\,\delta$, mithin der Gesamtquerschnitt der Litzen etwa nur das 0,62 fache der Fläche $^1/_4\,\pi d^2$. Ganghöhe der Litzenschraubenlinien im Mittel etwa $5\,\delta$. Manilahanfseile weniger geschmeidig, brauchen gröfsere Scheiben.

Runde Treibseile aus Hanf oder Baumwolle
von Felten & Guilleaume in Cöln (Rhein).
Seilgewicht q in kg/m.

Seildurchm. d in mm	25	30	35	40	45	50	55
Gehechelter Schleifshanf . .	0,52	0,73	1,05	1,40	1,70	2,00	2,40
Hellster Manilahanf	0,46	0,65	0,85	1,25	1,50	1,90	2,25
Amerikanische Baumwolle . .	0,47	0,67	0,93	1,25	1,50	1,90	2,25

Zum Verspleifsen der Seilenden 3 bis 4 m Mehrlänge nötig; Seilschlösser nicht bewährt. Nachspleifsen der im Betriebe gelängten Seile ist kostspielig und zeitraubend; deshalb sind die Seile vor dem Gebrauche gut auszurecken und zu trocknen. — Dauer der Seile bei sachgemäfsem Betriebe und guter Behandlung (Einfettung alle 2 bis 3 Monate, anfangs öfter) bis 6 Jahre und mehr.

Dreikantseile derselben Fabrik, geflochten, ebenso **Achtkantseile** ergeben durch die grofse Auflagerfläche an beiden Rillenseiten gute Kraftausnutzung ohne erhebliche Formänderung des Seiles.

Dreikantseile:

Seildurchm. . .	35	40	45	50	mm
Querschnitt . .	9	12	15	19,5	qcm
Gewicht . . .	1,0	1,25	1,50	1,75	kg/m.

Achtkantseile:

Seildurchm. . .	25	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . .		6,3	9,1	12,3	16,1	20,3	25,1	qcm
Gewicht . . .	0,45	0,50	0,80	1,05	1,30	1,60	1,95	kg/m.

Quadratseile der A. G. für Seilindustrie, vorm. Ferdinand Wolff, Quadratseilfabrik, Mannheim-Neckarau. Die **Quadratseile** von Felten & Guilleaume, Cöln, haben etwa gleiche Gewichte.

Seildicke	25	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . . .	6,25	9,0	12,25	16,0	20,25	25,0	30,25	qcm
Gewicht	0,55	0,90	1,10	1,45	1,75	2,15	2,70	kg/m
Scheibendurchm.	0,375	0,45	0,7	0,8	0,9	1,1	1,4	m.

Geflochtene Quadratseile zeigen grofse Geschmeidigkeit; keine Neigung zu Drehungen, drallfrei; sehr geringe Längenänderung.

*) Versuche Kammerers mit Hanfseilen; Z. d. V. d. I. 1907 S. 1085 u. Mitt. Forschungsarb. Heft 56 u. 57. — Versuche über den Wirkungsgrad von Seilen. Bonte, Z. d. V. d. I. 1913 S. 1711; 1914 S. 438.

Digitized by Google

Leistung in PS von runden Hanf- nach Felten & Guilleaume.

Uebertragungsfähigkeit eines Seiles vom Durchm.	Seilgeschwindigkeit 10 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 15 m für 1 sk			
Beanspruchung auf 1 qcm von	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg
25 mm	4½	5	6	6½	7	8	9	10
30 „	6½	7½	8½	9½	10	11½	13	14
35 „	9	10	11½	13	13½	15½	17	19
40 „	12	13½	15	16½	17½	20	22½	25
45 „	15	17	19	21	22	25½	28½	32
50 „	18	21	23½	26	27½	31	35	39
55 „	22	25	28½	32	33	38	42½	48
60 „	26	30	34	38½	40	45	51	56½

Die A. G. für Seilindustrie, vorm. Ferdinand Wolff, Mannheim-Neckarau, gibt für ihre geflochtenen **Sexagonseile** folgendes an:

Stärke	25	30	35	40	45	50	55	60	mm
Querschnitt	5,41	7,79	10,60	13,86	17,54	21,65	26,20	31,17	qcm
Gewicht	0,48	0,66	0,94	1,18	1,49	1,84	2,22	2,65	kg/m
Leistung bei 8 kg/qcm Belastung u. 20 m/sk Seilgeschw.	11,5	16,5	22,5	29,5	37	46	56	66,5	PS
bei 30 m/sk Seilgeschw.	17,5	25	34	44	56	70	84	100	„

Gewichte gufseiserner Hanfseilscheiben in kg.

Eisenwerk Wülfel vor Hannover.

Die oberen Gewichte gelten für ungeteilte, die unteren für geteilte, fertig bearbeitete Scheiben.

Scheibendurchm. mm	Anzahl der Rillen für 45 mm Seildurchm.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1100	145 205	200 265	315 385	385 455	500 595	560 655	760 870	810 920	950 1125	1015 1195
1200	165 230	230 295	355 425	430 500	555 650	620 720	840 955	885 1000	1050 1230	1110 1300
1300	180 250	250 320	395 465	475 550	610 710	685 785	915 1035	975 1090	1140 1330	1225 1410
1400	205 275	275 345	435 510	520 595	660 765	750 850	1000 1120	1060 1180	1240 1435	1325 1520
1500	230 300	300 370	475 550	565 640	720 825	805 910	1075 1200	1145 1270	1345 1540	1430 1625
2000	320 410	455 545	690 820	815 945	1020 1200	1145 1325	1490 1710	1620 1840	1900 2155	2030 2285
2500	440 535	605 700	915 1055	1085 1225	1370 1580	1530 1740	1970 2230	2140 2400	2430 2720	2610 2900
3000		770 880	1235 1385	1430 1580	1780 2020	1975 2215	2615 2955	2815 3155	3155 3525	3360 3730

Digitized by Google

und Baumwoll-Transmissionsseilen
Cöln (Rhein).

Seilgeschwindigkeit 20 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 25 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 30 m für 1 sk			
7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg
9	10½	12	13	11½	13	15	16½	14	15½	17½	19½
13	15	17	19	16½	19	21	23½	20	22½	25½	28
18	20½	23	25½	22½	26	29	32	27	30½	34½	38
23½	27	30	33	29	33½	38	42	35	40	45	50
30	34	38	42	37	42½	47½	53	44½	51	57	63½
36½	42	47	52½	46	52	59	65	55	63	71	79
44	50	57	63	55½	63	71	79	66½	76	85½	95
53	60	68	75	66	75	85	94	79	90	102	113

Die Seilgeschwindigkeit liegt am besten in den Grenzen von 15 bis 30 m/sk; die Beanspruchung auf 1 qcm Querschnitt kann bei normalen Verhältnissen auf 9 kg/qcm gesteigert werden.

Gröfste Seilgeschw. 20 m; für höhere Geschw. Gewichtszuschläge.

2. Seilscheiben. Gewöhnlich aus Gufseisen, geteilt oder ungeteilt, meist mit 6 geraden Armen, bei über 300 mm breiten Scheiben Doppelarme; Scheiben von mehr als 3 m Durchm. erhalten 8 und

Abb. 126.

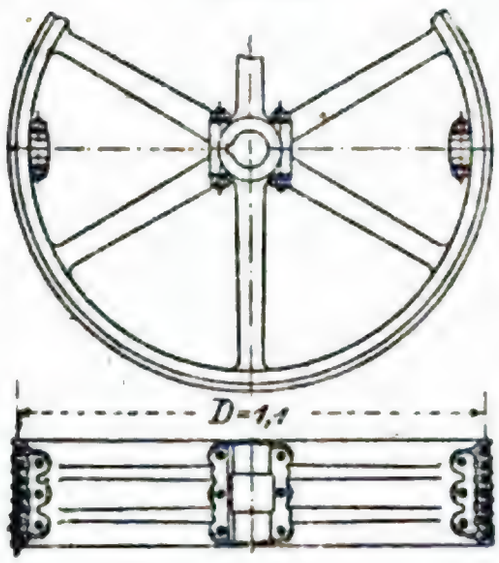


Abb. 128.

Abb. 129.

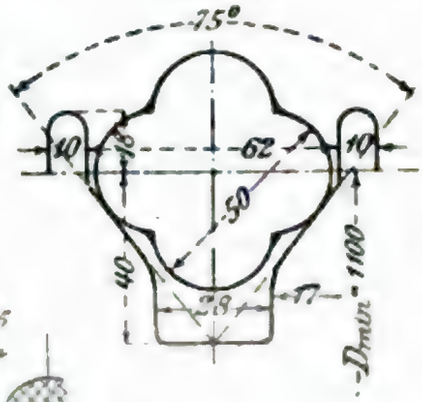
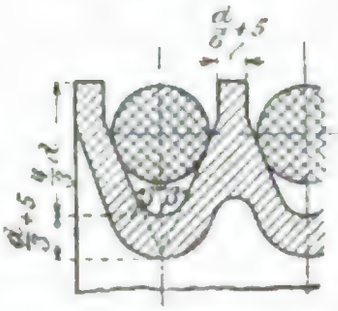


Abb. 127.



10 Arme. Armquerschnitt ellipsenförmig (S. 803). Teilung der Scheiben S. 803 u. 806. Abb. 126 zeigt eine zwischen den Armen geteilte Hanfseilscheibe (von $D = 1{,}1$ m) der BAMAG.

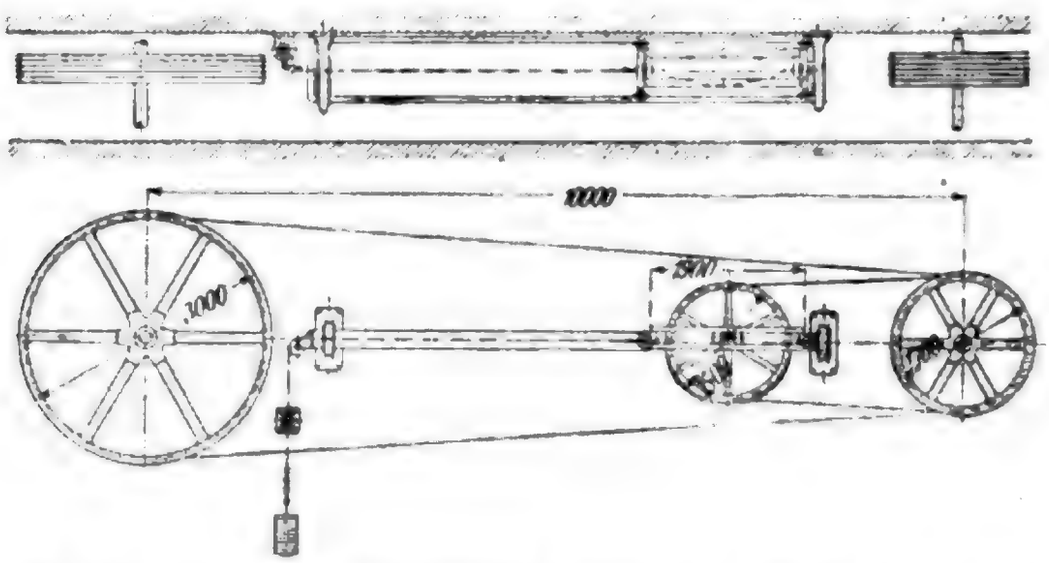
Die Rillen einer Scheibe sollen möglichst glatt, mit gleichem Durchm. und Querschnitt gedreht sein. Für die Treib- und Zwischenrollen Rillenform nach Abb. 127, wobei d der Seildurchm. in mm und $\operatorname{tg}\beta = {}^{8}/_{20}$ bis ${}^{9}/_{20}$, oder $2\beta = 43{,}5$ bis 45^{0}; die Tragrollen erhalten auf

dem Grunde nach dem Durchm. d kreisförmig ausgedrehte Rillen (Abb. 128). Für Dreikantseile Rillenform, Abb. 127, ebenso Quadratseile; für letztere bei Kreisseiltrieb Rille nach Abb. 129 empfohlen.

3. Anordnung des Betriebes. Hanfseil- (oder Baumwollseil-) betrieb ist zweckmäfsig, wo Riemen durch grofse Länge und Breite zu kostspielig ausfallen; besonders dann, wenn von einer Hauptscheibe durch einzelne Seile oder Gruppen von Seilen nach verschiedenen Stellen Kraft abzugeben ist. Meist Betrieb mit Dehnungsspannung, neuerdings auch mit Belastungsspannung.

Bei Betrieb mit Dehnungsspannung wird die Kraft auf mehrere Seile (von höchstens 50 bis 55 mm Durchm.) verteilt, die sie dann, je nach Bedarf, wieder gesondert abgeben können. Von der Antriebscheibe aus treiben einzelne Seilgruppen die verschiedenen Wellenstränge. Die Seilspannungen werden durch das Seileigengewicht und durch straffes Spannen der Seile erzeugt. Die gut ausgetrockneten Seile müssen daher in einer 3 bis 5 % kürzeren Länge gespleifst werden, als der Achsenentfernung und den Scheibendurchm. entspricht. Der Achsdruck steigert sich bei einem neu aufgelegten Seile bis 40 d^2 (d in cm) und darüber, wodurch die Scheiben, Wellen, Zapfen und Lager stark beansprucht werden. Gegen die das Seil verkürzende Feuchtigkeit der Luft helfen reichliche Seildurchsenkungen. Das untere Seilstück sei das ziehende. Lotrechter oder nahezu lotrechter Betrieb mit Dehnungsspannung ist nur mit sehr elastischen Seilen und bei gröfserem Achsenabstand möglich (nicht empfehlenswert). Abstand der Scheibenachsen zwischen 6 bis 8 m und 20 bis 25 m, bei gröfseren Abständen Zwischenrollen. Durchm. der Seil-

Abb. 180.



scheiben bei Rundseilen mindestens $D = 30\ d$, besser 40 bis 50 d. Bei kleinem Achsenabstande und kleinem d besser Baumwollseile (s. w. unten). Abweichungen der Scheibenmittelebenen, abgesehen vom Leitrollenbetrieb, bis etwa $6^1/_2{}^0$ zulässig.

Bei Betrieb mit Belastungsspannung wird, wenn die Kraftabgabe auf mehrere Wellenstränge erfolgt, ein endloses Seil (bis zu 500 und 600 m Länge) über die Scheiben geführt. Man leitet das Seil am

Digitized by Google

besten nach jeder Umschlingung einer Arbeitscheibe auf die gemeinsame Treibscheibe zurück, um es jedesmal zu entlasten, bevor es aufs neue Kraft überträgt. Die durch die dauernde Inanspruchnahme, den Temperatur- und den Feuchtigkeitswechsel erzeugte Längenänderung des Seiles wird von einer Stelle aus durch einen Spannschlitten (Spannwagen) ausgeglichen, so dafs fortwährend eine gleichmäfsige Seilspannung vorhanden ist. Derartige einseilige, sog. **Kreisseiltriebe** lassen sich auch zwei- oder mehrseilig einrichten; auch sind im Freien befindliche sowie lotrechte Antriebe hierbei leicht möglich. Die **Spannrolle**, wie sie bei Riemen mit Erfolg benutzt wird, ist bei Seilen zu vermeiden.

Der Spannschlitten ist an eine gezogene Seilschlingung anzuschliefsen, besonders bei stark wechselnder Kraftübertragung (Abb. 130). Anordnungen, bei denen das Seil abwechselnd in entgegengesetztem Sinne gebogen wird, sind zu vermeiden, besonders bei kleineren Seillängen. Durchm. der Spann- und Leitrollen $D \geqq 30\,d$; Rillenform so, dafs das Seil im Grunde aufruht und nicht klemmt (Abb. 131); Rillen der Treibrollen nach Abb. 127 (S. 811) mit $\operatorname{tg}\beta = 0{,}4$. Weglänge des Spannwagens bei Antrieben in Gebäuden etwa 2,5 %, bei solchen im Freien 3 bis 3,5 % der ganzen Seillänge (entspr. 5 bzw. 6 bis 7 % Seilverlängerung); gestatten die örtlichen Verhältnisse diese Gleislänge nicht, so mufs das Seil später gekürzt werden. Belastungsgewicht regelbar aus einer gröfseren Zahl von Scheiben herzustellen.

Abb. 131.

4. Berechnung der Hanfseile.

1. Betrieb mit Dehnungsspannung. Für Hanfseile: $D = 30$ bis $50\,d$. Darin ist D der Scheibendurchm., d der Seildurchm.; α der kleinste Umfassungswinkel in Bogenmafs. Seilgeschw. $v = 15$ bis 20 m/sk; darüber selten. Für d in cm ist bei einem Hanfseil die übertragbare Kraft in kg:

$P = 3$ bis $4\,d^2$, wenn $D \geqq 30\,d$ und $\alpha \geqq 2{,}5$;
$P = 5$ bis $6\,d^2$, wenn $D \geqq 50\,d$ und $\alpha \geqq 3{,}0$.

Neuerdings geht man bei $v = 30$ m/sk mit grofsen Scheiben und günstigen Betriebsverhältnissen (geringer Wechsel in der Gröfse von P, genügender Achsenabstand, sorgfältige Spleifsung) bis: $P = 10\,d^2$.

Bei s Seilen folgt aus $Psv = 75\,N$ und $P = 6$ bis $3\,d^2$:

$$s\,d^2 = 12{,}5\,\frac{N}{v} \text{ bis } 25\,\frac{N}{v}.$$

Dreikantseile (S. 809) gestatten $P = 6\,d^2$, bei ruhigem, nicht stofsweise arbeitendem Betriebe bis $P = 7{,}5\,d^2$ (d = Seildurchm.).

Quadratseile (S. 809) ergeben für $v = 10$ bis 25 m/sk $P = 6$ bis $8\,s^2$ (s Quadratseile in cm).

2. Betrieb mit Belastungsspannung. Für die Anordnung, wobei das Seil nach jeder Umschlingung der getriebenen Scheibe auf die treibende zurückgeführt wird, gelten die Gleichungen unter 1., dabei können die Zahlenbeiwerte bis um 25 % höher gewählt werden:

$P = 5\,d^2$, $D = 30\,d$ für Leit- und Spannrollen,
$D \geqq 30$ bis $40\,d$ für Treibrollen.

Digitized by Google

5. Baumwollseile (Tafel S. 809 ff.) für Triebwerke berechne man wie Hanfseile (s. **4.** S. 813). — Baumwollseile sind auch bei stofsendem Betriebe (z. B. bei Walzwerken) empfehlenswert. Bei ihnen ist E kleiner als bei Hanfseilen, daher ergeben sie ein erheblich gröfseres $\mathfrak{B}$ (S. 259). Man wähle $D = 20$ bis $30\ d$; zulässig sind noch Scheiben unter 1 m Durchm. Bei grofsen Seillängen sind Tragrollen anzuordnen. Der Achsenabstand kann wegen der Geschwindigkeit und grofsen Elastizität der Seile bis auf das 1,5fache der Scheibendurchm.-Summe verkleinert werden.

Treibrollen: Rillen Abb. 127 (S. 811); Leitrollen Abb. 131 (S. 813).

e. Treibketten.

(Ketten, Gelenkketten usw. für Hebezeuge s. III. Maschinenteile für Hebemaschinen.)

1. Zobelsche Treibkette aus Stahl (Tafel u. Abb. 132 u. 133).

Abb. 132.

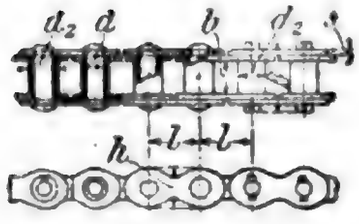
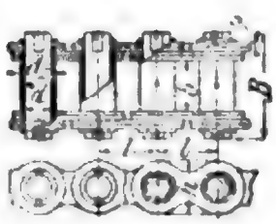


Abb. 133.



Diese Ketten lassen sich nur in gerader Gliederzahl ohne Ende verbinden. Die mit Scheiben versplinteten Ketten (Abb. 133) werden auch mit hohlem Innenbolzen geliefert. Die kleinen Löcher in den Stahlhülsen dienen zur Schmierung.

Zobelsche Treib-Gelenkketten.

P bedeutet die durch die Kette übertragbare Kraft in kg, i die Plattenzahl und q das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 132.

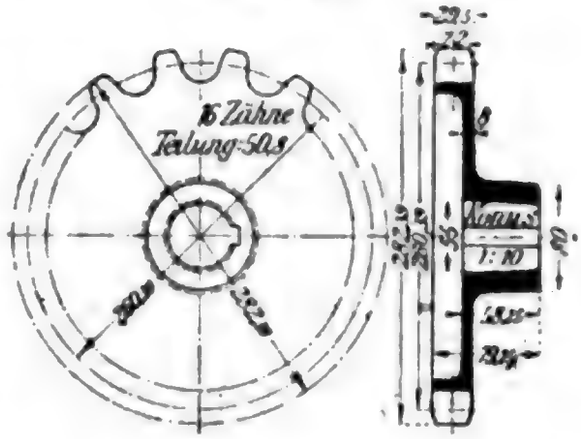
P kg	l mm	i	s mm	h mm	d mm	d_2 mm	b mm	B mm	q kg/m	Bemerkungen
100	20	2	2	14	6	10	14	30	1,6	Vernietete Bolzen.
150	20	2	3	16	7,5	12	16	38	2,2	
200	25	2	3	21	9	14	18	40	2,5	
300	30	2	3,5	25	11	17	20	46	3,9	
400	35	2	4	27	12	18	22	50	4,1	
500	40	2	4	30	14	20	25	54	4,6	
750	45	2	5	35	16	22	30	64	6,7	
1000	50	2	6	38	18	26	35	72	9,0	
1500	55	4	4	40	20	28	45	97	13,0	
2000	60	4	5	46	24	32	50	113	14,0	Mit Scheiben versplintet.
2500	65	4	5	53	28	36	55	120	18,0	
3000	70	4	5	60	32	40	60	125	19,5	
4000	80	6	4,5	65	34	44	70	146	27,2	
5000	90	6	4,5	75	36	48	80	156	33,0	

Die kleineren Ketten (bis $l = 55$ mm) haben vernietete Bolzen und erhalten ein versplintetes Schlufsglied zum Verbinden der Kette ohne Ende. — Das Kettenrad (Abb. 134) wird (aus Stahlgufs) von der Neuen Automobil-Gesellschaft in Ober-Schöneweide für ihre Kettentriebe an Personen- und Lastwagen benutzt. — Berechnung entweder nach dem gröfsten Drehmoment des Motors oder dem beim Bremsen ent-

Digitized by Google

stehenden gröfsten Drehmoment der Treibräder, wobei die Reibungszahl zwischen Radbereifung und Fahrdamm mit 0,5 angenommen wird. (Ebenso werden die Stirn- und Kegelräder des Getriebes berechnet.) Als zulässig wird für Kette und Kettenrad $^1/_4$ der aus dem Bremsen berechneten Bruchbelastung erachtet. Kettengeschw. bis 4 m/sk. (Nur bei besonderen Rennwagen bis 6 m/sk.)

Abb. 134.

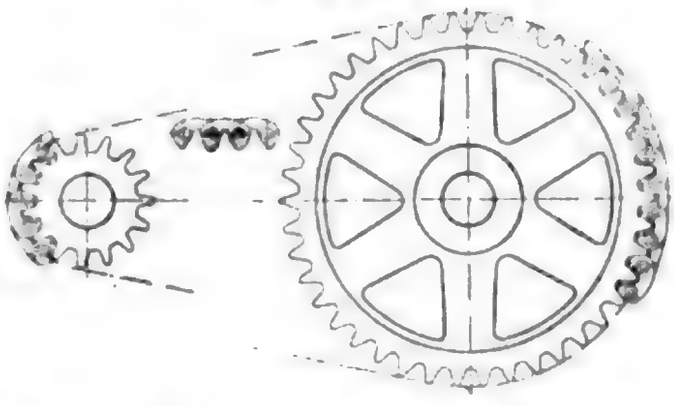


Allgemein wird für Kettenräder die Zähnezahl > 7, gewöhnlich 10 bis 30 genommen. — Im Maschinenbau wird als gröfste Kettengeschwindigkeit in der Regel $v = 3$ m/sk angegeben. Doch soll mit gutem Erfolge $v = 5$ bis 6 m/sk versucht sein.

2. Stotzsche Kette. Die Treibketten der Elevatoren-Bauanstalt A. Stotz in Stuttgart erstreben tunlichste Beschränkung des Flächendruckes in den Gelenken; die Glieder aus zähem, schmiedbarem Gufs (Bolzen aus Stahl) sind leicht zerlegbar und auswechselbar. Geschw. für leichtere Ketten bis 3,5, für stärkere bis 2,5 m/sk. Kommen die Ketten mit Säuren (Dämpfen) in Berührung, so werden sie verzinkt oder aus Phosphorbronze gefertigt (Preislisten der Firma*).

3. Das Renoldsche geräuschlose Zahnkettengetriebe (für elektrischen Antrieb von Pumpen, Werkzeugmaschinen, Ventilatoren usw.), gebaut von der Spezialfabrik für Zahnräder von Fried. Stolzenberg & Co., Berlin-Reinickendorf. Zahnräder und Zahnkette (Abb. 135) arbeiten derart miteinander, dafs, ungeachtet der im Betriebe unvermeidlichen Streckung der Kettenglieder, die Berührung zwischen Kette und Radzahn dauernd erhalten bleibt. Ein stofsweises Abgleiten der Kette vom Zahn ist ausgeschlossen. Dehnt sich das Kettenglied, so nimmt es zwischen den Zähnen nur eine etwas höhere Lage ein.

Abb. 135.



Kettengeschw. möglichst nicht höher als 6,5 m/sk. Zähnezahlen zwischen 15 und 90, also gröfstes Uebersetzungsverhältnis 6 : 1. Abstand der Wellen nicht über 3 bis 3,5 m und nicht kleiner als 1,5 vom Durchm. des grofsen Rades. Kette möglichst wagerecht. Die Räder führen die Kette entweder in der Mitte des Rades durch eine

*) C. Bach, Masch.-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 706 ff. und Z. d. V. d. I. 1904 S. 1742 (Morsekette). — Gelenkketten und zerlegbare Treibketten dieser Art werden auch von Wilhelm Stöhr in Offenbach a. Main hergestellt (Preislisten der Firma).

Digitized by Google

Rille, in welche die Kette mit Führungsgliedern eingreift, oder durch Seitenscheiben. Die Mittenführung wird bevorzugt. — Für Geschw. von 1 bis 2 m stellt die Firma Stolzenberg eine Renoldsche Blockkette her (Preisliste).

D. Achsen und Wellen.

Es bedeutet
M_b das Biegungsmoment und M_d das Drehmoment im cmkg,
k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/qcm,
k_d die zulässige Drehungsspannung in kg/qcm,
d den Durchm. einer vollen Welle (Achse) in cm,
d_1 den inneren und d_2 den äufseren Durchm. einer hohlen Welle (Achse) in cm, wobei $d_m = {}^1/_2 (d_2 + d_1)$ und $s = {}^1/_2 (d_2 - d_1)$,
W das Widerstandsmoment des Achsenquerschnittes in cm³ (S. 535 ff.),
N die zu übertragende Leistung in PS,
n die Zahl der minutlichen Umdrehungen der Achse (Welle).

a. Achsen.

Die hier allein in Rechnung zu ziehende **Biegungsbeanspruchung** ergibt für volle Achsen: $M_b = W k_b \sim 0{,}1\, d^3 k_b$,

für Hohlachsen: $M_b = W k_b \sim 0{,}1 \dfrac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} k_b$,

und wenn deren Wandstärke s gering ist (S. 537),

$$M_b \sim 0{,}8\, d_m^2\, s\, k_b.$$

In den meisten Fällen wechselt die Kraftrichtung vollständig, so dafs für die zulässige **Biegungsspannung** k_b gemäfs III. Tafel S. 503 etwa zu wählen ist für:

Schweifseisen	$\sim$ 300 kg/qcm	Stahlgufs	$\sim$ 250—300 kg/qcm
Flufseisen	$\sim$ 300—400 „	Gufseisen	$\sim$ 130—250 „
Flufsstahl	$\sim$ 400—600 „	Eichenholz	$\sim$ 60 „

Bei Gufseisen ist die Bemerkung [4]) auf S. 503 zu beachten.

Wechselt die Kraftrichtung nicht vollständig oder überhaupt nicht, so sind die Werte für k_b gemäfs S. 502 höher zu wählen.

b. Wellen.

1. Drehungs(und Biegungs-)beanspruchung mafsgebend.

Berechnung auf **Biegung** und **Drehung** S. 585 ff.

Bezeichnungen s. o. — Bei Beanspruchung auf Drehung allein ist (S. 568) für volle Wellen

$$M_d = 2\, W k_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d \sim 0{,}2\, d^3 k_d,$$

für hohle Wellen

$$M_d = 2 W k_d \sim 0{,}2 \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} k_d \sim 1{,}6\, d_m^2\, s\, k_d.$$

Für die Wahl der zulässigen **Drehungsspannung** k_d aus der Tafel S. 503 [nebst Bemerkungen [1]) und [2])] gilt folgendes:

Digitized by Google

I. In den Fällen, in denen das Drehmoment M_d unveränderlich und stofsfrei ist, sind für k_d die Werte I zu nehmen.

II. Schwankt M_d ohne Stofs zwischen null und seinem gröfsten Betrage, so wähle man für k_d die Werte II.

III. Wechselt das Drehmoment ohne Stofs zwischen einem gröfsten $+M_d$ und einem gleichen oder doch nahezu gleichgrofsen $-M_d$, so sind für k_d die Werte III zu nehmen.

Stofswirkungen sind besonders zu berücksichtigen (S. 502).

Die Belastungsweise I kommt bei den üblichen Wellen kaum vor. Am nächsten stehen z. B. die Wellen von **Turbinen** und **Wasserrädern**, falls die Arbeitsmaschinen ihren Kraftbedarf nicht stark verändern; bei derartigen Wellen liegt k_d zwischen den Werten I und II. Für **eichene** Wasserradwellen sei $k_d = 50$ bis 60 kg/qcm.

Die meisten Wellen entsprechen einer Belastungsweise zwischen II und III.

Für **Gufseisen** ist k_d [unter Beachtung der Bemerkung [5]) auf S. 503] bei der Belastungsweise I: $k_d = 240$ bis 300 kg/qcm, bei II: $k_d = 160$ bis 200 kg/qcm und bei III (wobei indessen Gufseisen besser ganz zu vermeiden ist): $k_d = 80$ bis 100 kg/qcm.

Nach S. 187 ist das drehende Moment: $M_d = 71\,620 \frac{N}{n}$ cmkg; mithin ergibt sich der zur Uebertragung von N PS bei n Umdrehungen i. d. Min. erforderliche Wellendurchm. (in cm)

$$d \sim \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_d} \frac{N}{n}}.$$

Um für **Triebwerkwellen** aus gewöhnlichem Walzeisen auch das gleichzeitig mit M_d auftretende M_b (durch Gewicht, Raddruck, Seilzug usw.) zu berücksichtigen, wähle man in vorstehender Formel $k_d = 120$ kg/qcm, so dafs

$$d = \sqrt[3]{3000 \frac{N}{n}} = 14{,}42 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ bzw. } M_d = 24\, d^3 \text{ wird (s. Tafel S. 818).}$$

Entfernung der Lager bei Triebwerkwellen (in cm) $l \lesssim 100 \sqrt[3]{d}$, wobei freie Auflagerung der Enden vorausgesetzt ist. Danach wird für

$d =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13,5	15 cm
$l =$	170	200	220	240	260	280	300	320	330	350	370	390 cm

Um die Wellen durch nachträgliches Aufstecken von Riemenscheiben usw. später in verstärktem Mafse belasten zu können, empfiehlt sich $l \lesssim 110 \sqrt[3]{d}$, woraus für

$d =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13,5	15 cm
$l =$	160	175	190	200	210	220	230	240	245	250	260	270 cm

Die vorstehenden Zahlen geben nur einen Anhalt. In Wirklichkeit bestimmen oft örtliche Verhältnisse (z. B. Stellung der Arbeitsmaschinen, Abmessungen der Gebäudeteile, wie Säulen-, Balken- und Trägerabstände usw.) die Lagerentfernungen.

2. Formänderung mafsgebend.

a) **Verdrehung.** Ueber den **Verdrehungswinkel** $\psi \lesssim l\,\vartheta$ S. 570 ff. Vielfach wird empfohlen, um die durch M_d bewirkte gesamte Form-

Digitized by Google

Leistung üblicher Triebwerkwellen.

d cm	Md cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	Md cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	Md cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	Md cmkg	$\frac{N}{n}$
3,0	648	0,009	6,0	5184	0,072	9,0	17496	0,243	14	65856	0,915
3,5	1029	0,014	6,5	6591	0,092	9,5	20577	0,286	15	81000	1,125
4,0	1536	0,021	7,0	8232	0,114	10,0	24000	0,333	16	98304	1,365
4,5	2187	0,030	7,5	10125	0,141	11,0	31944	0,444	17	117912	1,638
5,0	3000	0,042	8,0	12288	0,171	12,0	41472	0,576	18	139968	1,944
5,5	3993	0,055	8,5	14739	0,205	13,0	52728	0,732	20	192000	2,666

Durchmesser d üblicher Triebwerkwellen in mm.

N	Minutliche Umlaufzahl $= n$														
PS	40	60	80	100	120	140	160	180	200	225	250	275	300	350	400
1	50	45	45	40	40	35	35	35	35	35	35	30	30	30	30
2	60	55	50	50	45	45	40	40	40	40	40	35	35	35	35
3	65	60	55	50	50	50	45	45	45	45	40	40	40	40	40
4	70	65	60	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45	40	40
5	75	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45
6	75	70	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	50	45	45
8	85	75	70	65	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50
10	85	80	75	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50	50
12	90	85	75	75	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	50
14	95	85	80	75	75	70	70	65	65	60	60	60	60	55	55
15	95	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55
16	100	90	85	80	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	55
18	100	90	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60
20	105	95	85	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60
25	110	100	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65	60
30	115	105	95	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65
35	120	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	75	70	70
40	120	110	105	100	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70	70
45	125	115	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70
50	130	115	110	105	100	95	90	90	85	85	85	80	80	75	75
55	130	120	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	80	75
60	135	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	75
65	140	125	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80	80
70	140	125	120	110	105	105	100	95	95	90	90	90	85	85	80
75	145	130	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80
80	145	130	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	85
85	145	135	125	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85
90	150	135	125	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85
95	150	135	130	120	115	110	110	105	100	100	95	95	90	90	85
100	155	140	130	120	115	115	110	105	105	100	100	95	95	90	85

Digitized by Google

änderung der Welle gering zu halten, $\psi \leqq {}^1/_4{}^0$ f. 1 m zu machen; mit $\psi = {}^1/_4{}^0$ ergibt sich (bei $G \sim 800\,000$.)

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 0{,}734 \sqrt[4]{M_d{}^3} \text{ oder } \quad M_d = 3{,}454\, d^4.$$

Hieraus ergibt sich folgende Tafel:

d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	M_d cmkg	$\frac{N}{n}$
3.0	279	0,0039	6,5	6166	0,0861	10	34535	0,4822	17	288482	4,0278
3,5	516	0,0072	7.0	8294	0,1158	11	50571	0,7061	18	362587	5,0625
4,0	881	0,0123	7,5	10929	0,1526	12	71020	1,0000	19	450129	6,2847
4.5	1418	0,0198	8.0	14145	0,1975	13	98649	1,3774	20	552640	7,7160
5.0	2156	0,0 01	8,5	18027	0,2517	14	132683	1,8526	21	671737	9,4789
5.5	3158	0,0441	9,0	22761	0,3164	15	174853	2,4414			
6,0	4476	0,0625	9,5	28132	0,3928	16	226355	3,1605			

Für Wellen, die grofse Drehmomente übertragen, liefern die vorstehenden Gleichungen, wie die Tafel zeigt, für d zu geringe Werte. — Die Gröfse der Beansprchg. gemäfs 1 ist daher stets zu prüfen.

b) **Durchbiegung.** Die höchste zulässige **Durchbiegung** einer Welle (zwischen zwei Lagern) sei ${}^1/_3$ mm auf 1 m Wellenlänge. Dabei ist stets noch zu prüfen, ob die Länge der Zapfen selbsttätig sich einstellende Lagerschalen verlangt oder nicht. Kupplungen, Scheiben, Räder usw. bringe man möglichst dicht bei den Lagern an.

3. Biegungs- und Drehungsbeanspruchung mafsgebend.

Bei Wellen, auf denen schwere Räder sitzen, oder die sonst erheblich auf Biegung beansprucht werden, wie z. B. die Wellen der Kraftmaschinen, erste Antriebwellen (Hauptwellen), ist neben M_d auch das Biegungsmoment M_b zu berücksichtigen, d. h. sie sind nach S. 585 auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Für k_b gilt hierbei das auf S. 816 unter **a.** und für k_d das unter **b.** III. Gesagte.

4. Konstruktion der Achsen und Wellen.

Als Umlaufzahlen in der Minute sind etwa zu wählen n = Uml./Min. für:

Hauptwellen und Wellen zum Betriebe schwerer Metallbearbeitungsmaschinen	100—150
leichte Metallbearbeitungsmaschinen	150—250
Nebenwellenleitungen	200—300
zum Betrieb von Holzbearbeitungsmaschinen	250—300 bis 400
zum Betrieb von Spinnereimaschinen	300—400

Auf die **Ausdehnung durch die Wärme** (S. 371) ist bei langen Wellensträngen stets Rücksicht zu nehmen.

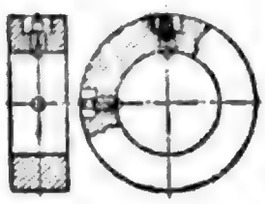
Jeder Wellenstrang mufs gegen seitliches Verschieben gesichert werden, wobei die Wärmeausdehnung zu beachten ist. Da Eindrehungen der Welle vermieden werden müssen, erfolgt die Festlegung meist durch zwei **Stellringe,** die [geteilt (Abb. 136) oder ungeteilt (Abb. 137)] zu beiden Seiten eines Lagers oder auch zwischen zwei

Digitized by Google

benachbarten Lagern angebracht werden. Auf der Hauptwelle Stellringe möglichst am vordersten Lager. Für $d = 3$ bis 15 cm ist die Breite eines Stellringes = 3,5 bis 5,5 cm und seine Dicke = 2 bis 3,5 cm. Eine oder zwei gehärtete Stahlschrauben mit versenkten Köpfen dienen zur Befestigung der Ringe. Bei den Lagern des Eisenwerkes Wülfel, Hannover-Wülfel, und der BAMAG-Dessau, die einen zwangläufig mit der Welle verbundenen Oelring haben, der in der Mitte des Lagers liegt, genügt dieser zur Festlegung der Welle. Gegenüber den üblichen Stellringen hat dieser Oelring den Vorteil, dafs seine Seitenflächen gut geschmiert sind, und dafs kein Oel verspritzt wird.

Abb. 136.

Abb. 137.



Der geeignetste **Stoff** für (Achsen und) Wellen ist (aufser Bronze, Deltametall u. dgl. für Sonderzwecke) Flufseisen und Tiegelstahl (zäher Flufsstahl); scharfe Eindrehungen und plötzliche Uebergänge unzulässig. Geschmiedete, gewalzte (Achsen und) Wellen meist mit vollem Querschnitt. Hohlwellen zur Gewichtverminderung, zur Prüfung des Stoffes, zur Schmierung oder zur Kühlung gebohrt; Wellen aus geschweifsten oder nahtfrei gewalzten Rohren oder aus genieteten Hohlzylindern Ausnahmen. — Gufseisen nur als Hohlgufs (Kreisringquerschnitt), nicht mit +-Querschnitt. — Holz selten (Mühlenbau, Wasserräder, S. 817).

Wellenlängen. Bei $d = 3$ bis 5 cm wähle man die Längen L der Wellenstücke zwischen 4 und 6 m, bei gröfserem Durchm. wegen des Eisenbahnversandes und der Aufbringung $L \leqq 7$ m. Für $L > 7$ m und $L < 2$ m erhöhen sich die Einheitspreise.

Die sog. **komprimierten** (blanken) Wellen aus sehr weichem Martinstahl haben gegenüber den abgedrehten oder rund gewalzten Wellen den Vorzug gleichförmigeren Durchm. (auf $^1/_{20}$ mm genau) und höherer Festigkeit, sind daher dünner, leichter und billiger. (Vorsicht: Nach Versuchen von C. Bach ziehen sie sich jedoch beim Einfräsen von Nuten stärker krumm als gewöhnliche Wellen.)

Die komprimierten Wellen von Gebr. Reimbold in Kalk bei Cöln [aus weichem, schweifsbarem (Martin-) Stahl von $K_z = 5500$ kg/qcm Festigkeit] sind für $d = 1{,}0$ bis 10,0 cm (mit Zwischenstufen von 1 mm bis $d = 5{,}2$ cm, 3 bis 5 mm bis $d = 10{,}0$ cm) bis zu 6 und 6,5 m Länge erhältlich. Krummziehen beim Einfräsen von Nuten nur gering, die härtesten Stellen liegen nicht an der Oberfläche, sondern etwa auf halbem Halbmesser.

Ueber **Kurbelwellen***) Abschn. Kurbeltrieb.

Biegsame Wellen, aus Stahldrähten schraubenförmig gewunden zum Antriebe transportabler Arbeitsmaschinen, Hebezeuge usw. Gröfster Durchm. $d = 100$ mm; kleinster $d = 5$ mm. Der noch zulässige, kleinste Krümmungshalbmesser, in dem die Wellen arbeiten können, ist 6 bis 7 d. Zum Schutze und zur bequemen Handhabung mit einem Metallschlauche, in feuchten Räumen noch mit einem Ledermantel umgeben. — Bei Bestellung ist die Drehrichtung anzugeben.

---

*) Berechng. v. Dampfturbinenwellen nach der kritischen Umlaufzahl, Dr. A. Stodola, Die Dampfturbinen 4. Aufl. 1910.

Digitized by Google

Biegsame Wellen*)
der Deutschen Fabrik biegsamer Wellen, A. Otto & Co. in Berlin N.

Tafel über die Kraftleistung.

Leistung in PS	Umdrehung in 1 min				
	200	400	800	1200	2000
	Durchm. der Wellen in mm				
1/10	15	12,5	10	10	8
1/4	25	25	15	15	10
1/2	30	30	20	20	12,5
1	40	35	30	25	15
2	50	45	35	30	20
3	60	55	45	35	30
4		60	45	40	35
5		65	50	40	35
6		70	55	45	40
8			60	50	40
10			65	55	45
12			70	60	50

E. Kupplungen.

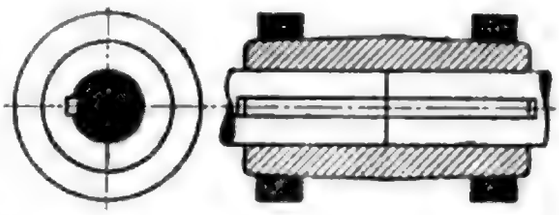
Um längere Wellenstränge herzustellen, sind die einzelnen Wellen aneinanderzukuppeln, u. zw. im allgemeinen derart, dafs ihre geometrischen Achsen zusammenfallen (Ausnahme unter **b. 2** und **3**, S. 824 u. 825). Die elastischen Kupplungen (S. 825 ff.) gestatten geringe Abweichungen von dieser Regel.

a. Feste Kupplungen.

1. Hülsenkupplungen.

Zwei an ihrem äufseren Umfang als Doppelkegel ausgebildete gufseiserne Schalen, die durch kegelförmig gebohrte schmiedeeiserne Ringe zusammengetrieben werden (Abb. 138), bilden eine Hülse, die sich fest um die Wellenenden drückt; Nutenkeilsicherung. Leichtes Aufbringen, keine vorstehenden Teile. Soll ein Abschnitt der Wellenleitung auf längere Zeit abgekuppelt werden, so ist die Kupplung leicht lösbar und erspart die teuren Ausrückkupplungen. Die Durchm. d der Wellenenden müssen möglichst genau übereinstimmen (für ungleiche Durchm. müssen die Schalen abgesetzte Bohrungen bekommen).

Abb. 138.



Dicke der Schalenwand $= 0{,}4\,d + 1$ cm, wovon die Tiefe der Keilnut abgeht; Ansteigung aufsen $= 1/25$ bis $1/20$; Hülsenlänge $= 3\,d + 2$ cm bis $4\,d$; Querschnitt eines Ringes $= 1/6$ bis $1/4\,d^2$.

*) Auch von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein) geliefert.

Digitized by Google

Statt der Verbindung der beiden Hülsenhälften durch Ringe wi auch eine solche (namentlich für stärkere Wellen) durch Schraub ausgeführt, bis zum Wellendurchm. von 200 mm. Die Schraubenlöch liegen längs der Bohrung zu je 2 bis 5 auf jeder Seite; Kopf ur Mutter sind eingelassen (sog. **Schalenkupplung** Abb. 139).

Abb. 139.

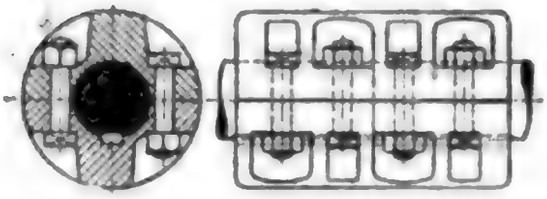
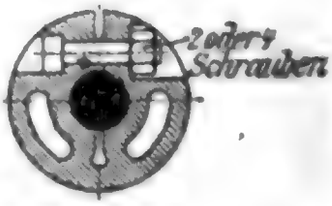


Abb. 140.



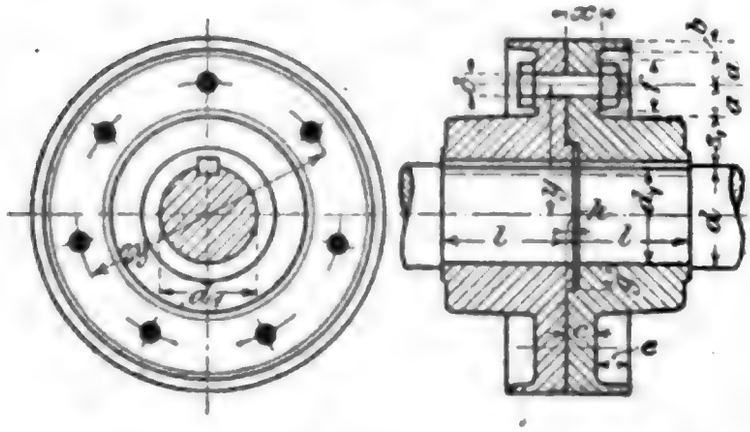
Die Kupplu gen werden auc mit Stahlblechma tel geliefert (a Umfange völl glatt).

Kupplungen mit einseitig au geschnittener, etwas federnder Hülse (Abb. 140) liefert die Deutsc Maschinenfabrik-A. G. zu Duisburg. Die federnde Hülse wird einseit durch meist 4 Schrauben zusammengezogen.

2. Scheibenkupplung (Abb. 141).

Nur für stärkere Wellen ($d \geq 10$ cm) anzuwenden. Die gleic achsige Verbindung beid Wellen wird am beste durch Aufziehen jed Kupplungshälfte mitte der Wasserdruckpres und hiernach durch Al drehen beider Hälften e reicht. Nachteile: Al Lager müssen offen sei Räder und Scheiben, d auf den Wellen sitze müssen geteilt sein. Ei Einzelwelle kann aus de

Abb. 141.



Strange erst nach Verschiebung um die Höhe h (Abb. 141) heraus genommen werden.

Scheibensitz-Durchm. $d_1 = d$ oder $d_1 = d - 0{,}2$ cm bis $d - 0{,}4$ cm Wandstärke $s_1 = 0{,}4\,d + 1{,}0$ cm. Nabenlänge $l \geq 1{,}25\,d$ für warm oder kalt (mit der Presse) aufgezogene Scheiben, $l \geq 1{,}5\,d$ für aus gekeilte Scheiben. Stärke der **Schrauben** etwa:

$$\delta = {}^1/_8\,d + 1{,}0 \text{ cm bis } {}^1/_8\,d + 1{,}5 \text{ cm.}$$

Die (meist gerade) Zahl der Schrauben z wird so berechnet, da die durch das Anziehen erzeugte Reibung der Stirnflächen de Scheiben zur Uebertragung des Drehmomentes M_d genügt. Setzt ma $M_d = 36\,d^3$, je eine Schraubenbelastung $= 300\,\delta^2$ und die Reibungs zahl $\mu = 0{,}25$ (Stirnebenen der Scheiben rauh), so ergibt sic $z = 0{,}48\,\frac{d^3}{\delta^2 y}$ (y Halbmesser des Schraubenkreises). Zugleich mu $\frac{M_d}{y}\,\frac{x}{z} < 0{,}1\,k_b\,\delta^3$ sein, worin k_b hoch sein darf. x ergibt sich au

der Scheibendicke $c = {}^5/_4\,\delta$ und der Höhe der Arbeitsleiste (0,3 bis 0,6 cm) zu

$$x = c + 0{,}4 \text{ cm}; \quad a = 1{,}5\,\delta; \quad y = 0{,}5\,d_1 + s_1 + a;$$
$$b = {}^1/_4\,\delta + 0{,}5 \text{ cm}; \quad e = {}^5/_4\,\delta; \quad f = 2{,}1\,\delta + 0{,}5 \text{ cm}; \quad g = {}^1/_2\,s_1;$$
$$h = {}^1/_3\,\delta.$$

Ausführungen der **BAMAG**-Dessau.

Bohrung d . . . . mm	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
Länge $2l$ . . . . mm	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550
Gröfster Durchmesser . mm	360	385	420	435	455	470	500	520	555	570	590
Schrauben . δ = mm	26	26	29	29	29	29	33	33	36	36	36
Schrauben . s =	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10
Gewicht . . . . . kg	92	112	138	158	180	215	250	290	335	375	420

Bohrung d auch bis zu 5 mm gröfser als in der Tafel angegeben.

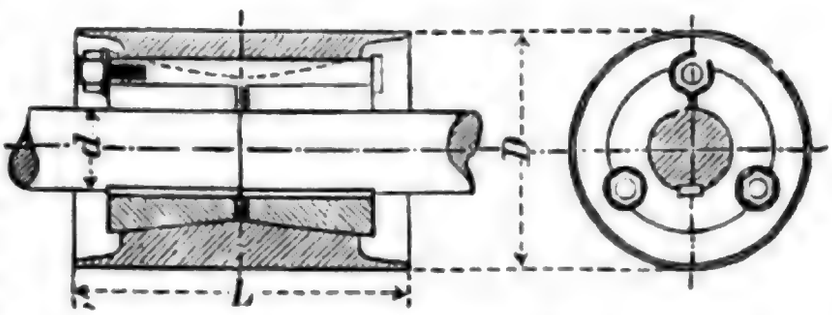
Der Nachteil, dafs eine Welle erst nach Verschieben um das Mafs h herausgenommen werden kann, ist vermieden bei der Scheibenkupplung mit herausnehmbarer Zwischenscheibe (s. hierzu, wie auch zu den übrigen allg. gebräuchlichen Kupplungen, Lagern und Transmissionsteilen die Preislisten z. B. der BAMAG-Dessau, der Firma G. Polysius, Dessau, des Eisenwerkes Wülfel, der Peniger Masch.-Fabr. u. Eisengiefserei, Penig i. Sachsen, der Sächsischen Masch.-Fabr. vorm. Rich. Hartmann, Chemnitz u. a).

3. Klemm- oder Doppelkegelkupplung nach Sellers.

Die Wellen werden auch dann noch gleichachsig und sicher verbunden, wenn die Durchm. der Wellenenden etwas verschieden sind. Leichtes Aufbringen und Lösen der Kupplung möglich.

Ein aufsen zylindrisch gedrehter, innen doppelkegelförmig ausgebohrter Hohlkörper umschliefst zwei (unterhalb der oberen Schraube in Abb. 142) geschlitzte, aufsen kegelförmige und innen zylindrische Hülsen. Durch das Anziehen der achsial liegenden drei Schrauben wird jede Hülse sowohl gegen ihr Wellenende als auch gegen den äufseren Hohlkörper gedrückt; die hierdurch erzeugte Reibung kuppelt die Wellen. Neigung der Kegelflächen gegen die Wellenachse etwa ${}^1/_8$.

Abb. 142.



Zur Sicherung gegen Verdrehen dient eine Feder gegenüber dem

Bohrung d . . mm	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Länge L . . . mm	160	210	220	250	290	310	330	370	390	410
Durchm. D . . mm	110	130	150	180	200	222	250	270	290	300
Gewicht . . . kg	8	13	20	31	44	59	79	96	124	150

Bohrung d auch bis zu 5 mm gröfser, als in der Tafel angegeben.

Digitized by Google

Hülsenschlitze. Zwei gegenüberliegende Schaulöcher im Aufsenkörper lassen die richtige Lage des Wellenstofses in Kupplungsmitte erkennen. — Ausführungen der BAMAG-Dessau.

b. Bewegliche Kupplungen.

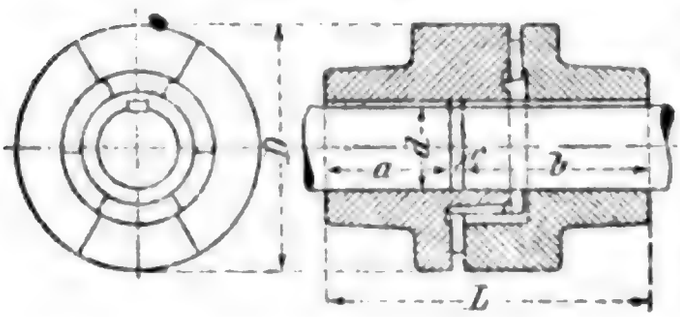
Aufser der wenig benutzten **Oldhamschen Kupplung** und der gewöhnlichen **Klauenkupplung** (Sharp u. a.) sind anzuführen:

1. Ausdehnungskupplung (Abb. 143).

Gleichachsige Lage der Wellen sichert ein im Innern der Kupplung liegender Ring. Die mit je drei Klauen ineinandergreifenden Kupplungsstücke sind fest auf die Wellenenden gekeilt.

Die Kupplung ist bei langen Wellensträngen dann anzuwenden, wenn deren Enden keine Verschiebungen zulassen, z. B. wenn das eine Ende mit Rücksicht auf den Antrieb fest gelagert ist und das andere Ende Kegelräder treibt. Sie empfiehlt sich aber auch dann, wenn nach einem Wellenende hin gröfsere Längsverschiebungen statthaft sind, denn die Wellen bleiben dann möglichst in ihren Lagern und ziehen keine Verunreinigungen hinein, was sonst durch die häufigen Längenänderungen des Wellenstranges infolge des Temperaturwechsels zu befürchten ist. — Ausführungen der BAMAG-Dessau:

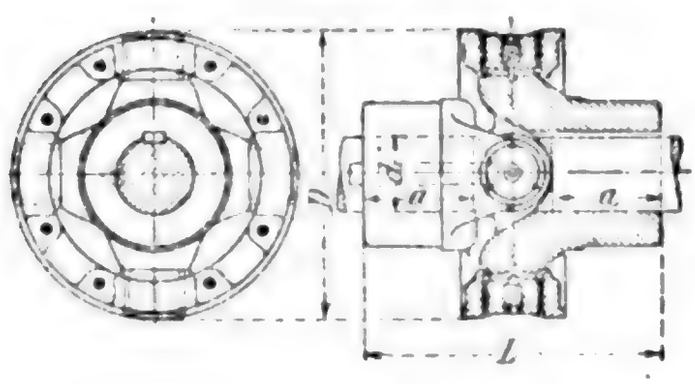
Abb. 143.



Bohrung d . . mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Durchmesser D mm	180	205	215	238	260	284	308	334	362	390	420	450	480	510	540
Länge L . . mm	221	250	284	313	349	378	409	440	467	501	530	563	600	631	662
Länge d. Wellenenden a . . mm	82	94	107	120	133	145	157	170	181	193	205	218	230	243	255
Länge d. Wellenenden b . . mm	127	144	162	180	198	215	232	250	266	283	300	320	340	358	377
Spiel d. Wellenenden c . . mm	12	12	15	15	18	18	20	20	20	25	25	25	30	30	30
Gewicht . . kg	19	25	35	47	61	80	110	140	170	200	244	304	368	440	525

Die Bohrungen d können bis zu 5 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

Abb. 144.



2. Kreuzgelenkkupplung der BAMAG-Dessau (Universalgelenk).

Dient zur Verbindung zweier sich unter einem Winkel schneidender Wellen. Die Bewegungsübertragung ist ungleichförmig und erfolgt bei einem Winkel α, den die Mittellinien der Wellen miteinander bilden, so, dafs

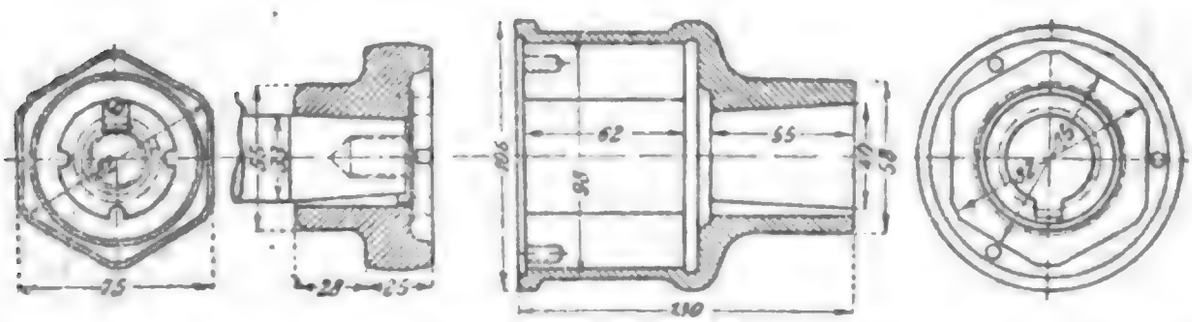
1 : cos α und cos α die äufsersten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten sind. Liegen die Wellenmittellinien nicht genau in derselben Ebene, so drehen sich nicht nur die Gelenkzapfen (Abb. 144) in ihren Lagern, sondern sie verschieben sich auch. Sind drei Wellen durch Universalgelenke gekuppelt, so wird die Bewegung gleichförmig von der ersten auf die dritte Welle übertragen, wenn beide symmetrisch zur mittleren Welle liegen. Zapfenhülsen aus Rotgufs notwendig, wenn α erheblich von 180° abweicht.

Wellendurchmesser d mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	135	155	175
Durchmesser D . . mm	180	210	240	280	315	350	390	430	490	580	690	810
Länge L . . . . . mm	166	204	240	280	330	370	402	440	490	580	640	730
Länge d. Wellenendes für die Nabe a. . mm	60	73	90	105	120	135	150	165	190	210	255	300
Gewicht . . . . . kg	10	16	25	40	58	86	120	165	225	330	520	780

Die Wellendurchm. d können bis zu 5, bei den 5 letzten d bis zu 15 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

3. Gelenkige Sechskantkupplung (Abb. 145). Angewendet z. B. im Automobilbau von der Neuen Automobil-Gesellschaft, Ober-

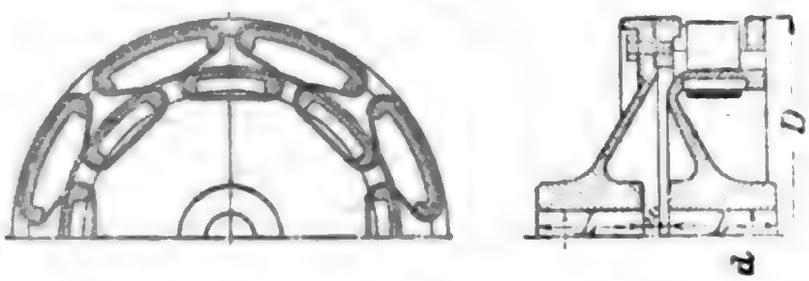
Abb. 145.



schöneweide b. Berlin. — Mitnehmer mit abgerundeten Prismenflächen und Hülse aus Einsatzstahl, gehärtet. — Auch als Vierkantkupplung gebaut.

4. Elastische Kupplungen sind am Platze, wo Stöfse in der Kupplung gemildert oder Wellen verbunden werden sollen, deren Mittellinien um geringes voneinander abweichen. Dies kann auch im Betriebe entstehen durch Durchbiegen der Wellenenden, durch ungleichmäfsige Abnutzung der Lager usw. Zur Uebertragung der Bewegung dienen elastische Bänder, Scheiben oder Bolzen, die zugleich isolierend wirken (Gummi, Leder o. dgl.), oder es arbeiten die üblichen Uebertragungsmittel mit Puffern aus Holz, Leder usw. zusammen. — Die elastischen Kupplungen werden auch so gebaut, dafs sie während des Ganges aus- und einrückbar oder wenigstens ausrückbar sind (s. α) S. 826 und ε) S. 829).

Abb. 146.



Digitized by Google

Aufser den nachfolgend beschriebenen Kupplungen sei noch erwähnt die El-Is-Kupplung (elastisch, isolierend) der Peniger Maschinenfabrik und Eisengiefserei, Penig i. Sachsen.

α) Elastische Isolationskupplung Patent **Zodel-Voith** der Firma J. M. Voith, Heidenheim a. Br. (Abb. 146). Ein Leder- oder Baumwollriemen ist, lose angezogen, durch Schlitze der ineinandergreifenden zylindrischen Ränder der Kupplungsscheiben geschlungen.

Die Kupplung wird auch ausrückbar gebaut.

Nr. der Kupplung	$\frac{N}{n}$	Durchmesser D mm	Länge L mm	Naben-Bohrung d mm	Abstand s mm	Riemen- Breite mm	Dicke mm	Länge mm	Gewicht kg
0,7	0,00087	70	30	15	25	15	1	320	1,2
0,9	0,0017	90	30	20	25	15	1	400	1,8
1,2	0,003	120	40	20	20	20	2	900	3,8
1,5	0,007	150	50	25	18	25	2	1100	7
2	0,01	200	50	30	20	25	2	1450	13
3	0,03	300	75	40	20	40	3	2450	28
4	0,075	400	90	50	20	50	4	3450	55
5	0,15	500	115	60	20	50	4	4300	85
6	0,46	600	160	90	30	75	6	5350	170
8	1,12	800	220	120	30	100	7	6950	345
10	2,13	1000	260	140	40	2 × 65	7	8500	640
12	3,8	1200	300	170	40	2 × 65	7	11100	900
14	5,25	1400	330	200	50	2 × 75	7	12800	1300
16	8,0	1600	360	230	50	2 × 80	8	14700	1750
18	11,5	1800	400	250	50	2 × 100	8	17400	2460
20	15,6	2000	480	300	70	2 × 100	8	20500	4450

Besondere Anordnungen für wechselnde Drehrichtung sowie zum Ausrücken.

Mit einem endlosen Lederband arbeitet auch die **elastische Cachin-Kupplung** des Eisenwerkes Wülfel. Eine Kupplungshälfte ist

Abb. 147.

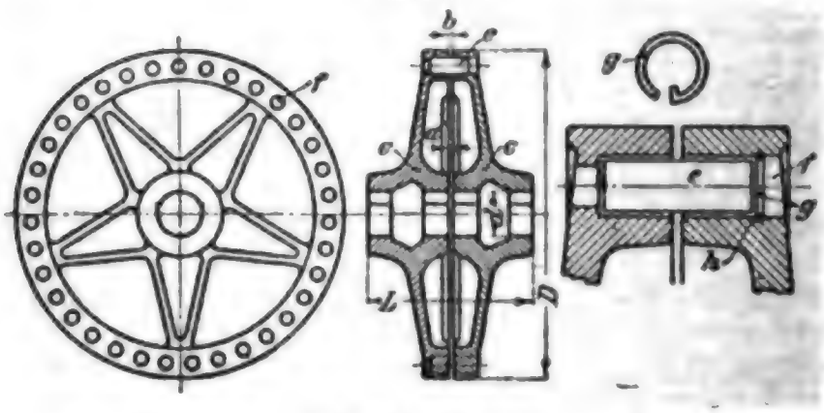
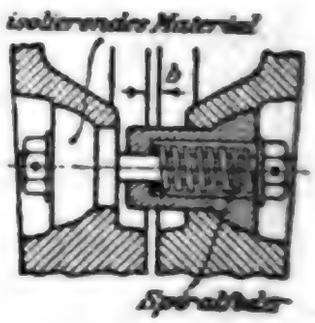


Abb. 148.



verschiebbar, so dafs die Kupplung durch Abnehmen des Lederbandes leicht lösbar ist (näheres: Preisliste der Firma).

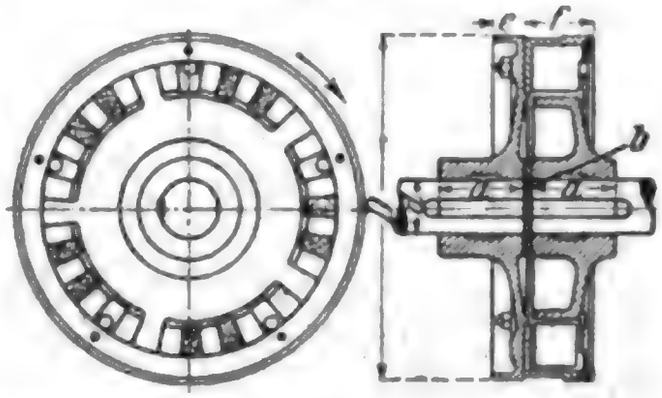
Digitized by Google

β) **Elastische Bolzenkupplung** der BAMAG-Dessau. Die elastische Verbindung der durch Rippen versteiften Hälften *c* aus Stahlguſs bilden Bolzen *e*, die aus bestem Leder gepreſst sind. Die Lederbolzen *e* werden in den Bohrungen *f* durch Federringe *g*, die sich in Nuten *h* einlegen, gesichert (Abb. 147). — Sind elektrische Maschinen zu kuppeln, so werden Hubbegrenzungen nach Abb. 148 eingelegt, die den Läufern Spiel gestatten, jedoch verhindern, daſs sich die Kupplungshälften über die Spaltweite *b* voneinander entfernen. Diese Hubbegrenzungen sind gegen die Kupplungshälften isoliert. — In der Tafel ist die gröſste Stoſsbelastung der Kupplung, die nur wenige Sekunden dauert, um 100 % höher angenommen als die normale Leistung. — Auch ausrückbar geliefert.

Modell-Nr.	Durchmesser D mm	Länge L mm	Abstand der Wellenenden a mm	Spaltweite b mm	Gröſste Bohrung d mm	$\frac{N}{n}$ bzw. Drehmoment in m/kg normal Dauerbetrieb $\frac{N}{n}$	normal Dauerbetrieb PR	maximal einschl. Stoſswirkung $\frac{N}{n}$	maximal einschl. Stoſswirkung PR	Gewicht kg
105/115	700	420	30	7	140	0,46	330	0,92	660	450
120/130	820	460	30	7	160	0,7	515	1,4	1 030	625
135/150	980	540	40	10	180	1,3	930	2,6	1 860	900
155/170	1100	600	40	10	200	2,1	1 505	4,2	3 010	1200
175/190	1250	680	40	10	225	3,2	2 290	6,4	4 580	1500
195/215	1450	760	40	10	250	5	3 580	10	7 160	1900
220/240	1710	840	40	10	280	7,5	5 370	15	10 740	2500
245/265	2100	940	40	10	310	11,9	8 525	23,8	17 050	3600
270/290	2500	1050	50	10	340	17	12 175	34	24 350	5200
295/315	2750	1150	50	10	370	23	16 475	46	32 950	7400

Bereits gebaut für $N = 15\,000$ bei $n = 90$ mit stoſsweiser Belastung für Umkehr-Walzwerke. — Für kleinere Kräfte (Wellendurchm. von 20 bis 190 mm) wird eine auf demselben Grundgedanken beruhende Kupplung in Grauguſs geliefert.

Abb. 149.



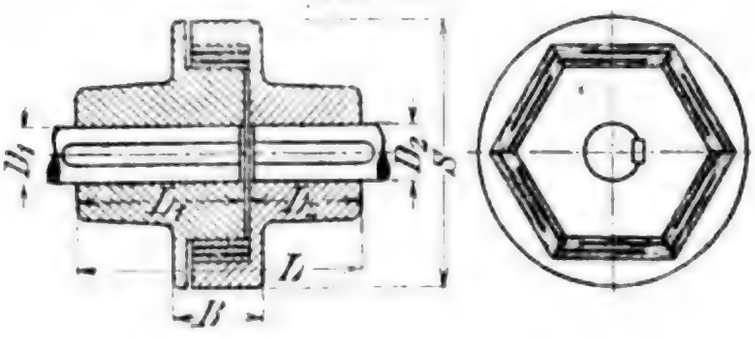
γ) **Elastische Zahnkupplung** von G. Polysius, Dessau. Die Kupplungshälften aus Guſseisen (für Umlaufgeschw. > 25 m aus Stahlguſs, ausgeführt bis zu 7200 PS bei 250 Uml./min) greifen mit angegossenen Zähnen ineinander. Zwischen die Zähne sind abwechselnd Zwischenlagen aus Filz und Holz eingeschoben. Treibt die Kupplung nur nach einer Richtung, so liegen die elastischen Zwischenlagen vor den treibenden Zähnen und nur je eine Zwischen-

Digitized by Google

lage hinter ihnen. Soll die Kupplung nach beiden Richtungen treiben, so sind vor und hinter den Zähnen gleich viel Zwischenlagen. — Bei einer anderen Ausführung sind die Kupplungszähne an den treibenden Teil angeschraubt (Abb. 149); an der getriebenen Scheibe sind sie angegossen. Nach Lösen der Schrauben kann jede der Wellen aus den Lagern gehoben werden, ohne dafs achsiales Verschieben nötig wäre.

$\frac{N}{n}$	Aeufserer Durchmesser der Kupplung D mm	Normale Bohrung der Kupplung d mm	Nabenlänge a mm	Wellenabstand b mm	Ausführung I mit beiderseits angegossenen Zähnen: Kranzbreite mm	Ausführung I: Gewicht der Kupplung kg	Ausführung II mit an einer Kupplungsscheibe angeschraubten Zähnen: Kranzbreite e mm	Kranzbreite f mm	Gewicht der Kupplung kg
0,002	140	20	35	4	46	3	24	43	4
0,007	210	30	50	5	57	7	25	52	8
0,020	280	40	70	6	74	16	30	68	20
0,044	350	50	85	7	81	31	35	75	40
0,085	420	60	105	8	104	62	40	95	70
0,151	490	70	120	9	113	100	50	105	110
0,25	560	80	135	10	124	130	55	115	150
0,39	630	90	155	11	138	162	60	130	190
0,59	700	100	170	12	154	260	65	145	290
0,84	770	110	190	13	163	350	70	155	390
1,17	840	120	205	14	180	435	75	170	500
1,60	910	130	220	16	196	555	85	185	610
2,13	980	140	240	18	206	675	90	195	770
2,78	1050	150	255	20	222	850	95	210	960
3,52	1120	160	270	22	246	1080	105	235	1235
4,53	1190	170	290	24	264	1360	115	250	1500
5,61	1260	180	305	26	274	1590	120	260	1800
6,92	1330	190	325	28	296	1770	130	280	2000
8,46	1400	200	340	30	306	1970	130	290	2250
10,24	1470	210	355	32	322	2230	135	305	2500
12,25	1540	220	375	34	334	2570	140	315	2850
14,67	1610	230	390	36	340	2810	140	320	3200
17,30	1680	240	410	38	360	3110	155	340	3600
20,38	1750	250	425	40	382	3700	155	355	4100

Abb. 150.



d) Eine einfache elastische Kupplung ist die **Grisson-Kupplung** (Abb. 150), von der Maschinenfabrik E. Becker, Berlin-Reinickendorf, gebaut. Zwei gufseiserne Sechskantteile greifen mit in dem hohlen Sechskant an-

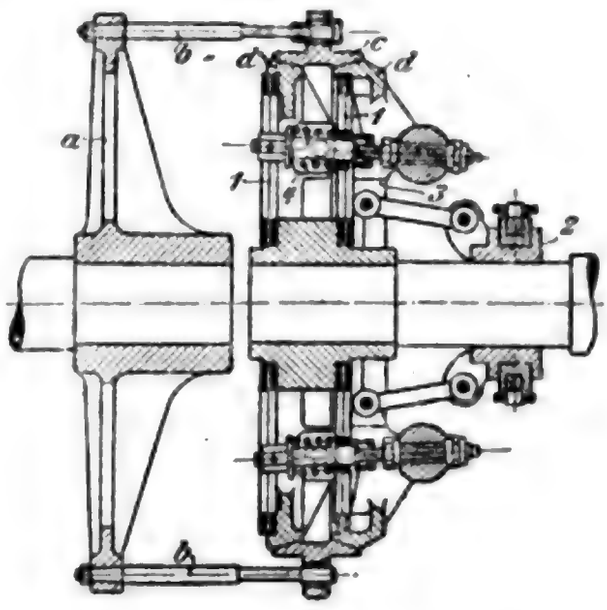
Digitized by Google

geordneten Zwischenstücken aus Hartholz, die zur besseren Federung Einschnitte haben, ineinander. Für beide Drehrichtungen verwendbar.

Bohrung D_1 mm	Bohrung D_2 mm	$\frac{N}{n}$	Durchmesser S mm	Länge L mm	Länge L_1 mm	Länge L_2 mm	Kranzbreite B mm	Gewicht kg
20	20	0,005	105	120	70	50	38	5
30	30	0,015	150	150	90	60	47	10
40	40	0,039	200	200	120	80	61	20
50	50	0,07	250	250	150	100	71	35
60	60	0,12	300	280	170	110	91	50
70	70	0,19	350	310	190	120	111	80
80	80	0,284	400	340	210	130	121	125
90	90	0,405	450	370	230	140	141	180
100	100	0,555	500	400	250	150	151	240

ε) **Nachgiebige Stabfederkupplung***) der SSW. In der Stahlgufsscheibe *a* sind am Umfang bis zu 20 sehr nachgiebige Stäbe *b* aus hochwertigem Chromnickelstahl fest eingespannt, die in die andere Kupplungsscheibe eingreifen. — Die Kupplung ist dadurch ausrückbar (Abb. 151), dafs auf den Stäben *b*, *b* ein Reibring *c* mit innerem Doppelkegel sitzt, in den zwei Gegenringe *d*, *d* der anderen Kupplungshälfte hineingedrückt werden. Die Reibringe *d* sitzen an Membranen 1, die sich so weit durchbiegen können, dafs die Reibflächen aufser Eingriff kommen. Einrückung von Muffe 2 aus durch Winkelhebel 3, der durch die federnde Stange 4 die Reibring *d* andrückt. Muffe im eingerückten Zustande entlastet.

Abb. 151.



c. Weitere Kupplungen zum Aus- und Einrücken.**)

Die wichtigsten dieser Kupplungen sind aufser den oben unter **b.** genannten die Zahnkupplung von Hildebrandt (Abb. 152) und von Missong, die Schraubenfeder-Reibungskupplung***) von Louis Schwarz & Co. in Dortmund, die Gnomkupplung†) der Peniger Masch.-Fabr. und Eisengiefserei und die Reibungskupplungen (2 bis 7).

*) St. u. E. 1908 Nr. 18, Umkehr-Blockwalzwerk von 6000 PS; Dingler, Pol. J. 24. Febr. 1912.

**) Ad. Ernst, Ausrückbare Kupplungen. Berlin 1890, J. Springer; Z. d. V. d. I. 1889 S. 481 u. 1907 S. 1768.

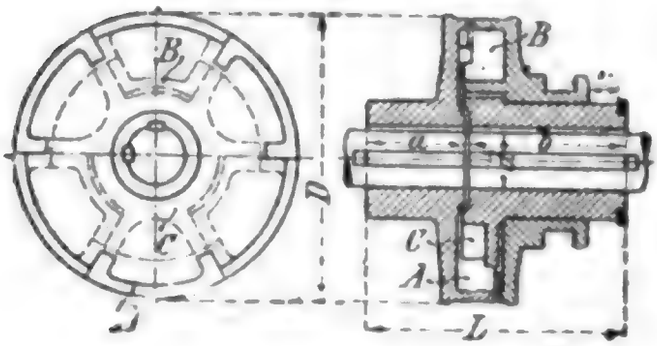
***) Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 632.

†) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1769.

Digitized by Google

1. Zahnkupplung von Hildebrandt.

Abb. 152.



Die beiden Kupplungshälften (Kreuz *C* und Gehäuse *A*) sind auf den Wellenenden festgekeilt. Die Zähne der um *c* verschiebbaren Muffe *B* greifen schliefsend in Lücken der Scheiben *C* und *A* ein. Einrücken nur zulässig beim Stillstande oder bei langsamem Gange, Ausrücken jederzeit (Abb. 152).

Ausführungen der BAMAG-Dessau.

Wellendurchmesser . mm	30	40	50	60	70	80	95	110	125	140	160	180
Durchmesser *D* . . mm	250	275	300	330	365	425	500	575	650	750	920	1080
Länge *L* . . . . mm	240	260	280	300	330	380	450	515	590	670	820	960
Länge d. Wellenendes f. d. feste Scheibe *a* mm	90	97	105	110	125	142	167	193	220	250	300	350
Länge d. Wellenendes f. Kreuz u. Muffe *b* mm	145	158	170	185	200	230	275	314	360	410	505	596
Hub *c*. . . . . mm	23	24	27	31	35	42	51	60	70	80	100	122
Gewicht . . . . . kg	42	47	54	68	91	136	220	325	460	675	1030	1620

Der Wellendurchm. kann um 5 bis 20 mm gröfser sein, als in der Tafel angegeben.

2. BAMAG-Reibungskupplung System J. Dohmen-Leblanc.

Die Kupplung wird für fünf verschiedene Zwecke gebaut: 1) zur Ver- und Entkupplung zweier Wellen während des Betriebes; 2) um einen Wellenstrang in und aufser Betrieb zu setzen, wenn sich auf ihm eine beständig umlaufende Scheibe oder ein Zahnrad befindet; 3) um eine Scheibe (od. Zahnrad) in und aufser Betrieb zu setzen, wenn sie sich auf einer beständig umlaufenden Welle befindet; 4) zur Ver- und Entkupplung zweier Wellen (während des Betriebes), von denen bald die eine, bald die andere die treibende ist (Abb. 153); 5) um eine für sich gelagerte, auf einer Hohlwelle sitzende schwere Antriebscheibe mit einer in der Mittellinie der Hohlwelle befindlichen, beständig umlaufenden Welle zu kuppeln.

Abb. 153.

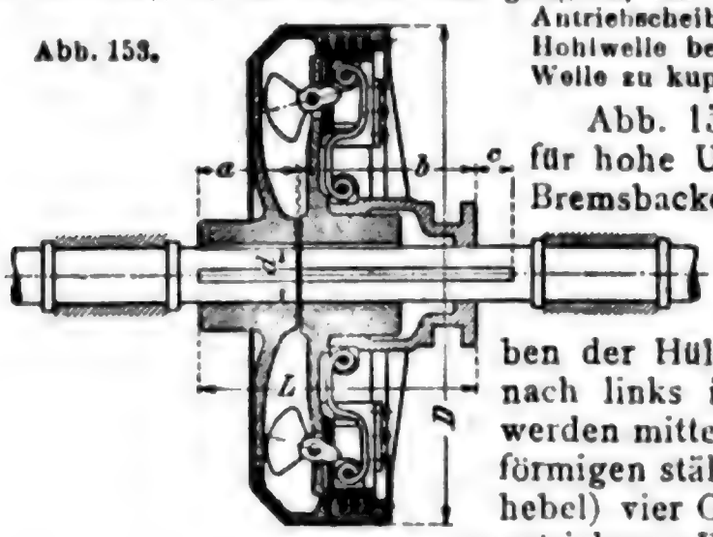


Abb. 153 zeigt die Anordnung 4) für hohe Umlaufzahlen; Fliehkraft der Bremsbacken durch Gegengewichte ausgeglichen. Auf dem linken Wellenende ist eine Scheibe festgekeilt. Durch Verschieben der Hülse auf der Welle von rechts nach links in die gezeichnete Stellung werden mittels der vier federnden, hakenförmigen stählernen Druckstangen (Kniehebel) vier Gleitstücke in einem auf der getriebenen Welle festgekeilten Armkreuze nach aufsen gegen die geriffelte Innenfläche der Scheibe gedrückt, so dafs die Reibung die Kupplung der Wellen vermittelt. Verschieben der Hülse von links nach rechts: Entkupplung. Druck der Reibbacken wirkt radial. — Die Kupplung kann in ein vollkommen glattes Gehäuse eingebettet werden.

Digitized by Google

Wellendurchm.*) mm	Durchm. D mm	Länge L mm	Länge des Wellenendes für das Gehäuse a mm	Länge des Wellenendes für Kreuz und Muffe b mm	Hub c mm	Gewicht kg
40	350	229	80	147	30	48
45	400	229	80	147	30	60
50	450	271	85	184	40	85
55 bis 60	600	314	100	211	50	120
65	660	358	125	230	60	175
70	860	388	135	250	65	240
75 bis 80	740	413	150	260	55	275
85 „ 90	880	451	160	288	75	380
95 „ 105	1040	525	180	340	95	560
110 „ 115	1290	575	200	370	110	820
120 „ 130	1490	646	230	411	125	1150
140 „ 150	1720	780	300	475	140	1800
160 „ 170	1850	856	330	520	160	2300
180 „ 190	1850	856	330	520	160	2500

8. Reibungskupplung von Hill. (Abb. 154 u. 155.)

(Eisenwerk Wülfel in Wülfel vor Hannover.)

Reibungsring (Hill-Ring) B beiderseits glatt gedreht; das Hill-Kreuz A trägt in radialen Armen 2 bis 6 Paare Reibbacken C, die mit Holz gefüttert, beim Einrücken von innen und aufsen sich gleichzeitig mit gleichem, rein radialem Drucke gegen B andrücken (B frei von Biegungsspannungen).

Abb. 154.

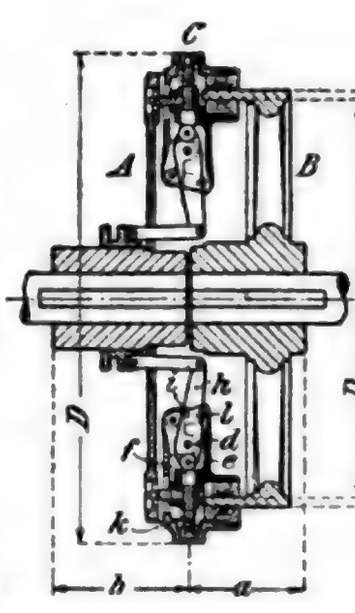
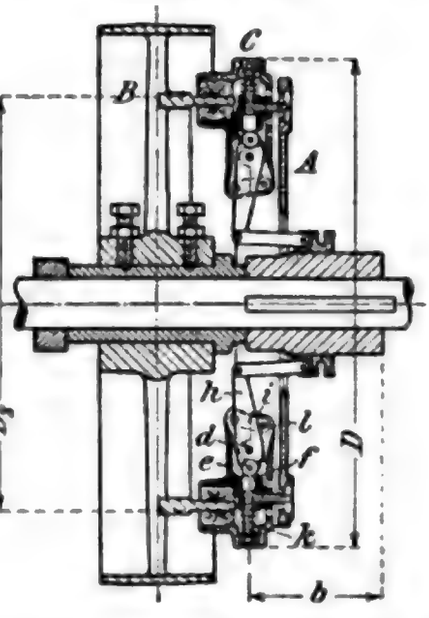


Abb. 155.



Beim Einrücken wird Hebel h um Zapfen d gedreht, der in der äufseren Backe gelagert ist; dabei drückt das Ende von h mit der Rolle e gegen Bolzen f der inneren Backe. Beide Backen drücken sich gegen B. — Damit die ausgerückten Backen Halt gegen radiale Verschiebung haben, sind sie durch den um Bolzen i drehbaren Lenker l verbunden und entfernen sich daher gleichweit von B. Abnutzung auf die leicht (durch Anziehen der Schraube k) nachstellbaren, auswechselbaren Holzfutter beschränkt; diese sowie die Federung der Zapfen liefern die erforderliche Elastizität.

*) Die Wellendurchm. sind berechnet gemäfs S. 819.

Digitized by Google

Die Kupplung, die für hohe Umlaufzahlen und bei Staubentwicklung anwendbar ist, wird **ungeteilt** und **geteilt** gebaut. Sie dient:

1. zur Verbindung zweier Wellenenden (Abb. 154);

2. in Verbindung mit Riemenscheibe usw. zum Ersatz des mit starker Abnutzung des Riemens verbundenen Antriebes mit fester und

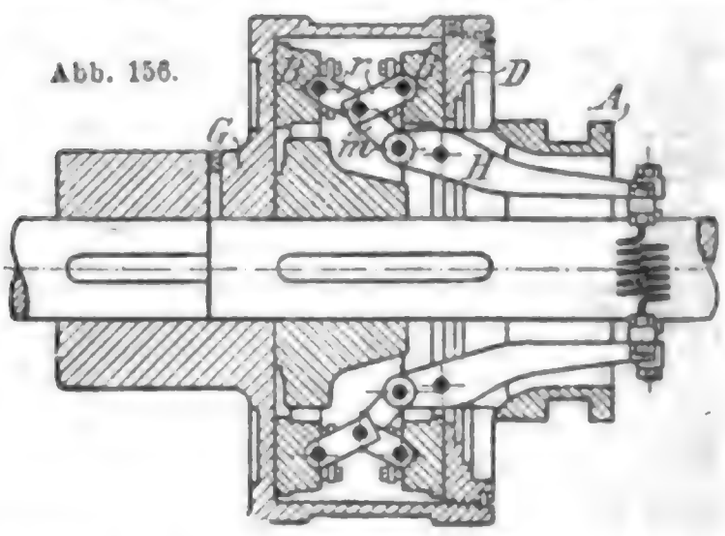
Nr.	Größte Leistung N in PS bei n = 50	100	200	Anzahl der Arme	Hill-Kreuz A D mm	b ungeteilt mm	b geteilt mm	Hill-Ring B D_1 mm	D_2 mm	a (Abb. 154) ungeteilt mm	a (Abb. 154) geteilt mm	Gewicht (Abb. 154) ungeteilt kg	Gewicht (Abb. 154) geteilt kg
6	3	6	12	2	610	170	—	490	510	120	—	82	—
7	5	10	18	3	610	170	—	490	510	140	—	92	—
8	8	17	29	3	725	200	—	599	625	165	—	153	—
9	14	28	52	4	865	245	265	713	745	180	205	260	300
10	22	44	82	4	980	265	295	800	835	200	225	355	410
11	30	60	110	4	1090	310	345	902	940	235	245	505	575
12	47	95	175	4	1255	345	385	1036	1080	280	280	745	830
13	80	158	290	4	1420	380	425	1168	1220	310	310	1035	1160
14	110	221	440	6	1420	435	430	1168	1220	310	310	1315	1410
15	160	321	600	6	1620	—	500	1344	1400	—	375	—	2010
16	225	450	750	6	1810	—	525	1510	1570	—	400	—	2770
17	285	575	975	6	2020	—	560	1682	1750	—	450	—	3920
18	400	800	1375	6	2190	—	600	1824	1900	—	500	—	4860

Außerdem die Zwischennummern 6a bis 14a.

loser Riemenscheibe. Die Scheibe in Verbindung mit der Hill-Kupplung (Abb. 155) steckt auf einer Leerlaufbüchse mit Fettschmierung oder, wenn sie längere Zeit ausgerückt bleiben soll, auf einer Hill-Büchse. (Leerlaufbüchse mit Oelumlauf und auswechselbaren Weifsmetallschalen s. Preisliste des Eisenwerkes Wülfel.)

3. in Verbindung mit Hohlwelle, wobei A auf der Antriebwelle, B auf der Hohlwelle sitzt, die gleichachsig mit der Hauptwelle besonders gelagert ist (für schwere Hauptantriebe und Dynamos).

Abb. 156.



Um bei Unglücksfällen eine Maschine oder eine ganze Wellenleitung sofort stillsetzen zu können, wird die Hill-Kupplung auch in Verbindung mit einem elektrischen Moment-Fernausrücker ausgeführt. — Für stark staubende Betriebe besondere Abart der Hill-Kupplung: sog. X-Kupplung.

4. Doppelscheiben-Reibungskupplung (Benn-Kupplung).

Von Vogel & Schlegel, Masch.-Fabr., Dresden.

Abb. 156 zeigt die ausgerückte Kupplung. Durch Verschieben der Muffe A nach links werden die Gelenkhebel $r\,r$ von den Hebeln H und m kniehebelartig durch-

Digitized by Google

gedrückt, wobei der Hebel *m* bis über seine Mittellage nach links bewegt wird und sich die Bremsklötze *B B* an die Reibungsflächen des Gehäuses *G* und seines Deckels *D* legen. Die Kupplung wird auch in Verbindung mit Riemen- oder Seilscheibe geliefert. — Die inneren Teile können ständig im Oelbade laufen.

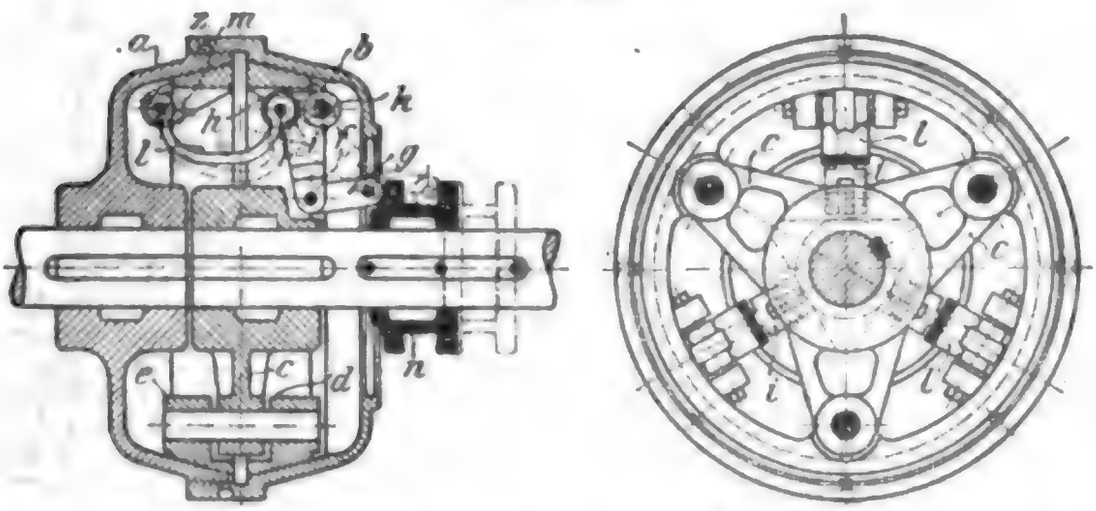
Durch die symmetrische Ausbildung dieser wie auch der unter 5. beschriebenen Doppelkegel-Reibungskupplung der S. M. F. ist der bei einfachen Reibkegel-Kupplungen entstehende, auch während des Betriebes herrschende achsiale Schub vermieden.

Eine ebenfalls mit **Doppel-Reibscheiben**, die von innen durch Kniehebel an Gehäuse und Deckel angedrückt werden, arbeitende Kupplung baut die Maschinenfabrik Lohmann & Stolterfoht in Witten a. d. Ruhr. — Ueber diese wie über die ältere, unter dem Namen der Firma bekannte Kupplung, die mit einem Reibkegel in Verbindung mit Klinken arbeitet, vgl. Preisliste der Firma.

5. Doppelkegel-Reibungskupplung der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann, A. G., Chemnitz.

Gebaut in verschiedenen Anordnungen. 1. Zur Verbindung zweier Wellenenden (Abb. 157); 2. zur Verbindung leichter oder mittlerer Riemen- oder Seilscheiben mit stets laufenden Wellen, wenn die Kupplungen nur selten und für kurze Zeit ausgerückt werden, ebenso wenn zeitweilig stillstehende Wellen mit stets laufenden Scheiben

Abb. 157.



gekuppelt werden sollen; 3. zur Verbindung einer Hohlwelle nebst auf ihr sitzender Scheibe mit der durch die Hohlwelle frei durchgeführten Vollwelle. Hierbei kann die Scheibe wie auch die Vollwelle treiben. Vollwelle und Hohlwelle sind so nahe wie möglich an Scheibe und Kupplung doppelt zu lagern.

Reibungskupplung nach 1 (Abb. 157). Das zusammengeschraubte Gehäuse der Kupplung *a*, *b* ist auf der treibenden Welle festgekeilt; die getriebene Welle trägt den Mitnehmer *c* mit durchgehenden Zapfen, die als Führung für die Reibringe *d* und *e* dienen. Der am Bolzen *f* angreifende Lenker *g* faßt mit Bolzen *h* den Winkelhebel *i*, dessen Drehpunkt *k* im Reibring *d* gelagert ist. Der Bolzen *h* des Winkelhebels ist mittels der Feder *l* mit dem im Reibringe *e* gelagerten Bolzen *m* verbunden. Im eingerückten Zustande liegen die Mitten der Bolzen *k*, *h* und *m* genau oder nahezu in einer geraden Linie, so daß das Getriebe selbstsperrend und die Muffe entlastet ist.

Beim Ausrücken wird die Muffe *n* auf der Welle nach außen gerückt und nimmt durch die Lenker *g* die Winkelhebel *i* mit, so daß die Reibringe *d* und *e* außer Eingriff mit dem Gehäuse kommen.

Digitized by Google

Beim Einrücken der Kupplung kommt zuerst der Reibring *e* in Eingriff mit Gehäuseteil *a*. Nachdem *m* ein fester Drehpunkt geworden ist, erfolgt das Einrücken des Reibringes *d*. — Durch Zusammenschrauben der Gehäusehälften kann die Kupplung nachgestellt werden. Die Reibringe laufen in Oel. Ausführungen für Bohrungen von 25 bis 280 mm.

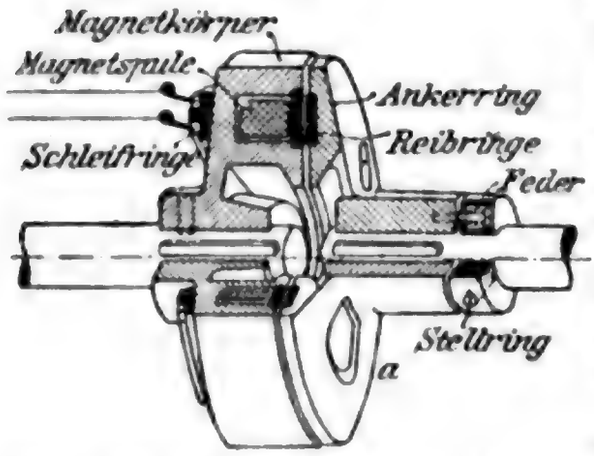
6. Elastische Reibungskupplung von G. Polysius, Dessau.

Arbeitet mit von innen angedrückten Doppel-Reibungskegeln, die durch Kniehebel an innen entspr. ausgebildete Reibflächen des Gehäuses angedrückt werden. Gebaut bis zu Bohrungen von 280 mm.

7. Elektromagnetische*) Friktionskupplung „Vulkan“ der „Vulkan“ Maschinenfabrik A. G. in Berlin.

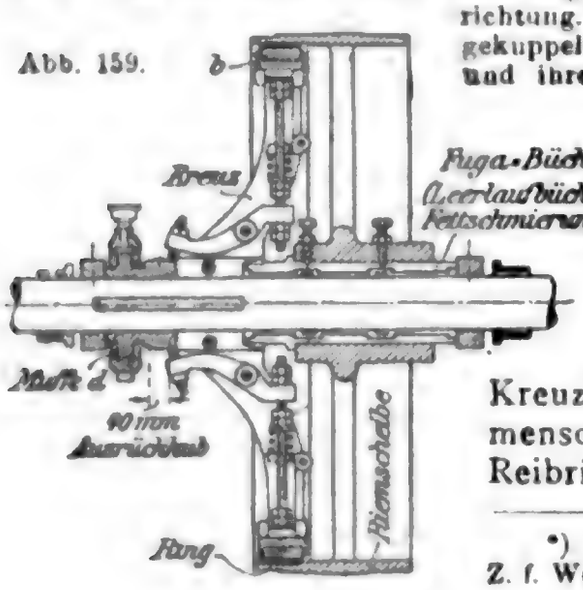
Besteht aus zwei Teilen, dem Magnetkörper, fest auf dem einen Wellenende, und dem Anker *a*, verschiebbar auf dem anderen (Abb. 158). Im Magnetkörper liegt die Magnetspule, der mit Schleifringen und Schleifkontakten ein Gleichstrom beliebiger Spannung zugeführt wird. Bei Stromschluss ziehen sich Magnetkörper und Ankerring an, ohne sich zu berühren, so dass die Reibringe aus nicht magnetischem Stoff den Druck aufnehmen. Bei Unterbrechung des Stromes sofort entkuppelt, da die Reibringe durch Federn voneinander entfernt werden.

Abb. 158.



Bei größeren Kupplungen liegen die Reibringe am äußeren Umfange. Für durchlaufende Wellen Ausführung als Leerlaufkupplung in Verbindung mit Riemenscheibe usw. Ausrückung aus beliebiger Entfernung und von beliebig vielen Punkten. Ausführung bis zu 2000 PS. Keine Reibungsverluste durch achsialen Druck. — Für **Hobelmaschinen** u. dgl. als **Reversierkupplung** ausgebildet. Mit der Welle fest verbunden ist die leichte Ankerscheibe, die aufsen die Reibringe trägt. Zu beiden Seiten dieser Scheibe laufen lose die mit Riemenscheiben oder — für unmittelbaren elektrischen Antrieb — mit Stirnrädern verbundenen Magnetkörper in einander entgegengesetzter Drehrichtung. Je nachdem die eine oder andere Seite gekuppelt wird, erfolgt Mitnahme der Ankerscheibe und ihrer Welle in der einen oder anderen Drehrichtung. Umsteuerung selbsttätig durch Umschalter: Wegfall der Riemenverschiebung.

Abb. 159.



8. Fuga-Kupplung des Eisenwerkes Wülfel, Hannover-Wülfel.

Besteht aus einem geteilten Kreuz (Abb. 159) und einer geteilten Riemenscheibe mit angegossenem inneren Reibring. Das Kreuz trägt auf zwei Armen

*) Elektromagnetische Kupplung v. L. Schuler, Z. f. Werkzeugmasch. u. Werkzeuge 1912 S. 461.

Digitized by Google

Reibbacken *b* mit auswechselbaren, lederbesetzten Holzfuttern. Riemenscheibe mit Ring sitzt auf einer Leerlaufbüchse und steht bei ausgerückter Kupplung still; Kreuz auf der umlaufenden Welle festgekeilt. Nach dem Einrücken (durch Abrücken der Muffe *d* vom Kreuz) werden die Backen *b* durch die Fliehkraft gegen den Reibring gepreſst und nehmen die Riemenscheibe mit. — Besonders geeignet zum Antrieb von Schleudertrommeln für Zuckerfabriken, Molkereien usw.

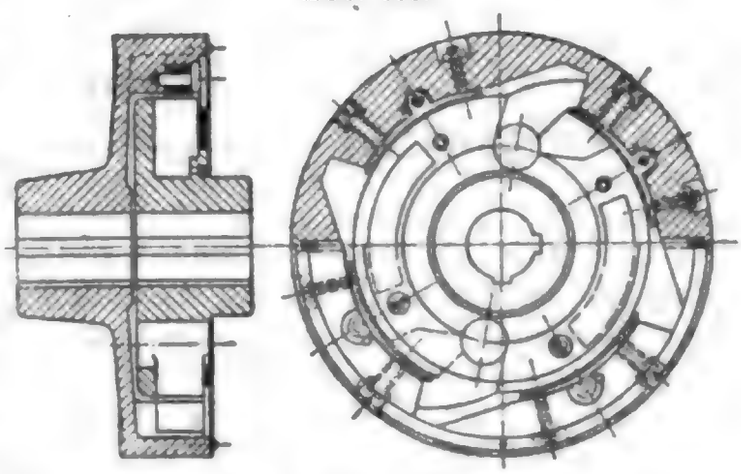
d. Kraftmaschinen-Kupplungen.*)

Wird ein Wellenstrang von zwei Kraftmaschinen angetrieben, z. B. Wasserrad oder Turbine als Hauptmotor mit Dampfmaschine oder Verbrennungskraftmaschine als Hülfsmotor, so wird eine Kupplung eingeschaltet, die sich je nach der Geschwindigkeit der beiden Kraftmaschinen selbsttätig ein- oder ausrückt.

1. Uhlhornsche Klinkenkupplung in der Ausführung der Maschinenfabrik G. Luther, A. G. in Braunschweig. Auch gebaut v. Eisenwerk Wülfel und der BAMAG.

Die Kupplung wird zwischen den Antrieben der beiden Kraftmaschinen in den Wellenstrang eingeschaltet. Rückt selbsttätig ein, sobald die Hauptkraftmaschine zu langsam geht, und schaltet sich aus, wenn der Hauptmotor allein die gewünschte Umlaufzahl innehalten kann. — Der innere Teil der Kupplung (Abb. 160) mufs stets auf die Welle der Hülfsmaschine gesetzt werden. Die innere Scheibe überträgt die Umfangskraft auf die von der Hauptkraftmaschine getriebene Welle durch Sperrklinken, die in den äufseren Teil eingreifen.

Abb. 160.



2. Kraftausgleich-Kupplung „Ohnesorge“) der BAMAG.

Das Bremsgehäuse *h* (Abb. 161) sitzt auf der Welle der ständig laufenden Hauptmaschine. Der Sperrzaum *s* mit den Differentialhebeln *e*, *f* und einer Schaltvorrichtung sitzt auf einer Nabe, die auf die Welle der nach Bedarf einzuschaltenden Zusatzmaschine aufgekeilt ist. Die Bremsbänder *z* legen sich von innen gegen das Bremsgehäuse *h* und bilden mit den Hebeln *e*, *f* und den Parallelstangen *n* ein Verbund-Differentialgesperre, durch das selbsttätig das Oeffnen und Schliefsen

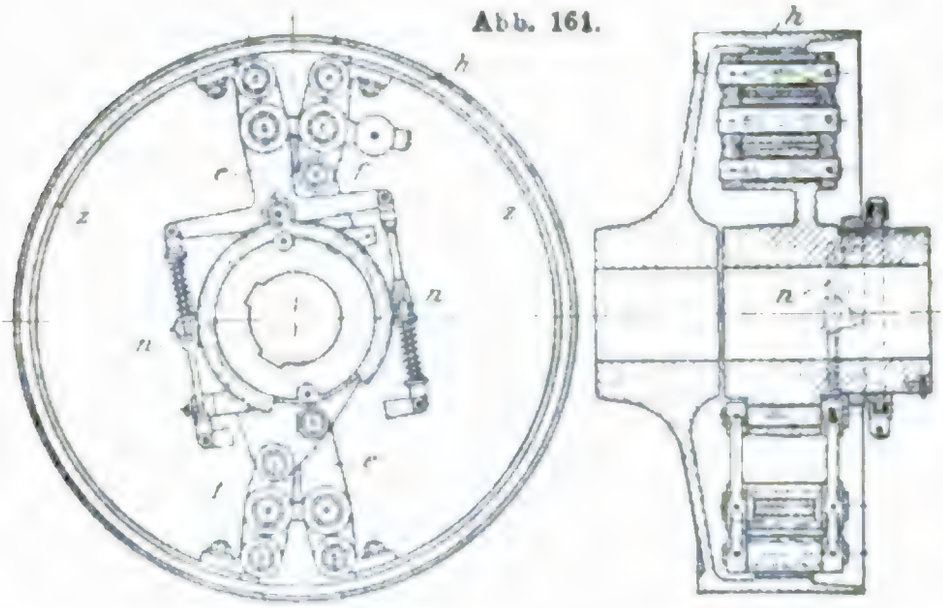
*) Z. d. V. d. I. 1910 S. 1276 (Das Verhalten von Kraftmaschinen im mechanischen oder elektrischen Parallelbetrieb).

**) Z. d. V. d. I. 1908 Nr. 26, 1913 S. 1023. — Springer. Bandkupplung: Z. d. V. d. I. 1912 S. 2067.

Digitized by Google

der Kupplung erfolgt. Wenn die Hauptmaschine allein treibt, läuft das auf ihrer Welle sitzende Bremsgehäuse frei, da die Bremsbänder *s* abgehoben sind. Die Schaltung des Bremszaumes auf Eingriff erfolgt stets vor Erreichung der Umlaufzahl der Hauptmaschinenwelle. Sobald die Zusatzmaschine die Geschwindigkeit der Hauptmaschine erreicht hat, erfolgt die selbsttätige Kupplung der beiden Maschinen. — Gebaut für Wellendurchm. von 60 bis 200 mm.

Abb. 161.



F. Lagerungen.

a. Schmierung.

1. **Fettschmierung.** Zweckmäfsig für niedrige Umlaufzahlen, für Schwingzapfen, für staubige Betriebe. Anpressung von Hand (Staufferbüchsen), durch Gewicht, durch Feder, durch Schmierpresse.

2. **Tropfschmierung.** Führt nur so viel Oel zu, als notwendig. Regelung erforderlich, ferner Anstellen bei Inbetriebsetzung, Abstellen bei Stillstand sowie rechtzeitige Füllung des Behälters. Zweckmäfsig sichtbare Tropfenbildung und Glasbehälter. Docht- und Nadelöler verdrängt durch Kegelöler, weil letzterer Regelung ermöglicht.

3. **Spülschmierung.** Führt Oel im Uebermafs zu und im Kreislauf zurück. Regelung fällt fort, ebenso An- und Abstellen. Neufüllung des Behälters nur in grofsen Zwischenräumen. Am verbreitetsten: Ringschmierung (Elektromotoren, Transmissionen). In Sonderfällen Kreislauf durch Fliehkraft. Zentralschmierung von hochstehendem Behälter (Schiffsmaschinen) oder durch Druckluft (Kraftwagen).

4. **Prefsschmierung.** Führt Oel unter Druck zu. Gemeinsamer Vorratsbehälter mit Prefspumpe für jedes Schmierrohr. Kreislauf des Oels. Zweckmäfsig für hochbeanspruchte Lager schnellaufender Maschinen (Turbomaschinen).

b. Tragzapfen.

Durchschnittliche **Flächenpressung** in at: $p = \frac{P}{db}$, wobei P = Lagerdruck in kg, d = Zapfendurchmesser in cm, b = Zapfenbreite in cm. Höchste Flächenpressung etwa doppelt so hoch nach den Versuchen von Tower.

Gleitgeschwindigkeit in m/sk: $v = \frac{d \pi n}{60}$, wobei d = Zapfendurchmesser in m. Höchstwerte von p bei sehr günstigen Verhältnissen (sehr kleines v, kurze Belastungsdauer, gute Kühlung): bis zu 150 at bei Zapfen aus gehärtetem Stahl auf Bronzeschalen, bis zu 100 at bei ungehärtetem Stahl auf Bronze, bis zu 75 at bei Stahl auf Weifsmetallschalen.

Aufschluſs über den **Reibungswert** μ geben die Versuche von Thurston 1873, Tower 1883, Stribeck 1902, Lasche 1903, Dettmar 1912.

Maſsgebend für die Erwärmung des Lagers ist die **Reibungsleistung auf die Flächeneinheit** in mkg/sk/qcm $= p \,.\, v \,.\, \mu$. Diese darf einen Grenzwert nicht überschreiten, wenn die **natürliche Wärmeabfuhr** durch Ausstrahlung genügen soll. Dieser Grenzwert liegt hoch bei Kurbelzapfen, bei Lagern von ventilierten Dynamoankern, bei Lagern in Nähe von Schwungrädern, bei Lokomotiven; er ist niedrig bei gekapselten Maschinen, in Schiffsräumen, in Bergwerken. Günstig groſse Metallmasse des Lagerrahmens; ungünstig Luftkissen bei Arbeitsleisten an den Lagerschalen. Der für gewöhnliche Betriebe (Transmissionen) zulässige Wert von $p \,.\, v \,.\, \mu$ ist nach den oben angezogenen Versuchen gekennzeichnet durch die Linie der zulässigen Erwärmung in Abb. 162. Der Einfluſs besonderer Betriebsverhältnisse auf den Wert des Produktes $p \,.\, v$ ist aus Abb. 163 erkennbar. Die Reibungsleistung auf 1 qcm Lagerprojektionsfläche kann wesentlich gesteigert werden bei **künstlicher Wärmeabfuhr** durch Rückkühlung des umlaufenden Oeles oder durch unmittelbare Wasserkühlung der Lagerschalen.

Abb. 162.

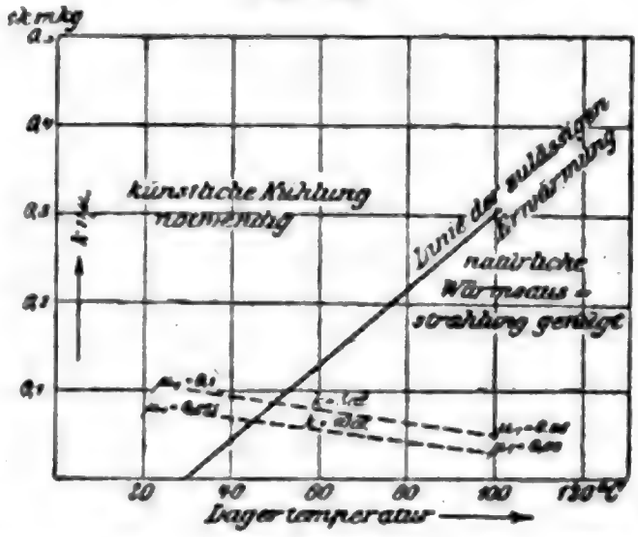
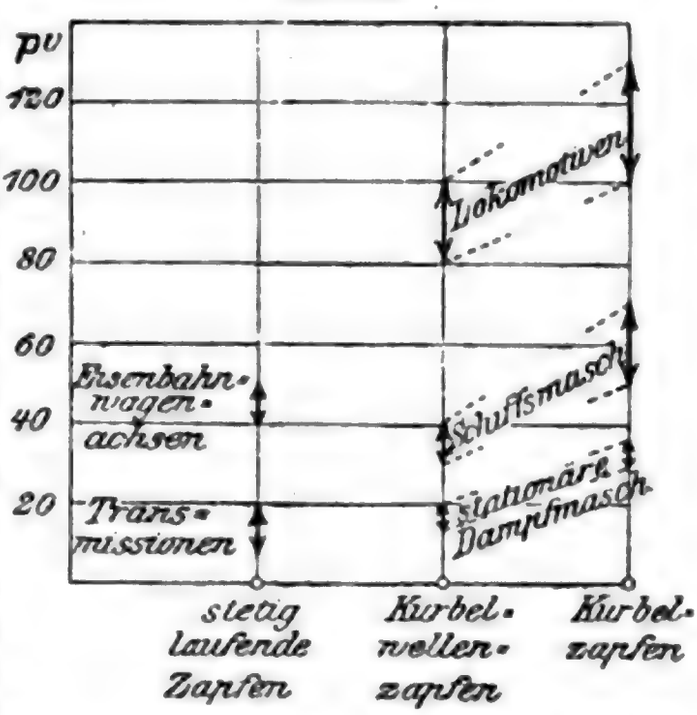


Abb. 163.

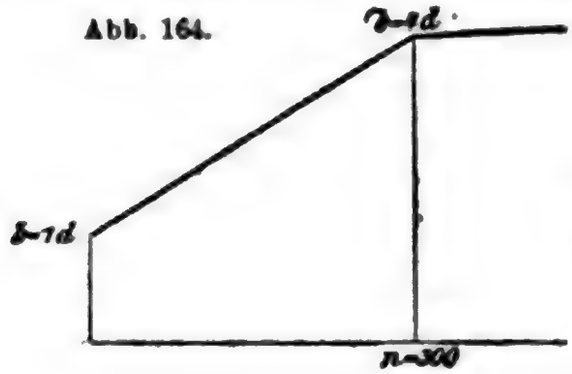


Voraussetzung für die Zulässigkeit der Grenzwerte ist vollkommenes Aufliegen des Zapfens auf der Lagerschale; der Zapfen muſs daher so stark sein, daſs die Formänderung infolge des Biegungsmomentes hinreichend klein bleibt. Lagerbreite demgemäſs klein bei groſsen Biegungsmomenten und niedrigen Umlauf-

Digitized by Google

zahlen, grofs bei hohen Umlaufzahlen (Abb. 164). Lagerschalen mit $b = 3$ bis $4\ d$ sind gelenkig so zu lagern, dafs sie der Schiefstellung des Zapfens infolge Durchbiegung der Welle folgen können.

Abb. 164.



c. Spurzapfen.

1. **Scheibenzapfen.** Durchschnittliche Flächenpressung in at: $p = \frac{P}{\frac{d^2\pi}{4}}$, wobei d in cm.

Höchste Flächenpressung in Zapfenmitte sehr viel höher.

Durchschnittliche Gleitgeschwindigkeit in m/sk: $v = \frac{\frac{1}{2} d\pi n}{60}$, wobei d in m.

Zulässiger Grenzwert: $p \,.\, v \sim 20$ unter gewöhnlichen Verhältnissen.

2. **Ringzapfen.** Durchschnittliche Flächenpressung: $p = \frac{P}{d\pi b}$, wobei d = mittlerer Durchmesser in cm, b = Ringbreite in cm.

Durchschnittliche Gleitgeschwindigkeit: $v = \frac{d\pi n}{60}$.

Zulässiger Grenzwert für natürliche Wärmeabfuhr: $p \,.\, v \sim 40$, bei künstlicher Kühlung $p \,.\, v$ bis 80.

3. **Kammzapfen.** $p = \frac{P}{i d\pi b}$, wobei i = Kammzahl; $v = \frac{d\pi n}{60}$.

Zulässiger Grenzwert für natürliche Wärmeabfuhr: $p \,.\, v \sim 5$ bei festen Lagerschalen, ~ 10 bei einzeln verstellbaren Schalen.

d. Lagerschalen.

Forderungen:

1. **Auswechselbarkeit,** daher einfache, genau herstellbare Form.

2. **Ausbau der Welle,** erreichbar durch geeignete Teilung von Schale und Lagerkörper.

3. **Nachstellbarkeit** nur bei Wechseldruck oder hoher Pressung ($p > 20$ at).

4. **Einlaufen.** Bronzeschalen schleifen sich ein, Weifsmetallschalen pressen sich an. Bronze für hohe Pressung, für Stofskräfte und für kleine Geschwindigkeit; Weifsmetall in allen anderen Fällen vorzuziehen.

5. **Schonung des Zapfens** bei Heifslaufen. Bronzeschalen krümmen sich und greifen den Zapfen an; Weifsmetall schmilzt. Letzteres daher betriebssicherer für den Zapfen.

6. **Gleichmäfsiges Anliegen.** Unbewegliche Schalen nur bei l bis zu $2\,d$; Kugelschalen für $l = 3$ bis $4\,d$.

Digitized by Google

e. Tragkugellager.

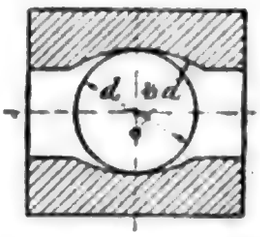
Nach der Untersuchung von Stribeck ist

$$P_0 = P \cdot \frac{1}{1 + 2\cos^{\frac{5}{2}}\gamma + 2\cos^{\frac{5}{2}} 2\gamma + \dots} \sim \frac{P}{\frac{z}{5}},$$

wobei P_0 der Druck auf die höchstbelastete Kugel, P der Lagerdruck, γ der von den Mittelpunkten zweier benachbarter Kugeln eingeschlossene Zentriwinkel und z die Kugelzahl ist. Voraussetzung dabei ist, dafs nur die Kugeln, nicht aber die Laufringe eine Formänderung erleiden.

$P_0 = d^2 k$, wobei d der Kugeldurchmesser in cm ist.

Abb. 165.



Unter gewöhnlichen Betriebsverhältnissen kann $k = 100$ gewählt werden. Dabei müssen sowohl die Kugeln wie die Laufringe aus gehärtetem Stahl bestehen und die Kugeln in Rinnen von Kreisbogenquerschnitt (Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{2}{3} d$) laufen (Abb. 165). Die Preislisten der Kugellagerfabriken sind meist für $k = 200$ aufgestellt, wobei aber empfohlen wird, der Berechnung den dreifachen Zahndruck bzw. den fünffachen Riemenzug zugrunde zu legen.

Der Reibungswiderstand eines Tragkugellagers entspricht dem eines Gleitlagers gleicher Bohrung mit einem Reibungswert von 0,0015 bei $k = 100\, d^2$; der Widerstand ist nahezu unabhängig von der Umlaufzahl. Anlaufreibung nicht gröfser als die Reibung im Beharrungszustande.

Vorzüge der Kugellager: geringer Reibungswiderstand, wichtig für Maschinen, die häufig anlaufen müssen (Fahrzeuge); geringe Wärmeentwicklung; geringer Oelverbrauch und wenig Wartung; kurze Lager. Nachteile: harte Aufnahme von Stöfsen, weil die dämpfende Oelschicht fehlt; Lauf nicht so geräuschlos wie bei Gleitlagern, insbesondere bei hoher Umlaufzahl.

f. Spurkugellager.

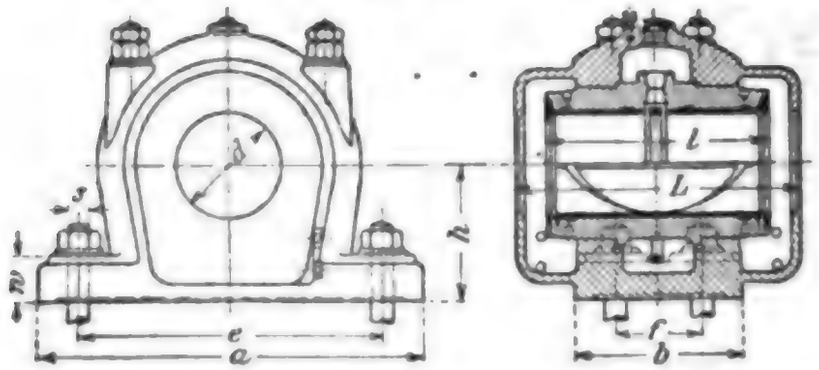
$P_0 = \frac{P}{i}$, wobei P_0 = höchster Kugeldruck, P = Lagerdruck, i = Kugelzahl. $P_0 = d^2 . k$. Da im Spurkugellager nicht reine Wälzung, sondern wälzende und gleitende Reibung zusammen auftritt, so ist hier k abhängig von der Geschwindigkeit: $k = \frac{\text{etwa } 50}{v}$, wobei v die Umfangsgeschwindigkeit der Welle am Kugelkreisumfang ist.

g. Lagerkörper.

1. **Stehlager.** Bei unbeweglichen Schalen und bei Kugelschalen für Wellen > 100 mm Durchm. nur wagerechte Verstellung auf der Sohl-

Digitized by Google

Abb. 166.



platte; bei Kugelschalen für Wellen < 100 mm senkrechte Verstellung durch Stellspindeln.

Stehlager mit unbeweglichen Schalen der BAMAG Abb. 166 und Tafel

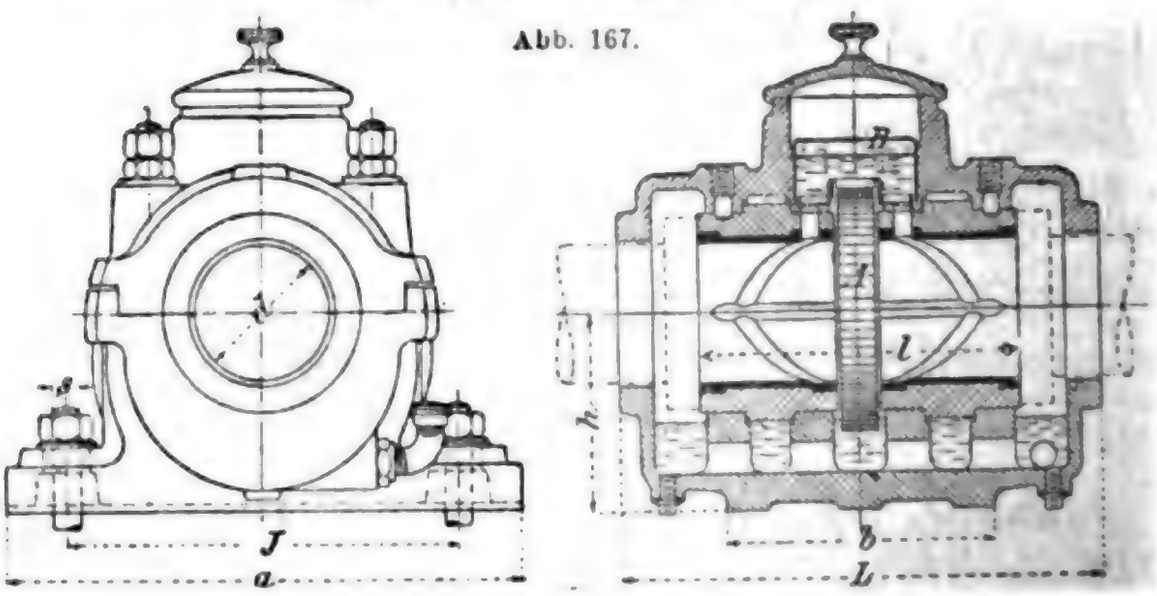
Stehlager der BAMAG mit festen Schalen (Abb. 166).

Die Lager bis 160 mm Bohrung haben einen geteilten Schmierring, die mit gröfserer Bohrung haben zwei geteilte Schmierringe. Beim Einbau dieser Lager müssen die Wellen eingeschabt werden.

Bohrung des Lagers d mm	Länge der Schale l mm	Länge des Körpers L mm	Lagerhöhe h mm	Fufsplatte Länge a mm	Fufsplatte Breite b mm	Lagerfufsschrauben Entfernung e mm	Lagerfufsschrauben Entfernung f mm	Lagerfufsschrauben Zahl	Lagerfufsschrauben Durchmesser s mm	Gewicht kg
20—25	70	95	45	150	50	115	.	2	10	3
30—35	90	125	65	190	75	140	.	2	13	7
40—45	110	150	75	220	90	165	.	2	13	11
50—55	130	180	82	260	105	200	.	2	16	18
60—65	155	205	95	310	125	230	.	2	20	26
70—80	175	230	110	350	140	260	.	2	23	36
85—95	205	265	125	400	165	300	.	2	26	59
100—110	240	310	140	450	190	340	.	2	29	85
115—130	280	360	170	510	220	400	110	4	26	136
135—160	330	420	200	580	250	460	130	4	32	220
165—190	390	490	235	680	280	550	150	4	39	335
195—220	450	560	270	790	320	630	170	4	42	520
225—260	525	650	300	900	380	720	210	4	51	900
265—300	600	750	340	1000	425	800	240	4	58	1400
400	800	1000	470	1400	580	1100	330	4	76	2875

Stehlager mit unbeweglichen Schalen des Eisenwerks Wülfel, Hannover (Abb. 167 und Tafel).

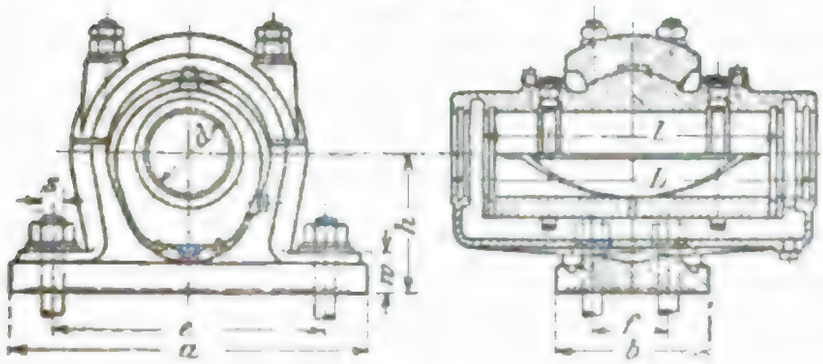
Abb. 167.



Digitized by Google

Wellendurchmesser d mm	Lagerlänge L mm	Schalenlänge l mm	Lagerhöhe h mm	Fufsplatte Länge a mm	Fufsplatte Breite b mm	Befestigungsschrauben Anzahl	s mm	Längsentfernung J mm	Querentfernung bei 4 Schrauben mm	Gewicht kg
50 u. 55	200	155	100	270	85	2	16	230	—	22
60 u. 65	220	175	110	340	100	2	19	260	—	27
70 u. 75	250	200	120	380	110	2	22	285	—	40
80 u. 85	280	225	135	405	125	2	22	310	—	55
90 u. 95	320	260	150	440	140	2	25	340	—	77
100, 105 u. 110	360	300	170	460	180	4	22	350	100	108
115, 120 u. 125	400	340	190	500	200	4	25	410	115	151
130 u. 140	430	360	190	475	235	4	29	375	135	188
150 u. 160	470	400	200	520	260	4	32	410	145	233
170 u. 180	520	440	225	570	300	4	38	450	170	310
190 u. 200	570	490	240	650	330	4	38	510	180	416
220	620	540	270	710	360	4	44	555	200	585
240 u. 250	690	610	300	790	400	4	51	620	230	812
260 u. 280	740	650	340	850	440	4	51	660	250	1045
300 u. 320	920	780	375	1000	570	4	57	780	350	1625
340 u. 360	1040	930	440	1150	650	4	63	900	400	2365

Abb. 168.



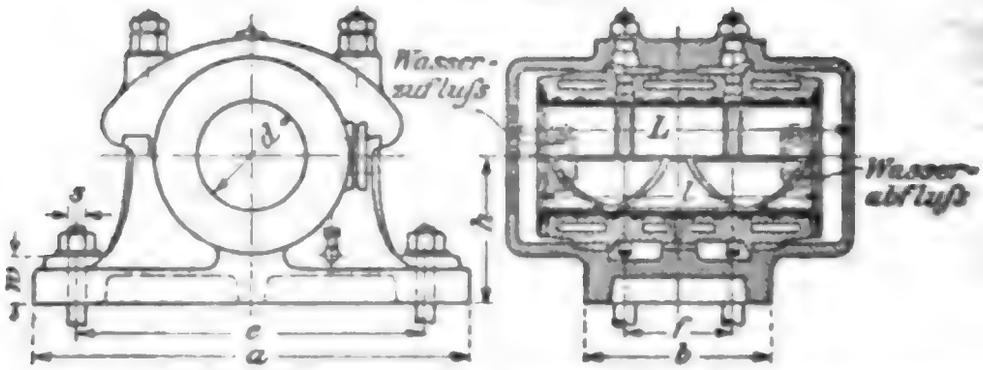
Stehlager mit Kugelschalen der BAMAG ohne Stellspindeln (Abb. 168 und Tafel).

Zweiteilige Stehlager der BAMAG mit Kugelschalen (Abb. 168).

Bohrung des Lagers d mm	Länge der Lauffläche l mm	Länge der Schale L mm	Lagerhöhe h mm	Fufsplatte Länge a mm	Fufsplatte Breite b mm	Lagerfufsschrauben Entfernung e mm	Zahl	Durchmesser s mm	Gewicht kg
20—25	90	125	57	150	50	115	2	10	3
30—35	105	150	80	190	75	140	2	13	7
40—45	145	200	90	220	90	165	2	13	11
50—55	180	240	100	260	105	200	2	16	17
60—65	215	280	110	310	125	230	2	20	24
70—80	260	330	130	350	140	260	2	23	39
85—95	315	390	150	410	165	300	2	26	59
100—110	375	460	180	450	190	340	2	29	90
115—130	430	520	200	510	220	400	4	26	140

Digitized by Google

Abb. 169.



Stehlager mit Kugelschalen der BAMAG mit Stellspindeln (Abb. 169 und Tafel).

Einteilige Stehlager der BAMAG mit Kugelschalen (Abb. 169).

Die Lagerhöhe h kann verändert werden.

Bohrung des Lagers	Länge der Lauffläche	Länge der Schale	Lagerhöhe	Fufsplatte Länge	Fufsplatte Breite	Lagerfufsschrauben Entfernung		Lagerfufsschrauben Durchmesser	Gewicht
d	l	L	h	a	b	e	f	s	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg
40—45	145	200	160	270	90	150	60	13	14
50—55	180	240	175	315	105	175	70	16	21
60—75	215	280	205	380	125	215	85	20	32
70—80	260	330	240	445	140	255	100	23	48
85—95	315	390	275	510	165	295	115	26	77
100—120	375	460	310	570	190	340	130	29	110

2. **Armlager.** Wagerechte Verstellbarkeit bei Armen mit aufgeschraubten Stehlagern; senkrechte Verstellbarkeit bei Kugelschalen mit Stellspindeln. Bemessung des Armes so, dafs der gröfste Riemenzug in ungünstigster Richtung aufgenommen werden kann; gröfster Riemenzug an der Hauptantriebscheibe, die das ganze Drehmoment übertragen kann, welches die Welle aushält, und die mit kleinstmöglichem Durchmesser gewählt ist.

3. **Hängelager.** Leichter Ausbau der Welle bei seitlich offenen Hängelagern mit Stellspindeln. Zentrische Belastung des Lagerkörpers durch Verschlufs der seitlichen Oeffnung, mittels Zugstange oder Deckel erreichbar.

III. Maschinenteile für Hebemaschinen.

A. Rundeisenketten.

Formgebung. Kurzgliedrige Kette (Abb. 170) für Hebemaschinen, weil Biegungsbeanspruchung auf Rollen und Trommeln minder grofs. Langgliedrige Kette (Abb. 171) für Befestigungszwecke, weil leichter und billiger. Stegkette (Abb. 172) für Anker, weil Festigkeit um rd. 20 % höher.

Belastung. Baustoff: zähes weiches Schweifseisen mit 3500 kg/qcm Bruchfestigkeit und 12 bis 20 % Bruchdehnung. Beanspruchung zu-

Digitized by Google

sammengesetzt aus Zug und Biegung. Berechnung nur auf Zug üblich mit entsprechend verminderter Beanspruchung:

$$P = \frac{2\,d^2\,\pi}{4} \cdot k_z.$$

Bruchfestigkeit (ermittelt durch Zerreifsen von 3 bis 5 Gliedern):

$k_{br} = 2400$ kg/qcm bei Ketten ohne Steg,
$= 2700$ „ „ „ mit „

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts;

$k_{br} = 2800$ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten

der Duisburger Maschinenbau-A. G.

Abb. 170. **Kurzgliedrige Kette.**

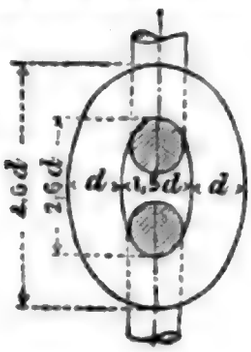


Abb. 171. **Langgliedrige Kette.**

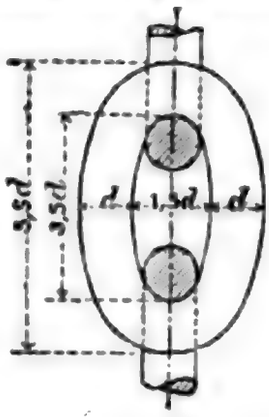
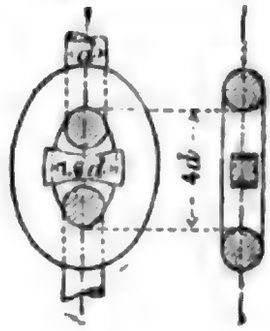


Abb. 172. **Stegkette.**



Probebelastung (ermittelt auf der Prüfmaschine mit je 25 m Kettenlänge)

$k_p = 1350$ kg/qcm bei Ketten ohne Steg,
$= 1800$ „ „ „ mit „

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts;

$k_p = 1400$ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten

der Duisburger Maschinenbau-A. G.

Zulässige Beanspruchung

$k_z = 637$ kg/qcm für kurzgliedrige Ketten (rd. 4fache Sicherheit)
$= 955$ „ Stegketten (rd. 3fache Sicherheit)

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts;

$k_z = 600$ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten

der Duisburger Maschinenbau-A. G. nach deren Angabe.

$k_z = 600$ kg/qcm	(4fache Sicherheit) für wenig angestrengte Ketten	nach C. v. Bach
$\leqq 500$ „	(5fache Sicherheit) für häufiger benutzte Ketten	
$\leqq 300$ „	(8fache Sicherheit) für Dampfwindenketten	

Digitized by Google

Kurzgliedrige Kran- und Schiffsketten ohne Steg der Deutschen Maschinenfabrik A.-G., Werk Bechem & Keetmann in Duisburg.

Formgebung nach Abb. 170, S. 843.

f = Querschnitt = $\frac{2\,d^2\,\pi}{4}$ in qcm,

q = Gewicht von 1 m in kg,

P_1 = Probelast in kg,

P_2 = Bruchlast in kg.

d mm	P_1 kg	P_2 kg	f qcm	q kg/m	d mm	P_1 kg	P_2 kg	f qcm	q kg/m
5	560	1120	0,39	0,58	20	9000	18000	6,28	8,98
6	810	1620	0,57	0,81	21	9920	19840	6,93	9,90
7	1100	2200	0,77	1,10	22	10890	21780	7,60	10,87
8	1440	2880	1,01	1,44	23	11900	23800	8,31	11,90
9	1820	3640	1,27	1,82	24	12960	25920	9,05	12,94
10	2250	4500	1,57	2,25	26	15210	30420	10,62	15,18
11	2720	5440	1,91	2,72	28	17640	35280	12,32	17,61
12	3240	6480	2,26	3,24	30	20250	40500	14,14	20,22
13	3800	7600	2,65	3,80	33	24500	49000	17,11	24,46
14	4410	8820	3,08	4,41	36	29160	58320	20,36	29,11
15	5060	10120	3,53	5,06	39	34220	68440	23,89	34,16
16	5760	11520	4,02	5,75	43	41600	83200	29,04	41,53
17	6510	13020	4,54	6,50	46	47610	95220	33,24	47,53
18	7290	14580	5,09	7,28	49	54020	108040	37,71	53,82
19	8120	16240	5,67	8,14	52	60840	121680	42,47	60,73

Kettenrollen und -trommeln. Rillenquerschnitt so zu gestalten, dafs die Kette in beliebig verdrehter Lage Auflage findet: daher Halbkreis mit $r = 1{,}75\,d$ (Abb. 173 u. 174); Rillenbreite $b = 3\,d$. Durchmesser der Rollen und Trommeln $D \geq 20\,d$ behufs Verringerung der Biegungsbeanspruchung. Befestigung der Kette auf der Trommel nach Abb. 175. Entlastung der Befestigung durch ein bis zwei Vorratswindungen. Uebereinanderwickeln vermeiden.

Abb. 173.

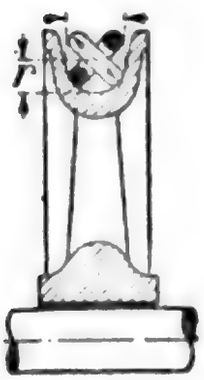


Abb. 174.

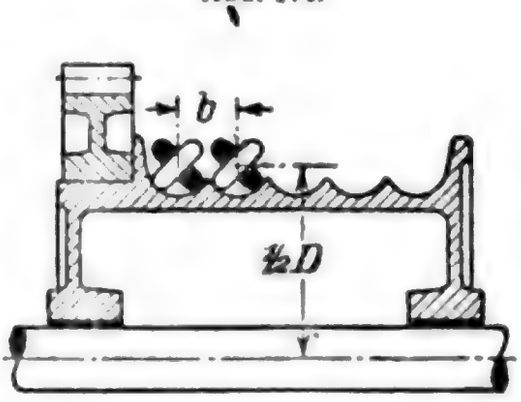
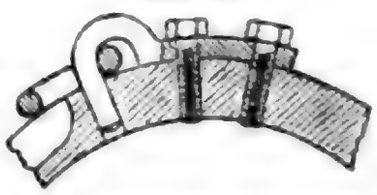


Abb. 175.



Anwendungsgebiet. Rundeisenketten nur dort anzuwenden, wo Drahtseile nicht zulässig sind, z. B. im Seewasser (Ankerketten). Nachteile der Kette: grofses Eigengewicht, grofse Trommelbreite, geringe Widerstandsfähigkeit gegen Stöfse, Hartwerden nicht erkennbar, Lärm.

Digitized by Google

B. Kalibrierte Ketten.

Formgebung. Wie bei der kurzgliedrigen Rundeisenkette, jedoch mit genau eingehaltener Teilung (erreichbar durch Stauchen bzw. Recken der einzelnen Glieder). Allgemein gültige Normen der Abmessungen bestehen noch nicht.

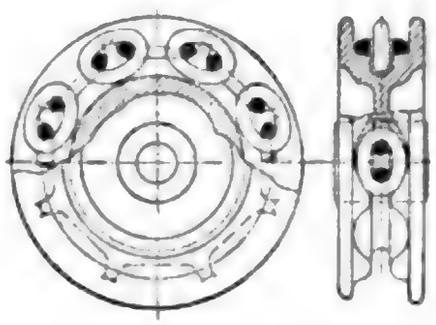
Belastung. Kleiner als bei Rundeisenketten, um schädliche Formänderungen und infolgedessen schlechten Eingriff in das Kettenrad zu vermeiden.

$k_z \leqq 400$ kg/qcm für wenig angestrengte Ketten
$\leqq 300$ „ „ häufiger benutzte „
$\leqq 200$ „ „ viel gebrauchte „
} nach C. v. Bach.

Für Kettengeschwindigkeiten über 0,1 m/sk sind kalibrierte Ketten überhaupt nicht brauchbar; daher nur für Hebemaschinen mit Handbetrieb verwendbar.

Kettenräder. Erlauben weitgehende Beschränkung des Lastarmes und Verwendung beliebig grofser Kettenlängen bei geringstem Raumbedarf. Als Haspelräder ermöglichen sie Antrieb mit Handkette ($d = 5$ bis 10 mm) aus beliebiger Entfernung mit dem Vorteile gleichbleibender Richtung des Kettenzuges. Zug eines Arbeiters an der Handkette $\leqq 30$ kg.

Abb. 176.



Verzahntes Kettenrad mit 8 Zähnen Abb. 176.

Ist l die Kettenteilung und z die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreishalbmesser

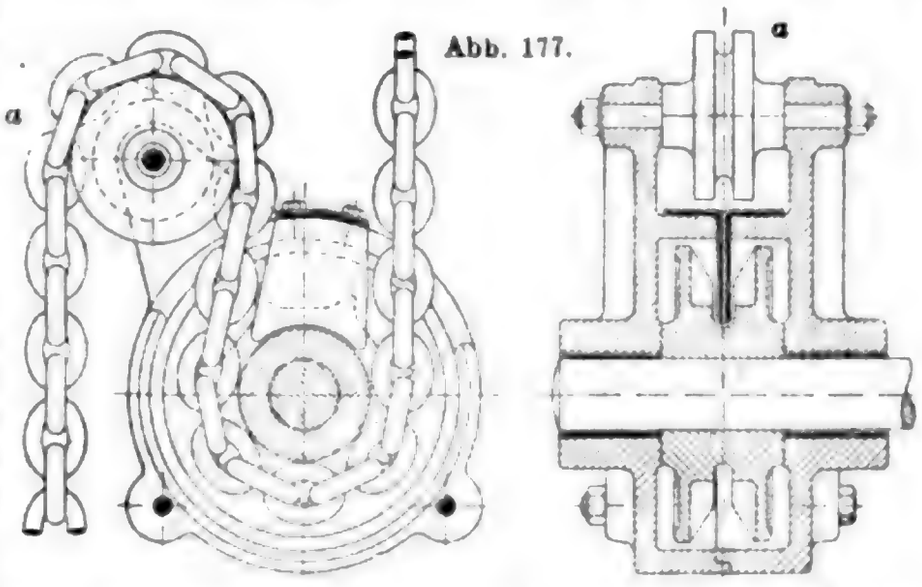
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{\sin\frac{90^0}{z}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos\frac{90^0}{z}}\right)^2}.$$

Für schwache Ketten und grofse Zähnezahlen (insbesondere für Haspelräder mit Handkette), und zwar schon für $d \leqq 1{,}6$ cm und $z \geqq 6$ darf ohne merkbaren Fehler gesetzt werden

$$R = \frac{l}{2\sin\frac{90^0}{z}}$$

(Tafel S. 846).

Abb. 177.



Das ablaufende(spannungslose) Kettenstück ist durch eine Leitrolle a (Abb. 177) oder einen Führungsbügel derart abzulenken, dafs die Kette die verzahnte Kettenrolle mindestens auf dem halben Umfang umschliefst; infolge der elastischen Dehnung klemmen sich die Kettenglieder leicht zwischen den Zähnen fest und müssen durch einen Abstreifer (Abb. 177) herausgedrängt werden.

Digitized by Google

Kalibrierte Ketten und Kettenräder der Weiter Elektrizitäts- und Hebezeug-Werke A. G., Cöln-Zollstock.

Kettenseisendicke d mm	Teilung l mm	Kettenräder Teilkreisdurchmesser $2r$ in mm (obere Zahl) Zähnezahl z (untere Zahl)														
4,5	16	62 7	108 10	153 15	173 17	257 25										
5	18,5	58 5	72 6	83 7	94 8	118 10	212 18	234 20	283 24	364 31	420 36					
6	18,5	72 6	83 7	94 8	107 9	118 10	130 11	142 12	187 16	200 17	212 18	234 20	260 22	284 26	331 28	353 30
6	20	76 6	166 13	178 14	204 16	254 20	280 22	357 28	484 38	548 43	636 50					
7	22,5	72 5	85 6	100 7	115 8	143 10	157 11	172 12	186 13	286 20	343 24	386 27	456 32	487 34	614 43	740 52
8	22,5	73 5	86 6	100 7	114 8	143 10	157 11	172 12	186 13	244 17	258 18	286 20	314 22	386 27	456 32	614 43
9	25	80 5	95 6	127 8	159 10	174 11	238 15	318 20	428 27	570 36						
9,5	31	100 5	120 6	140 7	160 8	198 10	196 11	238 12	318 16	338 17	360 18	388 20	411 21	436 22	534 27	592 30
11	30	97 5	114 6	134 7	153 8	192 10	214 11	223 12	264 14	286 15	382 20	401 21	422 22	456 24	575 30	680 36
13	36	115 5	137 6	161 7	184 8	207 9	230 10	253 11	275 12	299 13	322 14	344 15	458 20	480 21	500 22	552 24
14,5	42,5	162 6	214 8	268 10	320 12	374 14	404 15	850 32								
16	48	154 5	184 6	215 7	275 9	338 11	362 12	492 16	1101 36							
18	54	175 5	207 6	242 7	276 8	310 9	322 10	479 14								
20	62,5	200 5	240 6	280 7	320 8	360 9	800 20									
22	62,5	200 6	240 6	280 7	320 8	360 9	480 12	812 20								
25	72	236 5	277 6	322 7	368 8	414 9	565 12									
26	72	330 7														
28	72	366 8														
30	80	260 5	310 6	360 7	410 8											
30	91	170 3														
32	80	310 6	410 8													

d mm	l mm					
6	18,5	364 31	376 32	420 36	484 42	1001 85
7	22,5	850 60	944 66	1001 77		
8	22,5	740 52	850 60			
9,5	31	778 40				
11	30	1450 77				
13	36	714 32	836 37	1331 58		

Bemerkung. Die Teilung l der Kette ist die innere Baulänge der Glieder

Digitized by Google

Anwendungsgebiet. Zweckmäfsig für transportable Hebezeuge mit Handbetrieb, die klein und leicht sein müssen (Rollenzüge). Nicht brauchbar für elektrisch betriebene Hebemaschinen wegen der Empfindlichkeit der kalibrierten Ketten gegen Stöfse, die Formänderung der Glieder herbeiführen.

C. Gallsche Kette.

Formgebung. Bolzen aus Stahl mit gedrehten Zapfen, Laschen aus Stahl oder auch weichem, zähem Schweifseisen. Die Gallsche Gelenkkette von Zobel, Neubert & Co. (Abb. 178) gewährt mit ihren in der Tafel (s. unten) angegebenen Abmessungen und zulässigen Belastungen bei sorgfältiger Herstellung etwa fünffache Sicherheit gegen Zerreifsen.

Belastung, Zugbeanspruchung der Laschen:

$P = (b - d)\, s \,.\, i \,.\, k_z$,

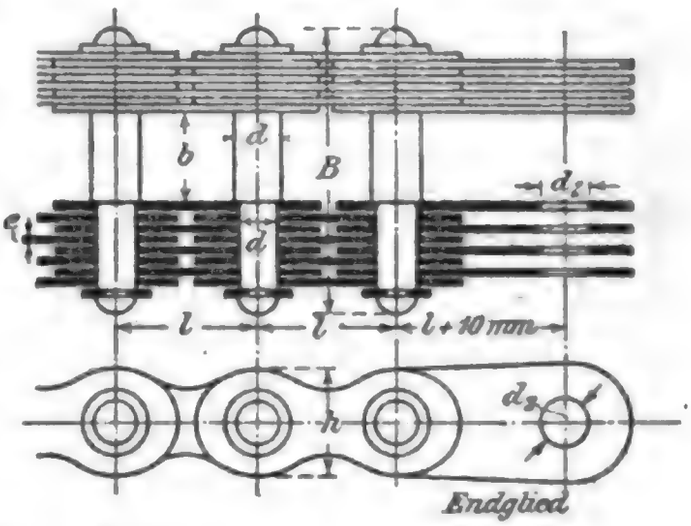
$k_z = 400$ bis 800 kg/qcm (steigend mit der Kettenstärke).

Pressung der Bolzenfläche:

$P = d \,.\, s \,.\, i \,.\, p$,

$p = 800$ bis 1100 at (steigend mit der Kettenstärke).

Abb. 178.



Gallsche Ketten von Zobel, Neubert & Co. in Schmalkalden (Thüringen).

P bedeutet die verbürgte zulässige Belastung in kg, *i* die Plattenzahl und *q* das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 178.

P kg	*l* mm	*i*	*s* mm	*h* mm	*d* mm	d_1 mm	*b* mm	*B* mm	d_2 mm	*q* kg/m	Bemerkungen
100	15	2	1,5	12	4	5	12	23	6	0,7	Ohne Unterlagscheiben vernietet.
250	20	2	2	15	6	7,5	15	28	9	1,0	
500	25	2	3	18	8	10	18	38	12	2,0	
750	30	4	2	20	9	11	20	45	13	2,7	
1000	35	4	2	27	10	12	22	50	15	3,8	
1500	40	4	2,5	30	12	14	25	60	18	5,0	
2000	45	4	3	35	14	17	30	67	21	7,1	Mit Unterlagscheiben vernietet.
3000	50	6	3	38	17,5	22	35	90	26	11,1	
4000	55	6	4	40	21	24	40	110	32	16,5	
5000	60	6	4	46	23	26	45	118	34	19,0	
6000	65	6	4	53	24	28	45	125	36	24,0	
7500	70	8	4,5	53	26	32	50	150	40	31,5	
10000	80	8	4,5	65	30	34	60	165	45	34,0	
12500	85	8	5	70	31	35	65	180	47	44,8	
15000	90	8	5,5	75	34	38	70	195	50	51,1	Verplintet.
17500	100	8	6	80	36	40	75	208	54	58,1	
20000	110	8	6	85	38	43	80	215	56	74,4	
25000	120	8	6,5	100	40	45	90	235	60	83,3	
30000	130	8	7	106	45	50	100	255	65	100,0	

Digitized by Google

Kettenräder. Die Kettenachsen (Abb. 180) aus geschmiedetem Stahl und Kettenräder (Abb. 179) aus Gufseisen oder Stahlgufs erhalten seitliche Ränder, auf die sich die Laschenköpfe auflegen. Kleinste Zähnezahl $z = 8$; das Kopfprofil der Zähne wird nach Abb. 179 u. 180

Abb. 179.

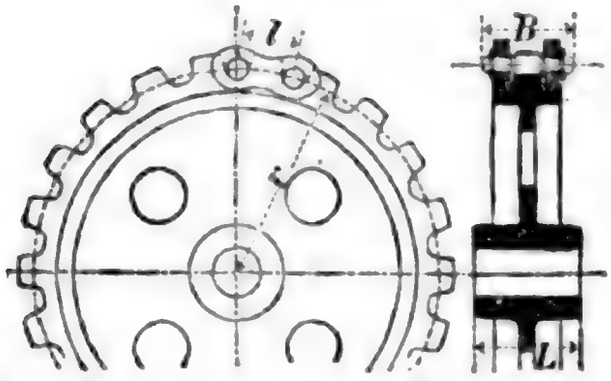
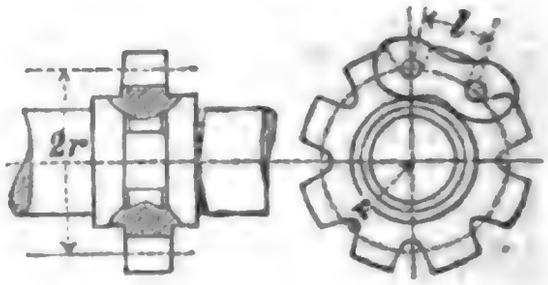


Abb. 180.



durch Kreisbogen gebildet, die um die benachbarte Zapfenlänge etwa $L = B + 0{,}14\,r$, wenn B die gröfste Breite der Kette (Abb. 178) und r der Teilkreishalbmesser (s. o.). Schutzhaube gegen Ausspringen der Kette unerläfslich. Ist l die Baulänge der Gelenkkette und z die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreishalbmesser

$$r = \frac{l}{2 \sin (180^0 : z)}.$$

Leitrollen erhalten keine Zähne, sondern glatte zylindrische Kränze, auf die sich die Bolzen auflegen.

Anwendungsgebiet. Der hohen Bolzenpressung wegen nur für geringe Geschwindigkeit $< 0{,}5$ m/sk verwendbar; die Rostempfindlichkeit läfst die Verwendung im Freien und die Staubempfindlichkeit die Benutzung in staubigen Räumen als unzweckmäfsig erscheinen; die Seitensteifigkeit schliefst die Anwendung bei raschfahrenden Laufkranen aus; das grofse Eigengewicht macht die Kette ungeeignet für grofsen Hub. Gallsche Kette vorteilhaft bei grofser Zugkraft, kleiner Geschwindigkeit und kleinem Hub. Gute Schmierung notwendig.

D. Drahtseile.

Formgebung. Drahtseile aus vielen dünnen Drähten biegsamer als Drahtseile aus wenigen dicken Drähten, aber empfindlicher gegen Rost und gegen Reibung. Drahtseile mit Hanfseelen in den Litzen ebenfalls biegsamer als ohne solche, jedoch empfindlich gegen Querdruck. Albert-Geflecht biegsamer als Kreuzgeflecht, aber beträchtliche Verdrehung bei Belastung und Entlastung, daher nur bei geführter Last verwendbar. Drallfreie Seile aus rechts und links gewundenen Litzen zusammengesetzt. Von den sehr verschiedenartigen Konstruktionen sind die gangbarsten:

Förderseile aus Rundlitzen. Trommeldurchmesser und Seilgeschwindigkeit grofs, daher grofser Drahtdurchmesser: meist zwischen

Digitized by Google

Drahtseile der Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke A. G. in Mühlheim am Rhein.

Förderseile aus Rundlitzen.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$ 12 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen zu je 6 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	9	0,27	3 400	3 980	4 550	5 100
	1,2	11	0,40	4 880	5 700	6 500	7 300
	1,4	13	0,53	6 650	7 750	8 860	9 970
	1,6	15	0,70	8 680	10 120	11 560	13 000
	1,8	17	0,88	10 970	12 800	14 630	16 450
	2,0	18	1,10	13 600	15 850	18 100	20 370
	2,2	20	1,30	16 400	19 150	21 880	24 620
	2,4	22	1,56	19 520	22 770	26 020	29 270
	2,6	24	1,85	22 930	26 750	30 570	34 400
	2,8	26	2,13	26 600	31 000	35 470	39 900
	3,0	28	2,44	30 540	35 630	40 720	45 800
6 Litzen zu je 7 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	10	0,33	3 980	4 650	5 300	5 960
	1,2	12	0,47	5 700	6 650	7 600	8 550
	1,4	14	0,64	7 760	9 050	10 350	11 630
	1,6	16	0,83	10 130	11 820	13 500	15 200
	1,8	18	1,05	12 800	14 930	17 060	19 200
	2,0	20	1,30	15 820	18 460	21 100	23 740
	2,2	22	1,56	19 150	22 340	25 530	28 720
	2,4	24	1,86	22 780	26 580	30 380	34 180
	2,6	26	2,20	26 760	31 220	35 680	40 140
	2,8	28	2,53	31 040	36 200	41 380	46 550
	3,0	30	2,90	35 620	41 560	47 500	53 450
6 Litzen zu je 12 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	13	0,55	6 820	7 960	9 100	10 230
	1,2	15	0,77	9 760	11 400	13 020	14 650
	1,4	18	1,05	13 300	15 500	17 720	19 940
	1,6	20	1,40	17 360	20 250	23 140	26 030
	1,8	23	1,75	21 940	25 600	29 240	32 900
	2,0	26	2,15	27 120	31 640	36 160	40 680
	2,2	28	2,60	32 830	38 300	43 770	49 240
	2,4	30	3,10	39 000	45 550	52 000	58 550
	2,6	32	3,65	45 870	53 520	61 170	68 820
	2,8	35	4,20	53 220	62 090	70 960	79 830
	3,0	38	4,85	61 080	71 260	81 440	91 620
6 Litzen zu je 14 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	14	0,65	7 960	9 280	10 600	11 920
	1,2	16	0,90	11 400	13 300	15 200	17 100
	1,4	19	1,25	15 520	18 100	20 700	23 300
	1,6	22	1,60	20 250	23 630	27 000	30 400
	1,8	25	2,05	25 600	29 860	34 120	38 380
	2,0	27	2,55	31 640	36 900	42 180	47 450
	2,2	30	3,10	38 280	44 660	51 050	57 420
	2,4	32	3,65	45 560	53 160	60 760	68 360
	2,6	35	4,25	53 520	62 440	71 360	80 280
	2,8	38	5,00	62 090	72 440	82 800	93 150
	3,0	41	5,65	71 260	83 150	95 000	106 900

Digitized by Google

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$ 12 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen zu je 16 Drähten, 7 Hanfseelen	1,0	15	0,72	9 100	10 600	12 120	13 630
	1,2	17	1,05	13 000	15 170	17 330	19 500
	1,4	20	1,40	17 730	20 680	23 630	26 580
	1,6	23	1,85	23 140	27 000	30 860	34 720
	1,8	26	2,30	29 250	34 130	39 000	43 900
	2,0	29	2,85	36 170	42 200	48 230	54 260
	2,2	32	3,45	43 780	51 070	58 370	65 670
	2,4	34	4,10	52 070	60 750	69 430	78 100
	2,6	37	4,85	61 170	71 370	81 570	91 770
	2,8	40	5,60	70 950	82 770	94 600	106 400
	3,0	43	6,45	81 440	95 000	108 560	122 120
6 Litzen zu je 18 Drähten	1,0	16	0,85	10 230	11 950	13 650	15 350
	1,2	19	1,22	14 640	17 080	19 520	21 960
	1,4	22	1,68	19 950	23 280	26 600	29 930
	1,6	26	2,18	26 040	30 390	34 730	39 070
	1,8	29	2,76	32 900	38 400	43 890	49 370
	2,0	32	3,40	40 700	47 470	54 250	61 030
	2,2	35	4,12	49 240	57 450	65 660	73 870
	2,4	38	4,90	58 580	68 350	78 100	87 860
	2,6	41	5,75	68 820	80 280	91 740	103 200
	2,8	44	6,66	79 820	93 120	106 420	119 720
	3,0	47	7,65	91 630	106 900	122 170	137 440
6 Litzen zu je 27 Drähten, 1 Hanfseele	1,0	19	1,20	15 360	17 920	20 480	23 040
	1,2	24	1,75	21 900	25 620	29 280	32 940
	1,4	27	2,40	29 940	34 930	39 920	44 910
	1,6	30	3,10	39 070	45 580	52 090	58 600
	1,8	34	3,90	49 380	57 610	65 840	74 070
	2,0	38	4,90	61 030	71 200	81 370	91 540
	2,2	42	5,85	73 870	86 180	98 490	110 800
	2,4	45	7,00	87 860	102 500	117 150	131 790
	2,6	49	8,20	103 220	120 420	137 630	154 830
	2,8	54	9,50	119 740	139 700	159 660	179 620
	3,0	56	11,00	137 430	160 340	183 240	206 150

Förderseile aus Dreikantlitzen.

Konstruktion	Zahl und Dicke der Runddrähte in jeder Litze: innere	äufsere	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für 18 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen mit je 3 Formdrähten, 1 Hanfseele	11 je 1,10	11 je 1,90	25	2,6	35 340	37 830	42 810	47 7
	11 „ 1,15	11 „ 2,05	26,5	2,95	40 550	43 400	49 100	54 8
	11 „ 1,25	11 „ 2,15	28,5	3,3	45 560	48 760	55 160	61 5
	9 „ 1,41	12 „ 2,14	30	3,7	48 300	51 750	58 590	65 4
	9 „ 1,41	12 „ 2,30	32	4,2	58 840	63 020	71 380	79 7
	12 „ 1,55	14 „ 2,12	34	4,7	62 670	66 980	75 600	84 2
	12 „ 1,70	14 „ 2,25	36	5,35	73 350	78 310	88 230	98 1
	12 „ 1,77	14 „ 2,40	38	6,0	81 750	87 320	98 450	109 5
	12 „ 1,84	14 „ 2,52	40	6,6	89 120	95 210	107 480	119 6
	12 „ 1,92	14 „ 2,65	42	7,25	98 540	105 250	118 670	132 0
	12 „ 2,00	14 „ 2,75	44	7,9	106 270	113 510	127 990	142 4
	12 „ 2,16	15 „ 2,70	46	8,4	115 490	123 270	138 840	153 4
	12 „ 2,25	15 „ 2,85	48	9,25	126 600	135 210	152 420	169 6
	12 „ 2,44	16 „ 2,80	50	10,3	137 450	146 710	165 230	183 7
	12 „ 2,50	16 „ 2,91	52	10,0	148 110	158 000	177 850	197 6
	13 „ 2,55	17 „ 2,90	54	12,2	164 700	175 500	197 100	226 7
	13 „ 2,80	18 „ 2,90	56	13,4	182 000	194 000	208 100	242 1
	13 „ 2,85	19 „ 2,90	58	14,5	191 530	204 000	229 000	254 0

Digitized by Google

Kranseile aus Rundlitzen.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für K = 12 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen mit je 59 Drähten, 1 Hanfseele	0,5	8	0,21	2 730	3 190	3 650	4 100
	0,6	9,5	0,31	3 830	4 470	5 100	5 750
	0,7	11	0,41	5 200	6 060	6 930	7 800
	0,8	12,5	0,54	6 840	7 980	9 120	10 260
	0,9	14	0,69	8 750	10 210	11 670	13 130
	1,0	16	0,85	10 800	12 600	14 400	16 200
	1,1	17	1,03	13 000	15 160	17 330	19 500
	1,2	19	1,22	15 450	18 030	20 600	23 200
	1,3	20	1,44	18 200	21 200	24 250	27 300
	1,4	22	1,68	21 060	24 570	28 080	31 600
	1,5	23	1,91	24 200	28 230	32 270	36 300
	1,6	26	2,18	27 500	32 070	36 650	41 250
6 Litzen mit je 37 Drähten, 1 Hanfseele	0,5	11	0,40	5 300	6 200	7 100	8 000
	0,6	13	0,60	7 460	8 700	9 950	11 200
	0,7	15	0,80	10 100	11 800	13 500	15 200
	0,8	17	1,10	13 300	15 600	17 800	20 000
	0,9	20	1,35	17 000	19 900	22 700	25 600
	1,0	22	1,65	21 000	24 500	28 000	31 500
	1,1	24	2,00	25 300	29 500	33 700	37 900
	1,2	26	2,40	30 100	35 100	40 100	45 200
	1,3	28	2,80	35 400	41 300	47 200	53 100
	1,4	30	3,25	41 000	47 800	54 700	61 500
	1,5	32	3,75	47 100	55 000	62 900	70 700
	1,6	35	4,25	53 500	62 500	71 400	80 300

Drallfreie Kranseile aus doppelten Flachlitzen.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für blanke Drähte	verzinkte Drähte
10 Litzen zu je 8 Drähten, 1 Hanfseele	0,7	9	0,29	3 900	3 300
	0,8	10	0,39	5 200	4 550
	0,9	11	0,40	6 600	5 900
	1,0	12	0,62	8 300	7 300
	1,1	13	0,80	9 900	8 300
	1,2	15	1,00	11 700	9 900
	1,3	17	1,10	13 800	11 700
	1,4	18	1,25	16 000	13 800
	1,5	20	1,45	18 400	16 000
	1,6	21	1,65	20 900	18 400
	1,7	22	1,85	23 600	20 900
	1,8	24	2,05	26 400	23 600
	1,9	25	2,25	29 300	26 400
	2,0	26	2,60	32 600	29 300
10 Litzen zu je 10 Drähten, 1 Hanfseele	0,7	10	0,39	4 900	4 200
	0,8	12	0,50	6 500	5 700
	0,9	13	0,65	8 300	7 400
	1,0	14	0,80	10 300	9 200
	1,1	15	1,00	12 400	10 300
	1,2	17	1,20	14 700	12 400
	1,3	19	1,35	17 300	14 700
	1,4	20	1,55	20 000	17 300
	1,5	22	1,80	23 000	20 000
	1,6	23	2,00	26 100	23 000
	1,7	25	2,30	29 500	26 100
	1,8	27	2,55	33 000	29 500
	1,9	28	2,90	36 800	33 000
	2,0	30	3,25	40 800	36 800

Verschlossene grobdrähtige Tragseile.

Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für K = 5500 bis 6000	9000 bis 10 000	12 000
20	2,45	16 430	27 150	34 300
21	2,65	17 630	29 120	36 780
22	2,70	18 800	31 050	39 230
23	3,00	20 790	34 340	43 380
24	3,30	23 160	28 260	48 330
25	3,60	24 950	41 230	52 080
26	3,80	25 430	42 180	53 280
27	4,10	28 000	46 260	58 450
28	4,60	31 600	52 250	66 000
29	5,00	32 300	53 360	67 400
30	5,20	36 000	59 470	75 100
31	5,50	37 860	60 600	70 000
32	5,70	39 730	65 640	82 920
33	6,00	41 340	68 300	86 280
34	6,50	46 300	76 500	96 600
35	6,70	50 000	82 650	104 400
36	7,10	51 600	85 400	107 880
37	7,70	52 840	87 300	110 300
38	7,90	56 240	92 500	117 360
39	8,40	60 120	99 360	125 500
40	8,70	61 630	101 820	128 610
41	9,30	63 140	104 310	131 760
42	9,70	68 070	112 460	142 050
43	10,70	71 250	117 900	147 000
44	11,00	73 970	122 220	154 380
45	11,70	78 200	129 200	163 200

Drahtseile von G. Atmer in Hamburg.

Kranseile (unverzinkt).

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für K = 13 500 bis 14 000	Kleinster Rollendurchmesser mm	Rechnerische Bruchlast in kg für K = 17 000 bis 18 000	Kleinster Rollendurchmesser mm
6 Litzen zu je 19 Drähten, 1 Hanfseele	0,55	8	0,25	3 700	130	5 000	200
	0,65	10	0,35	5 700	150	7 300	225
	0,8	12	0,5	8 000	180	10 300	250
	0,95	14	0,7	10 500	225	13 500	300
	1,05	16	0,95	14 000	275	18 000	350
	1,2	18	1,25	17 500	325	22 500	400
	1,35	20	1,5	21 500	375	27 000	500
	1,45	22	1,8	26 500	450	34 000	600
	1,6	24	2,15	31 500	550	40 500	725
6 Litzen zu je 31 Drähten, 1 Hanfseele	0,8/0,5	14	0,7	10 500	200	13 500	250
	0,9/0,6	16	0,95	14 000	225	18 000	275
	1,0/0,65	18	1,25	17 500	275	22 500	325
	1,1/0,7	20	1,5	21 500	325	27 000	400
	1,2/0,8	22	1,8	26 500	375	34 000	475
	1,35/0,9	24	2,15	31 500	450	40 500	575
	1,45/1,0	26	2,6	37 000	525	47 500	675
	1,55/1,05	28	2,9	43 500	600	55 500	775
	1,65/1,1	30	3,4	50 000	700	63 500	900
	1,8/1,2	32	3,8	57 000	800	72 500	1000

Digitized by Google

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13\,500$ bis 14 000	Kleinster Rollendurchmesser mm	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17\,000$ bis 18 000	Kleinster Rollendurchmesser mm
6 Litzen zu je 37 Drähten, 1 Hanfseele	0,85	18	1,25	17 500	250	22 500	275
	0,95	20	1,5	21 500	275	27 000	325
	1,05	22	1,8	26 500	325	34 000	375
	1,13	24	2,15	31 500	375	40 500	450
	1,25	26	2,6	37 000	425	47 500	500
	1,35	28	2,9	43 500	475	55 500	575
	1,45	30	3,4	50 000	550	63 500	650
	1,55	32	3,8	57 000	625	72 500	700
	1,65	34	4,4	63 500	700	81 000	775
	1,75	36	4,8	71 500	775	91 000	875
	1,85	38	5,4	80 000	875	102 000	950
	1,95	40	6,0	88 500	950	113 000	1050
6 Litzen zu je 61 Drähten, 1 Hanfseele	0,85	22	1,8	26 500	275	34 000	350
	0,9	24	2,15	31 500	300	40 500	375
	1,0	26	2,6	37 000	340	47 500	425
	1,05	28	2,9	43 500	375	55 500	475
	1,15	30	3,4	50 000	425	63 500	550
	1,2	32	3,8	57 000	475	72 500	600
	1,3	34	4,4	63 500	550	81 000	675
	1,35	36	4,8	71 500	600	91 000	750
	1,45	38	5,4	80 000	675	102 000	825
	1,5	40	6,0	88 500	750	113 000	900
	1,65	44	7,5	107 000	950	135 500	1050
	1,8	48	9,0	127 500	1100	162 000	1250
	1,95	52	10,5	150 000	1300	191 000	1450
	2,1	56	12,0	174 000	1500	221 500	1650
	2,25	60	14,0	200 000	1700	254 500	1900

Drallfreie Kranseile (unverzinkt).

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13\,500$ bis 14 000	Kleinster Rollendurchmesser mm	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17\,000$ bis 18 000	Kleinster Rollendurchmesser mm
18 Litzen zu je 7 Drähten, 1 Hanfseele	0,75	12	0,55	6 500	150	7 500	200
	0,9	14	0,8	9 500	200	12 000	275
	1,0	16	1,0	11 750	250	15 000	325
	1,1	18	1,25	14 000	300	18 000	400
	1,25	20	1,6	18 000	350	23 000	475
	1,35	22	1,85	21 000	425	27 500	575
18 Litzen zu je 12 Drähten, 1 Hanfseele	0,7	14	0,8	10 000	200	13 000	275
	0,8	16	1,0	13 500	225	17 500	300
	0,9	18	1,25	17 500	250	21 000	350
	1,0	20	1,6	21 000	300	27 500	400
	1,1	22	1,85	25 750	350	33 500	475
	1,2	24	2,25	31 500	425	39 750	575
	1,3	26	2,65	36 000	500	46 000	675
	1,4	28	3,2	42 000	600	54 000	800
18 Litzen zu je 19 Drähten, 1 Hanfseele	0,75	18	1,25	20 250	225	26 500	300
	0,8	20	1,6	23 000	275	30 000	375
	0,9	22	1,85	29 250	300	38 000	400
	0,95	24	2,25	32 750	325	42 500	425
	1,0	26	2,65	36 000	400	47 000	525
	1,1	28	3,2	43 750	425	56 750	575
	1,2	30	3,75	52 000	500	65 000	675
	1,3	32	4,2	60 000	600	76 500	800

2 und 3 mm. Womöglich Trommeldurchmesser $\geq 1000 \times$ Drahtdurchmesser und ≥ 100 Seildurchmesser.

Förderseile aus Dreikantlitzen. Seelen der Litzen nicht aus Hanf, sondern aus 3 Formdrähten, die zusammen ein Dreieck bilden. Gedrängte Konstruktion, daher kleiner Seildurchmesser und gute Auflagefläche des Seiles auf Trommelrille und der Litzen gegeneinander.

Kranseile aus Rundlitzen. Trommeldurchmesser und Seilgeschwindigkeit klein, daher kleiner Durchmesser: zwischen 1 und 2 mm. Womöglich Trommeldurchmesser $\geq 500 \times$ Drahtdurchmesser. Seile aus verzinkten Drähten sind widerstandsfähig gegen Rost, haben aber nur 0,9 der Tragfähigkeit von gleich dicken Seilen aus unverzinkten Drähten.

Kranseile aus doppelten Flachlitzen. Seelen der Litzen nicht aus Hanf, sondern aus Ovaldraht. Gute Auflagefläche des Seiles auf der Trommelrille. Drallfreiheit. Womöglich Trommeldurchmesser $\geq 500 \times$ Drahtdurchmesser.

Verschlossene Seile. Aus Formdrähten so hergestellt, dafs glatte, dichte Aufsenfläche entsteht; widerstandsfähig gegen Rost und Abnutzung, aber wenig biegsam. Nur für Tragseile von Hängebahnen und für Führungseile von Förderschächten.

Belastung. Verwendet wird Tiegelstahldraht mit Bruchfestigkeiten von $k_z = 12\,000$ bis $18\,000$ kg/qcm. Die wirkliche Bruchlast — auf der Prüfungsmaschine ermittelt — ist bis $10\,\%$ kleiner als die in den Tafeln angegebene rechnerische Bruchlast — aus der Bruchfestigkeit der Drähte ermittelt —.

Gesamtbeanspruchung $k = k_z + k_b$,

wobei Zugbeanspruchung $k_z = \dfrac{S}{{}^1/_4\, i\, \delta^2\, \pi}$

und Biegungsbeanspruchung $k_b = c \cdot E \cdot \dfrac{\delta}{D}$.

$E = 2\,150\,000$ für Stahldraht; $c = {}^3/_8$ nach C. v. Bach mit Rücksicht darauf, dafs die Biegungsbeanspruchung bei Beginn der Krümmung nicht plötzlich auftreten kann. Isaachsen (Z. d. V. d. I. 1907 S. 652) empfiehlt $c = {}^1/_2$ für Seile, die stets nach der gleichen Richtung gebogen werden und sich nicht um ihre Längsachse drehen können; $c = 1$ für Seile, die nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. S = statische Belastung + Massenwiderstand.

$$k = \frac{12\,000}{10} \text{ bzw. } \frac{18\,000}{10} \text{ bei Menschenförderung,}$$

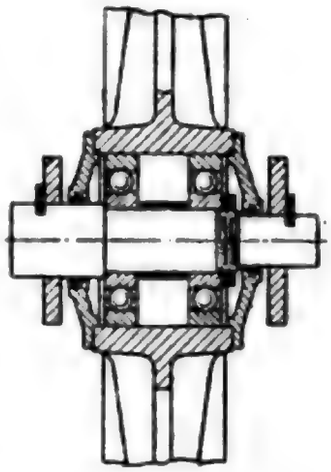
$$= \frac{12\,000}{c} \text{ bzw. } \frac{18\,000}{c} \text{ bei Lastenförderung.}$$

Digitized by Google

Seilrollen. Näheres über ihren Durchmesser S. 854. Die Seilrollen erhalten eine Rille, die nach Abb. 181 auf eine Tiefe gleich dem 2,5- bis 3fachen des Seildurchmessers so eingedreht wird, dafs das Seil mit möglichst geringem Spielraum, aber ohne jede Klemmung gebettet wird; keine Ausfütterung. Auslegerrollen erfordern einen weiteren Rillenquerschnitt, um das pendelnde Seil vor Durchscheuern an den Flanschenrändern zu schützen. Meist sind Schutzbügel, die das Ausspringen des Seiles aus der Rille verhindern, notwendig, und diese gestatten dann flachere Rillen. Seilrolle mit Kugellagern nach Abb. 182.

Abb. 181.

Abb. 182.



Seiltrommeln. Schraubenförmig eingedrehte Rille von kreisbogenförmigem Profil; Rillenbreite etwa 2 mm gröfser als die Seildicke. Seilablenkung aus der Mittellage möglichst $\leq 1:50$, d. h. die Achsenentfernung der Trommeln und Rollen betrage mindestens das 25- bis 30fache der Trommellänge; erforderlichenfalls ist eine besondere, selbsttätig oder zwangläufig achsial verschiebbare Zuführungsrolle anzuordnen.

Seilbefestigung so, dafs das durch allmähliches Zusammenpressen der Hanfseele dünner werdende Seil sich nicht durchziehen kann und dafs das Seil leicht ausgewechselt werden kann. Zweckmäfsig entweder

Abb. 183.

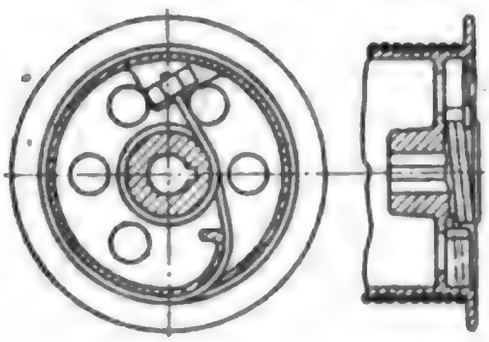
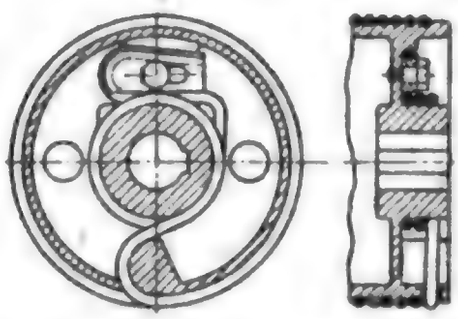


Abb. 184.



Reibungsbefestigung — mehrfache Umschlingung der Trommelnabe (Abb. 183). oder Keilbefestigung, die sich durch den Seilzug festzieht (Abb. 184).

Anwendungsgebiet. Ketten nahezu überall durch Drahtseile verdrängt wegen der Betriebsicherheit, des geringen Eigengewichts, des geringen Raumbedarfs der Drahtseile auf der Trommel, wegen der Geräuschlosigkeit und Dauerhaftigkeit der Drahtseile. Nur bei Rollenzügen noch kalibrierte Ketten und nur bei kurzem Hub und grofser Zugkraft Gallsche Ketten.

Digitized by Google

E. Hanfseile.

Hanfseile von Felten & Guilleaume in Cöln a. Rh.

Seildicke mm	Seilgewicht kg	Tragkraft in kg bei achtfacher Sicherheit		
		Russischer Reinhanf	Reiner Schleifshanf	Badischer Schleifshanf
13	0,14	130	145	165
16	0.21	200	230	251
18	0.25	254	290	330
20	0.31	314	350	393
23	0,39	416	470	519
26	0.51	531	600	663
29	0.67	660	740	825
33	0.80	855	960	1 067
36	0.96	1 017	1 145	1 271
39	1,15	1 194	1 340	1 492
46	1,50	1 661	1 870	2 055
52	1.95	2 122	2 390	2 599
55	2.25	2 226	2 493	2 783
60	2.55	2 473	2 755	3 180
65	2,90	2 694	2 984	3 563
70	3,50	2 885	3 221	3 846
75	3,90	3 100	3 587	4 101
80	4,50	3 328	4 020	4 460
85	5.00	3 757	4 395	4 890
90	5.60	4 133	4 848	5 404
95	6.30	4 665	5 400	5 932
100	7.20	5 163	5 887	6 476
110	8.50	6 050	6 886	7 598
120	9,60	7 200	8 051	8 890
130	11,50	8 300	9 286	10 103
140	13.60	9 610	10 577	11 535
150	15,30	10 810	11 700	12 805

Anwendungsgebiet. Für kleine Aufzüge und als Handseile nur noch selten gebraucht. Dagegen viel verwendet als Schlingseile zum Anhängen von Lasten an den Lasthaken.

F. Lasthaken.

Formgebung. Einfache Haken mit weiter Oeffnung nach Abb. 185 für geringe Hubgeschwindigkeit bis zu 0,25 m/sk. Einfache Haken mit enger Oeffnung zum Schutz gegen Ausspringen nach Abb. 186 für gröfsere Hubgeschwindigkeit. Doppelhaken nach Abb. 187 für Giefserei- und Werkstattkrane. Oesen einteilig nach Abb. 188 für Lasten unter 25 t, dreiteilig nach Abb. 189 für Lasten über 25 t.

Befestigung. Drehbarkeit um lotrechte Achse stets zweckmäfsig, und zwar mittels Kugellager (Abb. 190). Ein in der Büchse liegender Kupferring verhindert das Herausspringen des Laufringes aus der Büchse; unter der Schaftmutter liegt ein Schutzblech. Zwischen Belastungsgewicht und Haken zweckmäfsig eine Rundeisenkette von 0,5 bis 1 m Länge (Abb. 191), damit der Haken leicht zur Seite gezogen werden kann. Zwischen Losrolle und Haken zweckmäfsig ein Doppel-

Digitized by Google

gelenk oder kugelige Aufhängung (Abb. 192), damit Biegungsbeanspruchung im Hakenschaft vermieden wird. Einschaltung von

Abb. 185.

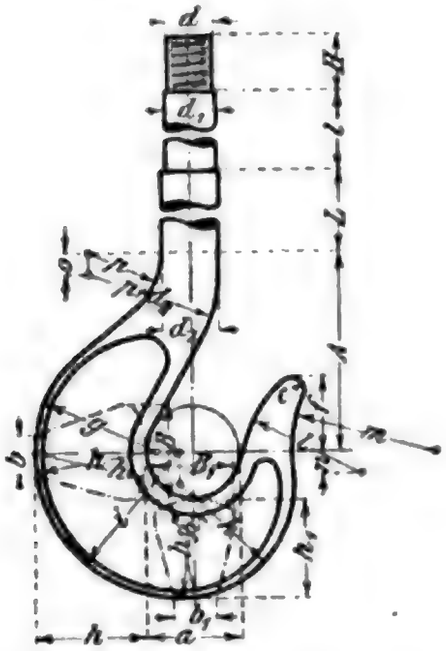
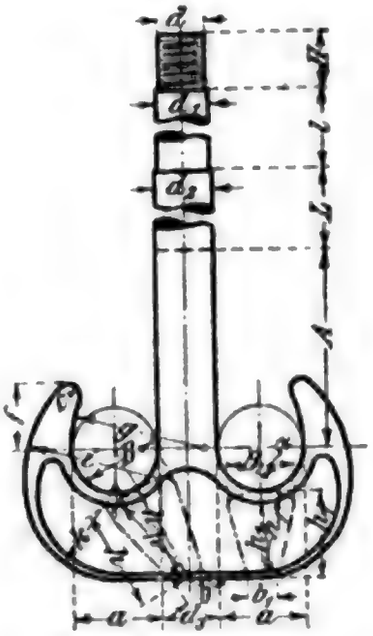


Abb. 186.

Abb .187.



Federn ist bei Ketten sehr ratsam, weil diese wenig elastisch sind; bei Drahtseilen ganz überflüssig, weil diese selbst elastisch.

Belastung. Unter der Voraussetzung einer solchen Hakenform, dafs der Krümmungshalbmesser der krummen Hakenmittellinie daselbst

Abb. 188.

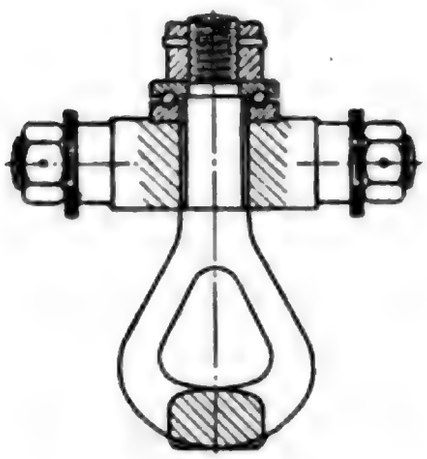


Abb. 189.

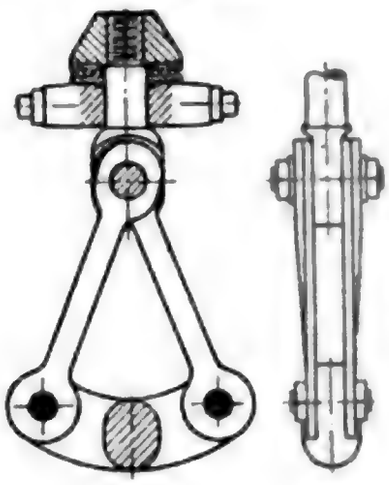
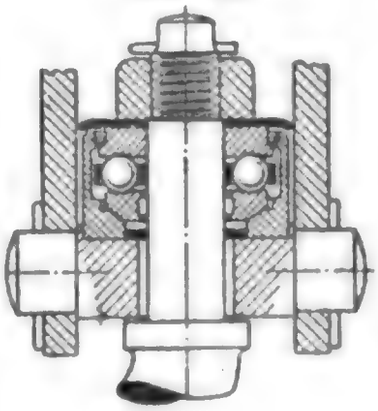


Abb. 190.



$r = a + e_1$ gesetzt werden kann, ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt AB die Tragkraft des Hakens (in kg) aus der Formel für σ auf S. 589:

$$P = k_z \cdot \frac{a}{e_1} k \, . \, F.$$

Hierin bedeutet

F den Hakenquerschnitt AB in qcm,
k die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
a den Maulhalbmesser in cm,
e_1 den Abstand des Querschnittschwerpunktes von C,
z den auf S. 590 angegebenen Wert.

Die Berechnung des Hakens als geraden Stabes ergibt etwa um 40 bis 50 % zu geringe Beanspruchungen.

Abb. 191.

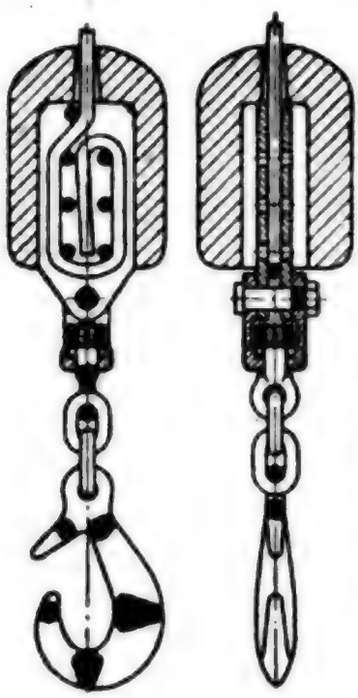
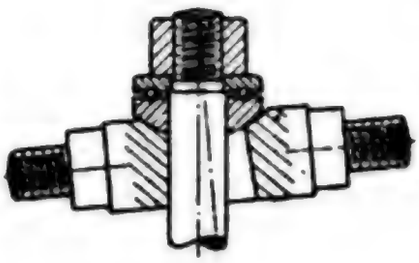


Abb. 192.



Stoff: zähes Schweifseisen; $k_z = 900$ bis 1200 kg/qcm, je nach der Güte des Stoffes.

Zulässige Zugbeanspruchung im Gewindekern: $k_z = 500$ bis 600 kg/qcm.

Zulässige Flächenpressung der Querstückzapfen: $p =$ 100 at. Doppelhaken werden unter Annahme der halben Last für jede Hakenhälfte und einer Kraftrichtung berechnet, die zur Lotrechten um $\alpha = 45^0$ geneigt ist.

Einteilige Oese kann als beiderseitig eingespannter Balken berechnet werden:

$$^1/_8 P \,.\, l = W \,.\, k_b \; (l = \text{Stützweite}),$$

wobei für elliptischen Querschnitt von der Höhe h und Breite b

$$W \sim 0.1\, b \,.\, h^2.$$

Dreiteilige Oese ist als frei aufliegender Balken zu berechnen:

$$^1/_4 P \,.\, l = W \,.\, k_b \; (l = \text{Stützweite}).$$

Haken der Deutschen Maschinenfabrik A. G. in Duisburg.

Einfache Haken. (Abb. 185 S. 857.)

Tragkraft in t	Maulweite	Querschnitte						Höhe	Gewinde		Schaft	
	a	b	B	h	b_1	B_1	h_1	A	d	H	d_1	d_2
1	70	15	40	45	20	35	38	120	25,4	30	28	32
2	75	20	50	60	25	45	50	140	31,75	38	35	40
3	80	25	60	70	30	50	60	160	34,92	42	38	43
4	85	30	70	80	35	55	70	170	41,27	50	45	50
5	90	30	78	90	35	60	75	180	44,15	55	48	53
7,5	110	40	95	110	45	75	95	220	57,15	70	60	65
10,0	120	45	110	130	50	90	110	240	63,50	75	67	72
12,5	130	50	125	145	55	105	125	260	63,50	75	67	72
15	140	50	135	160	60	110	140	280	69,85	80	73	78
17,5	160	55	145	170	65	120	150	320	82,55	95	86	95
20	160	55	145	170	65	120	150	320	82,55	95	86	95
25	180	65	160	190	75	135	165	360	95,25	110	98	105
30	200	70	170	205	80	145	180	400	101,60	115	105	115
40	220	70	200	230	85	170	205	440	114,30	130	120	130
50	250	80	220	255	100	100	225	500	127,0	145	130	140

Digitized by Google

Doppelhaken. (Abb. 187 S. 857.)

Tragkraft in t	Maulweite	Querschnitte						Höhe	Gewinde		Schaft		
	a	b	B	h	b_1	B_1	h_1	A	d	H	d_1	d_2	d_3
5	80	25	60	89	25	55	70	180	44,45	55	48	53	53
7,5	95	30	70	103	30	65	80	220	57,15	70	60	65	65
10	110	35	90	115	35	80	90	240	63,50	75	67	72	72
12,5	120	40	90	131	40	80	105	260	63,50	75	67	72	72
15	130	40	100	143	40	95	115	280	69,85	80	73	78	78
17,5	150	45	110	158	45	100	120	320	82,55	95	86	95	105
20	150	45	110	158	45	105	120	320	82,55	95	86	95	105
25	160	50	130	180	50	115	140	360	95,25	110	98	105	115
30	180	55	140	194	55	125	150	400	101,6	115	105	115	125
40	200	55	150	218	55	135	170	440	114,3	130	120	130	140
50	220	65	170	244	65	150	190	500	127,0	145	130	140	155

G. Bremsen.

Zylindrische Klotzbremse. Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels in der Tangente an die Bremsscheibe (Abb. 193), so ist zum Stillhalten der sinkenden Last ein Gewicht

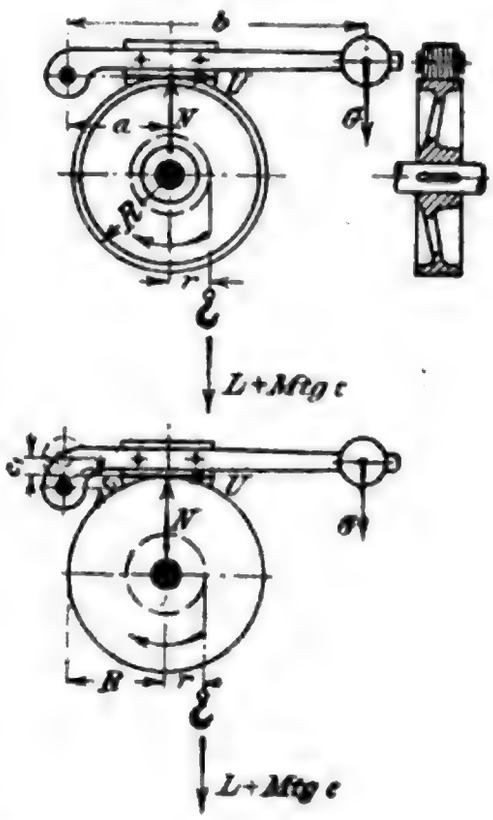
$$G = \frac{Na \pm N\mu \cdot 0}{b}$$

erforderlich, wobei

$$N\mu R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, r$$

ist. Dabei bedeutet M die gesamten sinkenden und drehenden Massen, reduziert auf den Trommelumfang und $\operatorname{tg} \varepsilon$ die Verzögerung, die den Wert 1 bis 1,5 erreichen kann.

Abb. 193.



Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels um den Betrag c innerhalb der Tangente und wirkt die Last rechtsdrehend, so wird

$$G = \frac{Na - N\mu c}{b},$$

während bei linksdrehender Last

$$G = \frac{Na + N\mu c}{b}$$

wird. Liegt dagegen der Drehpunkt des Klotzhebels um den Betrag c aufserhalb der Tangente, so wird bei rechtsdrehender Last

$$G = \frac{Na + N\mu c}{b}$$

und bei linksdrehender Last $G = \frac{Na - N\mu c}{b}$. Mufs die Bremse in beiden Drehrichtungen gleich stark wirken, dann mufs der Drehpunkt in der Tangente liegen. Die Anordnung mit aufserhalb liegendem Drehpunkt vergröfsert das erforderliche Bremsgewicht G, ver-

Digitized by Google

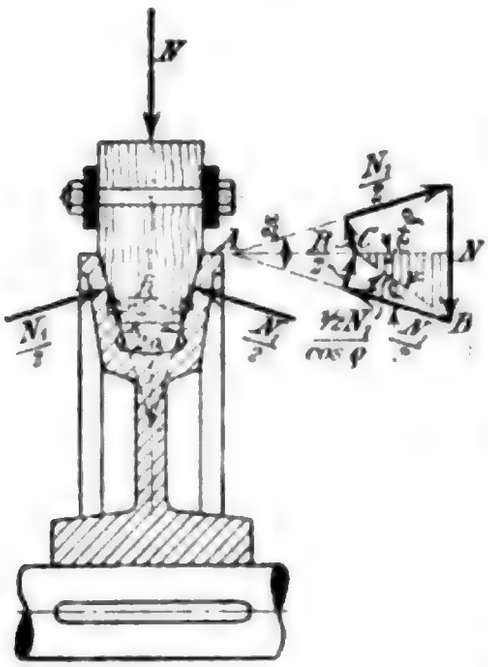
meidet aber eine Hebelkröpfung; die Anordnung mit innerhalb liegendem Drehpunkt verkleinert zwar G, ist aber weniger bequem ausführbar.

Keil mit Klotzbremse. Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels in der Tangente an den mittleren Durchmesser der Bremsscheibe (Abb. 194), so wird auch hier das erforderliche Bremsgewicht

$$G = \frac{N a}{b},$$

wobei $$N = N_1 \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}.$$

Abb. 194.



Die Keilnut wirkt wie eine Vergrößerung des Reibungswertes μ auf μ_1 im Verhältnis von N zu N_1:

$$\mu_1 = \mu \frac{N_1}{N} = \mu \frac{\cos \varrho}{\sin(\alpha + \varrho)}.$$

Für $2\alpha = 45^0$ und für $\mu = 0{,}125$ wird $\mu_1 = 2\mu$.

Ein spitzerer Winkel als $2\alpha = 45^0$ ist nicht zulässig, weil der Klotz sich sonst in der Nut festklemmt.

Bandbremse. Für die Bezeichnungen der Abb. 195 wird

$$t = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu \omega} - 1}.$$

$$\frac{T}{t} = e^{\mu \omega},$$

$$(T - t) R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) r, \quad G = t \frac{a}{b} = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu \omega} - 1}$$

Abb. 195.

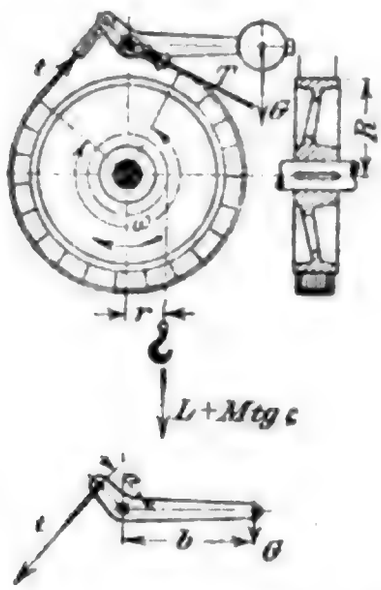
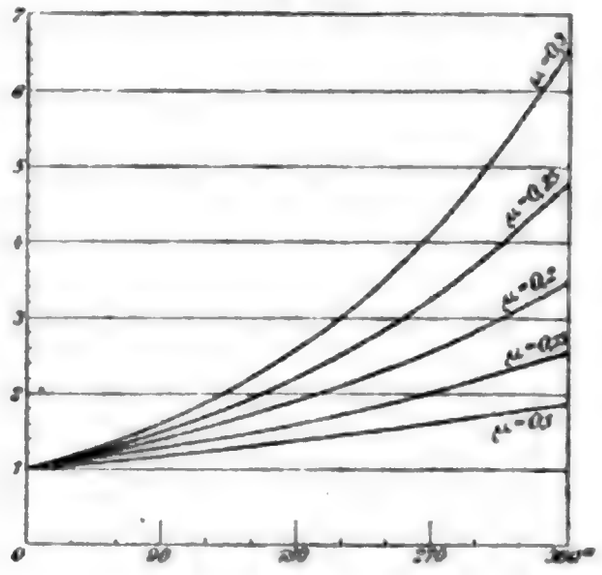


Abb. 196.



Die Werte von $e^{\mu \omega}$ für holzgefüttertes ($\mu = 0{,}3$) und für nacktes ($\mu = 0{,}15$) Bremsband sind aus Abb. 196 ersichtlich. Bei ersterem meist $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{4}$ und demgemäfs $e^{\mu \omega} = 4$; nacktes Bremsband nur bei

Digitized by Google

mehrfacher Umschlingung zweckmäfsig. Der Wert für G gilt nur für den eingezeichneten Drehsinn der Last; für den umgekehrten Drehsinn wird G sehr viel gröfser.

Vergleich der drei Bremsen. Die Hebelübersetzung $\frac{b}{a}$ kann bei den Klotzhebeln nicht über $\frac{5}{1}$, bei der Bandbremse dagegen bis $\frac{10}{1}$ ausgeführt werden. Für Holzfutter in allen drei Fällen ($\mu = 0{,}3$) wird bei Lage des Drehpunktes in der Tangente und bei $^3/_4$ Umschlingung ($e^{\mu\omega} = 4$) für die zylindrische Klotzbremse

$$G = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{0{,}3} \cdot \frac{1}{5} = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot 0{,}7,$$

Keilnut-Klotzbremse

$$G = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{0{,}3 \,.\, 2} \cdot \frac{1}{5} = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot 0{,}3,$$

Bandbremse

$$G = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot 0{,}03.$$

Erforderlicher Hub senkrecht zur Bremsfläche mindestens 1 mm; mithin Hub h, am Bremsgewicht gemessen, für die zylindrische Klotzbremse

$$h = 1 \text{ mm} \cdot \frac{b}{a},$$

Keilnut-Klotzbremse $\quad h = 1 \text{ mm} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{b}{a},$

Bandbremse $\quad h = 1 \text{ mm} \,.\, \pi \frac{b}{a}.$

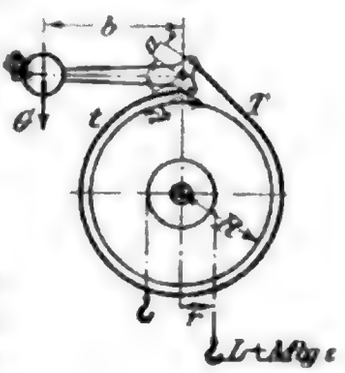
Für $2\alpha = 45^0$ und für $\frac{b}{a} = 5$ bei den Klotzbremsen und 10 bei der Bandbremse wird für die zylindrische Klotzbremse

$h = 5$ mm,

Keilnut-Klotzbremse $\quad h = 13$ mm,

Bandbremse $\quad h = 31$ mm.

Abb. 197.



Bandbremse für wechselnde Drehrichtung. Die Anordnung mufs so getroffen werden, dafs beide Bandenden durch das Bremsgewicht gespannt werden (Abb. 197). Für diesen Fall wird zunächst wie bei der einfachen Bandbremse

$$\frac{T}{t} = e^{\mu\omega}, \qquad (T - t)\, R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, r,$$

$$t = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu\omega} - 1}.$$

Das Bremsgewicht wird hier

$$G = \frac{1}{b}(T \cdot a + t \cdot a) = \frac{a}{b}(t e^{\mu\omega} + t)$$

$$= \frac{a}{b}(L + M \operatorname{tg} \varepsilon)\, \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\omega} + 1}{e^{\mu\omega} - 1}.$$

Digitized by Google

Für Holzfutter ($\mu = 0{,}3$), für $^3/_4$ Umschlingung ($e^{\mu\alpha} = 4$) und für $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$ wird $G = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot 0{,}17$.

Das Bremsgewicht mufs also hier nahezu 6 mal so grofs werden als bei der einfachen Bandbremse (0,17 gegen 0,03).

Scheibenbremse. Kommt meist nur mit mehrfachen Reibflächen als sogenannte Lamellenbremse vor. Bezeichnet man mit i die Zahl der Reibflächen, mit R ihren mittleren Halbmesser, mit r den Trommelhalbmesser und mit N den Anpressungsdruck, so mufs letzterer auf

$$N = \frac{(L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \cdot r}{i \cdot \mu \cdot R}$$

gebracht werden. Meist Metallflächen in Oelbad mit $\mu = 0{,}05$.

Kegelbremse. Bezeichnet man den Kegelwinkel mit 2α und den Achsialdruck mit N, so entsteht das gleiche Kräftepolygon wie in Abb. 194, und es mufs $N = N_1 \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}$ werden, wobei $N_1 \cdot \mu \cdot R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \cdot r$.

Ein spitzerer Winkel als $2\alpha = 45^0$ ist nicht ratsam, weil sonst Festklemmen zu befürchten.

Belastung. Die Erwärmung darf nicht über ein gewisses Mafs steigen, weil sonst Verbrennen der Holzklötze bzw. Zersetzen des Oels zu befürchten. Die Erwärmung wird hervorgerufen durch die

Reibungsleistung auf 1 qcm der Reibfläche $= p \cdot v \cdot \mu$, wobei

Flächenpressung in at: $p = \frac{N}{f}$; Gleitgeschwindigkeit: $v = \frac{2 R \pi n}{60}$.

Dabei ist N = Normaldruck auf die Reibfläche in kg, f = Reibfläche in qcm ($= 2 R \pi b \frac{3}{4}$ bei Band mit $^3/_4$ Umschlingung und $= 2 l \cdot b$ bei zwei Klötzen von l cm Länge und b cm Breite). n = Umlaufzahl.

$p \cdot v \leqq 20$ bei kurzzeitigem Betrieb (Stoppbremsen) und schlechter Wärmeabführung (Holzklötze),

$\leqq 10$ bei anhaltendem Betrieb (Senkbremsen) und schlechter Wärmeabführung (Holzklötze),

$\leqq 30$ bei anhaltendem Betrieb (Senkbremsen) und guter Wärmeabführung (Oelbad).

Anwendungsgebiet. Wird die Bremse nur in einer Drehrichtung beansprucht, dann ist die Bandbremse besonders vorteilhaft wegen ihrer grofsen Reibfläche und ihrer starken Uebersetzung. Mufs die Bremse in beiden Drehrichtungen wirken (Fördermaschinen, Fahrwerke), dann wird die Doppelklotzbremse zumeist vorgezogen, weil bei ihr genaues Abheben leichter zu erreichen ist. Einfache Klotzbremsen nur bei sehr kleinen Drehmomenten (Wellen unter 40 mm Durchm.), weil sie die Welle auf Biegung beanspruchen. Zylindrische Klotzbremsen bei grofsen Kräften (Fördermaschinen); Keilnut-Klotzbremsen bei kleinen Kräften (Fahrwerke und Schwenkwerke). Bei anhaltendem

Digitized by Google

Betrieb und achsialer Anpressung (Lastdruckbremsen) werden Lamellenbremsen in Oelbad bevorzugt, weil sie unveränderlichen Reibungswert besitzen; völlige Lüftung in diesem Fall nicht erreichbar, aber auch nicht erforderlich. Kegelbremsen nur bei Rollenzügen mit Handbetrieb.

H. Gesperre.

Zahngesperre mit Aufsenzähnen (Abb. 198). Das Einfallen der Klinke mufs durch Gewicht oder Feder erzwungen werden, nicht durch die Zahnform. Richtigste Zahnform: ein Kreisbogen um den Klinkendrehpunkt; angenähert durch Tangente an diesen Kreisbogen. Zähne auf Biegung und Flächenpressung beansprucht; daher breit und niedrig halten, 10 bis 15 mm hoch.

Abb. 198.

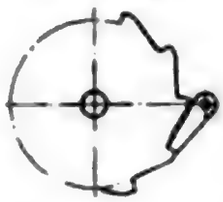
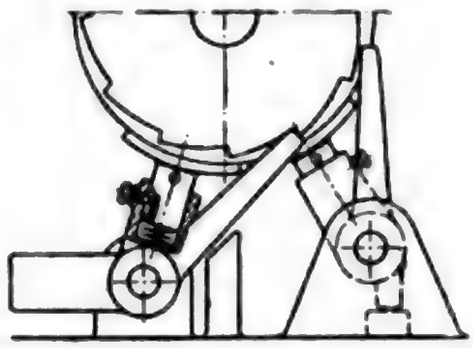


Abb. 199.



Gesteuerte Klinken (Abb. 199). Freigehende Klinken nur bei geringer Geschwindigkeit — Handantrieb — brauchbar; bei Maschinenantrieb stets Steuerung der Klinken durch einen Reibungswiderstand, der durch eine Feder oder ein Gewicht erzeugt wird. Ratsam zwei bis drei Klinken mit getrennter Steuerung, um eine halbe Teilung bzw. eine Drittelteilung versetzt.

Zahngesperre mit Innenzähnen (Abb. 200). Vorteilhaft bei Sperradbremsen, weil gedrängte Anordnung möglich.

Reibungsgesperre mit Aufsenklötzen. Rückt man bei der zylindrischen Klotzbremse (Abb. 193) den Drehpunkt des Klotzhebels bei rechtsdrehender Last so weit innerhalb der Tangente, dafs

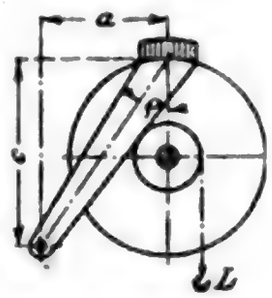
$$N \cdot a = N \cdot \mu \cdot c$$

wird (Abb. 201), dann wird das Bremsgewicht $G = 0$, d. h. die Bremse wird selbstsperrend oder geht in ein Gesperre über. Es wird dann

$$\frac{a}{c} = \mu = \operatorname{tg} \varrho;$$

Abb. 200.

Abb. 201.



die vom Drehpunkt des Klotzhebels nach dem Mittelpunkt der Reibfläche gezogene Linie mufs also um den Reibungswinkel gegen den Halbmesser geneigt sein. Vorsichtshalber wird man den Winkel etwas kleiner als ϱ ausführen. Da der Radialdruck sehr grofs wird, so sind stets zwei gegenüberliegende Klötze anzuordnen, um die Welle zu entlasten.

Reibungsgesperre mit Keilnut. Da der Reibungswinkel sehr klein ist — bei $\mu = 0{,}15$ wird $\varrho = 8^0$ —, so kann die Reibfläche nur sehr kurz gehalten werden. Bei Anwendung einer Keilnut vergröfsert sich μ auf

$$\mu_1 = \mu \frac{\cos \varrho}{\sin (\alpha + \varrho)}$$

(Abb. 194); bei $2\alpha = 45^0$ wird $\mu_1 = 2\mu$, der Winkel der Klotz-

Digitized by Google

stützlinie gegen den Halbmesser wird dann doppelt so grofs wie bei zylindrischer Reibfläche. Daher Keilnut stets bevorzugt.

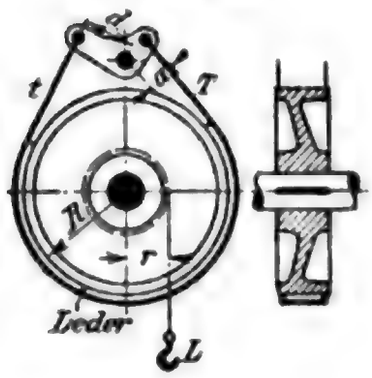
Reibungsgesperre mit Innenklotz. Eine vorteilhaft gedrängte Anordnung ergibt sich, wenn der Drehpunkt des Klotzes nach innen gelegt wird (II. Bd. Abb. 75 S. 395); die glockenförmige Scheibe mufs so stark ausgeführt werden, dafs sie die starken Radialdrücke aushält. Die Klötze sind zweckmäfsig so zu gestalten, dafs keine freien Fliehkräfte auftreten.

Reibungsgesperre mit Band. Befestigt man das Bandende T nicht an einem festen Punkt, sondern an einem Winkelhebel, dessen anderer Arm von dem Bandende t erfafst wird (Abb. 202), und bemifst man die Arme des Winkelhebels so, dafs

$$t \,.\, a = t \,.\, d$$

wird, dann wird das Bremsgewicht $G = 0$, d. h. die Bremse wird selbstsperrend oder verwandelt sich in ein Gesperre. Da $\frac{T}{t} = e^{\mu w}$, so wird für diesen Fall $\frac{d}{a} = e^{\mu w}$.

Abb. 202.



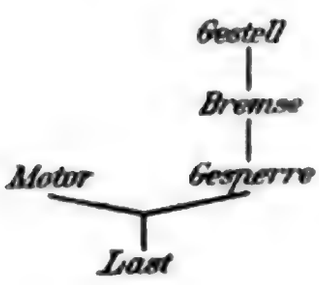
Sicherheitshalber wird man $\frac{d}{a}$ etwas gröfser als $e^{\mu w}$ ausführen. Um einen möglichst gleichmäfsigen Reibungswert zu erhalten, füttert man das Band mit Leder.

Walzen- und Kugelgesperre eignen sich nur für ganz kleine Kräfte und Geschwindigkeiten, da gleichmäfsige Anlage der einander gegenüberliegenden Kräfte — also Kraftausgleich — nicht zu erreichen ist.

J. Sperradbremsen.

Bremse und Gesperre werden bei neueren Ausführungen stets zu einem Ganzen vereinigt, und zwar in der Weise, dafs die Bremsscheibe lose drehbar auf die zu bremsende Welle gesetzt und durch das Gesperre nur beim Senken selbsttätig mit der Welle gekuppelt, beim Heben aber freigegeben wird; das Bremsband wird während des Hebens durch ein Gewicht gespannt gehalten und nur während des Senkens gelüftet. Schaltung der Sperradbremse: Abb. 203. Vorteil der Sperradbremse gegenüber getrenntem Gesperre: Die Sperrklinke braucht nicht ausgehoben zu werden. Entweder Zahngesperre mit gesteuerten Klinken (II. Bd. Abb. 74 S. 394) oder Reibungsgesperre mit Innenklötzen (II. Bd. Abb. 75 S. 395).

Abb. 203.



Bei den **Sicherheitskurbeln** ist zwischen Gesperre und Last eine Reibkupplung geschaltet, die zugleich als Bremse benutzt wird, und zwar in der Weise, dafs sie während des Hebens durch den Kurbeldruck geschlossen ist und behufs Senkens durch Rückwärtsdrehung

Digitized by Google

der Kurbel gelüftet wird. Schaltung der Sicherheitskurbel: Abb. 204. Bauart von Weidtmann: Abb. 205. Sicherheitskurbeln sind nur bei

Abb. 204.

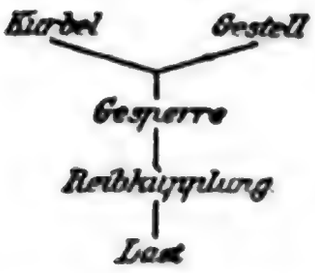
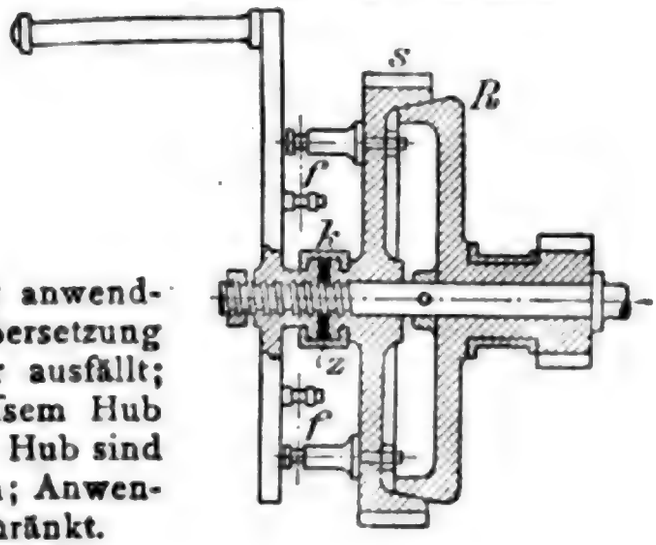


Abb. 205.
Sicherheitskurbel von Weidtmann.



einfacher Stirnradübersetzung anwendbar, weil bei stärkerer Uebersetzung das Hakengewicht zu schwer ausfällt; ferner sind sie nur bei grofsem Hub vorteilhaft, denn bei kleinem Hub sind Lastdruckbremsen vorzuziehen; Anwendungsgebiet daher sehr beschränkt.

IV. Kolben, Kolbenstangen und Stopfbüchsen.

A. Kolben.

a. Tauchkolben (Plunger).

Dichtung selbsttätig mit Stulp (Manschette) aus Leder (in Formen gepreſst) oder Gummi, z. B. für Preſspumpen (Abb. 206 mit 2 Schrauben, Abb. 207 mit 1 Schraube, *a* Löcher zum Drehen), ein Stulp in Hutform (Abb. 209) wirkt beim Saugen, der andere beim Drücken. Für Wasserdruckpressen Stulp (Nutring von U-Querschnitt) nach Abb. 208;

Abb. 206.

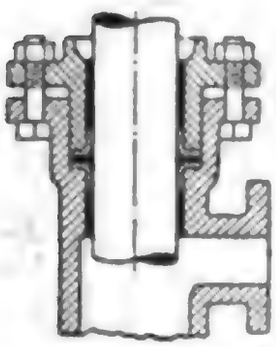


Abb. 207.

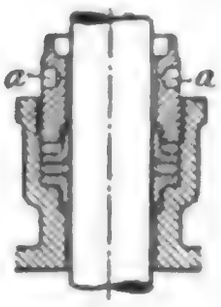


Abb. 208.

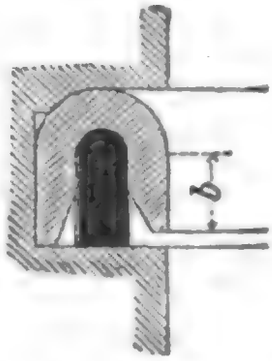


Abb. 209.

Abb. 210.

dichtet nur gegen inneren Ueberdruck. Anwendbar für alle, auch hohe Drücke (bis 1000 at), bei reinem Wasser und bei Kolbengeschw. < 1 m/sk. Bei unreinem Wasser oder grofsen Geschwindigk. Reibung und Verschleifs bedeutend.

Füllstoff bei Nutringen nach Abb. 208 aufser Metallringen Gummi. — C. Otto Gehrckens schlägt für den teuren Gummi Baumwollzöpfe vor.

Digitized by Google

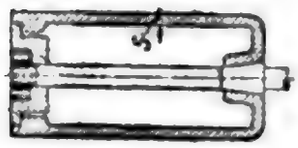
Für Scheibenkolben (Abb. 212) werden Lederstulpe in Napfform (Abb. 210) verwendet. — Für die Lederstulpe empfiehlt Gehrckens Lohgarleder. Nur wo Temperaturen über 85° vorkommen, ist Chromleder vorzuziehen.*)

Für Hut- und Napfform (Abb. 209 u. 210) gebräuchliche Größen: 2,5 bis 30 cm Durchm. Lieferbar, aber schwierig herzustellen, aus einer Scheibe Leder bis 100, ja selbst 150 cm Durchm. — Nutring (Abb. 208) gebräuchlich bis 50 cm Durchm., lieferbar ausnahmsweise ebenfalls bis 100, ja 150 cm. — Für Durchm. über 200 cm Stulpe aus einem endlos gemachten Lederstreifen. — Anderseits sind Lederstulpe selbst für Stangen von 1 cm Durchm. verwendet worden; $b = 0{,}5$ cm, Lederdicke $s = 1$ bis 1,5 mm.

Für stärkere Tauchkolben für 4 at Druck und mehr sind statt der Lederstulpe sorgfältig mit Talg getränkte rechteckig geflochtene Baumwollpackungen gut bewährt (Packungshöhe mindestens das 6fache der Dicke der Packungsschnur). Zuweilen genügt zur Führung und Dichtung ein Metallring, z. B. in der Scheidewand zweier aneinanderstoßender Zylinder mit einem Tauchkolben.

Labyrinthdichtung,**) bei denen der Zylinder mehrere ringförmige Rinnen erhält, für Tauchkolben zur Abdichtung gegen Wasser zwecklos.

Abb. 211.



Stulpreibung. Bezeichnet für Leder- oder Gummistulpdichtung

b die Höhe der reibenden Stulpfläche in cm (Abb. 208),

p den Flüssigkeitsüberdruck in at,

μ die Zahl der gleitenden Reibung zwischen Kolbenfläche und Stulp,

D den Durchm. des Kolbens in cm,

R den Reibungswiderstand in kg, der sich der Bewegung des Kolbens bei der Pressung p entgegensetzt,

R_0 den Reibungswiderstand in kg für $p = 0$, entstehend durch noch nicht eingelaufenen, anfänglich zu harten Stulp sowie durch die Reibung zwischen Kolben und Führungsbüchsen (bei lotrechter Stange ist $R_0 \sim 0$), so ist nach Gollner***)

$$R = R_0 + \pi D b p \mu.$$

Für b reicht 1,2 bis 2,0 cm aus; Lederdicke $s = 0{,}4$ bis 0,6 cm. Gummistulpe erhalten 1 cm Dicke. R_0 zu schätzen oder durch Versuch zu bestimmen; ferner ist bei glatten Oberflächen und bei guter Fettung des Leders (für $p = 10$ bis 140 at) die Reibungszahl etwa $\mu = 0{,}07$ bis 0,08. Bei rauhem Kolben, schmutzigem Wasser erhöht sich μ bis auf 0,20. (Vgl. jedoch die Angaben für R und μ für verschiedene Dichtungen S. 244.) Für Metalldichtung ist $\mu = 0{,}1$ zu setzen. (Ueber die Reibung von Baumwollpackungen, die durch ihre Elastizität dichten, und über Stopfbüchsen S. 876.)

Die **Wandstärke** s hohler Tauchkolben (Abb. 211) wird nach 2. (S. 607) berechnet mit 0,2 bis 0,5 cm Zuschlag.

b. Scheibenkolben.

1. Scheibenkolben mit Hanfliderung für kaltes und warmes Wasser, feuchten Dampf von geringer Temperatur. Für Hubpumpen (Konden-

*) Vortrag von Gehrckens, Z. d. V. d. I. 1905 S. 1445.

**) E. Becker, „Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten", Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133 ff.

***) C. Bach, Z. d. V. d. I. 1886 S. 155.

Digitized by Google

satorpumpen) zeigt Abb. 212 einen durchbrochenen Scheibenkolben mit Gummiklappenventil, links Hanfliderung, rechts Metalliderung. Höhe der Packung $h = 4\sqrt{D}$, Packungsdicke $s = \sqrt{D}$, wenn h, s und D in mm. Bei einseitig ausgelaufenen Zylindern, die nicht ausgebohrt werden können, ist Hanfliderung der Metalliderung vorzusiehen.

Abb. 212.

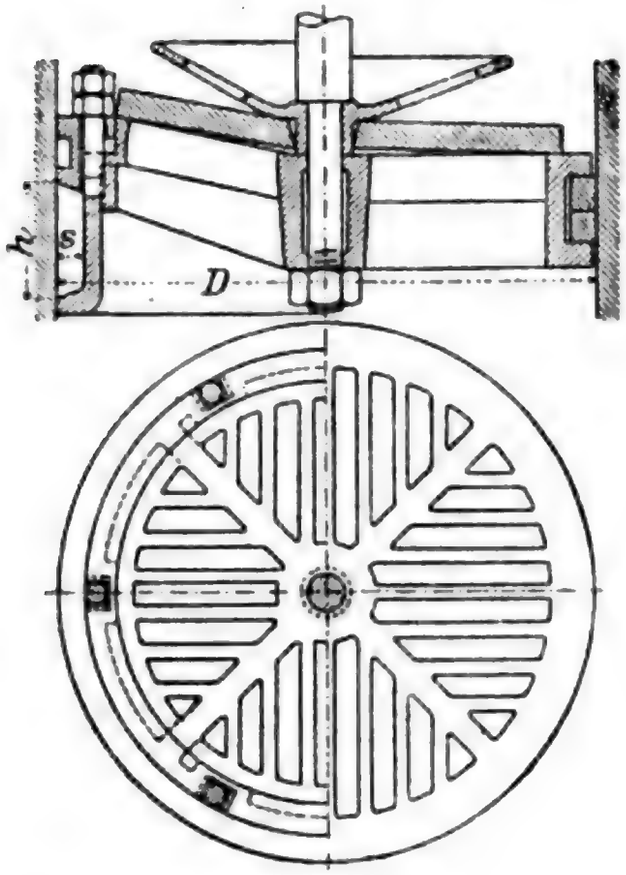
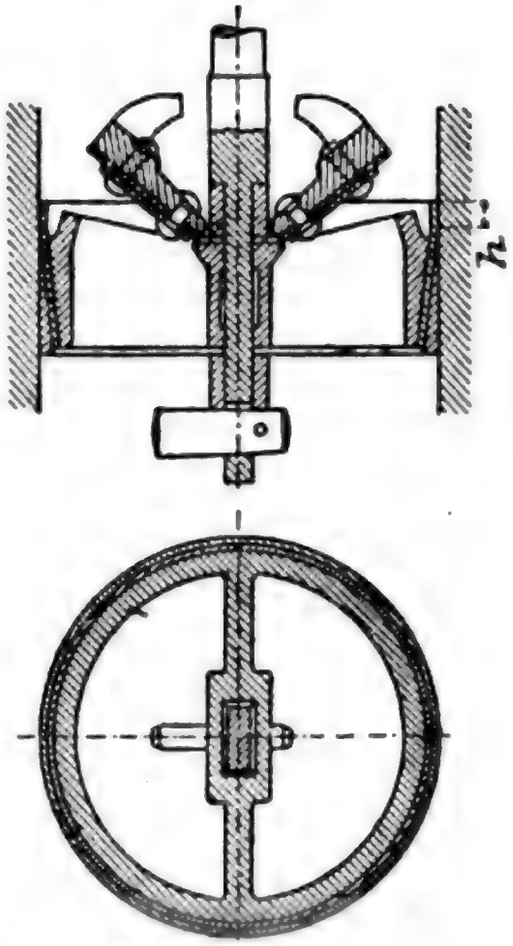
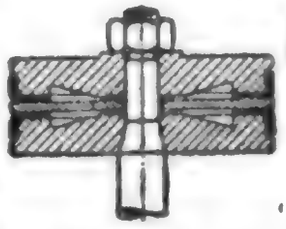


Abb. 214.



Leinwand und Filz werden zuweilen als Streifen um den Kolben gelegt und durch ringförmigen Deckel mit Schrauben oder Keil zusammengedrückt. Harte Kautschukringe für sandiges Wasser.

Abb. 213.

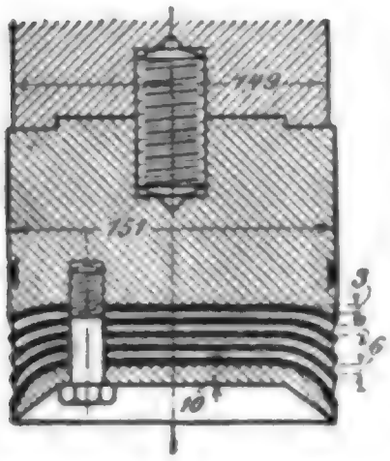


2. Scheibenkolben mit Leder- oder Gummistulpdichtung (Abb. 213, für doppelt wirkende Wasserpumpen) für reines Wasser von weniger als 30° Wärme und 5 at Druck. Dichtungshöhe $b = 1{,}2$ bis 2,0 cm, Lederdicke 0,3 bis 0,6 cm. Abb. 214 mit Lederstulpdichtung versehener durchbrochener Brunnen-Pumpenkolben mit Metallklappen. Der aus einem Lederstück bestehende Stulp durch Eisen- oder Kupferring mit Keilung gegen den Kolben gedrückt. Höhe der Liderung, je nach dem Durchmesser, $h = 0{,}8$ bis 1,5 cm; Lederdicke 0,3 bis 0,5 cm. Dichtung nur bei Weg aufwärts.

Digitized by Google

Für Drücke bis 5600 at (Hubersche Presse)*) hat sich die Dichtung Abb. 215 bewährt; abwechselnd Lagen von gutem Leder, an den Rändern zugeschärft, und harte Metallscheiben, deren Ränder scharf zugeschnitten sind; das Ganze durch Bodenstück und drei Schrauben zusammengehalten.

Abb. 215.



3. Scheibenkolben mit Holzliderung (Eichen, Pappel, Ahorn, durch Federn oder Kautschukringe an die Zylinderwand gedrückt) für Warmwasserpumpen von Kondensationsmaschinen (Krause, Corlifs).**)

4. Scheibenkolben mit Metalliderung für höhere Temperaturen.

a) **Eingeschliffene Kolben** aus Bronze, in ebensolchen Zylindern laufend, für Pumpen, Feuerspritzen (Abb. 216), Kondensatorpumpen u. dgl. Rinne auf Mitte Höhe zur Aufnahme von Schmiere oder Schmutz. Schneide am oberen Ende verhindert, dafs Schmutz zwischen die Dichtflächen gelangt. Wird der Kolben undicht, so kann ein Lederstulp eingesetzt werden (Abb. 216 unten).

Abb. 216.

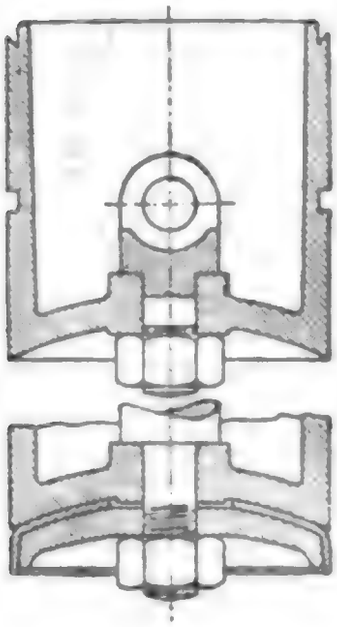
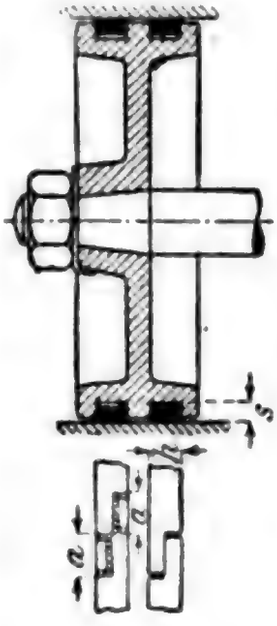


Abb. 217.



b) **Kolben mit metallenen Liderungsringen,** meist aus zähem, nicht zu weichem Gufseisen (aus Bronze nur bei Pumpen mit saurem Grubenwasser usw.), entweder selbstspannend mit gröfserem Durchmesser hergestellt, gespalten und, nachdem $a \sim 0{,}1\,D$ (Abb. 217) herausgeschnitten, auf den Zylinderdurchmesser D abgedreht. Deckung des Spaltes durch Ueberblattung oder durch Füllstück (Zunge). Die Spalten mehrerer Ringe gegeneinander versetzt.

Dicke der Ringe, die über die Stirnflächen des Kolbens in die Nuten gebracht werden, $s \gtrless {}^1/_{30}\,D$ für gleich dicke Ringe, $s \gtrless {}^1/_{25}\,D$ für ungleich dicke Ringe, die an den freien Enden bis auf $0{,}7\,s$ abnehmen. Höhe $h = 2\,s$, $a = 1{,}25$ bis $1{,}5\,h$ oder $0{,}1\,D$.

Ringe, die nach Abnahme eines besonderen Kolbendeckels aufgeschoben werden, erhalten $s = {}^1/_{20}\,D$ abnehmend bis $0{,}7\,s$; $h = s$ (stehende Maschinen) bis $1{,}5\,s$ (liegende Maschinen), $a = 0{,}075\,D$.***)

*) Z. d. V. d. I. 1901 S. 625.
**) C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 724.
***) Berechnung der Kolbenringe K. Rheinhardt, Z. d. V. d. I. 1901 S. 232.

Digitized by Google

Oder es werden die Liderungsringe durch hintergelegte Spannringe gespannt gehalten, die die Dichtungsringe meistens in radialer und achsialer Richtung andrücken. In Abb. 218 (Kolben der Rheiner Maschinenfabrik) werden Doppelkegelfeder und Dichtungsringe durch

Abb. 218.
Kolben der Rheiner Maschinenfabrik.

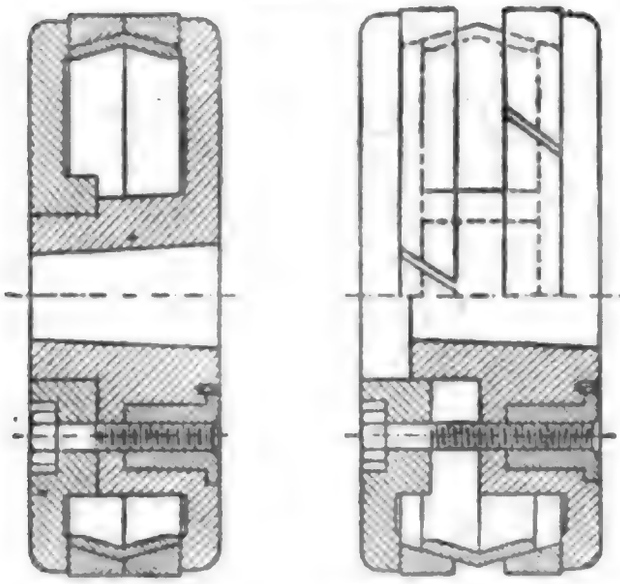


Abb. 219.
Kolbenring von Zirn.

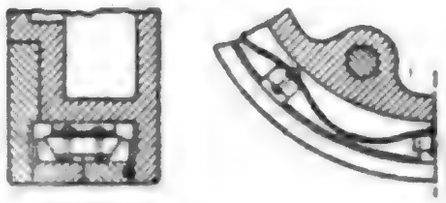
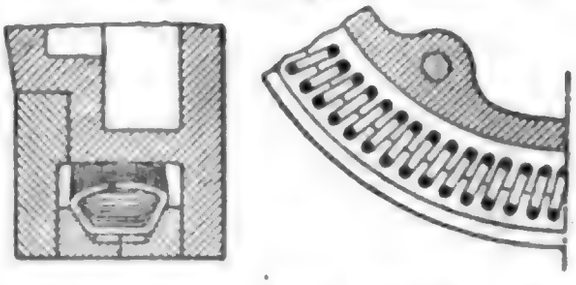


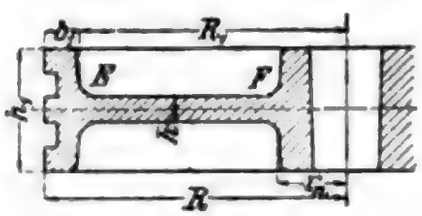
Abb. 220.
Kolbenring von Cooper & Pattinson.



Anziehen der Deckelschrauben gespannt; in Abb. 219 (Patent Zirn) werden die Ringe durch Keilstücke mittels wellenförmiger Feder in radialer und achsialer Richtung angedrückt; in Abb. 220 (Patent Cooper & Pattinson) durch eine Schraubenfeder.

Bestimmung der Spannungen in der Kolbenscheibe nach Pfleiderer:*) Die meistbeanspruchte Stelle liegt beim Uebergang der Scheibe in die Nabe. Die kreisrunde, ebene, beiderseits eingespannte Platte ist belastet:

Abb. 221.



1. durch den auf der Platte vom Halbm. $R_1 - r_n$ (Abb. 221) lastenden Flüssigkeitsdruck p in kg/qcm;

2. durch den auf dem äufseren Ring von der Breite b_1 [Querschnitt $\pi\ (R^2 - R_1^2)$] ruhenden Flüssigkeitsdruck:

$$P = p\,\pi\,(R^2 - R_1^2).$$

Die hieraus folgenden Einzelbeanspruchungen sind:

$$\sigma_{b_1} = 11{,}5\,\frac{p}{h^2}\cdot\frac{R_1^2\,(R_1 - r_n)}{16\,r_n + 0{,}1\,\dfrac{R_1^2}{r_n}},$$

$$\sigma_{b_2} = 0{,}52\,\frac{p}{h^2}\cdot(R^2 - R_1^2)\,\frac{R_1 - r_n}{0{,}2\,R_1 + r_n}.$$

Daraus Biegungsbeanspruchung: $\sigma_b = \sigma_{b_1} + \sigma_{b_2}$.

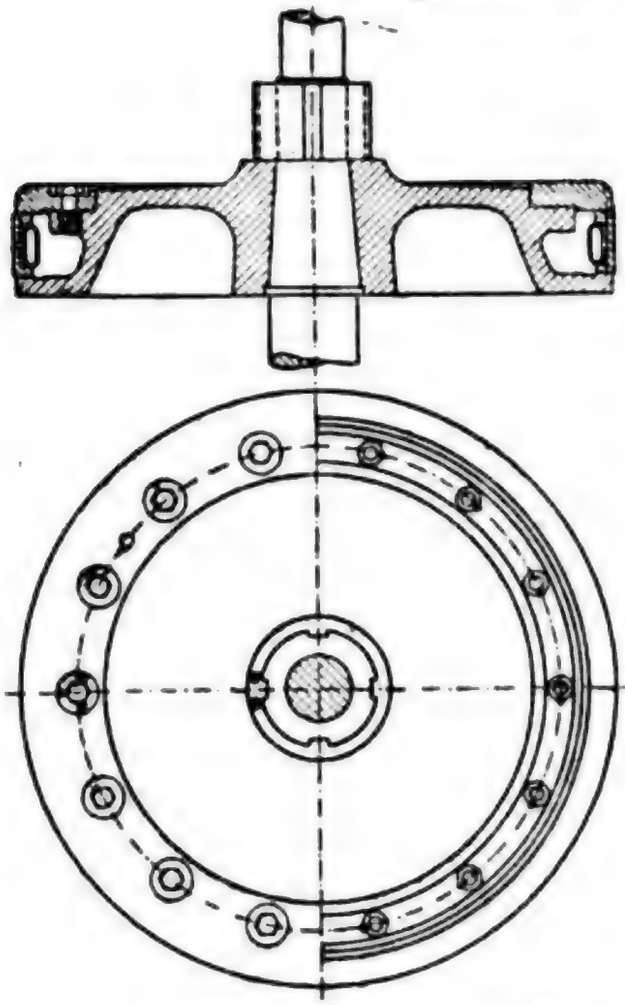
*) Z. d. V. d. I. 1910 S. 317; dort auch Berechnung von Hohlkolben mit Aussparungen in den Rippen; Mitt. Forschungsarb. Heft 97.

Digitized by Google

Kräftige Bemessung der Nabe (nicht kleiner als 1,6 mal der Bohrung) und des äufseren Kolbenkranzes, der in seinem durch die Dichtungsringe nicht geschwächten Teil mindestens 0,8 der Dicke h der Kolben-

Abb. 222. Abb. 223.

Dampfkolben für stehende Maschinen.



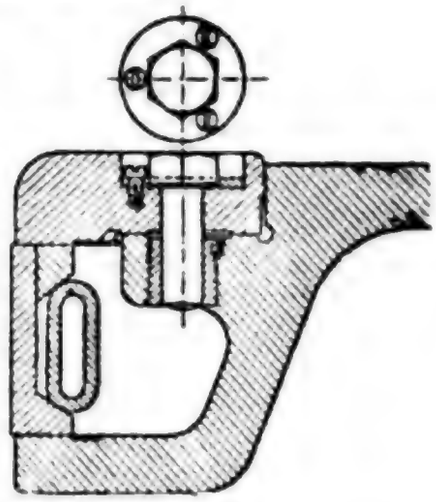


Abb. 224.

Dampfkolben für Schiffsmaschinen.

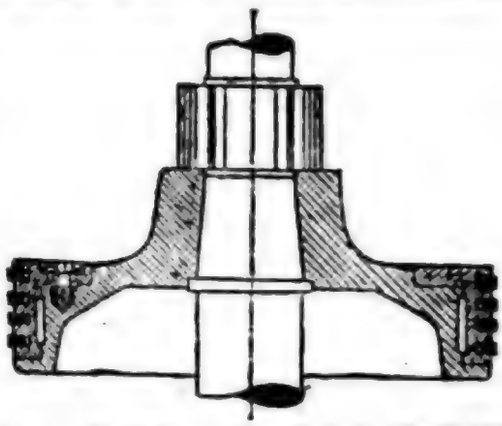
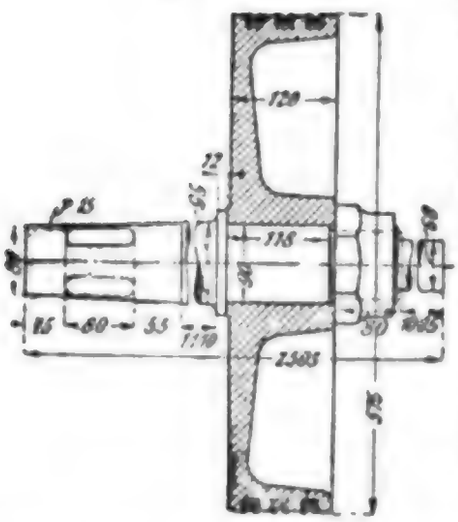


Abb. 225.



scheibe sein soll, Voraussetzung für die Annahme, dafs die Scheibe zwischen Nabe und Kolbenkranz eingespannt ist.

Kolbenkörper offen nach Abb. 217 (schwedischer Kolben), geschmiedet oder aus Stahlgufs, nach Abb. 222, 223 u. 224 für stehende Dampfmaschinen, besonders Schiffsmaschinen; in Abb. 223 werden die Liderungsringe und der dahintergelegte Spannring (von ovalem Querschnitt) mittels eines Deckelringes gehalten, in Abb. 224 liegen die selbstspannenden Dichtungsringe in einem abnehmbaren Winkelringe aus Gufseisen (zur leichten Erneuerung). Abb. 225 **Lokomotivkolben** (der preufsischen Staatseisenbahn) mit offenem Kolbenkörper aus Flufsstahl für 575 mm Zylinderbohrung mit beiderseits durchgehender Kolbenstange (Flufsstahl) von insgesamt 2505 mm Länge.

Digitized by Google

Kolben warm aufgezogen und durch Mutter gesichert, die ihrerseits durch Vernieten festgelegt wird. — Kolbenringe aus Gufseisen werden auf 600 mm abgedreht, worauf ein Stück von 50 mm Länge im schrägen Winkel von 60° ausgeschnitten wird; dann werden sie mit den Schnittflächen zusammengelötet und auf 575 mm abgedreht.

Abb. 226.
Gebläsekolben von Riedler.

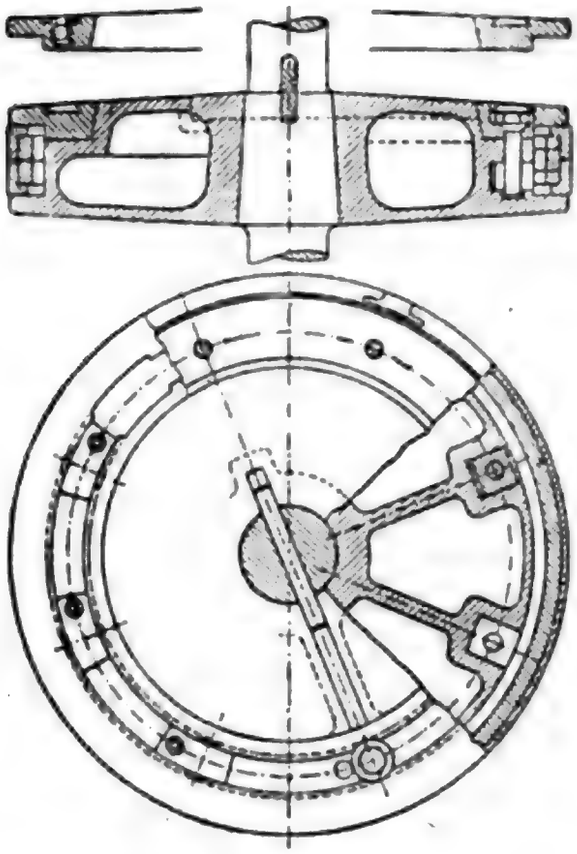
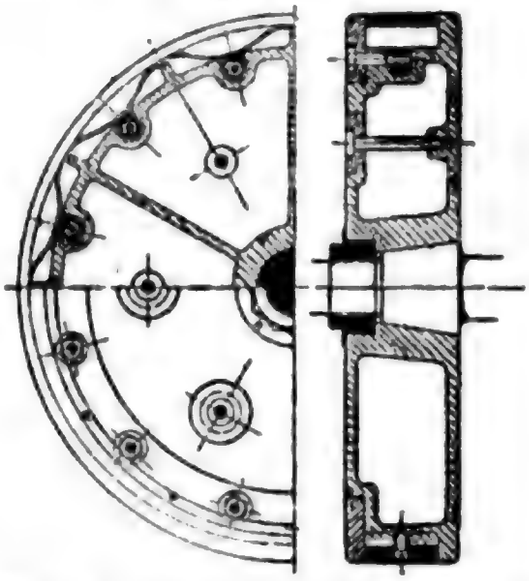


Abb. 227.

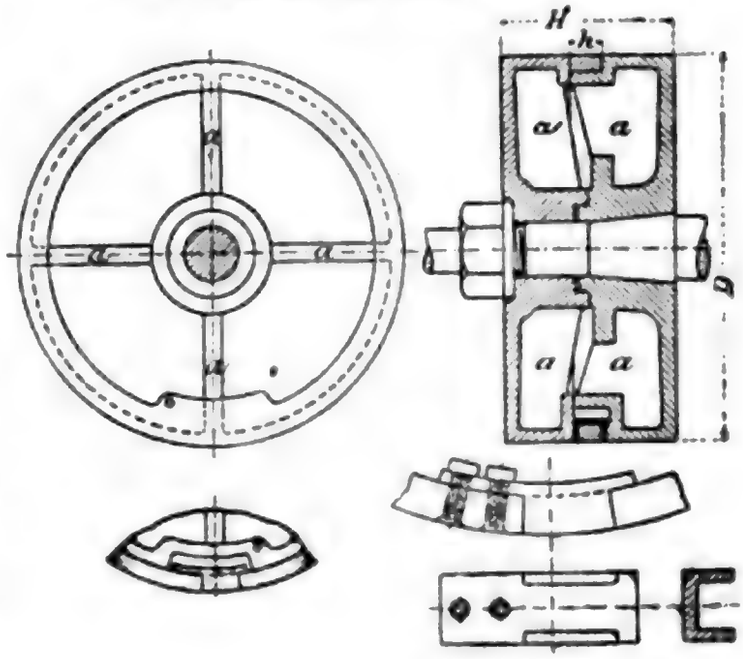


Die Ringe erhalten dann an der Lötstelle einen schrägen Ausschnitt von 7 mm Breite, der durch einen im Kolbenkörper vernieteten Steg von 5 mm Breite und 40 mm Länge gedeckt wird.

Kolbenkörper geschlossen:
1. aus einem Stücke (Abb. 226 u. 227), mit Kernöffnungen in einer oder beiden Stirnflächen oder am Umfange oder in der Nabe, oder

2. geteilt (Abb. 218, 228 u. 229), wobei meist durch Wegnahme des Deckels die Ringe freigelegt werden können. Muttern, um Festrosten zu verhindern, aus Bronze (Abdrückschrauben vorsehen!). Bei kleineren Kolben benutzt man auch die Befestigungsschraube für die Kolbenstange zur Verbindung der beiden ungefähr gleich gestalteten Kolbenhälften (Abb. 228, Kolben von Kiefselbach).

Abb. 228. Kolben von Kiefselbach.



Alle Schrauben gegen Lockerwerden zu sichern (Abb. 223, 226 u. 229).

Für Abb. 228 ist $H = 0{,}35\,D + 4$ cm, die Ringdicke $s = 0{,}03\,D + 0{,}5$ cm, $h = 2{,}6$ cm für $D = 15$ bis 29; 3,0 cm für $D = 31$ bis 52; 3,6 cm für $D = 55$ bis 70 cm.

Digitized by Google

Stopfbüchsen und Grundbüchsen liegender Maschinen zweckmäfsig durch von der Zylinderwand getragene Kolben entlastet (S. 874).

Abb. 229. Dampfkolben von G. Kuhn.

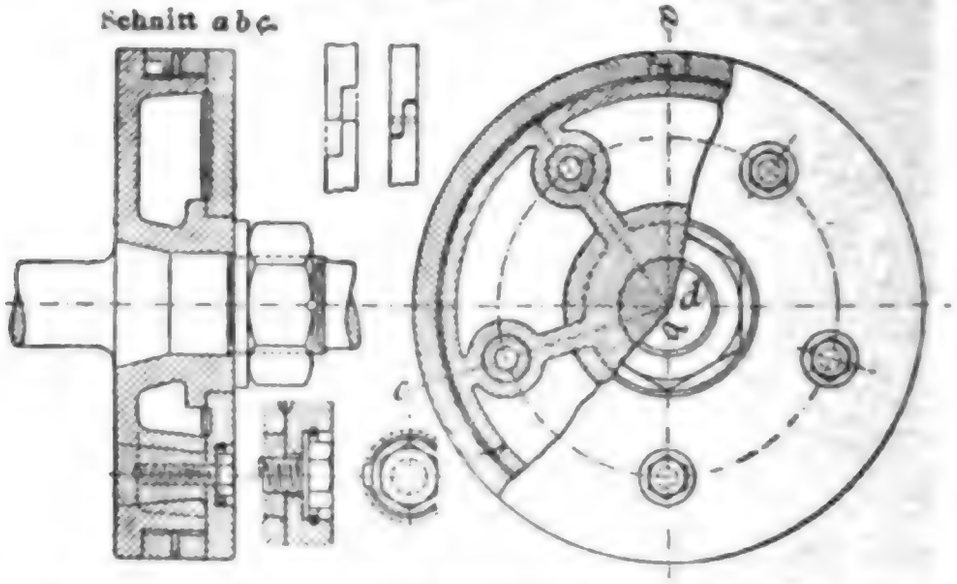
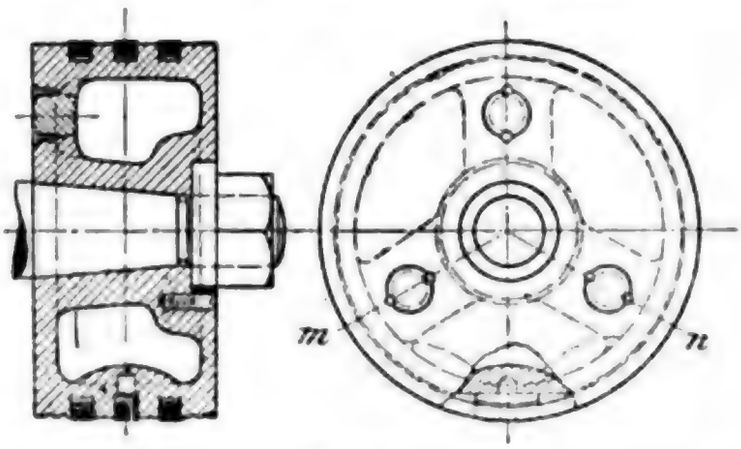


Abb. 230 zeigt einen solchen Kolben der Dresdener Maschinenfabrik und Schiffswerft zu Dresden-Uebigau.

Kolben zunächst auf den Zylinderdurchmesser abgedreht. Dann wird ein Span von 0,5 bis 2,5 mm Stärke (je nach dem Kolbendurchmesser) exzentrisch so abgedreht, dafs der Kolben unten auf ein Drittel seines Umfanges — von m bis n — unberührt bleibt.

Abb. 230. Kolben der Dresdener Maschinenfabrik.



Das Mafs, um das der Kolben beim Abdrehen des oberen Teiles aus der Mitte verschoben werden mufs, findet man am einfachsten durch Aufsuchen des neuen Mittelpunktes mit dem Zirkel, nachdem man im oberen Punkt die Spanstärke abgetragen hat. Der Kreis um den neuen Mittelpunkt schneidet den Zylinderkreis, auf dem der Kolben zuerst abgedreht war, in m und n. — Bei sehr grofsen Kolben fräst die Dresdener Maschinenfabrik und Schiffswerft, Dresden-Uebigau, zwei Drittel des Umfanges konzentrisch frei. Die Uebergangsstellen bei m und n werden verfeilt. Das Verfahren ist teurer; der Kolben hat aber seitlich mehr Spiel. Der Kolben liegt von m bis n vollkommen im Zylinder auf. Zur Sicherung der Lage der Ringe ist der senkrechte Schenkel des winkelförmigen Schlosses der schrägen Teilfuge in dem Ringe etwas eingelassen und mit einem Zapfen versehen, der in den Kolbenkörper eingreift.

Schlittenkolben von L. Ziegler zu demselben Zweck.*)

Die Körper grofser Kolben sind auf Festigkeit nachzurechnen.**)

Befestigung der Kolben auf den Stangen durch Warmaufziehen (Lokomotivkolben, Abb. 225) oder durch Kegel mit gesicherter Schraube oder Keil. Der Ansatzkegel der Stange wird in die Nabe eingeschliffen. Kegelwinkel $> 8^0$. Bessere Kolbenbefestigung mit zylindrischem, ein-

*) Haeder, Dampfmaschinen, 1896 S. 93.

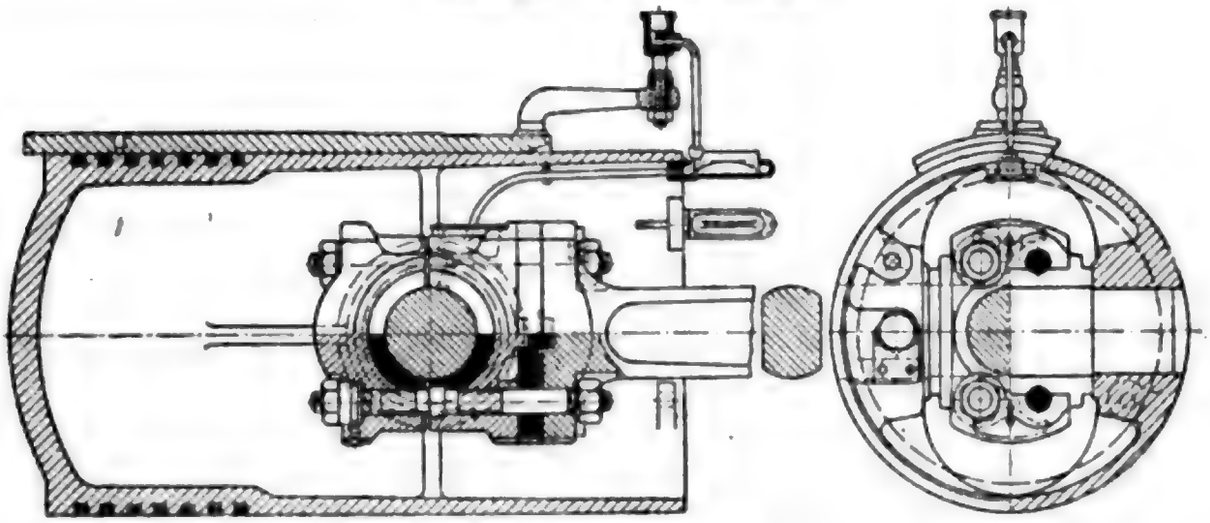
**) Aufser dem Verfahren von Pfleiderer (S. 869) auch O. Reymann, Festigkeit und Reibung der Dampfkolben, Z. d. V. d. I. 1893 S. 1084 und 1896 S. 85.

Digitized by Google

geschliffenem Stück und Kegel mit starker Neigung (30 bis 45°). — Zuweilen werden Kolben, wie Abb. 217 S. 868, mit der Stange aus einem Stück geschmiedet, dabei die Kolbenscheibe auch in der Vorder- statt in der Mittellage.

Einen Kolben für einen liegenden Viertaktgasmotor (Deutz) nach Bach, 10. Aufl. 1908, zeigt Abb. 231. Der Kolben ist gleichzeitig Kreuzkopf und mufs schon deshalb (aber auch wegen der vielen Kolbenringe) länger werden. Der Kolben wird, weil er am Boden in Berührung mit den heifsen Verbrennungsgasen ist, sich hier mehr aus-

Abb. 231. Gasmotorkolben.



dehnen als vorn und deshalb je nach dem Baustoff auf seinem hinteren Teil um 0,2 bis 0,5 % schräg gedreht. Tragfläche ist demnach nur der zylindrische Teil (mit nicht mehr als 1 bis höchstens 1,5 kg/qcm Pressung zu berechnen). Der Zapfen, an dem die Schubstange anfafst, ist mit zylindrischen Enden in den warmen Kolbenkörper eingesetzt. Der Zapfen sitzt etwa auf der Mitte des vorderen, zylindrischen (tragenden) Kolbenteiles. — Aehnlich, aber im Verhältnis zum Durchmesser kürzer (nur vier Kolbenringe), sind die Kolben von Automobil- und Luftschiffmotoren.*)

Abb. 232: wassergekühlter Kolben von 965 mm Durchm. für Grofsgasmaschine**) der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A. G. Kolben (Stahlgufs) wiegt, wassergefüllt, 2100 kg. Hierauf ist die zur Kühlwasserzuführung hohle Kolbenstange zu berechnen (Kolbenstangen, Abb. 236). Das Kühlwasser tritt in den unteren Teil des Kolbens ein und oben aus. Die im Schnitt (links oben) sichtbaren Löcher dienen zum Tragen und Herausnehmen des Kerns; am fertigen Kolben durch Gewindestopfen verschlossen.

Den gufseisernen Kolben einer doppeltwirkenden Viertaktgasmaschine von Ehrhardt & Sehmer, Schleifmühle Saarbrücken, zeigt Abb. 233.

*) Z. d. V. d. I. 1909 S. 532 u. 536.

**) Bonte, Fortschritte und Erfahrungen im Bau von Grofsgasmaschinen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1249 ff.; Dr. H. Hoffmann, Kraftgewinnung und Kraftverwertung in Berg- und Hüttenwerken, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1393 ff. (Kolben S. 1527); Rieppel, Die Grofsgasmaschinen in Amerika, Z. d. V. d. I. 1909 S. 2081 ff. u. S. 2119 (Kolben aus zwei Teilen mit je drei Kolbenringen zusammengeschraubt).

Digitized by Google

Bauart entstanden aus dem Bestreben, Brüche der Nabe des Kolbenkörpers an den Stellen c, c dadurch zu vermeiden, dafs der Kolben möglichst kurz gehalten und auf

Abb. 232. Kolben für Grofsgasmaschinen der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg.

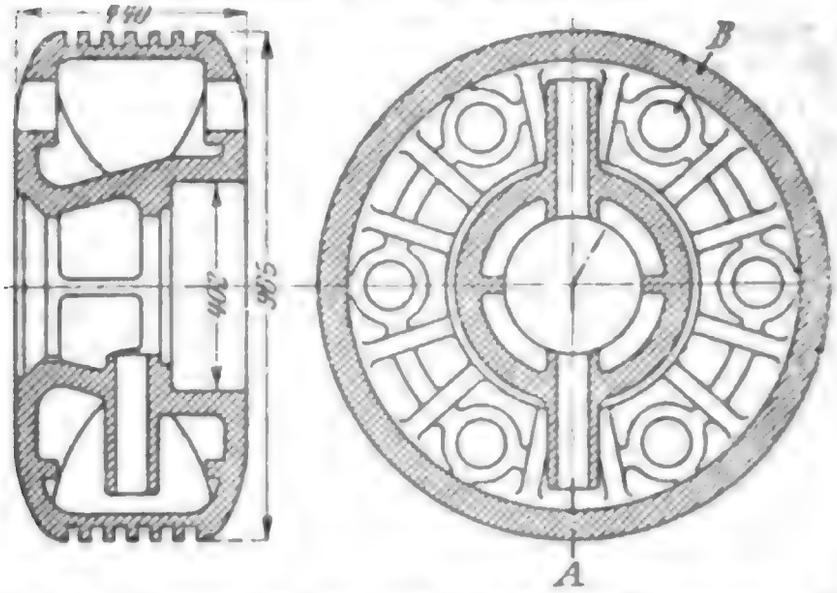
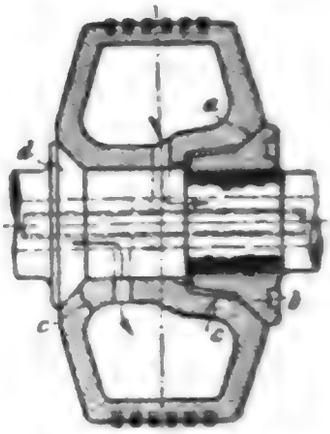


Abb. 233. Gasmaschinenkolben von Ehrhardt & Sehmer.



der ganzen Nabenbreite gefafst wird. Neu ist die Kolbenmutter b, die mit ihrer schrägen Druckfläche bei a und mit dem Kegel d auf der Kolbenstange die Stirnflächen des Kolbens miteinander versteift. Durch die Form des Kolbens werden Wärme- und Gufsspannungen nach Möglichkeit vermieden.*)

B. Kolbenstangen.

Baustoff: in erster Linie Tiegelflufsstahl wegen seiner Festigkeit und wegen der Reinheit und Glätte der Oberfläche.

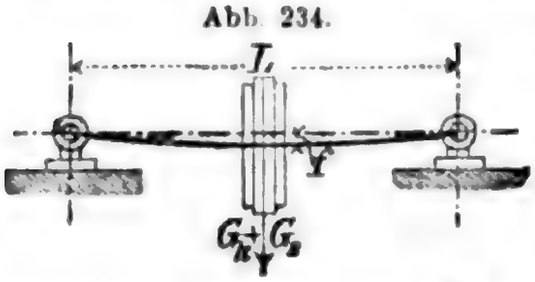
Die Kolbenstangen werden in der Regel auf Knickung**) beansprucht. Nach Fall 2 (S. 513) wird, wenn J, E, $\mathfrak{S}$ die dort angegebene Bedeutung haben und P die gröfste Kolbenstangenkraft ist, und aufserdem (in cm) d den Durchmesser der vollen Stange, d_1 den inneren und d_2 den äufseren Durchmesser der hohlen Stange bedeutet, ferner l (in cm) die Stangenlänge, gemessen von der Mittelebene des Kolbens bis zur Achse des Kreuzkopfzapfens:

$$P \sim \frac{E}{2\,\mathfrak{S}} \frac{d^4}{l^2} \quad \text{oder} \quad P \sim \frac{E}{2\,\mathfrak{S}} \frac{d_2^4 - d_1^4}{l^2}.$$

Für **stehende Maschinen** setze man den Sicherheitsgrad $\mathfrak{S}$:
$\mathfrak{S} =$ 8 bis 11, wenn die Belastung zwischen P und null schwankt,
$\mathfrak{S} =$ 15 bis 22, wenn die Belastung zwischen $+P$ und $-P$ schwankt.

Ist der Kraftwechsel von Stöfsen begleitet, so sind für $\mathfrak{S}$ noch höhere Werte zu wählen.

Abb. 234.



Für **liegende Maschinen** tritt eine Biegungsbeanspruchung durch das Stangen- und Kolbeneigengewicht hinzu. Für kleine und mittlere Maschinen mit leichten Kolben ist durch die vorstehenden Formeln mit $\mathfrak{S} =$ 11 bis 22 dieser Einfluss genügend berücksichtigt.

*) R. Drawe, Z. d. V. d. I. 1910 S. 260 ff.
**) Dingler Pol. J. 4. u. 11. Mai 1912, Knicksicherheit d. Kolbenstangen.

Digitized by Google

Bei grofsen Maschinen und bei Maschinen mit schweren Kolben ist die beiderseits durchgehende Kolbenstange als Träger auf **Biegung** zu berechnen. Hierbei darf die **Durchbiegung** die für zulässig erachtete Gröfse (1 bis 2 mm) nicht überschreiten. (Der Durchm. des Kolbenkörpers ist dann um das 1,5- bis 2fache der zugelassenen Durchbiegung kleiner zu wählen als der Durchm. der Zylinderbohrung.)

Bezeichnet (Abb. 234)

L die Länge der Stange zwischen der Achse des Kreuzkopfes und der des Tragschuhes (Schlittens) in cm,

G_k das in der Mitte der Stange wirkende Kolbengewicht in kg,

G_s das Stangengewicht in kg,

f die Durchbiegung in der Mitte der Stange in cm,

J das Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in cm^4 (S. 534 ff.),

so ist die **Durchbiegung**

$$f = \frac{L^3}{48} \cdot \frac{G_k + {}^5/_8\, G_s}{EJ}.$$

Dieser Wert f wird durch den Einfluss des Knickdruckes P unter Umständen nicht unerheblich vergröfsert (11., S. 579). Kolben aus geschmiedetem Stahl oder aus zähem Stahlguss und hohle Kolbenstangen tragen durch ihr geringes Eigengewicht und das reichliche J zur Verminderung von f bei.

Soll die Durchbiegung verhindert werden, so mufs bei Zylinderschmierung das Gewicht $G_k + {}^5/_8\, G_s$ von dem genau (ohne Klemmung) in den Zylinder passenden Kolbenkörper getragen werden (Abb. 230). Dabei Flächendruck:

$$k = \frac{G_k + {}^5/_8\, G_s}{\text{Tragfläche im Zylinder}} < 3 \text{ kg/qcm},$$

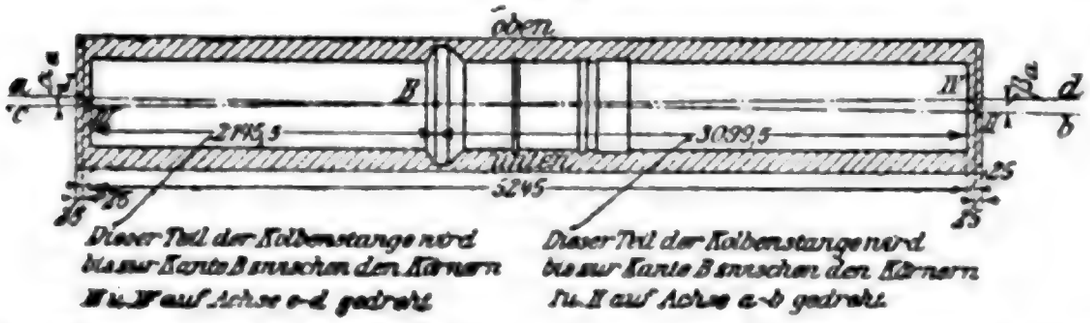
also nicht gröfser als zwischen Kreuzkopf und Gleitbahn, besser noch geringer (bis herunter auf 0,5 kg/qcm).

Bei diesen **getragenen Kolben** erzeugt die an Kolben und Stange exzentrisch angreifende Reibung erhebliche Beanspruchungen und Formänderungen der Stange und Klemmungen des Kolbens, weshalb reichlicher Stangenquerschnitt zu empfehlen ist.

Nach Kollmann erhält man eine im Betriebe gerade Kolbenstange, wenn man die vorher um die zu erwartende Durchbiegung f nach oben gekrümmte rohe Kolbenstange bei richtiger Auflagerung mit wagerechtem L und bei Belastung mit G_k am Kolbensitz auf der Drehbank mittels umlaufenden Stichelgehäuses abdreht.

Die Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A. G. bearbeitet die Kolbenstangen (aus bestem Tiegelstahl) für die wassergekühlten Kolben

Abb. 235.



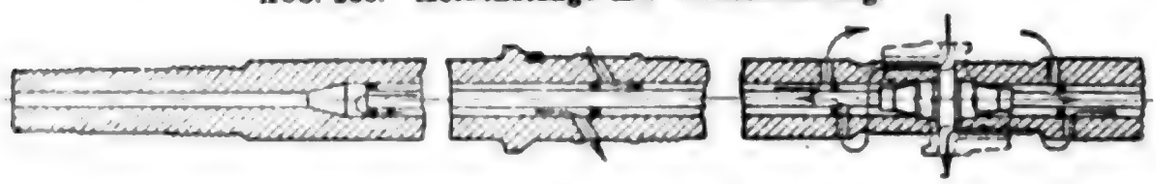
(Abb. 232) ihrer Grofsgasmaschinen nach Abb. 235. Bei Belastung durch den wassergefüllten Kolben wird die Kolbenstange etwa bis zur

Digitized by Google

Geraden durchgebogen. Die Zylinderlauffläche wird fast völlig entlastet, die Stopfbüchsen werden geschont.

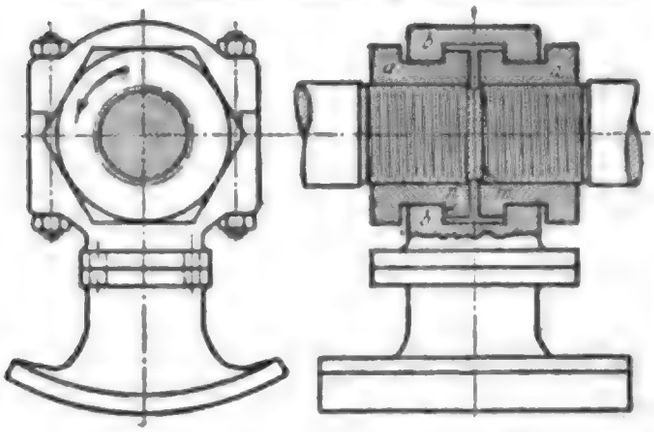
Die Wasserführung zur Kühlung der Kolben durch die hohle Kolbenstange, in die ein Rohr eingesetzt ist, zeigt Abb. 236 nach der

Abb. 236. Kolbenstange mit Wasserführung.



Ausführung der eben genannten Fabrik. Das Kühlwasser wird vom Kreuzkopf aus oder von dem die Kolbenstange zwischen den in Tandemanordnung liegenden Zylindern tragenden Gleitschuh aus zugeführt.*) Einen solchen **Gleitschuh** mit Verbindung der Kolbenstangen für Tandem-Gasmaschinen zeigt Abb. 237 nach einer Bauart von Ehrhardt & Sehmer in Schleifmühle-Saarbrücken.**) Die Muttern a, a werden bei dicht zusammengeschobenen Kolbenstangen durch die zweiteilige Kupplung b, b miteinander verbunden. Zur Verspannung der Verbindung wird dann eine der beiden Muttern etwas zurückgedreht, so dafs sich die Flächen m und n fest aufeinander pressen.

Abb. 237.
Kolbenstangenverbindung mit Gleitschuh.



C. Stopfbüchsen.

Stopfbüchsenreibung bei selbsttätiger Stulpdichtung wie Stulpreibung (Tauchkolben S. 865): $R = R_0 + \pi d b p \mu$, wo d der Stangendurchm. ist; die übrigen Gröfsen S. 866.

Bei Packungen mit elastischen Stoffen gilt im allgemeinen gleichfalls vorstehende Formel, jedoch geht R auch bei Leergang ($p = 0$) nicht unter einen Wert R_a hinab, der in der Formel $R = R_0 + \pi d b p \mu$ dem Druck p_1 entspricht, mit dem die Packung gegen den Grund der Büchse gedrückt wird. R_a ist um so leichter dauernd klein zu halten, je höher die Packung ist, und je elastischer das Dichtungsmittel bleibt. Bei schlechter Packung oder bei scharf angezogener Stopfbüchse ist der Wert R_a gröfser als der Wert $R_0 + \pi d b p \mu$ bei dem gröfsten vorkommenden Betriebsdruck p_{max} (oder es ist $p_1 > p_{max}$). Die Reibung ist dann unabhängig von dem Betriebsdruck p.

Vorzugsweise wird Hanf,***) auch Baumwollenschnur in Talg getränkt (bei kalten Flüssigkeiten) oder mit Talkum behandelt (bei warmen dsgl.), ferner Leder, Asbest, Holz- und — für hochgespannten Dampf — Metallringe als Dichtungsstoff benutzt.

---

*) Vgl. Bonte, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1250.
**) R. Drawe, Z. d. V. d. I. 1910 S. 260 ff.
***) Ueber mit Paraffin, Vaseline, Graphit usw. getränkte Schnüre: W. Lynen „Die Stopfbüchsen der Dampfmaschinen", Z. bayr. Rev.-V. 1904 S. 53 ff. (mit zahlreichen Abb.).

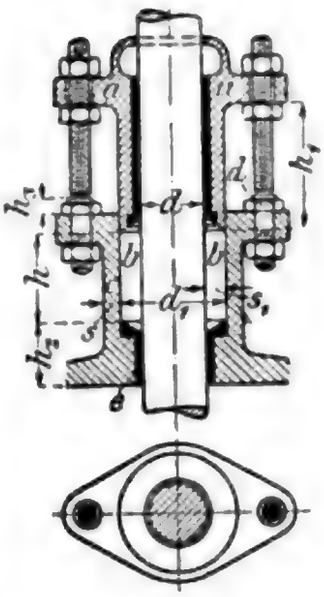
Digitized by Google

In Abb. 238 (Hanf- oder Baumwollpackung) kann etwa gewählt werden, alles in cm,

$s_1 = 0{,}65\sqrt{d}$ bis $0{,}8\sqrt{d}$; $d_1 = d + 2s_1$; $h \sim d_1$; $h_{max} = 6s_1$ bis $8s_1$.

Bei Wasser darf h etwas kleiner, bei Luft und Dampf etwas gröfser werden. Je höher die Packung, um so dauerhafter ist sie und um so geringer die Reibungsarbeit. Die Packung dichtet nur gut, solange sie elastisch ist.

Abb. 238.



Bezeichnet i die **Anzahl der Stopfbüchsenschrauben**, δ ihren Durchm. in cm, p den Flüssigkeitsüberdruck in kg/qcm, so folgt i aus (vgl. S. 749 ff.):

$\frac{1}{4}\pi(d_1^2 - d^2)\ 3p = 120\,\delta^2 i$ bis $135\,\delta^2 i$.

Hierin ist $p \geqq 3$ zu setzen und gewöhnlich $\delta \geqq 1{,}3$ cm.

Für Stopfbüchsen von Druckwassermaschinen: statt $3p$ nur $1{,}25p$, aber 216 bis 270 statt 120 bis 135. Brille am besten mit einer einzigen Mutter (Ueberwurfmutter) oder Schraube angezogen.

Grundbüchsenlänge $h_1 \sim d$ bei liegenden und $h_{2max} = 3s_1$ bis $4s_1$ bei stehenden Kolbenstangen. Bei überhitztem Dampf oder bei Verbrennungsmotoren wird h_1 möglichst lang gewählt, um die Packung vor zu grofser Erwärmung zu schützen (Abb. 246). Wandstärke 4 bis 12 mm. Aeufserer Durchm. der **Brille** $= d_1 - 0{,}5$ bis 2 mm.

Abb. 238 u. 239 stehende, Abb. 240 hängende Stopfbüchse (h Schmierrinne, g Schmierloch) mit Hanfpackung.

In Abb. 238 *a* Brille, *b* Packung, *c* Büchse, *e* Grundbüchse.

Abb. 239.

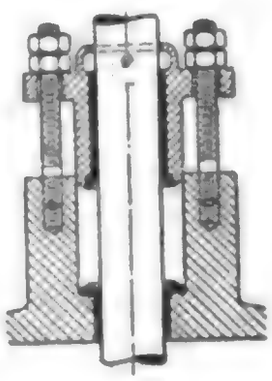
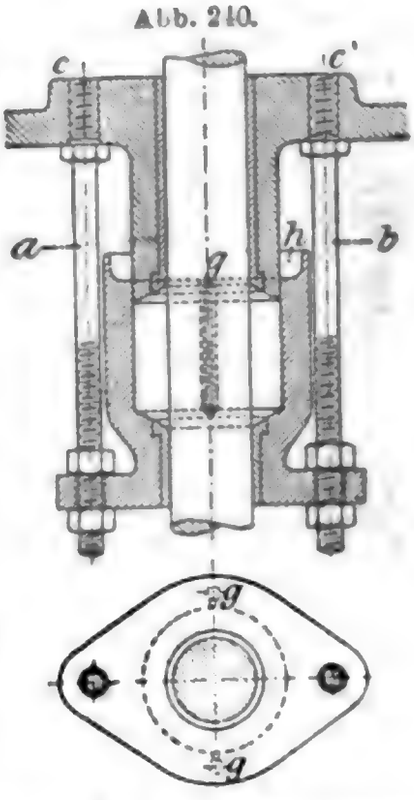
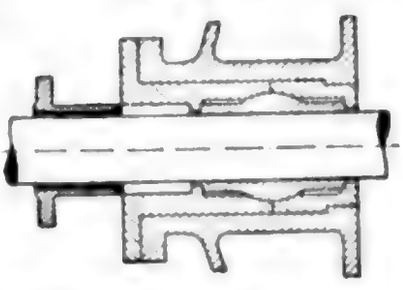


Abb. 240.



Stopfbüchsen können zum Tragen der Kolbenstange nur herangezogen werden, wenn die im Zylinderdeckel gelagerte Grundbüchse so lang ist, dafs die Pressung zwischen Stange und Büchse klein genug bleibt, und wenn die Grundbüchse sich so einstellen kann, dafs sie der wechselnden Durchbiegung der Kolbenstange folgen kann (Abb. 241). Grundbüchse in drei Kugelflächen beweglich.

Abb. 241.



Digitized by Google

Für Dampfmaschinen mit hohem Druck oder mit überhitztem Dampfe benutzte Stopfbüchsen mit **Metallliderung** (Abb. 242 bis 246) erfordern ununterbrochene, sorgfältige Schmierung; sie sind da nicht

Abb. 242.

Stopfbüchsen der preufsischen Staatseisenbahnen

für Kolbenstangen von 70 mm Durchm.

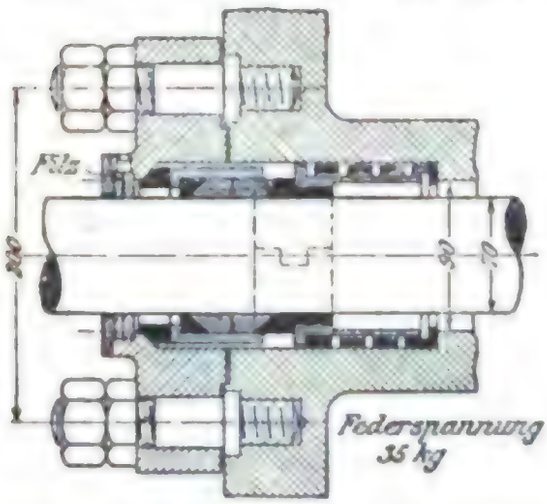
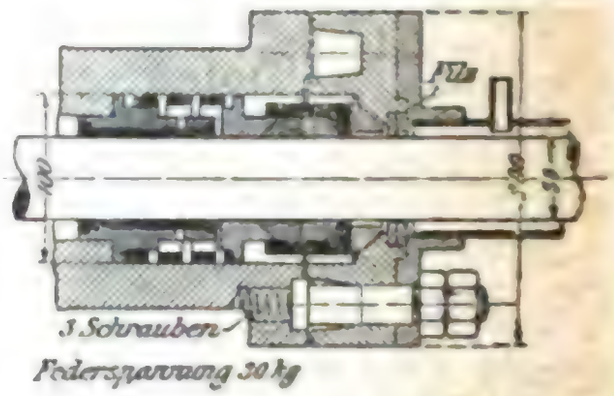


Abb. 243.

für durchgehende Kolbenstangen.



angebracht, wo infolge veränderlichen Stangenhubes stellenweise stärkere Abnutzung der Stange zu befürchten ist. Die Metalldichtung **mufs gegen radiale Abnutzung besonders gesichert sein. — Stopfbüchse (Abb. 242) für Kolbenstangen von 70 mm Durchm. der Lokomotiven der Preufs. Staatsbahnen.** Zweiteiliger Dichtungskegel aus Weifsmetall mit 15 % Antimon, 20 % Zinn, 65 % Blei. Eine vordere Stopfbüchse der Preufs. Staatsbahnen für durchgehende Kolbenstangen von 50 mm Durchm. zeigt Abb. 243. — Die Stopfbüchsen für die Schieberstangen erhalten Talkumdichtung. — Howaldtsche Stopfbüchse (Abb. 244), häufig bei Schiffsmaschinen mit hohem Dampfdruck; zum Einsetzen und Herausnehmen haben die Ringhälften Löcher mit Gewinde; oben Ring aus elastischer Schnur. Aehnlich die Gmindersche Metallstopfbüchse, bei der die zylindrischen Innen- und Aufsenflächen der Ringe mit Ringnuten versehen sind. — Stopfbüchse von Schelling (Abb. 245) hat dreiteilige Büchse aus Weichkupfer und um diese noch Hanfpackung zur Erzielung seitlicher Beweglichkeit; das Ganze durch zweiteiligen Metallring zusammengedrückt; bei der deutschen Kriegsmarine vielfach verwendet.

Abb. 244. (Howaldt.)

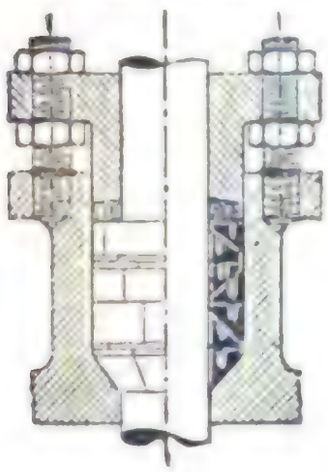
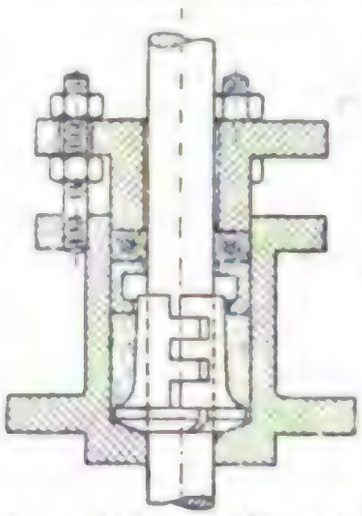


Abb. 245. (Schelling.)



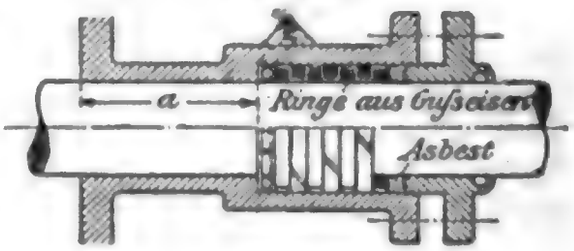
Für Dampfmaschinen mit überhitztem Dampf (12 at Druck und 320° Ueberhitzungstemperatur) Anordnung nach Abb. 246 zweckmäfsig. Alle Teile Gufseisen, ausgenommen Asbestschicht unter der

Digitized by Google

Brille. Die sechs Dichtungsringe abwechselnd mit 1 mm kleinerem und gröfserem Durchm. als der Stangendurchm.; dann schräg aufgeschnitten. *a* lang, damit die Packung nicht zu heifs wird.

G. Huhn, Berlin NW, benutzt zur Dichtung etwa 5 Hohlringe aus Weichmetall, die mit einem gegen hohe Temperaturen widerstandsfähigen Schmierstoff gefüllt sind; kleine Löcher an der Innenseite lassen diesen beim Anziehen der Brille an die Stange treten.

Abb. 246.



Weitere Bauarten der Stopfbüchsen mit Metalliderung,*) d. h. Abdichtung durch seitliche Bewegung der Stange gestattende Metallringe, ohne dafs die Büchse die Kolbenstange trägt und ohne dafs die Dichtung durch achsiale Schrauben (Abb. 244) angepreſst wird:

1. Packung bis zu 300 mm Stangendurchm. vom Ingenieur-Bureau Dr. R. Proell in Dresden, gebaut in Ausführungen für nassen Dampf, für überhitzten Dampf und für Verbrennungsmotoren. — Der Hauptteil der Packung ist ein sechsteiliger, gufseiserner, radial frei beweglicher Dichtungsring, der von einer schlauchartigen Schraubenfeder umschlungen ist. Der Dichtungsring ist paarweise in Kammern gelagert (Abb. 247). Je nach der Höhe des Dampfdruckes werden ein bis vier Ringpaare verwendet. Der dem Dampf zunächstliegende Dichtungsring erhält Entlastungskanäle zur Vermeidung von Geräusch in der Packung. Zur Abdichtung gegen Dampf von 2 at und bei tiefem Vakuum an Niederdruckzylindern genügt bei Stangen von 95 mm Durchm. ein Ringpaar. — Normalien der Proell-Packung für 30 bis 245 mm Stangendurchm. und 2 bis 13 at Dampfdruck in den Preislisten der Firma.

Abb. 247. (Dr. R. Proell)

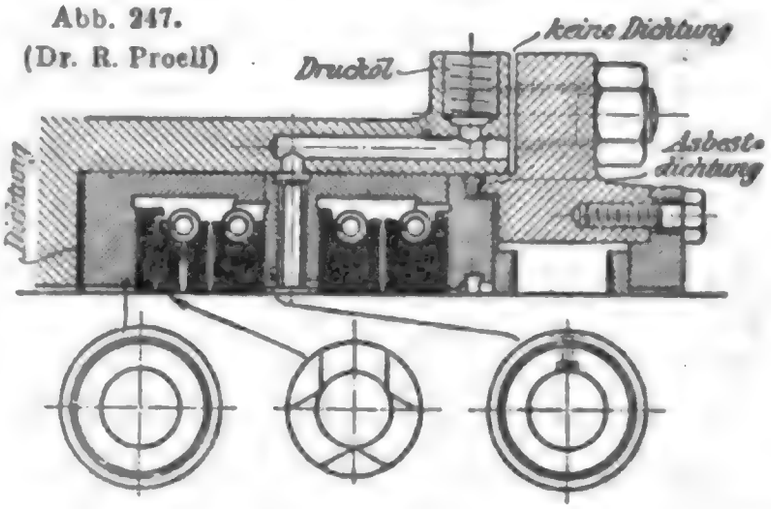
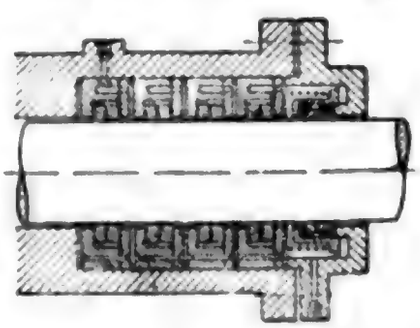


Abb. 248. (A. L. G. Dehne)



2. Stopfbüchse nach Patent Paul H. Müller (Abb. 248), v. d. Firma A. L. G. Dehne in Halle a. d. S. — Die gröfseren in eine Ausbohrung des Zylinderdeckels eingeschobenen und am Rande gegeneinander mit Kupferasbest abgedichteten Kammerringe umschliefsen je ein gufseisernes Ringpaar. Von den beiden auf die Stange aufgeschliffenen Ringen ist der dem Zylinder zugekehrte drei-

*) Labyrinthdichtungen v. Dr. Ing. E. Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133.

Digitized by Google

teilig, durch zwei federnde Drahtringe leicht gegen die Stange gedrückt. Der zweite ungeteilte Ring gibt den Fugenschluſs für den dreiteiligen, gegen den er achsial angepreſst wird. Die Ringpaare (1 bis 5 Paare) können sich innerhalb der Ringkammern radial bewegen. Vorstopfbüchse aus Weiſsmetall zum Abstopfen des Kondenswassers.

3. Lentz-Metallabdichtung*) (Abb. 249). Auf der Stange sitzt der einteilige Dichtungsring *a*, vom Dampfdruck ventilartig abdichtend, gegen die Querwand *b* gedrückt. Beim Uebertritt in die Ringkammer um *a* wird der Dampf bei *c* stark gedrosselt. Wird während der Expansionsperiode die Spannung im Zylinder etwa kleiner als in der Kammer der Stopfbüchse, so würde sich der Ring nach Druckausgleich nach rechts bei *c* anlegen. Abb. 250: Lentz-Stopfbüchse mit fünf hintereinandergeschalteten Dichtungsringen. Dabei wird von Kammer zu Kammer der etwa hindurchtretende Dampf stark gedrosselt. Der Spielraum der Ringe, die 15 bis 20 mm stark sind, ist ganz gering. In Abb. 250 wird die Büchse durch einen Deckel *c* festgehalten. Die Dichtungsringe *a* sitzen in Kammern von F- oder U-Querschnitt. Die Kammerringe sind dampfdicht aufeinandergeschliffen und gegen den Körper der Stopfbüchse mit Kupferdraht abgedichtet. Zwischen den ersten vier Ringen, vom Zylinder aus gerechnet, sitzt je eine Expansionskammer *d*. Die vorderen Ringe *b* dienen als Abstopfringe für das Niederschlagwasser, das unten abgelassen wird. Oben wird durch eine Druckpumpe Oel zugeführt. Sämtliche Teile der Büchse, die gleich gut bei Sattdampf wie bei Heifsdampf, bei stehenden wie bei liegenden Maschinen arbeitet, aus Gufseisen.

Abb. 249. (Lentz)

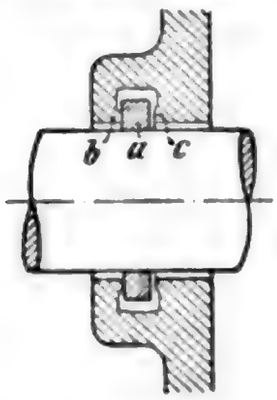


Abb. 250. (Lentz)

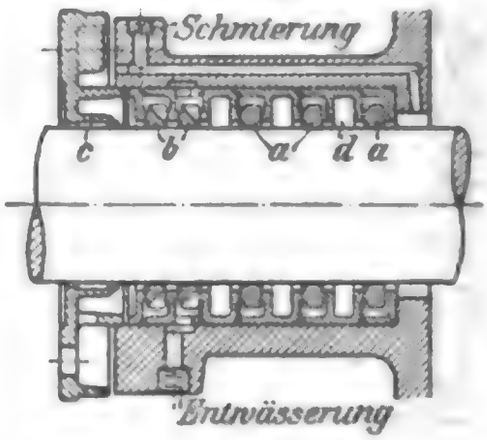
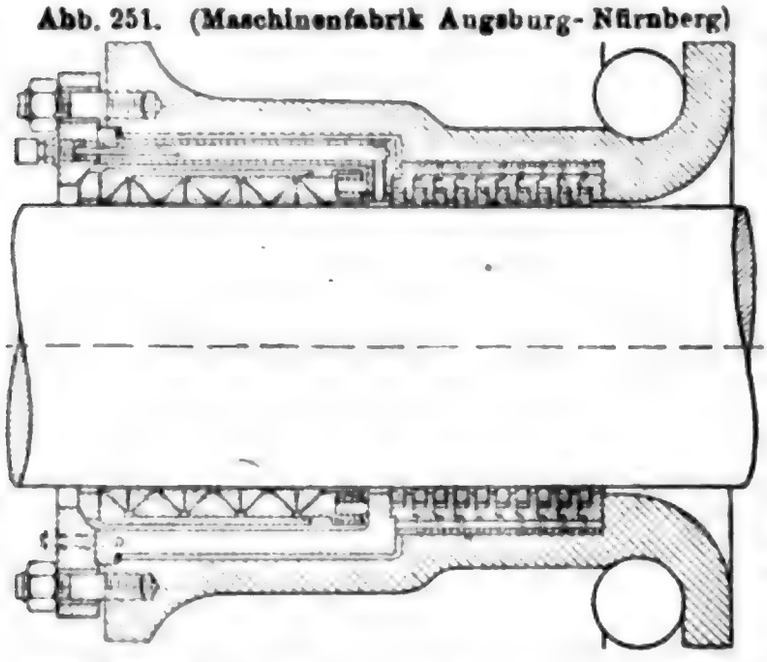


Abb. 251. (Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg)



Stopfbüchse für Grofsgasmaschinen**) der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg A. G. (Abb. 251). Mit Druckschmierung ver-

*) Ingenieur Hugo Lentz, Berlin-Halensee.

**) Bonte, Grofsgasmaschinen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1252 — Engineer Jan. 1908 S. 88.

Digitized by Google

sehen, in den hohlen, wassergekühlten Zylinderdeckel so eingesetzt, dafs sie mitgekühlt wird. Besteht aus zwei Teilen. Der nach dem Zylinderraum liegende hat Kolbenringdichtung, etwa wie in Abb. 246, der nach aufsen liegende Teil hat Metallpackung, ähnlich der Howaldtpackung (Abb. 244). Zwischen beiden Teilen eine Feder, um die Längsausdehnung aufzunehmen.

Abb. 252. (AEG.)

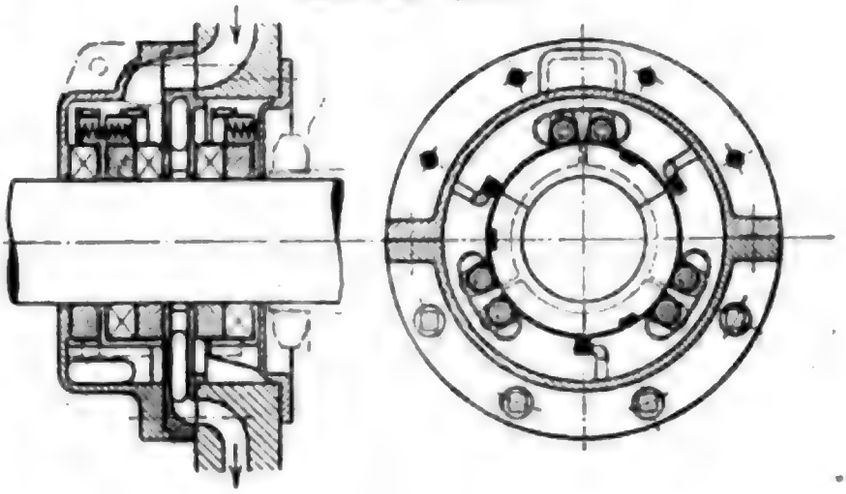


Abb. 252 zeigt eine Kohleringstopfbüchse der AEG. Sie ist für die Hochdruckseite der AEG-Dampfturbine bestimmt, wird aber ähnlich auch für die Niederdruckseite verwendet. Die Kohlenringe sind dreiteilig und werden durch Federn (Bügelfedern, Schlauchfedern usw.) zusammengehalten. — Der Sperrdampf wird, nachdem er in dieser Stopfbüchse*) gewirkt hat, vielfach nach der Niederdruckstopfbüchse geleitet.

Abb. 253. (AEG).

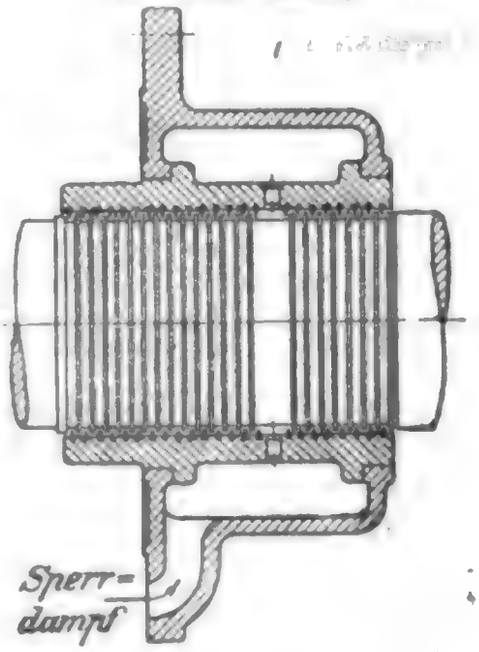


Abb. 253: Stopfbüchse der AEG für die Niederdruckseite von Dampfturbinen. Läfst in der dargestellten Ausführung geringe Längsverschiebungen zu; dagegen mufs die Welle gut zentriert sein. — Die Stopfbüchse, die mit Sperrdampf arbeitet, wird auch so ausgeführt, dafs die Kämme in der Längsrichtung aneinanderliegen, während sie radial Spiel haben.

V. Kurbeltrieb.

A. Bewegungsverhältnisse.

Es bezeichnet
r den Kurbelhalbmesser in m,
$s = 2r$ den Kolbenhub in m,
l die Schubstangenlänge in m,

*) Weitere Stopfbüchsen für Dampfturbinen Z. d. V. d. I. 1910 S. 124, 836, 1307 u. 1311. — Dr. A. Stodola, Dampfturbinen, 3. Aufl. 1905 S. 210 ff.

Digitized by Google

$\lambda = r : l$ das Längenverhältnis, bei Dampfmaschinen meist $\lambda = 1/5$,*)
x den Kolbenweg, von der Totlage aus gemessen, in m,
α den zugehörigen Kurbelwinkel,
β den zugehörigen Ausschlagwinkel der Schubstange,
v die unveränderliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens in m/sk,
c die augenblickliche Kolben(Kreuzkopf-)geschw. in m/sk,
n die Anzahl der Kurbelumdrehungen i. d. Min.,
P die Kolbendruckkraft in kg,
T den Tangentialkurbeldruck in kg.

Es ist $r \sin\alpha = l \sin\beta$ oder $\sin\beta = \lambda \sin\alpha$.

In den folgenden Formeln gilt + für den Hingang des Kolbens, d. h. für die Bewegung nach der Kurbelwelle hin, — für den Rückgang.

a. Kolbenweg x.

Bei dem **normalen Schubkurbelgetriebe** findet sich rechnerisch für einen beliebigen Kurbelwinkel α:

$$x = r(1 - \cos\alpha) \pm l(1 - \cos\beta)$$
$$= r(1 - \cos\alpha) \pm l\left[1 - \sqrt{1 - (\lambda \sin\alpha)^2}\right].$$

Angenähert ist $x = r(1 - \cos\alpha) \pm \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\alpha$

$$= r\left(1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right).$$

Die Strecke $\overline{a a_1}$ (Abb. 254), das sog. Fehlerglied, ergibt sich demnach angenähert zu $\overline{a a_1} = \frac{1}{2}\frac{(r\sin\alpha)^2}{l} = \frac{\overline{a K}^2}{2l}$.**)

Für $\alpha = 90^0$ (Viertel-Kurbelumdrehung): $x = r + \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}$.

Für $\alpha = 180^0$ (halbe Kurbelumdrehung): $x = 2r$.

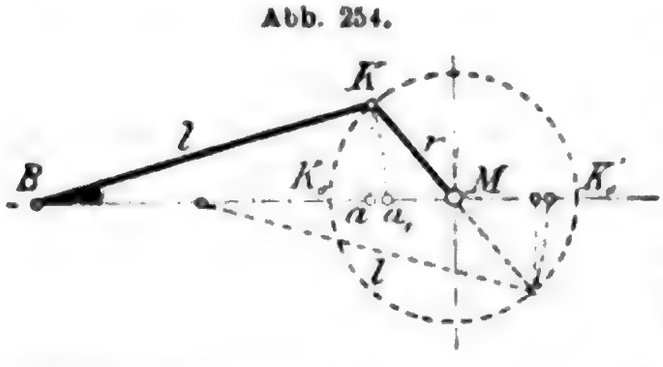
Für $l = \infty$ ($\lambda = 0$) wird $x = r(1 - \cos\alpha)$; **Sinusversus-Bewegung** (Kurbelschleife S. 892).

Der Kolbenweg (Abb. 254) wird zeichnerisch bestimmt,

wenn $l = \infty$: durch senkrechte Projektion Ka, also $x = K_0 a$;
wenn $l < \infty$: durch Bogenprojektion Ka_1 mit dem Halbmesser l, also $x = K_0 a_1$.

Man umgeht die Unbequemlichkeit und praktische Ungenauigkeit, die mit dem wiederholten Beschreiben der Kreisbogen vom Halbmesser l verknüpft ist, indem man (nach Müller) zwei Kreisbogen K_1 und K_2 vom Halbmesser l beschreibt, die den Kurbelkreis in den Totpunkten K_0, K_0' berühren, und indem man von den Punkten K, K' aus parallel zur Schub-

Abb. 254.

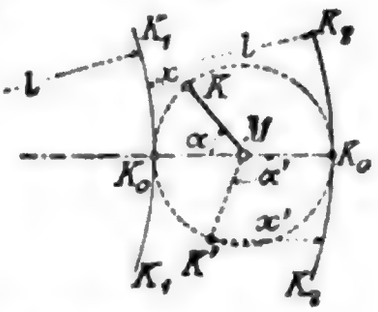


*) bei Lokomotiven λ gewöhnlich kleiner; II. Bd. Abschn. Eisenbahnwesen.
**) Fränzel, Neuere Schiffsmaschinensteuerungen Z. d. V. d. I. 1889 S. 985.

Digitized by Google

richtung die Strecken $KK_1 = x$ abgreift (Abb. 255); oder nach Brix,*) indem man als Scheitel der Kurbelwinkel α nicht den Mittelpunkt M des Kurbelkreises, sondern einen um die Strecke $Z = \frac{r^2}{2l}$ von M aus im Sinne des Hinganges verschobenen Pol O wählt und nun winkelrecht projiziert (Abb. 256): $x = K_0 a$.

Abb. 255.



Geschränkte Schubkurbel: Der Kurbelmittelpunkt M liegt nicht in der Achse der Kurbelstange, sondern um a davon entfernt (Abb. 257). Die Totpunkte K_0, K_0' liegen, entspr. den Strecklagen der Schubstange und Kurbel, unsymmetrisch; der Hub $s > 2r$ ergibt sich aus:

$$s = \sqrt{(l+r)^2 - a^2} - \sqrt{(l-r)^2 - a^2}.$$

Abb. 256.

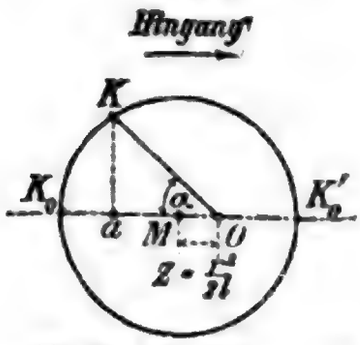
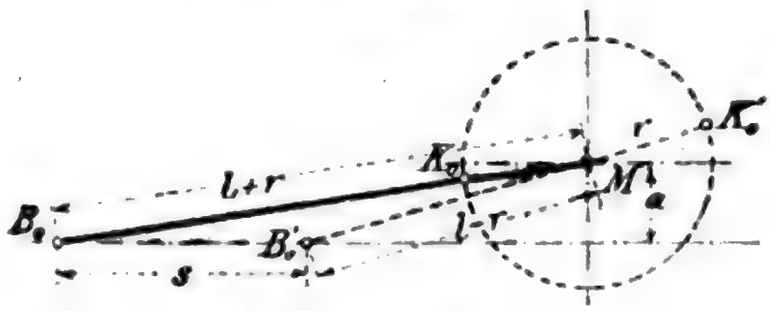


Abb. 257.



Es ist z. B. für $a = 0{,}5\,r$, $\lambda = 1/5$: $s = 2{,}01\,r$
ferner für $a = r$, $\lambda = 1/5$: $s = 2{,}04\,r$.

b. Kolbengeschwindigkeit c.

$$c = v\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\beta} = v\frac{\overline{MD}}{r} = v\frac{\xi}{r} \quad \text{(Abb. 258).}$$

c_{max} findet statt, wenn die Beschleunigung (unter c.) $p = 0$; die Bedingung dafür ist nach Schadwill: $\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 2(1-\lambda^2)\frac{z}{l} + (1-\lambda^2)^2 = 0$,

worin z die Projektion von BM auf die Schubstange bezeichnet.

(Bedingung $1-\lambda < \frac{z}{l} < 1+\lambda$.)

Zeichnerische Darstellung von c (Abb. 258). Wählt man den Maßstab für c so, daß $v = r$, so wird $c = \xi$. Dann ergibt sich (beim Hingang) für c das Diagramm I, wobei x die Abszissen, und das Polardiagramm II, wobei α die Polarwinkel sind (x und α S. 882).

Angenähert ist $c = v\sin\alpha(1 \pm \lambda\cos\alpha)$.

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$ wird $\beta = 0$, $c = 0$;

für $\alpha + \beta = 90^0$ wird $c_{max} = \frac{v}{\cos\beta}$ und $\operatorname{tg}\beta = \lambda$;

für $\alpha = 90^0$ wird $c = v$.

Für $l = \infty$ wird $c = v\sin\alpha$ und $c_{max} = v$ für $\alpha = 90^0$.

Das Diagramm und das Polardiagramm von c für $l = \infty$ und mit $v = r$ werden Kreise (Abb. 258, punktiert).

*) Brix, Das bizentrische polare Exzenterschieberdiagramm, Z. d. V. d. I. 1897 S. 431.

Digitized by Google

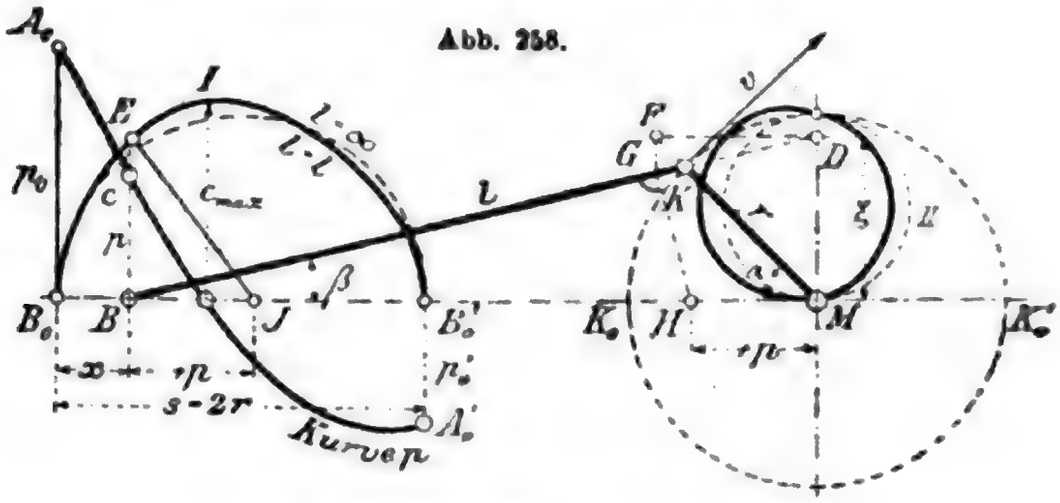
Mittlere Kolbengeschwindigkeit $c_m = \frac{2sn}{60} = \frac{2rn}{30}$,

Kurbelzapfengeschwindigkeit $v = \frac{2\pi rn}{60} = \frac{\pi rn}{30}$, daher

$$v = \frac{\pi}{2} c_m = 1{,}571\, c_m; \quad c_m = \frac{2}{\pi} v = 0{,}673\, v.$$

Für $\lambda = 1/5$ wird $c_{max} = 1{,}02\, v = 1{,}6\, c_m$.*)

Abb. 258.



c. Kolbenbeschleunigung p.

Es ist

$$p = \frac{dc}{dt} = \frac{v^2}{r}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} + \lambda\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\beta}\right].$$

1. Nach Bour und Pröll ist p gleich der Subnormale BJ der Geschwindigkeitskurve B_0EB_0' (Abb. 258). (Maßstab von p wird so gewählt, daß der Halbmesser r die Größe $\frac{v^2}{r}$ bedeutet.)

2. Nach Mohr**) (Abb. 258) verlängere BK über K hinaus bis zum Schnitt D mit MD, senkrecht zu BM, ziehe DF parallel MB bis zum Schnitt F mit der verlängerten MK, ziehe FG parallel DM und GH senkrecht BK, so ist $MH = BJ = p$. Die positiven p liegen links, die negativen p (Verzögerungen) rechts von M.

Durch Auftragen der gefundenen Werte von p erhält man das (genaue) Beschleunigungsdiagramm A_0A_0' (Kurve p).

Kolbenbeschleunigung in den **Totlagen** K_0 und K_0' der Kurbel:

$$p_0 = \frac{v^2}{r}(1+\lambda) \text{ und } p_0' = \frac{v^2}{r}(1-\lambda).$$

Angenähert ist $p = \frac{v^2}{r}(\cos\alpha \pm \lambda\cos 2\alpha)$.

$$p_{max} = \frac{v^2}{r}(1 \pm \lambda).$$

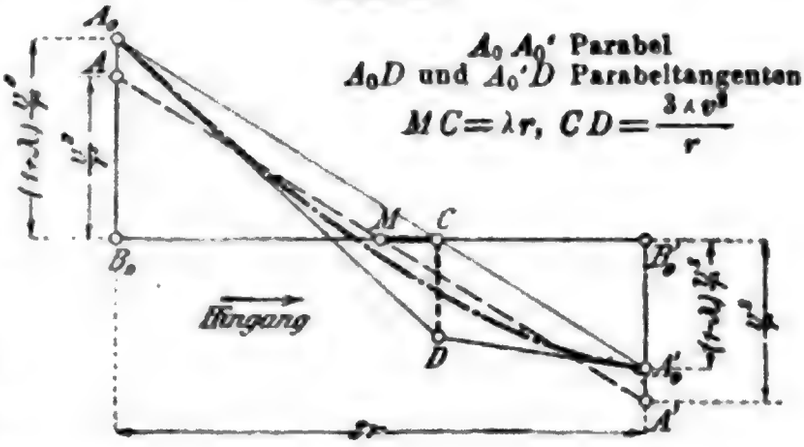
*) Ueber die Beachtung der Trägheit der Schubstange bei hoher Geschwindigkeit Autenrieth, Z. d. V. d. I. 1885 S. 716 ff. und 1896 S. 904

**) Civil-Ingenieur 1879 S. 612. (Konstruktion allgemein für die geschränkte Schubkurbel S. 883.) — Andere Konstruktion von Rittershaus, ebendas. S. 461. Vgl. Z. d. V. d. I. 1883 S. 283, 1895 S. 716, 1896 S. 983

Digitized by Google

Trägt man diese Werte von p zu den Kolbenstellungen als Ordinaten auf (Abb. 259), so liegen deren Endpunkte auf einer Parabel $A_0 A_0'$, die am einfachsten durch einhüllende Tangenten mit Hülfe der Tangenten in A_0 und A_0' (S. 104, Abb. 18) ermittelt wird. Den Schnittpunkt D beider Tangenten $A_0 D$ und $A_0' D$ erhält man, indem man vom Mittelpunkt M des Kolbenweges $B_0 B_0' = 2r$ aus um die Strecke $MC = \lambda r$ nach dem äufseren Totpunkt B_0' geht und in C ein Lot von der Länge $CD = \frac{3\lambda v^2}{r}$ nach unten errichtet.*)

Abb. 259.



Für den Rückgang ist die Beschleunigungskurve um 180° (um $B_0 B_0'$ als Achse) zu drehen.

Für $l = \infty$ ($\lambda = 0$) wird in Abb. 258 die Kurve p eine Gerade, ebenso in Abb. 259 die Parabel zur Geraden AA' und $p_0 = p_0' = \frac{v^2}{r}$ die gröfste Beschleunigung bzw. gröfste Verzögerung.

d. Beschleunigungsdruck b.

Der Beschleunigungsdruck b, bezogen auf 1 qcm Kolbenfläche, der bei positivem p vom Dampfüberdruck abzuziehen, bei negativem p dazuzurechnen ist, ergibt sich aus

$$b = \frac{p}{g} q \text{ kg/qcm}, = \frac{q v^2}{g r} (\cos\alpha \pm \lambda \cos 2\alpha), \text{ s. S. 884,}$$

worin q das im Kreuzkopfe vereinigt gedachte, auf 1 qcm der Kolbenfläche bezogene Gewicht (in kg) der hin- und hergehenden Teile und g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk² bezeichnet.

Die Masse der zum Teil schwingenden, zum Teil umlaufenden Schubstange ist nur mit etwa $^2/_3$ ihres Betrages zu berücksichtigen.

Nach Radinger ist i. M. für liegende Dampfmaschinen
ohne Kondensation: $q = 0{,}28$ kg/qcm,
mit „ $q = 0{,}33$ „ „

(Vgl. hierzu II. Bd. Dampfmaschinen, Wahl der Geschwindigkeit.)

b wird durch dasselbe Diagramm (Abb. 258, S. 884) wie p dargestellt, wenn man den Mafsstab so wählt, dafs

$$\frac{q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \text{ (kg)} = r \text{ (m)}.$$

In Abb. 259 bedeutet $A_0 A_0'$ die Linie für den Beschleunigungsdruck, wenn

$$B_0 A_0 = \frac{q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} (1 + \lambda); \qquad B_0' A_0' = \frac{q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} (1 - \lambda).$$

*) Begründung Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, II. Aufl. S. 35 ff.

Digitized by Google

B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse.

a. Kraftverhältnisse.

Normaldruck auf die Gleitbahn in kg: $N = P \operatorname{tg} \beta = S \sin \beta$;

für $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . . $N = P \frac{r}{l} = P\lambda$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$:

$$N_{max} = P \operatorname{tg} \beta_{max} \sim P \sin \beta_{max} \sim P \frac{r}{l} \sim P\lambda.$$

Als **rechtslaufend***) wird eine (liegende) Maschine bezeichnet, wenn bei der Stellung der Abb. 260 die Schubstange schiebt. Der Normaldruck auf die Gleitbahn ist dann stets nach unten gerichtet.

Schubstangenkraft in kg: . . . . . $S = \frac{P}{\cos \beta}$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . $S_{max} = \frac{P}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$;

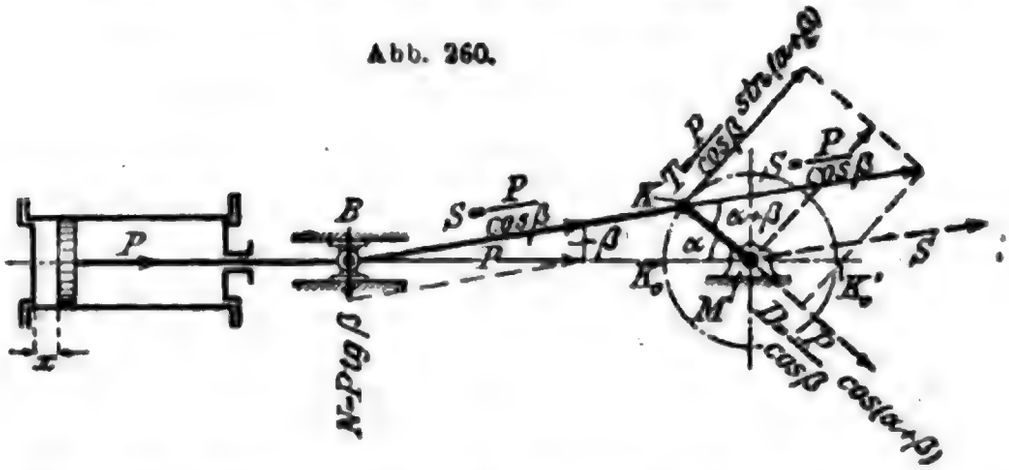
für $l = \infty$: . . . . . $S = P$.

Tangential-Kurbeldruck**) in kg: . $T = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$;

für $\alpha = 0$, $\alpha = 180^0$: . . . . $T_0 = 0$;
„ $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . . $T = P$;
„ $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . . $T_{max} = S = P\sqrt{1 + \lambda^2}$;
„ $l = \infty$: . . . . . $T = P \sin \alpha$.

(Diagramm vgl. VII. Regelnde Maschinenteile.)

Abb. 260.



Druck auf das Kurbellager. Zu dem Druck D auf die Kurbel (Abb. 260) tritt die Schubkraft T; im Kurbellager ist daher der Druck $\sqrt{D^2 + T^2} = S$ wirksam. Beim Hingang geht der Druck aus dem Lager hinaus, beim Rückgang in das Lager hinein.

---

*) Die Erklärung: „im Sinne des Uhrzeigers" versagt, da sie von der Stellung des Beobachters abhängt.

**) Zeichnerische Ermittlung der Tangentialkräfte beim Kurbeltrieb: Dr. techn. J. Kuhn, Dingler Pol. J. 1912.

Digitized by Google

b. Arbeitsverhältnisse.

Arbeit des Kolbendruckes: $P c dt = P v \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} dt,$

Arbeit des Tangential-Kurbeldruckes: $T v dt = P \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} v dt;$

beide in der Zeit dt geleisteten Arbeiten sind gleich grofs.

Ist P_m der mittlere Kolbendruck in kg und T_m der mittlere Tangential-Kurbeldruck in kg, so folgt aus

$$P_m 2r = T_m r \pi:$$

$$P_m = \frac{\pi}{2} T_m, \quad T_m = \frac{2}{\pi} P_m \text{ oder } P_m c_m = T_m v.$$

c. Reibungsverhältnisse.

Angenommen P unveränderlich (= P_m bezogen auf einen Kolbenhub).
Gesamtarbeit (in mkg) während einer halben Umdrehung: $A = P 2r.$

Ort der Reibung	Annähernde Reibungsarbeit mkg	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	unter Annahme von
Gleitbahn	$A_1 = \mu P \frac{r^2}{l} \frac{\pi}{2}$	$\frac{A_1}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{r}{l}$	$\frac{A_1}{A} = 0{,}009$	$\mu = 0{,}06,$ $r : l = 1/5$
Kreuzkopfzapfen	$A_2 = \mu P d_1 \beta_{max}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{\mu \beta_{max}}{2} \frac{d_1}{r}$	$\frac{A_2}{A} = 0{,}001$	$\frac{d_1}{r} = 0{,}20$
Kurbelzapfen	$A_3 = \mu P \frac{\pi d}{2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{d}{r}$	$\frac{A_3}{A} = 0{,}012$	$\frac{d}{r} = 0{,}25$
Wellenzapfen	$A_4 = \mu P \frac{\pi D}{2}$	$\frac{A_4}{A} = \frac{\mu\pi}{4} \frac{D}{r}$	$\frac{A_4}{A} = 0{,}021$	$\frac{D}{r} = 0{,}45$

In vorstehender Zusammenstellung ist
d der Kurbelzapfendurchm. in m,
d_1 der Kreuzkopfzapfendurchm. in m,
D der Wellenzapfendurchm. in m,
μ die Reibungszahl, angenommen $\mu = 0{,}06$,
$r : l = \lambda$, angenommen $= 1 : 5$.

Dann wird $\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A} = 0{,}043,$

d. h. 4 bis 5 % Arbeitsverlust im normalen Kurbeltriebe. (Voraussetzung: Kraft P während des ganzen Hubes unveränderlich.)

C. Kurbeln und Exzenter.

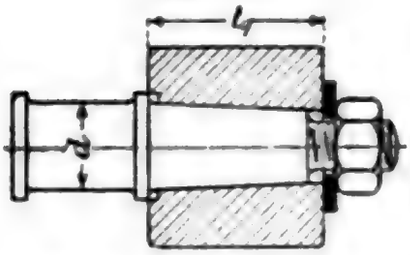
a. Kurbelzapfen.

Berechnung des Zapfens S. 836 ff. Befestigung des Kurbelzapfens Abb. 261, 262 u. 263. — Der Kegel des Zapfens ist sauber einzuschleifen

Digitized by Google

und dann durch Keil, Schraube oder Presse in die Kurbel hineinzupressen und darin zu sichern. Hat der kegelige Zapfen einen Anlauf (Abb. 261), so muſs an ihm so viel Spielraum bleiben, daſs die Schraube den Zapfen in die Kurbel hineinziehen kann. Mit Rücksicht auf Erneuerung des Zapfens wird Schrumpfverbindung (des dann oft zylindrischen Zapfens) mit der Kurbel nicht empfohlen. Wird der Zapfen kalt eingepreſst oder durch Erwärmen des Kurbelauges eingeführt, so wird er häufig durch Umnieten eines Randes gesichert. — Vorteil dieser Verbindung: Sie ladet durch Fortfall der Mutter nach hinten nicht aus.

Abb. 261.



b. Kurbel (Abb. 262 u. 263).

$d_1 = 2d$ (für geschmiedete Kurbeln),

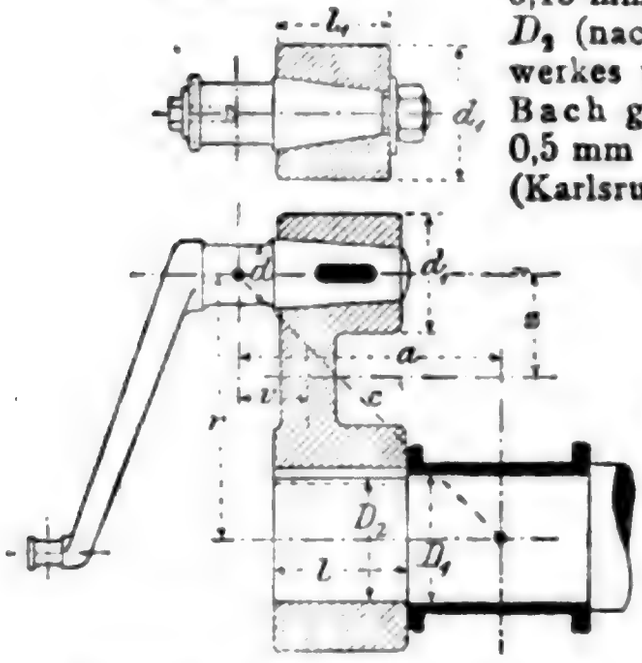
Anzug beiderseitig $^1/_{25}$ bis $^1/_{18}$, $l_1 = 1{,}5\,d$ bis $1{,}75\,d$, Keilhöhe i. M. $0{,}3\,l_1$ bis $0{,}4\,l_1$, Keilstärke $= 0{,}2\,d$ bis $0{,}25\,d$, Schraubendicke $= 0{,}5\,d$.

D_2 einige mm $< D_1$,

l je nach Genauigkeit der Ausführung: $\geqq D_2$, wenn warm oder mittels Presse aufgezogen; $\geqq 1{,}25\,D_2$, wenn aufgekeilt.

Bohrung bei D_2 bei warmem Aufziehen für Kurbeln aus Stahl, Fluſs- oder Schweiſseisen oder Stahlguſs, je nach der Zähigkeit und der Dehnungszahl des Stoffes um 0,1 bis 0,15 mm auf 100 mm Durchm. kleiner als D_2 (nach Angaben des Oberbilker Stahlwerkes und der Gutehoffnungshütte). — Bach gibt das höhere Schrumpfmaſs von 0,5 mm auf 100 mm an. Grassmann (Karlsruhe) macht nach neueren Ausführungen für das **Schrumpfmaſs***) die Angabe: $\frac{1}{1000}\,d + \frac{1}{20}$ mm.

Abb. 262 u. 263.



Bei Kaltaufziehen der Kurbel mit der Druckwasserpresse wird das Wellenende im Verhältnis 1 : 100 kegelförmig abgedreht. Hebelarm a von Kurbelzapfenmitte bis annähernd Lagermitte sei möglichst klein.

Wandstärke der Nabe $= 0{,}4\,D_2 + 1$ cm.

Kurbelarm. Für den im Abstande s von der Kurbelzapfenachse gelegenen Armquerschnitt bh (b die achsiale, h die tangentiale Abmessung des Armes) rufen folgende Kräfte Beanspruchungen hervor (Abb. 262, 263 u. 264):

*) „Preſssitz" und „Schrumpfsitz" nach Schlesinger, Mitt. Forschungsarb., Heft 18 S. 4 ff.

Digitized by Google

von der Normalkraft D herrührend: die Normalkraft D und das Biegungsmoment $M_2 = Dv$;

von der Tangentialkraft T herrührend: die Schubkraft T, das Biegungsmoment $M_1 = Ts$ und das Drehmoment $M_d = Tv$.

Die Normalkraft D und die Schubkraft T können vernachlässigt werden. Die Momente M_1, M_2 und M_d sind nach Maßgabe der Formeln auf S. 588 unter 3. zusammenzusetzen, und es sind die größten Beanspruchungen des Querschnitts bh in der dort angegebenen Weise zu ermitteln. Meistens ist die Beanspruchung in der Totstellung maßgebend, umsomehr, als die plötzliche Aenderung in der Richtung der Kräfte für die Totstellung die Wahl einer besonders niedrigen zulässigen Spannung erfordert. Hier ist das Biegungsmoment $M_b = Pv$ und die Zug- oder Druckkraft $= P$, mithin muß

$$\frac{M_b}{\frac{1}{6} b^2 h} + \frac{P}{bh} \lesseqgtr k_b \quad \text{oder} \quad P\left(v + \frac{b}{6}\right) \lesseqgtr k_b \frac{b^2 h}{6},$$

woraus sich h nach Annahme von b berechnen läßt.

Der **Wellenzapfen** mit dem Durchm. D_1 wird für das durch den größten Kolbendruck P hervorgerufene Biegungsmoment $M = Pa$ und das durch den größten Tangentialdruck T erzeugte Drehmoment $M_d = Tr$ nach S. 585 unter 1. berechnet. — Für Ueberschlagrechnungen kann das Drehmoment M_d vernachlässigt werden, wenn in dem Biegungsmoment M für den Hebelarm statt a der Abstand c von Mitte Kurbelzapfen bis Mitte Wellenzapfen gesetzt wird.

Beispiele von Kurbeln.

Abb. 264, geschmiedete Stirnkurbel;
Abb. 265, geschmiedete Stirnkurbel mit Gegengewicht;
Abb. 266, Gußkurbelscheibe mit Gegengewicht.

Abb. 264.

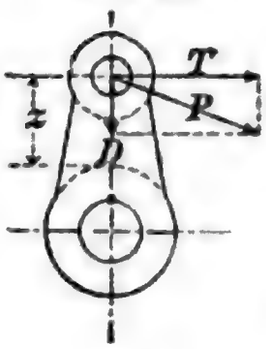


Abb. 265.

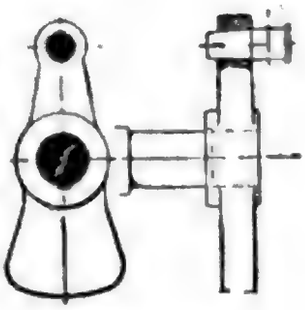
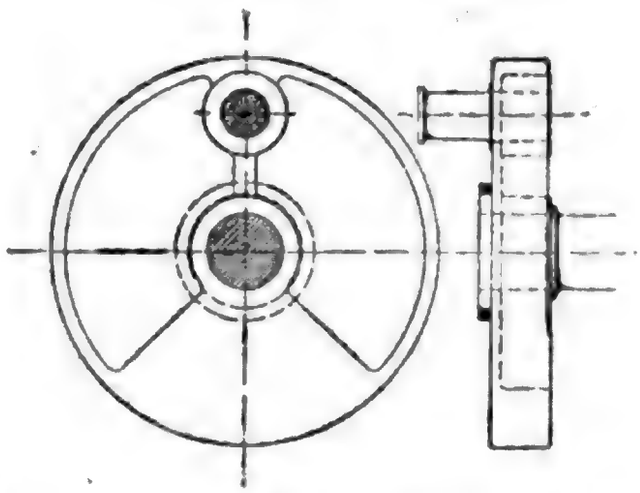


Abb. 266.



c. Kurbelkröpfung (Abb. 268).*)

Zu vergleichen ist außer Bach, die Maschinen-Elemente, 10. Aufl., 1908 S. 553 ff. und S. 573 ff. (Verfahren von Pfleiderer) insbesondere das Werk: „Mehrmals gelagerte Kurbelwellen" von Dr.-Ing. Max Enßlin, Stuttgart 1902, in dem der Rechnungsgang für mehrere Beispiele von drei- und viermal gelagerten, einfach und doppelt gekröpften Kurbelwellen für Gasmotoren und Dampfmaschinen durchgeführt ist.

*) Zeichnerische Ermittlung der Beanspruchungen der einfachen und doppelten Kurbelkröpfung (Krummachse) für verschiedene Fälle F. Reuleaux, Der Konstrukteur, 4. Aufl. S. 423 ff., Braunschweig 1882/89, F. Vieweg & Sohn.

Digitized by Google

Die wagerechte Kurbelwelle $acf_1g_1eg_2f_2d$ (Abb. 267) werde beansprucht:

in e durch die lotrechte Kraft $\pm P$, deren Moment $M = Pr$ durch die in a sitzende Schwungriemenscheibe abgeleitet wird;

in a durch das lotrechte Gewicht G der Riemenscheibe.

Lager der Welle in c und d.

Die wagerechte Seitenkraft zu P (durch die Schubstange) sowie der Riemenzug in a werden vernachlässigt.

Abb. 267.

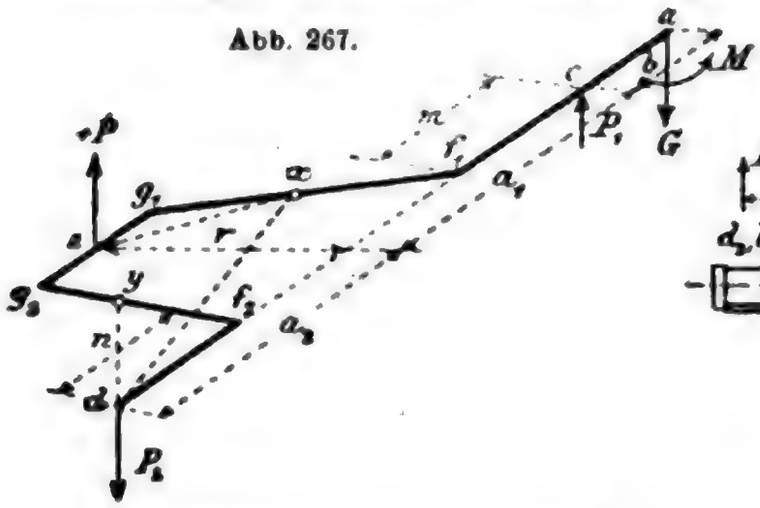
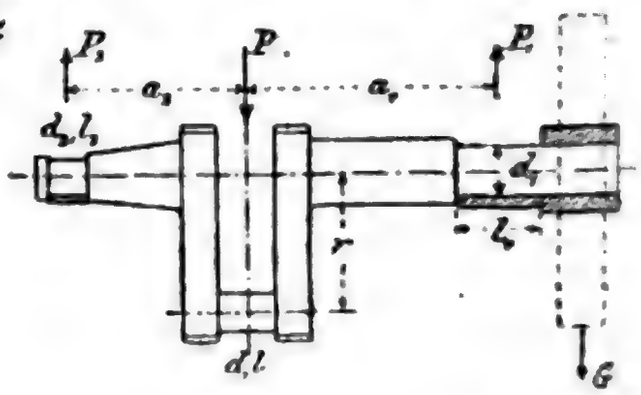


Abb. 268.



Lagerdruck in c: $P_1 = G\dfrac{b + a_1 + a_2}{a_1 + a_2} - P\dfrac{a_2}{a_1 + a_2}$ nach oben,

in d: $P_2 = G\dfrac{b}{a_1 + a_2} + P\dfrac{a_1}{a_1 + a_2}$ nach unten.

Beanspruchung der Querschnitte durch ein Biegungsmoment M_b und ein Drehmoment M_d, die nach S. 585 zusammenzusetzen sind.

Querschnitt c: $M_b = Gb$; $M_d = Pr$.

Querschnitt f_1 der Welle: $M_b = G(m + b) - P_1 m$; $M_d = Pr$.

Querschnitt f_2 der Welle: $M_b = P_2 n$; $M_d = 0$.

Querschnitt x (beliebig): die Kräftepaare $P \cdot \overline{ex}$ und $P_2 \cdot \overline{dx}$ sind in je zwei Seitenpaare in der Ebene des Querschnitts und senkrecht dazu zu zerlegen. Die Summe der ersteren ergibt M_d, die der letzteren M_b. (Berechnung des rechteckigen Querschnitts S. 588.)

Querschnitt y (beliebig): Mit dem Kräftepaar $P_2 \cdot \overline{dy}$ ist zu verfahren wie vorher. — Querschnitt e: $M_b = P_2 a_2$, $M_d = P_2 r$.

Die Untersuchung ist für beide Richtungen der gröfsten lotrechten Kraft P anzustellen; die gröfseren Momente sind mafsgebend.

Länge des Zapfens e nach S. 867 für P mit $w = 37\,500$, des Zapfens c für P_1 mit $w = 15\,000$ zu bestimmen. Der Stirnzapfen d ist für P_2 unter den nämlichen Annahmen wie bei c zu berechnen. Dabei ist die Gröfse des Flächendruckes p nach S. 836 zu prüfen.

Für andere Belastungsfälle und Arten der Kraftableitung ist die Berechnung der Kurbelkröpfung ähnlich durchzuführen.

Für Ableitung der Kraft gleichmäfsig nach beiden Seiten des Krummzapfens $d\,l$, also für $a_1 = a_2 = a$ und $d_2 = d_1$ ergibt sich (in Abb. 268) bei

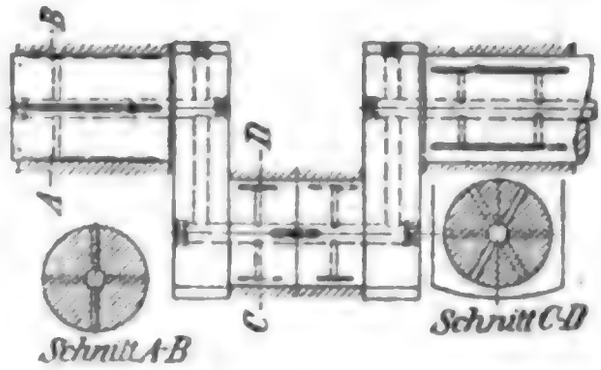
$r : a =$	0,4	0,6	0,8	1,0
$d_2 : d =$	1,055	1,105	1,158	1,210

Digitized by Google

Eine **Kurbelwelle** mit Druckschmierung von innen (für eine Grofsgasmaschine der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg) zeigt Abb. 269.

Die vielfach gekröpften Kurbelwellen von **Automobil-** und **Luftschiffmotoren** werden aus dem Vollen herausgearbeitet. — Baustoff für die ersteren: Chromnickelstahl von 7500 bis 9500 kg Zerreifsfestigkeit für 1 qcm bei einer Dehnung von 15 bis 10 %; für die letzteren: Chromnickelstahl von 11 000 bis 12 000 kg für Zerreifsfestigkeit für 1 qcm, Dehnung 12 bis 10 %.

Abb. 269.



Lokomotivachsen (auch die Kurbelwellen von Schiffsmaschinen und anderen Dampfmaschinen) werden, um das Schmiedeverfahren zu vereinfachen, aus einzelnen Teilen aufgebaut.*) Abb. 270 neunteilige Lokomotivachse von Webb; Abb. 271 dreiteilige Lokomotivachse der österreichischen Staatsbahnen v. d. Witkowitzer Bergbau- u. Eisenhütten-Gewerkschaft.

Abb. 270.

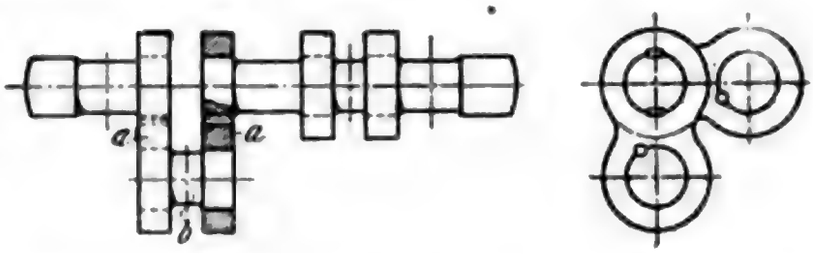
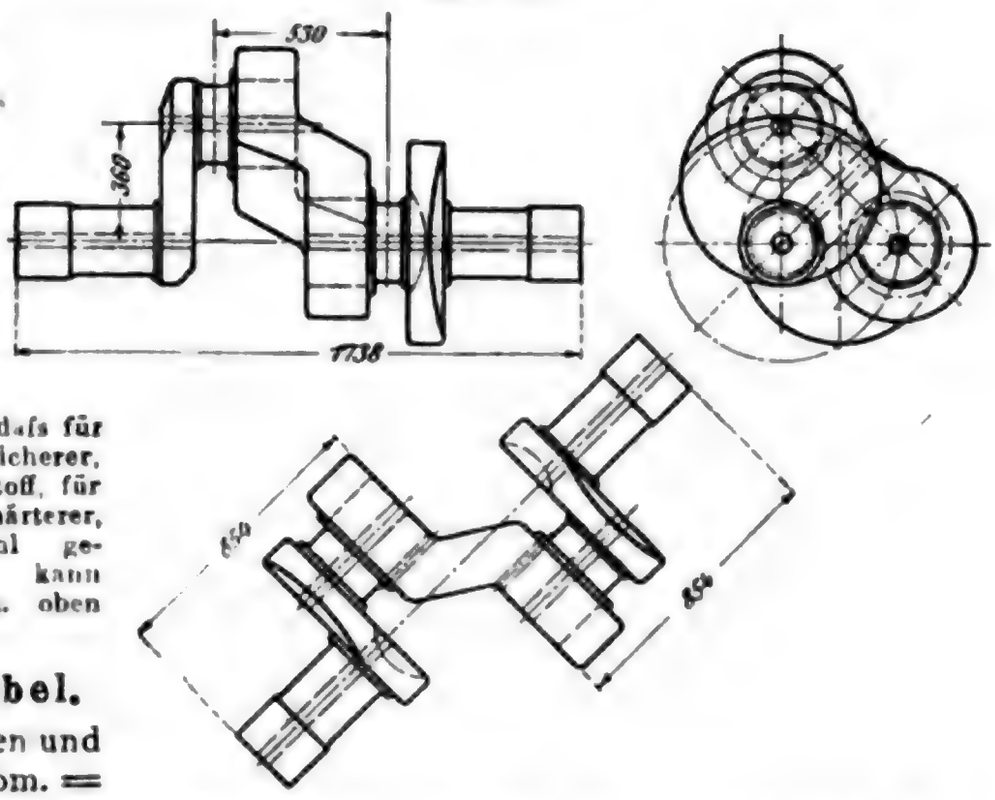


Abb. 271.



Für Schiffsmaschinen wird die Teilung auch so vorgenommen, dafs die Kurbelarme *a a* (Abb. 270) mit dem Kurbelzapfen *b* aus einem Stück hergestellt und beiderseits durch Aufschrumpfen mit dem Wellenschaft verbunden werden. — Die völlige Teilung nach Abb. 270 ergibt den Vorteil, dafs für die Arme *a a* weicherer, gut schmiedbarer Stoff, für den Kurbelzapfen *b* härterer, dichterer Flufsstahl genommen werden kann (Schrumpfmafs vgl. oben unter b. Kurbel).

d. Handkurbel.

Für Bauwinden und dgl.: Kurbelhalbm. =

*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1656 und 1910 S. 521.; Engineer. August 1909 S. 148 u. 225; Organ 1909 S. 206 (Tafel XXXIV); Scientific American Supplement, 10. Sept. 1910 S. 172.

Digitized by Google

35 bis 40 cm. Kurbelwelle über dem Stande des Arbeiters 0,90 bis 1,20, besser 1,00 bis 1,05 m. Die gröfseren Zahlen (Abb. 272) für zweimännige, die kleineren (eingeklammerten) für einmännige Kurbeln. Durchm. des drehbaren Holzgriffes oder Gasrohres 40 bis 50 mm, Stift hierzu 26 (17) mm. Durchm. der Handkurbelwelle 40 (30) mm; Nabenlänge 60 (45) mm. Kurbeldruck eines Arbeiters im Mittel 10 bis 15 kg, vorübergehend bis 20 kg. Umfangsgeschw. 0,5 bis 1,0 m/sk. — Sicherheitskurbeln S. 864.

Abb. 272.

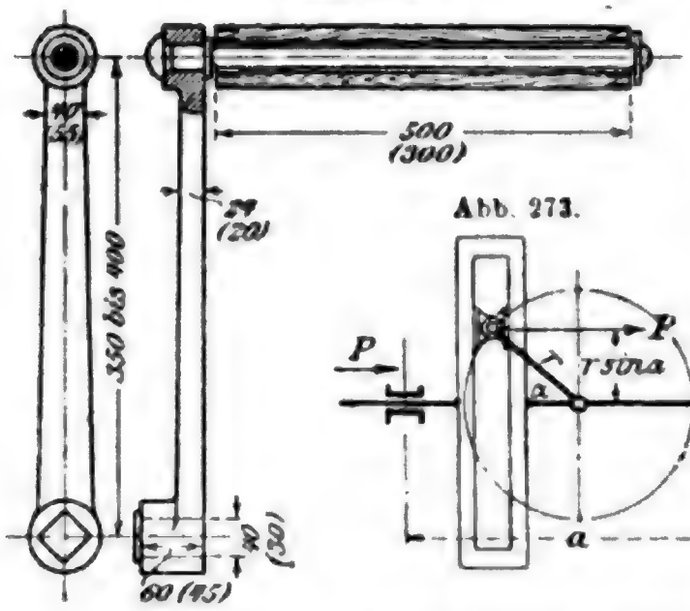
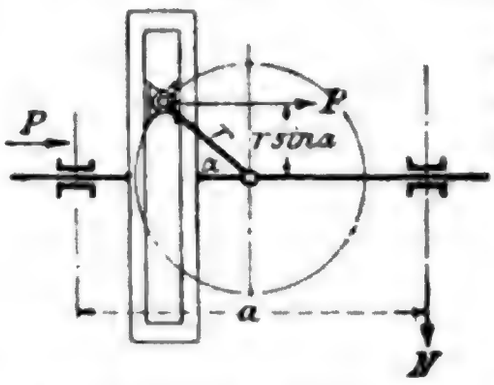


Abb. 273.



e. Kurbelschleife (Abb. 273).

Kolbenweg $x = r(1 - \cos\alpha)$,

Führungsdruck $N = \dfrac{Pr \sin\alpha}{a}$ (sehr grofs),

Arbeitsverlust bei einer Umdrehung $A_r = 2 P_\mu \dfrac{r^2}{a} \pi + 4 P_\mu r$,

Arbeitsverlust $A_r = 0{,}20$ bis $0{,}30$ der Gesamtarbeit A (sehr grofs).

Ausführung bei kleinen Maschinen, besonders unmittelbar wirkenden Dampfpumpen, wegen der kleinen Baulänge.

f. Exzenter.

Breite b (in cm), d. h. die Länge des Zapfens, an dessen Stelle das Exzenter getreten ist, unter mittleren Verhältnissen:

$$b \geqq \frac{Pn}{w},$$

wenn

P den in der Mittelebene des Exzenters wirkenden mittleren Druck in kg,

n die minutliche Umlaufzahl des Exzenters,

w eine Erfahrungszahl bedeutet, die um so gröfser ist, je kleiner die Reibungszahl und je bedeutender unter sonst gleichen Verhältnissen die ableitbare Wärmemenge ist. Im Mittel sei

$w = 10\,000$ für Flufseisen oder Stahl (für den Bügel) auf Gufseisen (für das Exzenter),

$w = 20\,000$ für Weifsmetall (Futter der Exzenterbügel) auf Gufseisen.

Für Lokomotiven, deren Exzenter starkem Luftzug ausgesetzt sind, kann w höher gewählt werden. — Ist weiterhin

Digitized by Google

d der Durchm. des Exzenters in cm (Abb. 274),
D der Durchm. der Welle in cm,
s die kleinste Nabenstärke des Exzenters in cm,
x die Stärke des äufseren Randes in cm, entsprechend der Schulterhöhe eines Zapfens vom Durchmesser D_0 (unten und S. 836),
ϱ die Exzentrizität in cm, so gilt die Beziehung:

$$d = D + 2s + 2x + 2\varrho.$$

Ist D_0 die Wellenstärke (in cm), die dem zu übertragenden Drehmomente $M_d = Pr = 0{,}2\, k_d\, D_0^3$ (S. 568) entspricht, so kann für gufseiserne Exzenter gewählt werden:

$$s = 0{,}2\,(D_0 + {}^1/_2\, D) + 0{,}5 \text{ cm bis } 0{,}25\,(D_0 + {}^1/_2\, D) + 0{,}5 \text{ cm}.$$

Exzenter aus Flufseisen oder Stahl erhalten eine um 20 bis 30 % geringere Nabenstärke s.

Arbeit des Exzenterdruckes P (in cmkg) für 1 Umdrehung: $A = P\,4\varrho$,
Arbeitsverlust durch Exzenterreibung „ „ $A_1 = P\mu_1 \pi d$,
„ „ Wellenreibung „ „ $A_2 = P\mu_2 \pi D$,

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{A}{A + A_1 + A_2} = \frac{1}{1 + \mu_1 \frac{\pi}{4}\frac{d}{\varrho} + \mu_2 \frac{\pi}{4}\frac{D}{\varrho}}.$$

Beispiel. $\varrho = 60$ mm, $D = 200$ mm, $d = 400$ mm, $\mu_2 = \mu_1 = 0{,}06$ ergibt $\eta = 0{,}68$.

Nutenkeile für die Befestigung der Exzenter auf ihren Wellen nach Tafel S. 739. Mit Rücksicht auf gerades Aufkeilen lange Naben zu empfehlen. Für Steuerungen neuerdings verstellbare Befestigung mittels gezahnter Feder oder besonderen in die Welle eingelassenen Zahnsegmentes. — Der Bügel kann mit seinen die Exzenterscheibe umfassenden Rändern eine Oelrinne bilden.

Beispiele von Exzentern Abb. 274 u. 275. — Abb. 276 ein Exzenter mit Kugellagerung der Deutschen Waffen- und Munitions-

Abb. 274.

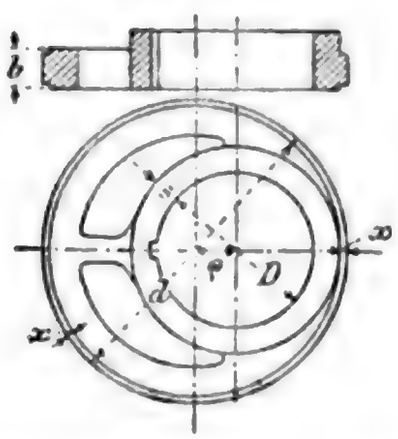
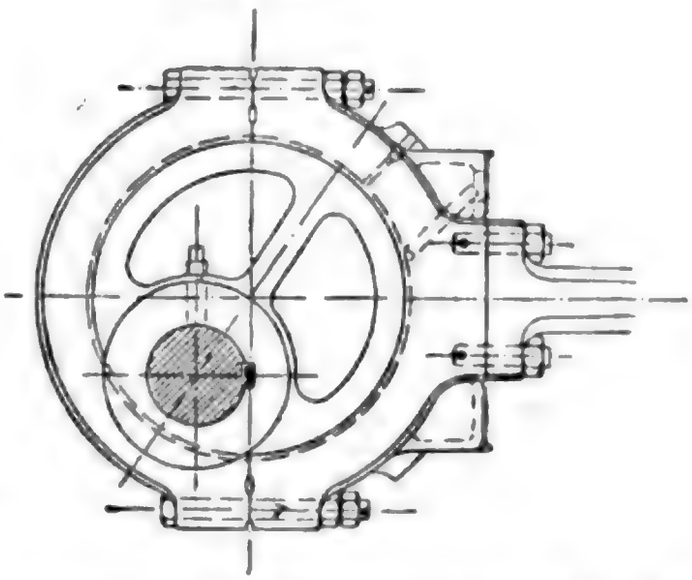


Abb. 275.

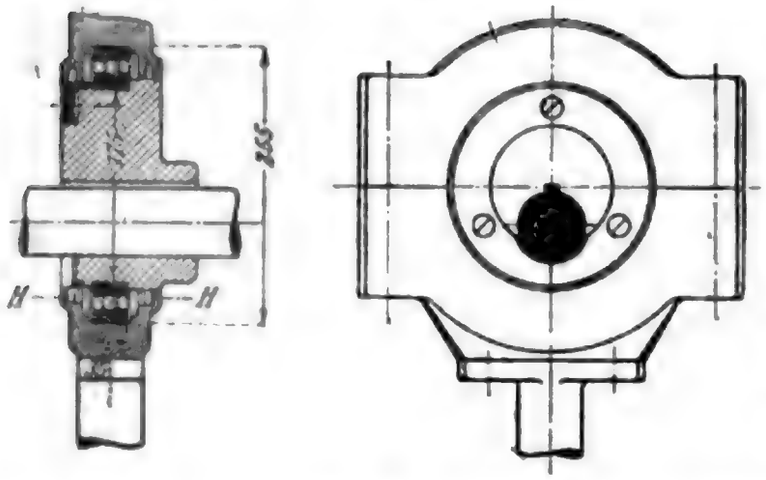


fabriken, Berlin. Das Exzenter ist mindestens jede Woche einmal mit Zylinderöl zu füllen. Exzenterscheiben auf Kurbelwellen (bei Zweizylindermaschinen, oder wenn die Welle an der Stelle schwächer

Digitized by Google

ist) macht man zweiteilig, um vorheriges Aufpressen der Kurbeln zu ermöglichen.

Abb. 276.



Exzenterstangen sind wie Schubstangen (s. u.) zu berechnen; man benutze die entsprechenden Gleichungen mit $\mathfrak{S} = 40$; gleichzeitig mufs die gröfste, durch Eigengewicht und Stangenkraft erzeugte Druckspannung bei Schmiedeisen < 300, bei Gufseisen oder Bronze < 150 kg/qcm sein; der Einfluss der Durchbiegung der Stange ist dabei erforderlichenfalls zu berücksichtigen.

D. Schubstangen.

a. Schaft der Schubstangen.

Es bezeichnet im folgenden
P die gröfste Stangenkraft in kg,
L die Länge der Stange von Mitte bis Mitte Zapfen in cm,
J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in der Mitte in cm^4,
E den Elastizitätsmodul des Baustoffes der Stange in kg/qcm,
$\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken (S. 514),
r den Kurbelhalbm. in cm und n die Umlaufzahl i. d. Min.

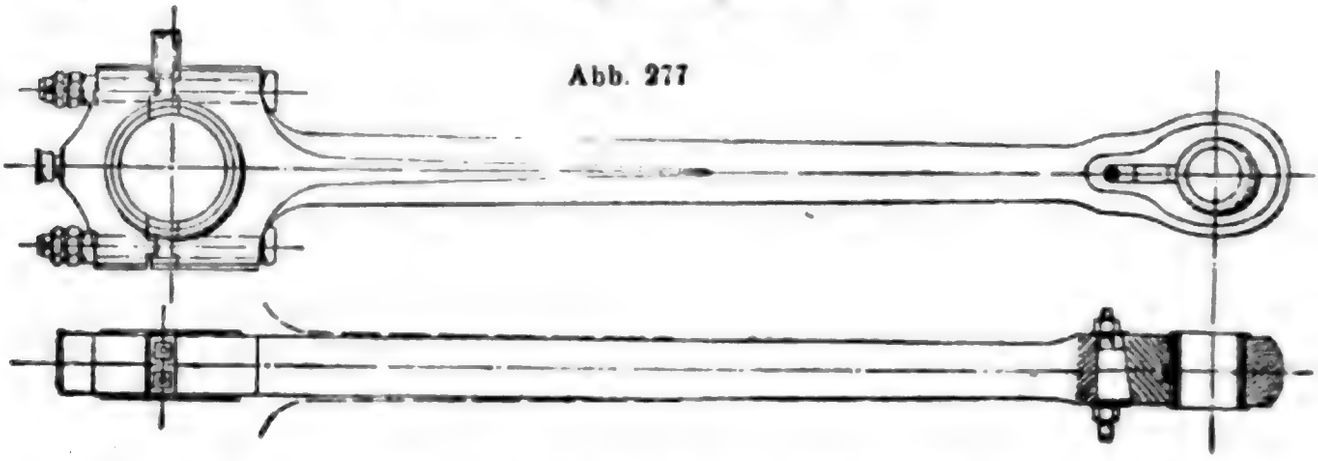
1. Stangen für kleine und mittlere Geschwindigkeiten.

1. Stange mit Kreisquerschnitt (vom Durchm. d_m in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} E \frac{J}{L^2} \sim 40\,000 \frac{{d_m}^4}{L^2} \text{ (Fall 2, S. 513),}$$

wenn $\mathfrak{S} = 25$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm gesetzt wird.

Abb. 277



Nach dem Kurbelzapfen hin nimmt der Stangendurchm. bis $0{,}8\,d_m$, nach dem Kreuzkopfzapfen hin bis $0{,}7\,d_m$ oder $0{,}75\,d_m$ ab. Bei grofsem Kurbelzapfen (bei gekröpften Wellen) läfst man den Quer-

igitized by Google

schnitt nach dem Kurbelzapfenkopfe der Schubstange hin wachsen (im Verhältnis bis 1 : 1,3), oder man greift (Abb. 277) zur Abflachung. — Nach dem Kreuzkopf zu sind Schubstangen neuerer Dampf- und Gasmaschinen meist gegabelt (Abb. 284 u. 286, S. 898).

Bei sehr langsam gehenden Maschinen wähle man $\mathfrak{S}$ bis 33; bei stofsweisem Wechsel der Richtung von P (möglich z. B. bei Pumpen) sei $\mathfrak{S}$ etwa 40 bis 60 und mehr.

2. **Stange mit rechteckigem Querschnitt** (von der Breite b cm und der Höhe $h = 1{,}75\,b$ bis $2\,b$ cm in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}}\,E\,\frac{1}{12}\,\frac{b^3 h}{L^2},$$

woraus mit $\mathfrak{S} = 15$, $h = 1{,}8\,b$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm:

$$P = 200\,000\,\frac{b^4}{L^2} \text{ für } \textbf{Schmiedeisen},$$

und mit $\mathfrak{S} = 15$, $h = 1{,}5\,b$, $E = 120\,000$ kg/qcm:

$$P = 10\,000\,\frac{b^4}{L^2} \text{ für } \textbf{Holz}.$$

Höhen an den Köpfen $= 1{,}2\,h$ und $0{,}8\,h$; Breite b unveränderlich.

2. Stangen für grofse Geschwindigkeiten.

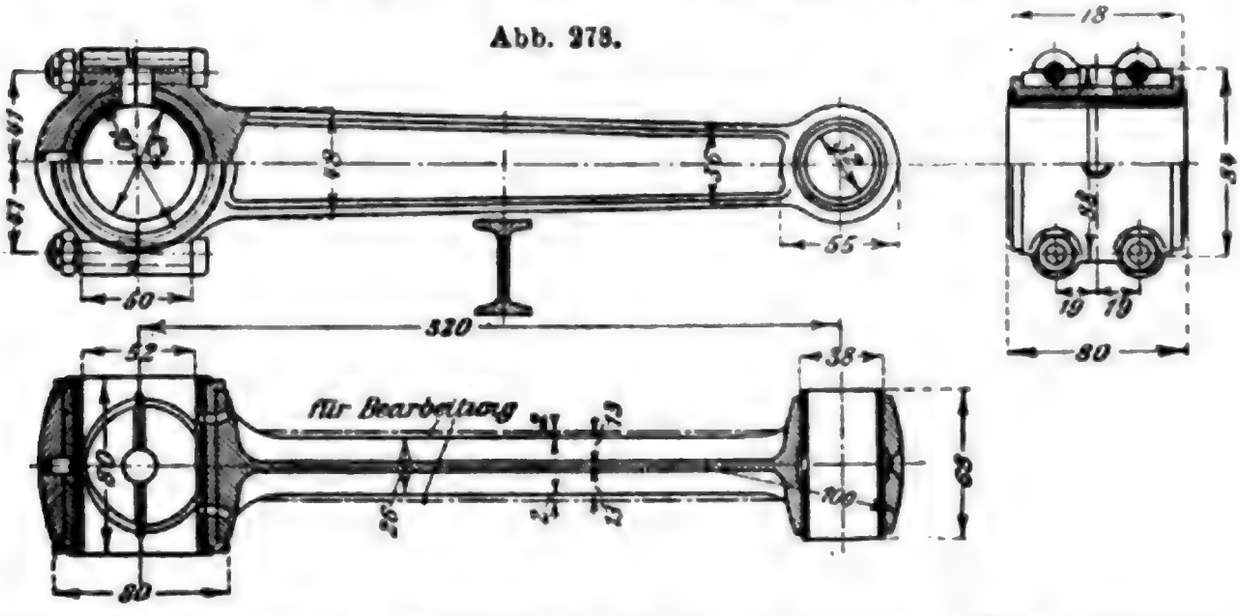
Beispiele solcher Stangen sind die **Lokomotivschubstangen** (III. Bd., 15. Abschn. Eisenbahnwesen). Unter Voraussetzung rechteckigen Querschnittes von der Breite b und der Höhe h cm ergibt sich bei $\mathfrak{S} = {}^{20}/_{3}$ bis ${}^{10}/_{3}$, $h = 2\,b$, $E = 2\,000\,000$ kg/qcm:

$$P = 500\,000\,\frac{b^4}{L^2} \text{ bis } 1\,000\,000\,\frac{b^4}{L^2}.$$

Vielfach $\mathfrak{S}$ noch niedriger als ${}^{10}/_{3}$ genommen (2,5 bis 3).

Der Umstand, dafs sich bei raschem Wechsel von Zug und Druck Formänderungen nicht ausbilden können, unterstützt die in der Wahl des Wertes von $\mathfrak{S}$ liegende Absicht, die Stangen wegen der störenden

Abb. 278.



Lokomotivbewegungen möglichst leicht zu halten. Um möglichst geringes Gewicht zu erzielen, gibt man den Stangen durch seitliches Ausfräsen auch wohl I-förmigen Querschnitt.

Digitized by Google

Abb. 278 zeigt eine solche Schubstange für einen Wagen- oder Luftschiffmotor der NAG in Berlin-Oberschöneweide, die gepreßt und auf die I-Form der Abbildung gefräst ist. — Baustoff für Wagenmotoren: Martinstahl von 6000 kg/qcm Zerreißfestigkeit und 20 bis 18 % Dehnung. — Die Schubstangen für Flugmotoren*) (Wright) sind aus Chromnickelstahl aus dem Vollen gearbeitet. Zerreißfestigkeit 8000 kg/qcm; Dehnung 12 bis 8 %. Die nach dem Kurbelzapfen hin stärker werdende Stange ist für Umlaufzahlen bis 2500 in 1 min und für Kolbengeschw. von 10 m/sk berechnet. — Die Fläche $l \cdot d$ des Kolbenbolzens beträgt im Mittel $^1/_6$ der Kolbenfläche, die Fläche des Kurbelzapfens im Mittel $^1/_8$ der Kolbenfläche

Bei den **Lokomotivkuppelstangen** ist anzunehmen, daß die Schubstangenkraft auf die gekuppelten Achsen gleichmäßig verteilt wird; in dem größeren Werte von $\mathfrak{S} (= {}^{20}/_3)$ liegt genügende Sicherheit gegen die Gefahr des Gleitens eines der gekuppelten Räder.

Für Schub- und Kuppelstangen ist festzuhalten, daß

$$\frac{P}{b\,h} = \frac{1}{30}\left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{L^2 r}{h} \leqq k_b,$$

worin im Falle vollständigen Wechsels der Spannungen zu setzen ist: bei gewöhnlichem Schweiß- oder Flußeisen $k_b = 300$, bei vorzüglichem Schweiß- oder Flußeisen $k_b = 400$, bei gutem Flußstahl $k_b = 500$ kg/qcm.

Die Beanspruchung einer prismatischen Stange durch die **Trägheitskräfte** im Augenblick des größten Ausschlages ist nach C. Bach nahezu die eines Trägers auf zwei Stützen von der Stützweite L, der durch die Dreiecklast $^1/_2 q L$ (gemäß Fall 12, S. 579) belastet ist. Die Last im Kreuzkopf A ist $= 0$, die Last im Kurbelzapfen für 1 cm Stangenlänge $q = \frac{f\gamma}{g}\frac{v^2}{r}$, worin f der Stangenquerschnitt, γ das Gewicht der Raumeinheit ist; v und r S. 881. Die ganze Belastung ist daher gleich der halben Fliehkraft der im Kurbelzapfen vereinigt gedachten Stangenmasse.**)

Die Schubstangen und Kuppelstangen der Lokomotiven (ebenso das gesamte Getriebe von Automobilmotoren) werden vielfach, ausgehend von der am Triebrad wirkenden Umfangskraft (Schienendruck, Bremskraft), berechnet. — So ist z. B. das Gestänge der von der Hannoverschen Maschinenbau A. G. vorm. G. Eggestorff für die Preußische Staatseisenbahnverwaltung gelieferten **Schnellzug- und Güterzuglokomotiven für einphasigen Wechselstrom*****) so auf Bremsung berechnet, daß $^1/_3$ des Adhäsionsgewichtes als am Radumfang wirkend angenommen ist. Dabei ist bei den Treibstangen $\mathfrak{S} = 2$ bis 8,5, bei den Kuppelstangen $\mathfrak{S} = 4{,}5$ bis 5 gesetzt.

b. Köpfe der Schubstangen.

Der den **Kurbelzapfen** umschließende Kopf ist entweder geschlossen — Nachstellung†) durch Druckschraube (Abb. 279) oder Keil (Abb. 280, 281, 282 u. 284) — oder offen, lagerartig (Abb. 283 u. 286) oder Kappenkopf (Abb. 287). — Je nach der Anordnung des

*) Z. d. V. d. I. 1909 S. 580 ff.

**) Vgl. Autenrieth, Z. d. V. d. I. 1895 S. 716; Land, dsgl. 1896 S. 904.

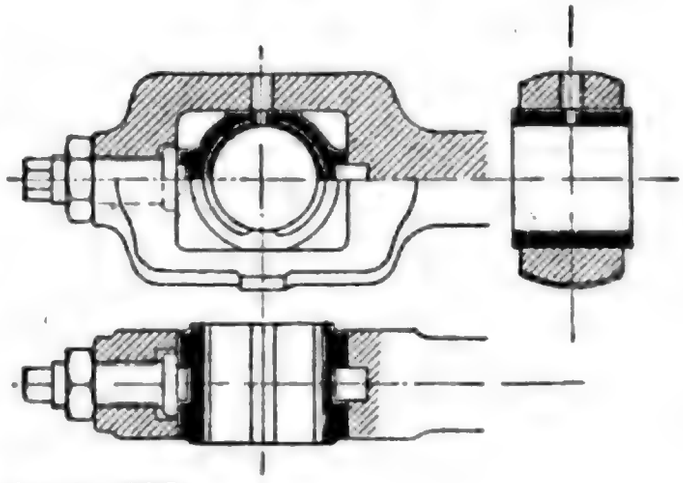
***) Gestänge für elektrische Lokomotiven: Z. d. V. d. I. 1909 S. 993 (Zusammenstellung), 1084, 1163 u. 2116; ebenda 1910 S. 558 u. 650; Dingler Pol. J. 15. Juni 1912.

†) S. auch Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1908 S. 492 ff.

Digitized by Google

Kreuzkopfes ist der zugehörige Stangenkopf lagerartig (Abb. 281, 282, 283 u. 286) oder gabelförmig den Bolzen tragend (Abb. 284 u. 287) oder gegabelt und lagerartig (Abb. 286 oben). Die Nachstellvorrichtungen zweier Köpfe einer Stange sollten stets so angeordnet werden, dafs die Stangenlänge L von Mitte zu Mitte Zapfen unverändert bleibt; diese Bedingung wird nicht immer erfüllt (vgl. die Schubstange einer Schiffsmaschine, Abb. 286, sowie die zusammengehörigen Köpfe, Abb. 283 u. 293, S. 900).

Abb. 279.



Befestigung des Weifsmetallfutters möglichst sicher wählen, damit das Futter beim Hämmern nicht abplatzt (Abb. 285).

Abb. 280.

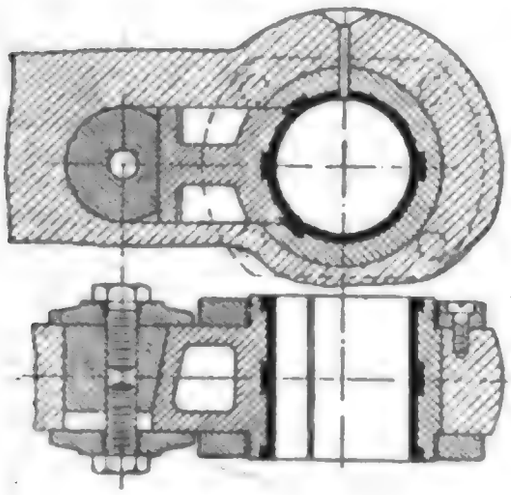


Abb. 281.

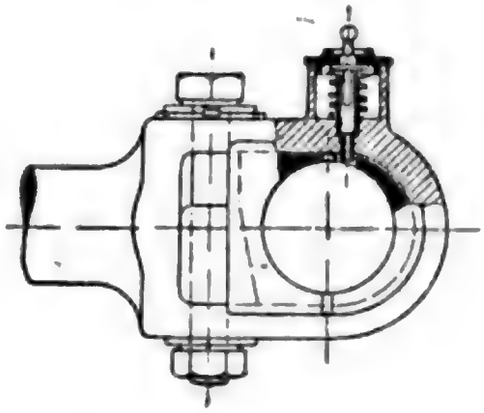


Abb. 283.

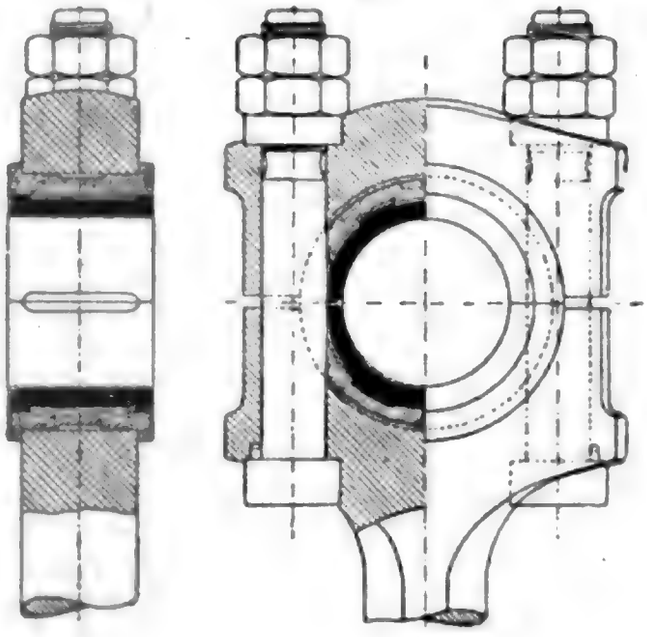
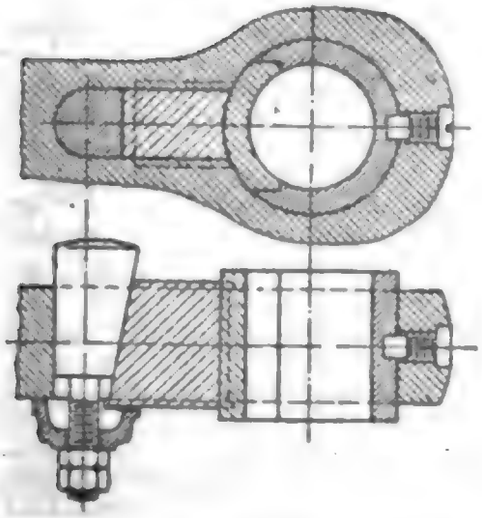


Abb. 282.



Digitized by Google

Abb. 284.

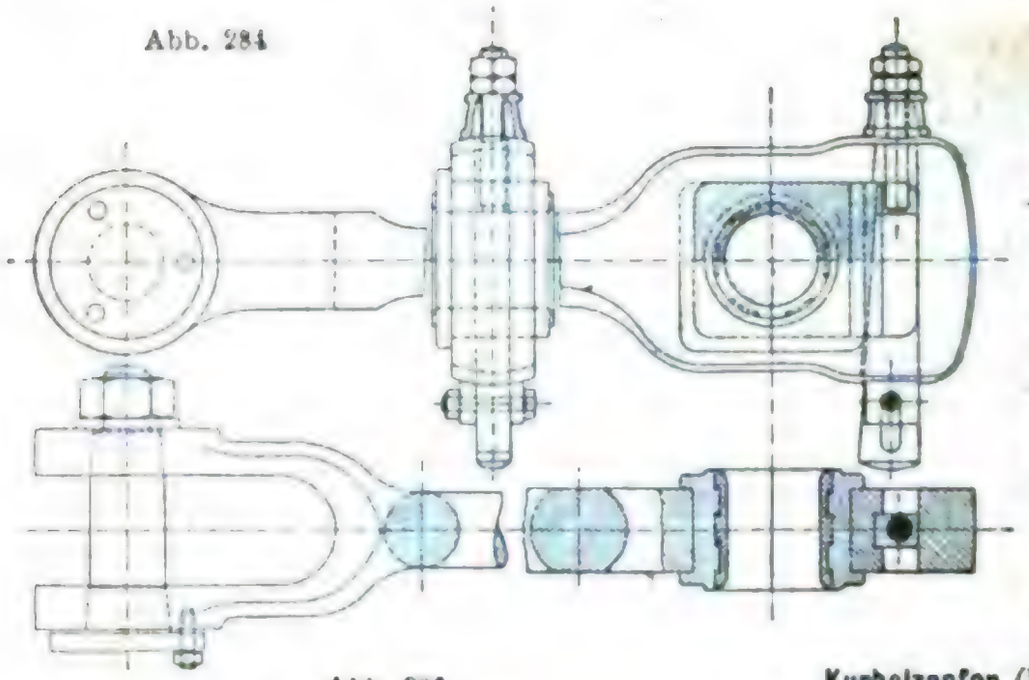
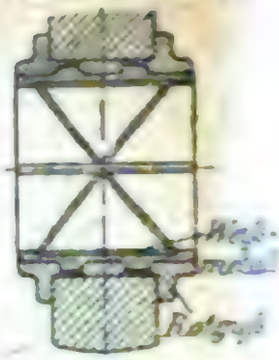


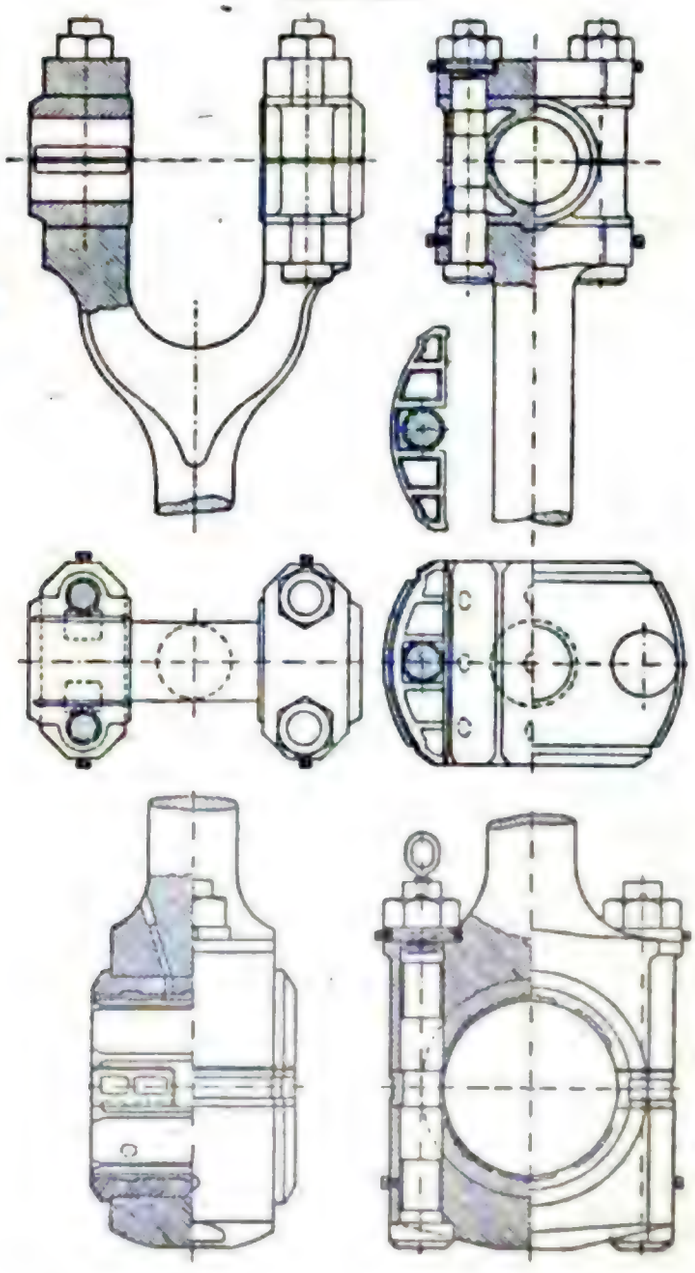
Abb. 285.



Beispiel der Berechnung der Köpfe einer Schubstange (Abb. 287).

$P = 7800$ kg;
$n = 40$;
$L = 250$ cm.

Abb. 286.



Kurbelzapfen (Flufsstahl): nach S. 836 ff. $k_b = 500$ kg/qcm und $k = 60$ kg/qcm wird $d = 10$ cm, $l = 13$ cm (danach $b = 11{,}6$ cm).

Kreuzkopfzapfen (Flufsstahl): für $k = 80$ kg/qcm, $l_1 = 1{,}5\, d_1$ wird $d_1 \sim 8$ cm, $l_1 = 12$ cm.

Keildicke: $s_3 = {}^1/_4\, b \sim 3$ cm.

Aus $s_3 s_4 k = 0{,}5\, P$ folgt für $k = 450$ kg/qcm Auflagerdruck zwischen Keil und Bügel $s_4 = 3$ cm.

Bügeldicke s_5 (Schweifseisen) läfst sich für Biegung ermitteln aus

$$\frac{P}{2}\, x = k_b\, \frac{b\, s_5^2}{6}$$

mit $k_b = 600$ kg/qcm und $x = 4{,}4$ cm: $s_5 = 3{,}8$ cm

Mittlere Keilhöhe: s_6 (für alle drei Keile gleich) folgt aus

$$\frac{1}{3}\,\frac{P}{2}\, x = k_b\, \frac{s_3\, s_6^2}{6},$$

mit $k_b = 1000$ kg/qcm (Flufsstahl): $s_6 = 3{,}4$ cm.

Die Tangente des halben Winkels an der Spitze des Keiles wird bei Sicherung durch eine Schraube zweckmäfsig gleich 1 : 20 gewählt, so dafs die Nachstellbarkeit von 0,8 cm eine Verschiebung des Keiles um 8 cm erfordert.

Der **linke Kopf** wird, nachdem die Schaftstärke d_m aus

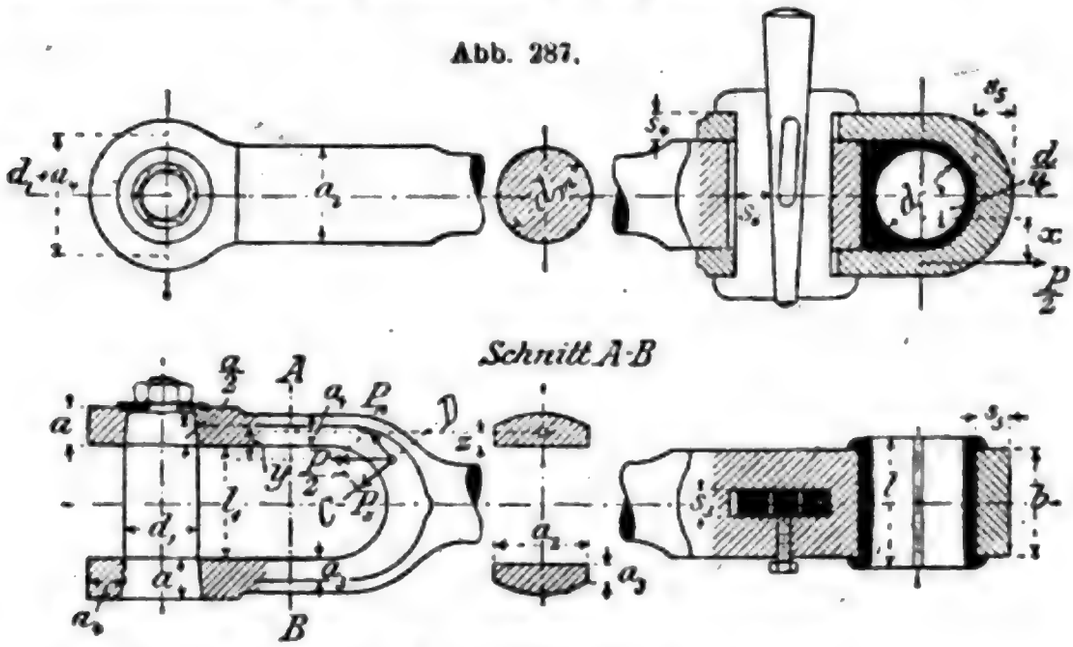
$$P = 40\,000\, \frac{d_m^4}{L^2} \text{ zu } d_m = 10{,}5 \text{ cm}$$

ermittelt worden ist, entworfen, also Breiten und Stärken angenommen und alsdann auf die Zulässigkeit der angenommenen Abmessungen geprüft; z. B. $a_1 = 4$ cm, $a = 4{,}6$ cm. $a_2 = 10$ cm gewählt, $a_3 = 2{,}7$ cm ermittelt.

Digitized by Google

Der Querschnitt AB wird durch die abwechselnd als Zug und als Druck auftretende Kraft $^1/_2 P$ und durch das Biegungsmoment $^1/_2 P\,(^1/_2 a - z)$ beansprucht, worin z den Schwerpunktabstand des Querschnittes (in cm) bedeutet.

Abb. 287.



Z. B. für die mittlere Höhe des Querschnittes = 3,3 cm und

$$\frac{a}{2} - z = \frac{4{,}6}{2} - \frac{3{,}3}{2} = 0{,}65 \text{ cm}$$

ergibt die erstere Beanspruchung die Normalspannung $\sigma_1 = \frac{3900}{10 \cdot 3{,}3} = 118$ kg/qcm, die letztere die gröfste Biegungsspannung $\sigma_2 = \frac{3900 \cdot 0{,}65}{^1/_6 \cdot 10 \cdot 3{,}3^2} = 140$ kg/qcm.

Gröfste Gesamtspannung $118 + 140 = 258$ kg/qcm, während für Schweifseisen 300 kg/qcm (Belastungsweise III, S. 503) noch zulässig ist.

Wählt man deshalb $a_1 = 3{,}6$ cm, $a = 4{,}2$ cm, $a_2 = 10$ cm, so erhält man

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 135 + 180 = 315 \text{ kg/qcm},$$

was noch zulässig ist.

Der Querschnitt CD wird beansprucht durch die zu vernachlässigende Schubkraft P_s, die Normalkraft P_n und das Biegungsmoment $^1/_2 Py$. Für den vorliegenden Fall ist $P_n = 2250$ kg, $y = 3{,}6$ cm, $^1/_2 Py = 3900 \cdot 3{,}6$,

und demnach $\sigma_1 + \sigma_2 = 331$ kg/qcm, was statthaft ist.

a_4 folgt aus $$\frac{P}{2}\,\frac{d_1 + a_4}{8} = k_b\,\frac{a\,a_4^2}{6},$$

mit $k_b = 600$ kg/qcm: $a_4 = 3{,}7$ cm.

E. Kreuzköpfe.*)

Die früher fast ausschliefslich benutzte Anordnung, dafs der gabelförmige Kreuzkopf den Bolzen trägt (Abb. 288, 289 u. 292), wird mehr und mehr durch die umgekehrte Anordnung verdrängt: der Kreuzkopf wird lagerartig (Abb. 291 u. 293) und die Schubstange gegabelt. Doch findet man auch bei neueren Lokomotiven noch die erstere Form (Abb. 290 — Kreuzkopf einer $^3/_4$ gekuppelten Personenzug-Verbund-Lokomotive von der Hannoverschen Maschinenbau A. G. vorm. G. Eggestorff). Für Schiffsmaschinen gebräuchlich Abb. 294, wozu der gegabelte Schubstangenkopf (Abb. 286, oben) gehört, für Schnellläufer

*) Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1908 S. 488 ff.

Abb. 288.

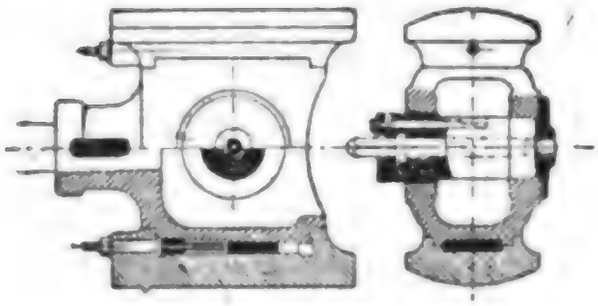


Abb. 289.

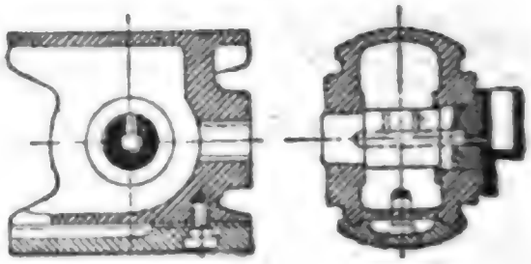


Abb. 290.

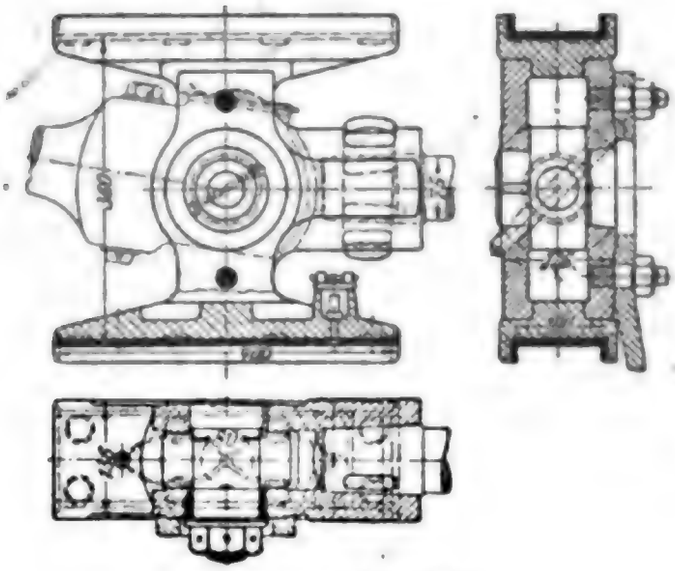


Abb. 291.

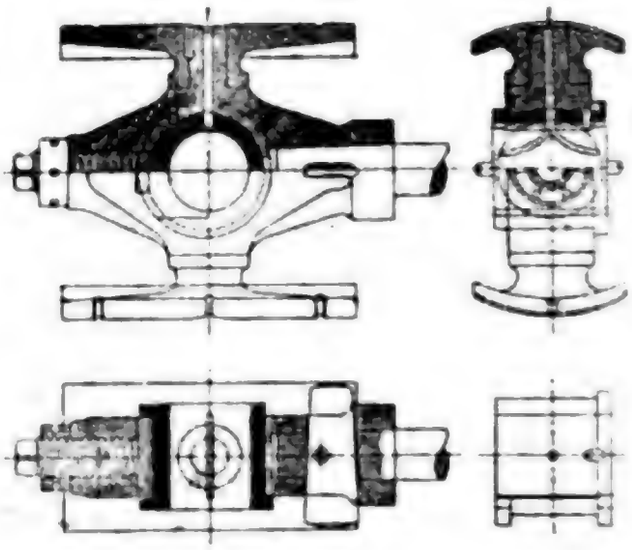


Abb. 292.

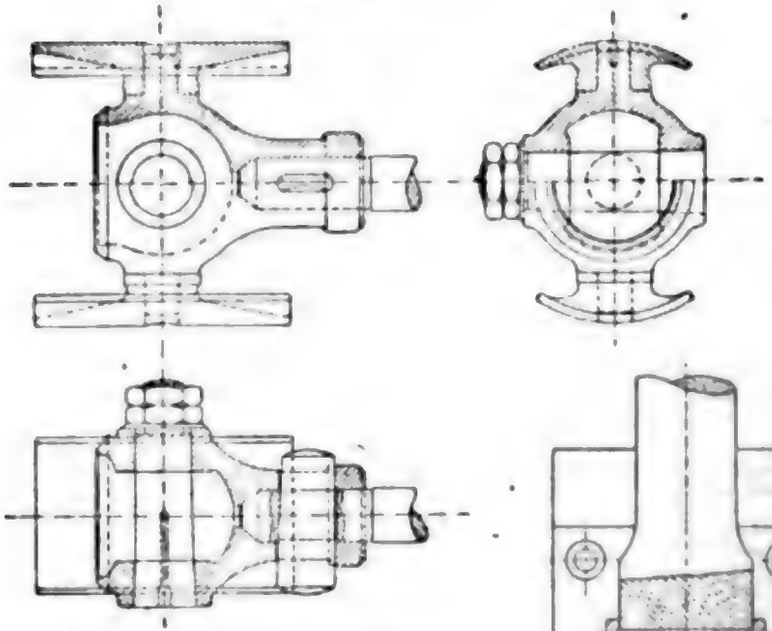
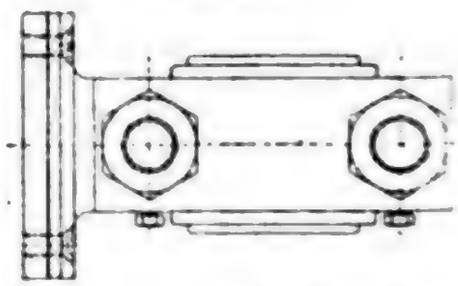
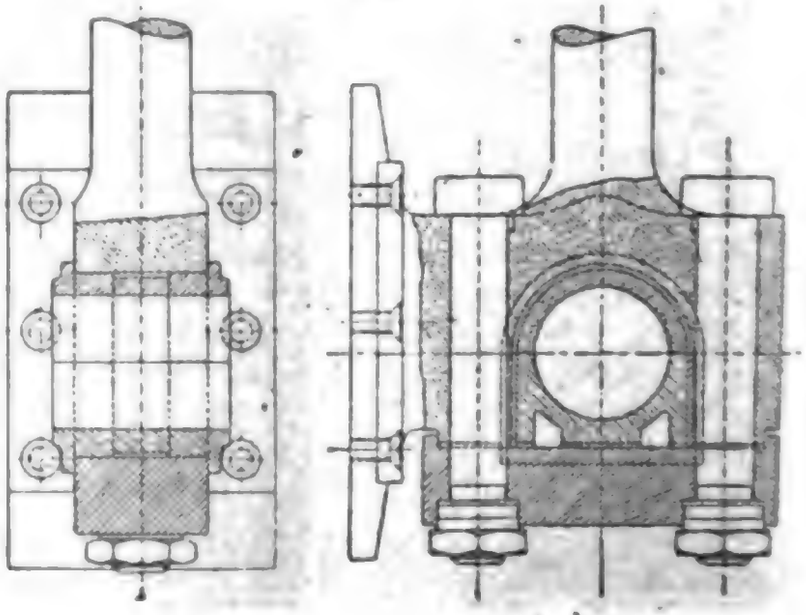


Abb. 293.



häufig Kolbenstange und Kreuzkopf aus einem Stück (Abb. 293, Kreuzkopf für eine stehende Dampfmaschine).

In Abb. 293 ist das Stangenende besser verjüngt mit 1 : 6 Anzug an-



Digitized by Google

zuordnen. Abb. 295 Kreuzkopf einer neueren Dampfmaschine der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg A. G.

Abb. 294.

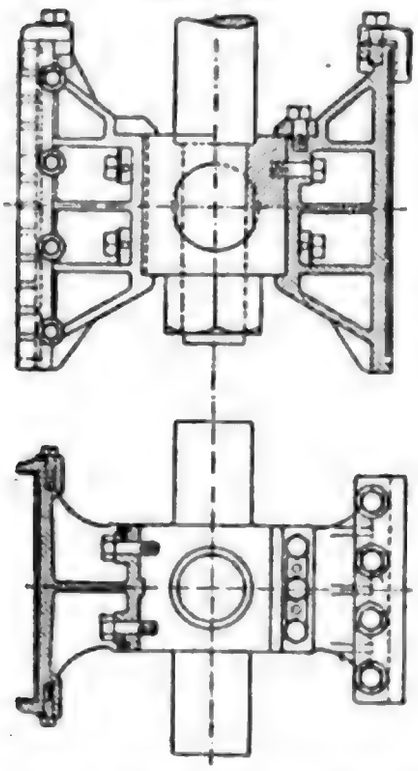
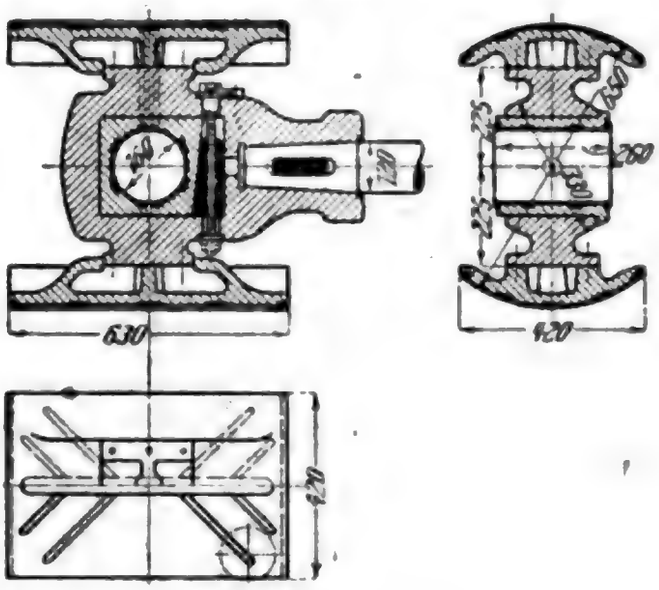


Abb. 295.



Bei Abb. 293 tritt durch elastische Formänderung des Lagerdeckels leicht einseitige Belastung der Schrauben und damit deren Bruch ein, falls nicht zähes Eisen (Nieteisen) und eine geringe Beanspruchung durch die Stangenkraft ($k < 600$ kg/qcm) gewählt ist; dabei ist die Durchbiegung des Deckels durch reichliche Höhe möglichst herabzuziehen.

Abb. 296.

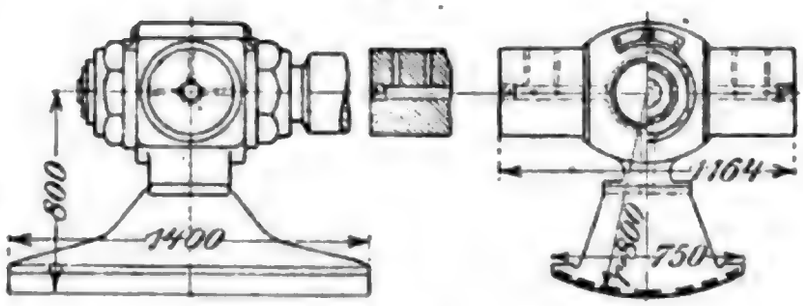
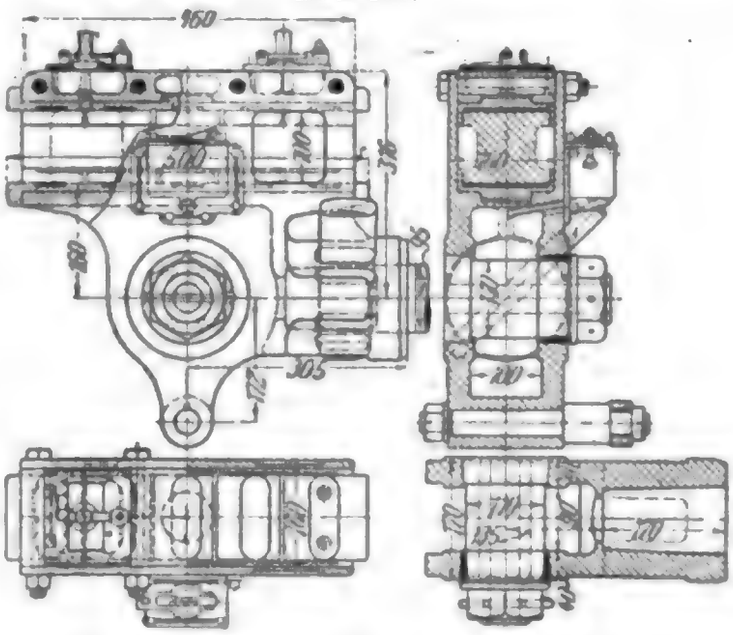


Abb. 296 zeigt den Kreuzkopf einer Grofsgasmaschine der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg A. G.

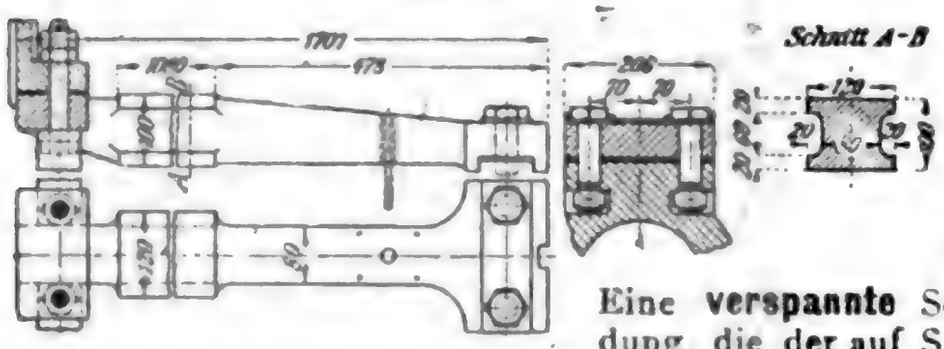
Abb 297.



Der Druck in den Gleitflächen ortfester Maschinen soll, damit das Nachstellen tunlichst selten erforderlich ist, bei Geschwindigkeiten von 2 bis 2,5 m/sk möglichst 2 (bis höchstens 3) kg/qcm nicht überschreiten. Bei **Lokomotiven** Flächendrücke von 6 kg/qcm und mehr. Die Gleitbahn so stark ausführen und unterstützen, dafs schädliche Durchbiegungen nicht eintreten können (II. Bd., Dampfmaschinen).

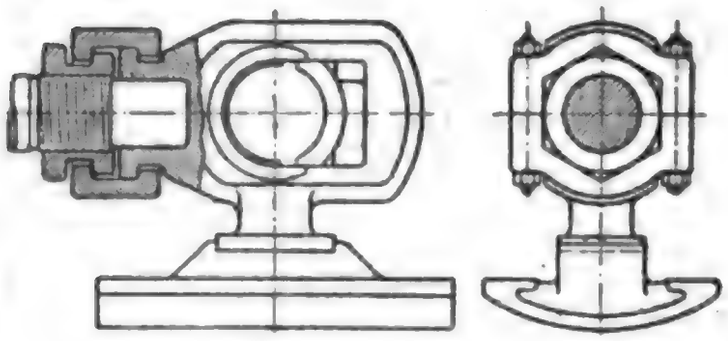
Ein Kreuzkopf für eine neuere **Schnellzuglokomotive**, der sich einseitig an einer von ihm umfafsten Gleitstange führt, ist in Abb. 297 dargestellt. — Abb. 298 zeigt die zugehörige **Gleitstange.**

Abb. 298.



Verbindung zwischen Kreuzkopf und Kolbenstange meist durch **Keil** (Abb. 288, 290, 292 usw.), seltener durch **Schraube** (Abb. 289). — Eine **verspannte** Schraubenverbindung, die der auf S. 876 (Abb. 237) dargestellten Kolbenstangenverbindung entspricht, zeigt Abb 299 für doppeltwirkende Viertakt-**Gasmaschinen** v. Ehrhardt & Sehmer, Schleifmühle-Saarbrücken.*)

Abb. 299.



Kleinsches Verbindungsstück (Abb. 300 u. 301) zur Verbindung zweier gleichachsiger Kolbenstangen zwischen der Kurbel. Die beiden langen Schenkel sind so weit gegeneinander versetzt, dafs der Stangenkopf dazwischen schwingen kann. Geringere Weite des Verbindungsbügels und damit geringerer Abstand der Zylinderachse von der Maschinengrundplatte als bei der Kurbelschleife.

Abb. 300.

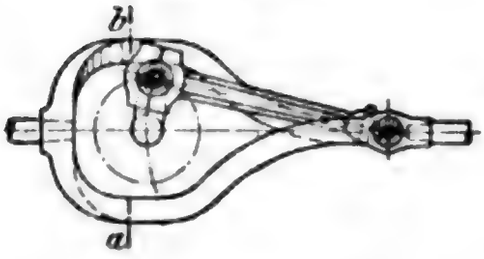
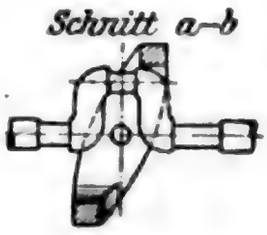


Abb. 301.



F. Gelenkgeradführungen.**)

a. Ellipsenlenker.

Hierbei bezeichne (Abb. 302 bis 306):

AB den Hauptlenker,
α dessen halben Ausschlagwinkel,
CD den Gegenlenker,
C dessen Angriffpunkt,
D dessen Festpunkt,
B den gerade zu führenden Punkt.

*) Vgl. R. Drawe, Z. d. V. d. I. 1910 S. 267.

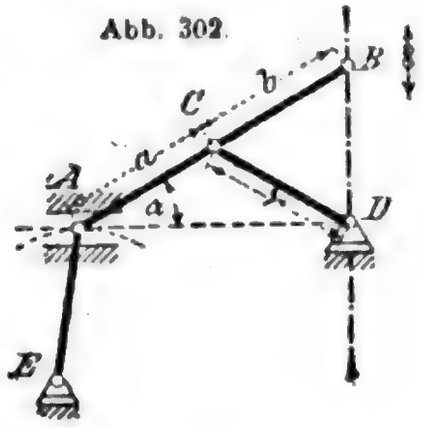
**) Kinematisches Skizzenbuch, nach Vorträgen von F. Reuleaux bearbeitet und hrsg. vom A. V. „Hütte". W. Ernst & Sohn. Berlin 1880/1892; Kittershaus, Gelenkgeradführungen, Z. d. V. d. I. 1877 S. 217; R. Müller, Z. f. Mathem. u. Phys., Bd. 43 S. 36.

Digitized by Google

1. Der Evanssche Lenker (Abb. 302).

Winkel $ADB = 90^0$, $a = b = r$. Wird A auf AD gerade geführt, so erhält man den genauen Ellipsenlenker; führt man A auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser EA ist, so hat man den angenäherten Evansschen Lenker. Je gröfser EA und je kleiner der Winkel α, desto genauer wird der Lenker. Es sei $\alpha < 20^0$ und $EA \geq BD$.

Abb. 302.



2. Der angenäherte Ellipsenlenker.

Nach der Lage von C unterscheidet man drei Arten.

Erste Art: Der Punkt C liegt zwischen A und B (Abb. 303).

Zweite Art: Der Punkt C liegt über B hinaus (Abb. 304).

Dritte Art: Der Punkt C liegt über A hinaus (Abb. 305).

Bei allen drei Lenkern kann die gerade Bahn des Punktes A durch eine kreisbogenförmige ersetzt werden.

Abb. 303.

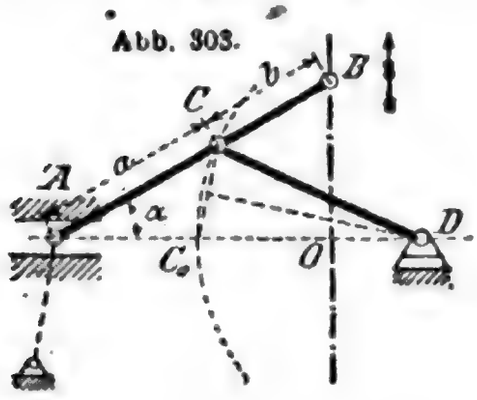
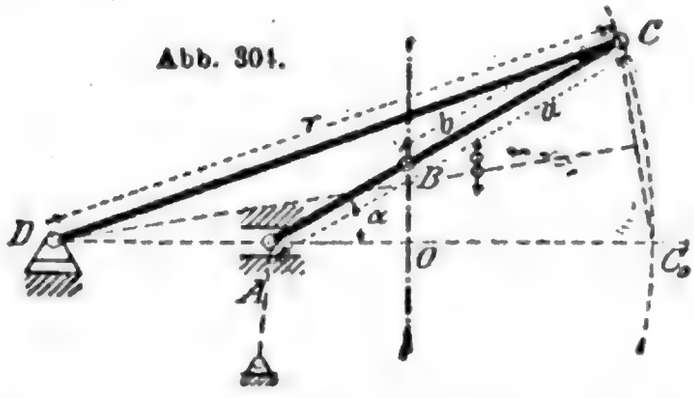


Abb. 304.



Die Lenker der dritten Art geben die gröfste Abweichung des Punktes B von der geradlinigen Bahn.

Ermittlung des Gegenlenkers.

1. **Es sei C gegeben, und D werde gesucht** (Abb. 303 bis 305). Zeichne den Hauptlenker in seiner äufsersten Lage, mache OC_0

Abb. 305.

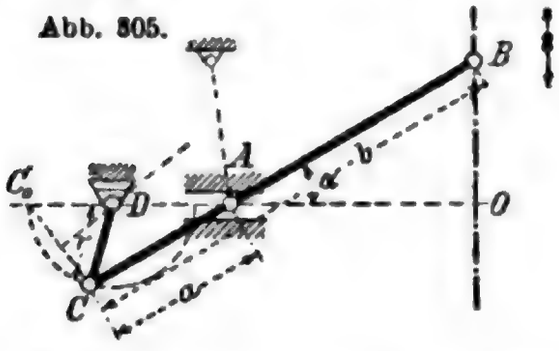
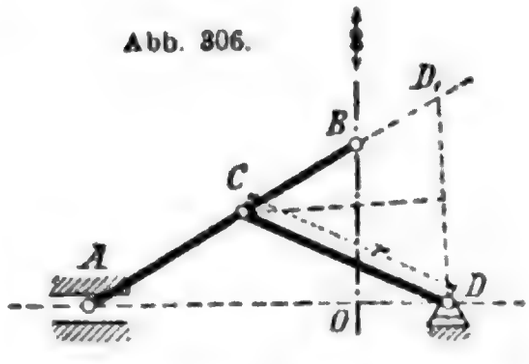


Abb. 306.



$= BC = b$, ziehe C_0C und errichte in der Mitte dieser Linie eine Winkelrechte. Diese schneidet die Wagerechte OAC_0 in D.

Wählt man α sehr klein, so wird angenähert $r : a = a : b$.

2. Es sei D gegeben, und C werde gesucht (Abb. 306). Verlängere in der äufsersten Stellung des Hauptlenkers die Linie AB um $BD_1 = OD$ und ziehe D_1D. Die Winkelrechte in der Mitte dieser Linie gibt auf dem Hauptlenker den Punkt C. Bei der zweiten und dritten Lenkerart (Abb. 304 u. 305) trage man $BD_1 = OD$ von B über A hinaus ab.

b. Robertscher Dreiecklenker (Abb. 307).

Man nehme $CC_1 = DD_1 = r$;

$\frac{r}{h} = 0{,}584$; $\frac{b}{h} = 0{,}593$; $\frac{c}{h} = 1{,}112$.

Abb. 307.

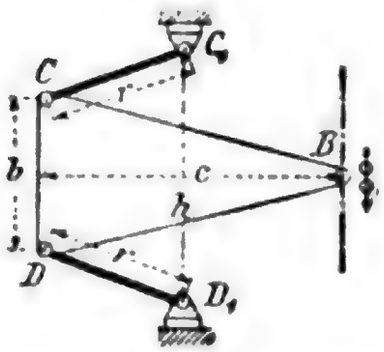
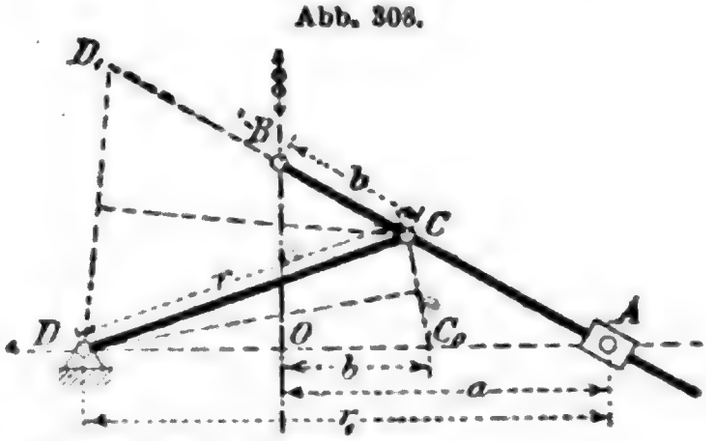


Abb. 308.



c. Konchoidenlenker (Abb. 308).

Konchoide S. 111 u. 112.

Es sei AB der Hauptlenker, CD der Gegenlenker, C dessen Angriffpunkt und D dessen Festpunkt.

Je nachdem der Punkt C zwischen A und B oder über B oder über A hinaus liegt, hat man den Konchoidenlenker erster, zweiter oder dritter Art (wie unter **2.**, oben).

Der **Gegenlenker** wird wie der angenäherte Ellipsenlenker ermittelt.

Der Lenker zweiter Art liefert, wenn man $r = r_1$ macht, eine zwar kurze, aber sehr gute Geradführung.

d. Lemniskoidenlenker (Abb. 309 u. 310).

Im folgenden bezeichnen

a und a_1 die Längen der Gegenlenker,
d und d_1 die entspr. Abschnitte der Koppel,
φ und φ_1 die halben Schwingungswinkel der Gegenlenker,
s die Hubhöhe $= 2a \sin\varphi = 2a_1 \sin\varphi_1$,
c die Projektion der Verbindungslinie der Festpunkte M und M_1 auf die Hubrichtung xy,
e und e_1 die Pfeilhöhen der von den Endpunkten C und D der Gegenlenker beschriebenen Bogen, und zwar

$$e = a(1 - \cos\varphi) \quad \text{und} \quad e_1 = a_1(1 - \cos\varphi_1).$$

Die Hubrichtung xy des gerade geführten Punktes B halbiert die Pfeilhöhen e und e_1.

1. Gegeben der Lenker a, sein Festpunkt M, die Koppelabschnitte d und d_1 und der gerade zu führende Punkt B; gesucht die Länge a_1 des Gegenlenkers und dessen Festpunkt M_1.

Digitized by Google

Da φ bekannt ist, sind s und e bestimmbar. Man zeichne den Lenker a in seiner äufsersten Stellung MC und in dieser Stellung die Koppel so, dafs der Punkt B auf xy, der Halbierungslinie der Pfeilhöhe des von C beschriebenen Bogens, zu liegen kommt, und stelle den Endpunkt der Koppel D fest.

Man suche dann die Lage D_1 des Endpunktes der Koppel bei der mittleren Lage des Lenkers a_1 (der um C_1, die Mittellage von C, mit $CD = d_1 \pm d$ beschriebene Bogen schneidet die im Abstande $^1/_2 s$ von

Abb. 309.

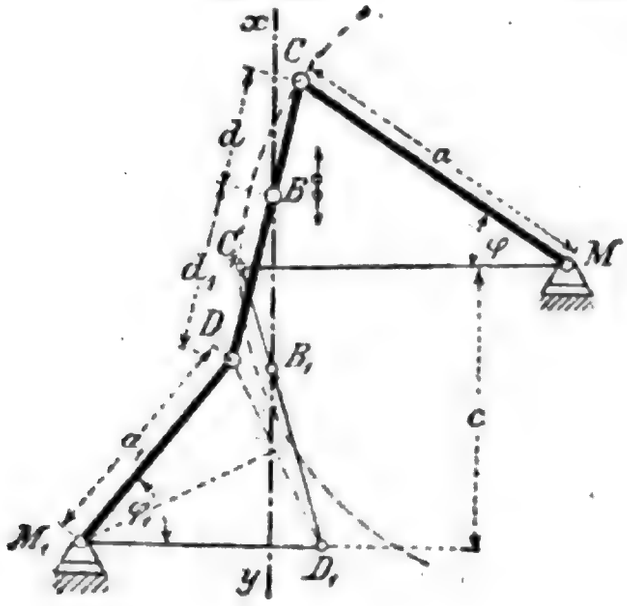
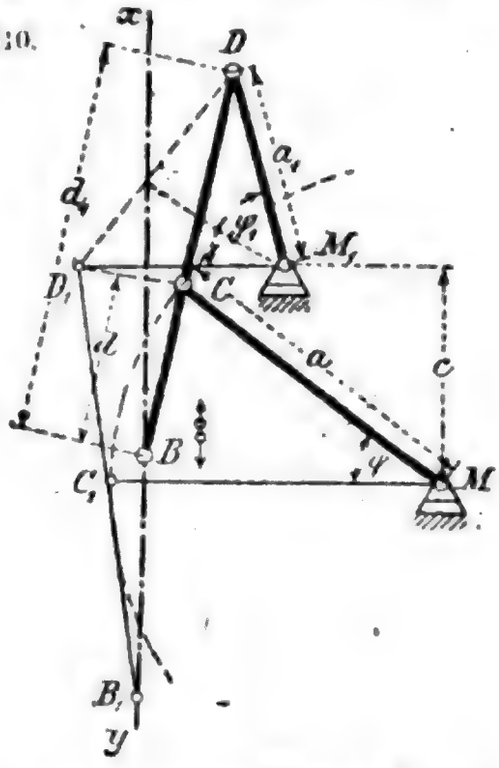


Abb. 310.



D gezogene Parallele mit MC_1 in D_1) und verbinde D mit D_1. Die Winkelrechte in der Mitte der Linie DD_1 gibt auf der durch D_1 mit C_1M gezogenen Parallele den gesuchten Festpunkt M_1 und somit auch die gesuchte Länge a_1 des Lenkers M_1D an.

2. Gegeben die beiden Lenker a und a_1, ihr Abstand c in paralleler Lage und die Huhhöhe s; gesucht die Lage des gerade zu führenden Punktes B und die Festpunkte M und M_1.

Man ermittle φ, φ_1, e und e_1 und lege a und a_1 winkelrecht zur Hubrichtung xy und im Abstande c so, dafs e und e_1 halbiert werden; dann sind M und M_1 die Festpunkte. In der äufsersten Lage schneidet CD die Hubrichtung xy in B; dieser Punkt ist der gerade geführte Punkt.

Gute Führungen erhält man, wenn man macht (Abb. 309):

$$a = a_1 \geqq {}^3/_2 s, \quad \varphi = \varphi_1 \leqq 19^1/_2{}^0, \quad e = e_1 \leqq {}^1/_{26} s, \quad d = d_1 \geqq {}^2/_3 s.$$

e. Tschebyscheffscher Lenker (Abb. 311).

Die gerade Bahn soll den Bogen, den der Punkt C beschreibt, berühren.

Es sei $b = e =$ dem halben Hub von B,
$CE = DF = 0{,}618\,a$,
$d = c = 0{,}809\,a$.

Der Punkt D soll in die gerade Bahn fallen.

f. Wattsches Parallelogramm (Abb. 312).

Es ist C der Drehpunkt des ersten Gegenlenkers (Schwinghebels); ACA_1 der Schwingungswinkel 2φ; die Sehne AA_1 gleich dem gegebenen Hub s $(= BB_1)$; $HM = MF$ die Hälften der Pfeilhöhe HF; xy parallel AA_1 durch M; $AB = HK = A_1B_1 =$ der beliebig (zweckmäfsig $= 0{,}5\ s$) anzunehmenden Länge der Hängeschiene (Schere) und $AD = HL = A_1D_1 =$ der gegebenen Seite des Parallelogramms. Man vervollständige nun durch die Verbindungs-

Abb. 311.

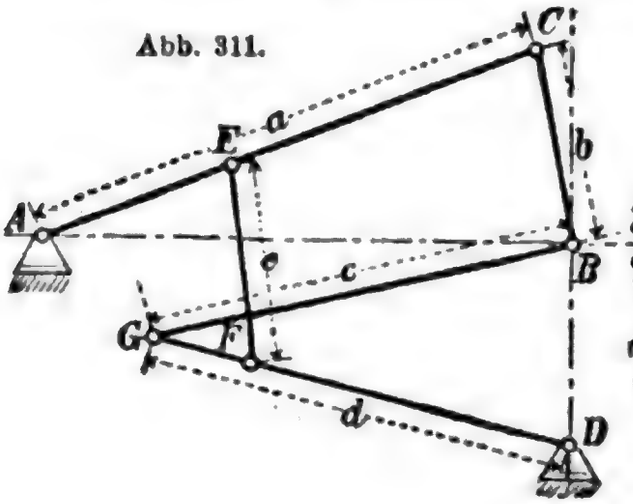
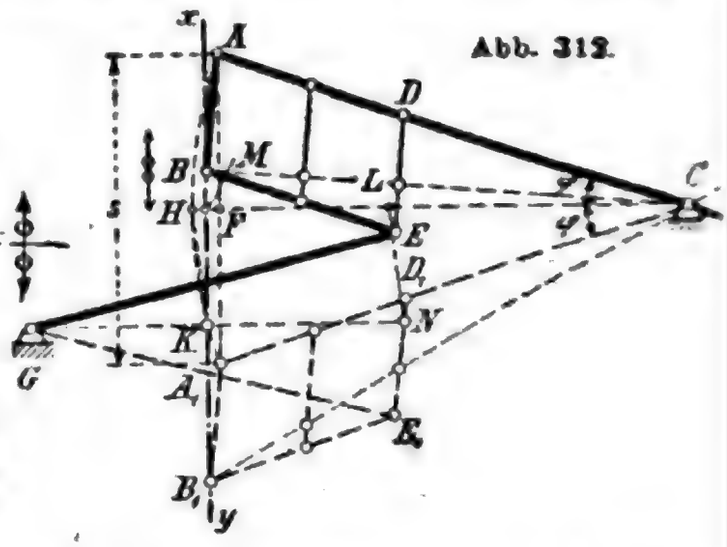


Abb. 312.



stange BE und die Hängeschiene DE das Parallelogramm $ABED$, entsprechend die Parallelogramme $HKNL$ und $A_1B_1E_1D_1$, dann ist der Mittelpunkt G des durch E, N und E_1 gehenden Kreises der Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, $GE = GN = GE_1$ dessen Länge, und jeder Punkt der Geraden BC ist gerade geführt.

Man wähle die Länge $CA = 1{,}5$ bis $2\,s$. Macht man, wie gewöhnlich, $AD = CD$, so ergibt sich der Punkt K als Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, dessen Länge dann $KE = AD = CD$ ist.

VI. Maschinenteile zur Aufnahme und zur Fortleitung von Flüssigkeiten.

A. Zylinder.

a. Pumpen- und Prefszylinder.

1. Sind nur Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Aufstellung mafsgebend, so erhalten nicht auszubohrende gufseiserne **Pumpenzylinder** vom inneren Durchmesser D (in cm) eine Wandstärke s (in cm):

$s = {}^1/_{50}\,D + 1{,}0$ cm, wenn stehend gegossen,
$s = {}^1/_{40}\,D + 1{,}2$ cm, wenn liegend gegossen.

Der innere Flüssigkeitsüberdruck p_i (in kg/qcm) erfordert eine Wandstärke, die nach **1.** auf S. 604 zu bestimmen ist; wegen der Möglichkeit des Kernverlegens ist die Wandstärke s um 0,3 bis 0,6 cm gröfser zu nehmen. In Hinsicht auf etwaige Stofswirkungen, Tempe-

Digitized by Google

raturunterschiede usw. wähle man für Gufseisen die zulässige Zugspannung k_z womöglich < 200 kg/qcm. Der gröfsere Wert der auf beide vorstehenden Arten berechneten Wandstärke ist mafsgebend.

Genau zylindrisch auszubohrende gufseiserne Pumpenzylinder, die ein ein- oder zweimaliges Ausbohren nach eingetretener Abnutzung gestatten sollen, erhalten eine um etwa 0,3 bis 0,5 cm gröfsere Wandstärke als nicht auszubohrende Zylinder. Die nach S. 604 **1.** gefundene Wandstärke ist um 0,8 bis 1,6 cm zu vergrößern. Für Stahlgufs (bei hohem Druck) sei $k_z \leqq 500$ kg/qcm, dabei $s \geqq 1{,}5$ cm.

2. Prefszylinder*) sind nach **1.** auf S. 604 zu berechnen, wobei man für k_z die folgenden Werte zulassen mufs:

für Gufseisen und Bronze . . .	$k_z =$	300 bis	750	kg/qcm,
„ Phosphorbronze	$k_z =$	500 „	1000	„ „
„ Stahlgufs	$k_z =$	1000 „	2000	„ „
„ Schweifseisen	$k_z =$	900 „	1800	„ .

Den oberen Grenzwerten von k_z nähere man sich nur gezwungen; für Stahlgufszylinder empfiehlt sich, k_z so zu wählen, wie das liefernde Werk es gewährleistet.

Für den Fall, dafs durch den Prefskolben ein bestimmter Druck P (in kg) auszuüben ist, wird der äufsere Halbmesser r_a (S. 604 **1.**) zu einem Kleinstwerte für $p_i = 0{,}36\, k_z$, und zwar:

$$r_{a\,\min} = 1{,}5\, r_i \quad \text{oder} \quad s_{\min} = 0{,}5\, r_i.$$

b. Dampfzylinder.

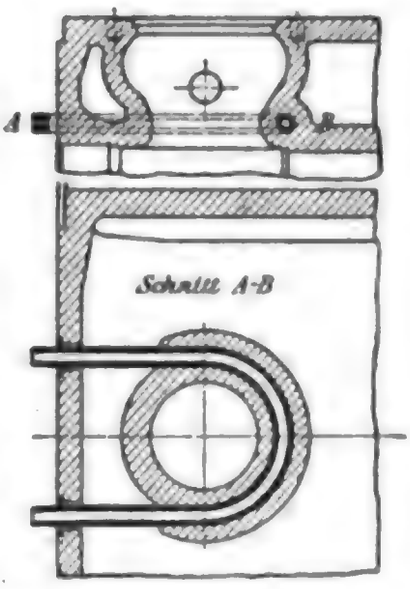
Für D cm lichten Durchmesser kann die Wandstärke s des Dampfzylinders bei liegenden Maschinen bestimmt werden aus

$s = {}^1/_{50}\, D + 1{,}3$ cm für stehend gegossene Zylinder,

$s = {}^1/_{40}\, D + 1{,}5$ cm für liegend gegossene Zylinder;

bei stehenden Maschinen kann s um 10 bis 20 % schwächer sein (II. Bd., Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfmaschinen").

Abb. 313.



c. Zylinder für Verbrennungskraftmaschinen.

Ueber Wandstärke des Zylinders**) und des Zylindermantels II. Bd. S. 267.

Um die bei einteiligen Zylindern in den Zylinderköpfen häufig vorgekommenen Risse zu vermeiden, hat man die Zylinder dreiteilig (Zylinderköpfe und Laufzylinder zusammengeschraubt) hergestellt. — Zweiteilige Bauart nach Drawe***) zur Vermeidung von Rissen infolge von Gufs- und Wärmespannungen.

Forts. dieses Textes S. 914.

*) Berechnung der durch aufgezogene Ringe verstärkten Rohre (Ringgeschütze): C. Bach, Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 846; Kaiser, Konstruktion der gezogenen Geschützrohre 1900; Engng. 1909 S. 567 ff.; Huber-Prefszylinder Z. d. V. d. I. 1901 S. 622 (Druckabstufung zwischen den Ringen).

**) Güldner, Verbrennungskraftmaschinen. 3. Aufl., Berlin 1914; Rieppel, Grofsgasmaschinen in Amerika, Z. d. V. d. I. 1909 S. 2031 u. 2083.

***) Drawe, Z. d. V. d. I 1910 S. 260 ff.

Deutsche Rohr-Normalien für gufseiserne

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und

Lichter Durchmesser D	Normale Wandstärke s	Aeufserer Rohrdurchmesser D_1	Gewicht eines glatten Rohrstückes von 1 m Länge	Muffenrohre (Abb. 314)								
				Weite der Dichtungsfuge f	Innere Muffenweite D_2	Aeufserer Muffendurchm. D_3	Innere Muffentiefe t	Dichtungstiefe $t' = t - 1{,}5\,s$	Uebliche Nutzlänge L	Gewicht der Muffe	Gewicht eines Rohres von vorstehender Nutzlänge	Gewicht für 1 m Rohr bei vorstehender Nutzlänge
mm	mm	mm	kg	mm	mm	mm	mm	mm	m	kg	kg	kg
40	8	56	8,75	7	70	116	74	62	2	2,68	20,18	10,09
50	8	66	10,57	7,5	81	127	77	65	2	3,14	24,28	12,14
60	8,5	77	13,26	7,5	92	140	80	67	2	3,89	30,41	15,21
70	8,5	87	15,20	7,5	102	150	82	69	3	4,35	49,95	16,65
80	9	98	18,24	7,5	113	163	84	70	3	5,09	59,82	19,94
90	9	108	20,29	7,5	123	173	86	72	3	5,70	66,57	22,19
100	9	118	22,34	7,5	133	183	88	74	3	6,20	73,22	24,41
125	9,5	144	29,10	7,5	159	211	91	77	3	7,64	94,94	31,65
150	10	170	36,44	7,5	185	239	94	79	3	9,89	119,21	39,74
175	10,5	196	44,36	7,5	211	267	97	81	3	12,00	145,08	48,36
200	11	222	52,86	8	238	296	100	83	3	14,41	172,99	57,66
225	11,5	248	61,95	8	264	324	100	83	3	16,89	202,71	67,57
250	12	274	71,61	8,5	291	353	103	84	4	19,61	306,05	76,51
275	12,5	300	81,85	8,5	317	381	103	84	4	22,51	349,91	87,48
300	13	326	92,68	8,5	343	409	105	85	4	25,78	396,50	99,13
325	13,5	352	104,08	8,5	369	437	105	85	4	28,83	445,15	111,29
350	14	378	116,07	8,5	395	465	107	86	4	32,23	496,51	124,13
375	14	403	124,04	9	421	491	107	86	4	34,27	530,43	132,61
400	14,5	429	136,89	9,5	448	520	110	88	4	39,15	586,71	146,68
425	14,5	454	145,15	9,5	473	545	110	88	4	41,26	621,82	155,46
450	15	480	158,87	9,5	499	573	112	89	4	44,90	680,38	170,10
475	15,5	506	173,17	9,5	525	601	112	89	4	48,97	741,65	185,51
500	16	532	188,04	10	552	630	115	91	4	54,48	806,64	201,66
550	16,5	583	212,90	10	603	683	117	92	4	62,34	913,94	228,49
600	17	634	238,90	10,5	655	737	120	94	4	71,15	1026,75	256,69
650	18	686	273,36	10,5	707	793	122	95	4	83,10	1178,54	294,64
700	19	738	311,15	11	760	850	125	96	4	98,04	1342,64	335,66
750	20	790	350,76	11	812	906	127	97	4	111,29	1514,33	378,58
800	21	842	392,69	11	866	964	130	98	4	129,27	1700,03	425,01
900	22,5	945	472,76	12,5	970	1074	135	101	4	160,17	2051,21	512,80
1000	24	1048	550,76	13	1074	1184	140	104	4	195,99	2435,03	608,76
1100	26	1152	666,81	13	1178	1296	145	106	4	243,76	2921,00	727,75
1200	28	1256	783,15	13	1282	1408	150	108	4	294,50	3427,10	856,78

Die normalen Wandstärken s gelten für Rohre, die einem Betriebsdrucke von 10 at und einem Probedrucke von höchstens 20 at ausgesetzt sind und vor allem Wasserleitungszwecken dienen. Für gewöhnliche Druckverhältnisse von Wasserleitungen (4 bis 7 at) ist eine Verminderung der Wandstärken zulässig, ebenso für Leitungen, in denen nur ein geringer Druck herrscht (Gas-, Wind-, Kanalisationsleitungen usw.). Für Dampfleitungen, die gröfseren Temperaturunterschieden und dadurch entstehenden Spannungen, sowie für Leitungen, die unter besonderen Verhältnissen schädlichen äufseren Einflüssen ausgesetzt sind, empfiehlt es sich, die Wandstärken entsprechend zu erhöhen (S. 927 ff.).

Der äufsere Durchmesser des Rohres (D_1) ist feststehend; Aenderungen der Wandstärke sind also nur auf den lichten Durchmesser des Rohres (D) von Einfluss. Als unabänderlich normal gilt ferner die innere Muffenform, die Art des Anschlusses an das Rohr und die Fugenweite (Bleifuge) f.

Aus Gründen der Herstellung sind bei geraden Normalrohren Abweichungen von den durch Rechnung ermittelten Gewichten um höchstens $\pm 3\,\%$ zu gestatten. In den Gewichtberechnungen ist das spezifische Gewicht des Gufseisens $= 7{,}25$ gesetzt

Muffen- und Flanschenrohre (1882).

dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner

Flanschenrohre (Abb. 315)

Flansch		Dichtungsleiste		Lochkreis-Durchmesser D''	Schrauben				Durchmesser des Schraubenloches d_0	Übliche Baulänge L	Gewicht des Flansches	Gewicht eines Rohres bei vorstehender Baulänge	Gewicht f. 1 m Rohr bei vorstehender Baulänge	Lichter Durchmesser D
Durchmesser D'	Dicke s_1	Breite b	Höhe h		Anzahl	Stärke d		Länge l						
						mm	engl. Z.							
mm	mm	mm	mm	mm		mm		mm	mm	m	kg	kg	kg	mm
140	18	25	3	110	4	12,7	1/2	70	15	2	1,89	21.28	10.64	40
160	18	25	3	125	4	15,9	5/8	75	18	2	2,41	25.96	12.98	50
175	19	25	3	135	4	15,9	5/8	75	18	2	2.66	32.44	16.22	60
185	19	25	3	145	4	15,9	5/8	75	18	3	3.21	52.02	17,34	70
200	20	25	3	160	4	15,9	5/8	75	18	3	3,84	62,40	20,80	80
215	20	25	3	170	4	15,9	5/8	75	18	3	4.37	69.61	23.20	90
230	20	28	3	180	4	19,0	3/4	85	21	3	4.96	76.94	25.65	100
260	21	28	3	210	4	19,0	3/4	85	21	3	6.26	99,82	33.27	125
290	22	28	3	240	6	19,0	3/4	85	21	3	7.69	124.70	41.57	150
320	22	30	3	270	6	19,0	3/4	85	21	3	8.96	151.00	50.33	175
350	23	30	3	300	6	19,0	3/4	85	21	3	10,71	180.00	60.00	200
370	23	30	3	320	6	19,0	3/4	85	21	3	11.02	207.09	69,30	225
400	24	30	3	350	8	19,0	3/4	100	21	3	12,08	240,79	80,26	250
425	25	30	3	375	8	19,0	3/4	100	21	3	14.41	274.37	91.46	275
450	25	30	3	400	8	19,0	3/4	100	21	3	15,32	308,68	102,80	300
490	26	35	4	435	10	22,2	7/8	105	25	3	19.48	351.20	117.07	325
520	26	35	4	465	10	22,2	7/8	105	25	3	21.29	390.79	130.26	350
550	27	35	4	495	10	22,2	7/8	105	25	3	24,29	420.70	140.23	375
575	27	35	4	520	10	22,2	7/8	105	25	3	25.44	461.55	153.85	400
600	28	35	4	545	12	22,2	7/8	105	25	3	27,64	490.73	163.58	425
630	28	35	4	570	12	22,2	7/8	105	25	3	29.89	536.39	178.80	450
655	29	40	4	600	12	22,2	7/8	105	25	3	32.41	584.33	194.78	475
680	30	40	4	625	12	22,2	7/8	105	25	3	34.60	633.50	211.17	500
740	33	40	5	675	14	25,4	1	120	28,5	3	44,28	727.26	242.42	550
790	33	40	5	725	16	25,4	1	120	28,5	3	47.41	811.52	270,51	600
840	33	40	5	775	18	25,4	1	120	28,5	3	50.13	921.84	307.28	650
955	33	40	5	830	18	25,4	1	120	28,5	3	56.50	1046.45	348.82	700
950	33	40	5	880	20	25,4	1	120	28,5	3	59.81	1171.90	390.63	750

Abb. 314.

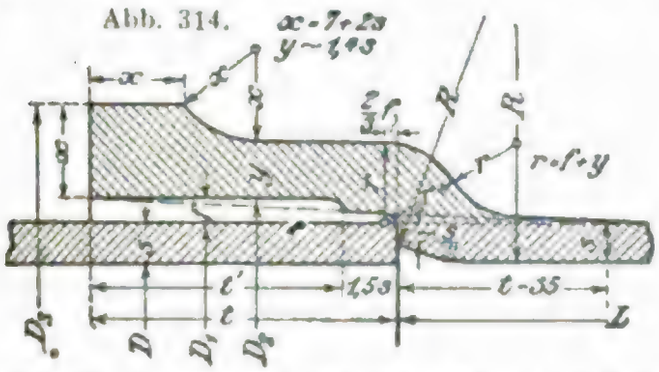
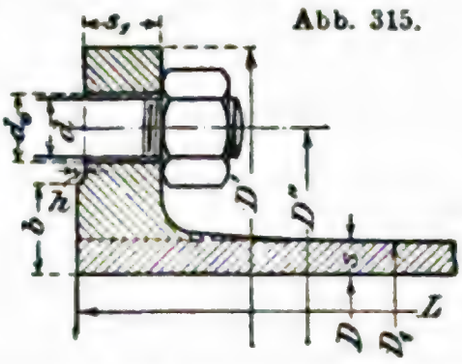


Abb. 315.



worden. — Für die Anordnung der Schraubenlöcher bei den Flanschenrohren gilt die Regel, dafs die lotrechte Ebene durch die Rohrachse Symmetrieebene für die Löcher ist und kein Schraubenloch enthält.

L, die **übliche Nutzlänge der Muffenrohre** und **übliche Baulänge der Flanschenrohre**, wird von verschiedenen Fabriken für manche Rohre um 0,5 m und 1,0 m gröfser ausgeführt, so dafs bei Bestellungen eine vorhergehende Vereinbarung mit dem Lieferanten geboten erscheint.

Digitized by Google

Normale Formstücke und Baulänge der Absperrschieber für gufseiserne Rohrleitungen (1882).

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner.

A- und B-Stücke (Abb. 316 u. 317).

$a = 0{,}2\,D + 0{,}5\,d + 100$ mm,
$l = 0{,}1\,d + 120$ mm,
$r = 0{,}05\,d + 40$ mm,
t = Muffentiefe des Abzweiges für d als lichten Durchmesser.

D Durchmesser des Hauptrohres mm	d Durchmesser des Abzweiges mm	L Nutzlänge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 „ 325	40 „ 325	1,00
350 „ 500	40 „ 300	1,00
	325 „ 500	1,25
550 „ 750	40 „ 250	1,00
	275 „ 500	1,25
	550 „ 750	1,50

C-Stücke (Abb. 318).

$a = 0{,}1\,D + 0{,}7\,d + 80$ mm,
$c = 0{,}1\,D + 80$ mm,
$l = 0{,}75\,a$ und $r = d$.

D Durchmesser des Hauptrohres mm	d Durchmesser des Abzweiges mm	L Nutzlänge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 „ 275	40 „ 275	1,00
300 „ 425	40 „ 250	1,00
	275 „ 425	1,25
	40 „ 250	1,00
450 „ 600	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,50
	40 „ 250	1,00
650 „ 750	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,50
	650 „ 750	1,75

E-Stücke (Abb. 320).

$L = 300$ mm; zulässig für $D \geqq 40$ mm.

F-Stücke (Abb. 321).

$L = 600$ mm für $D =$ 40 bis 475 mm,
$L = 800$ mm für $D =$ 500 bis 750 mm.

J-Stücke (Abb. 324).

$R = 250$ mm für $D =$ 40 bis 90 mm,
$R = D + 150$ mm für $D \geqq 100$ mm,
$m = D + 200$ mm für $D =$ 40 bis 375 mm,
$m = 600$ mm für $D \geqq 400$ mm.

K-Stücke (Abb. 325).

$R = 10\,D$; zulässig für $D \geqq 40$ mm.

L-Stücke (Abb. 323).

$R = 5\,D_4$ zulässig für $D \geqq 300$ mm.

R-Stücke (Abb. 322).

Uebergangsrohre. $L = 1{,}0$ m.

Ü-Stücke (Abb. 319).

Ueberschieber. $L = 4\,t$, wenn t die D entsprechende Muffentiefe.

Aufser den **A**-, **B**- und **C**-Stücken sind **AA**-, **BB**- und **CC**-Stücke mit zwei gegenüberliegenden Abzweigen erhältlich; die Abmessungen sind dieselben wie bei den einfachen Stücken.

Flanschen-Formstücke.

Für Abb. 327 bis 330 ist $L = D + 100$ mm,
für Abb. 329 aufserdem $l = \frac{1}{2}(D + d) + 100$ mm.

Die Bezeichnung der einzelnen Formstücke erfolgt in der über den Abb. 316 bis 325 (als Beispiel) angedeuteten Weise, wobei die Art (der Name) des Formstückes und der lichte Durchmesser D des Rohres in mm angegeben werden, ferner unter einem Bruchstriche bei Abzweigrohren der lichte Durchmesser des Abzweiges und bei Krümmern die Anzahl der Stücke für den Quadranten (also 90 : α): $\alpha = 45$, 30, $22\frac{1}{2}$ und 15°.

Digitized by Google

Bei der Berechnung der **Gewichte** von Formstücken (mit einem spezifischen Gewichte des Gufseisens = 7,25) ist dem Gewichte, das den normalen Abmessungen entspricht, ein **Zuschlag** von 15 %, bei Krümmern ein solcher von 20 % zu geben. — Die Abzweigstücke, deren Abzweig einen lichten Durchmesser von 400 mm und mehr besitzt, sind von 2 at Betriebsdruck an sowohl in ihren **Wandungen**, als auch, wenn nötig, durch **Rippen** zu **verstärken**.

Sämtliche Formstücke über 750 mm Durchmesser werden **nicht** als normale Formstücke betrachtet.

Abb. 316. **A** $\frac{300}{150}$

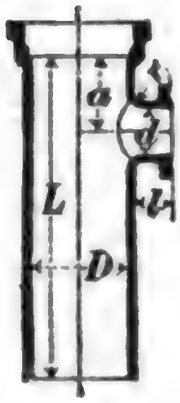


Abb. 317. **B** $\frac{300}{150}$

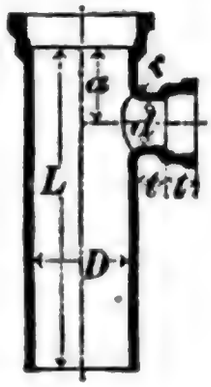


Abb. 318. **C** $\frac{300}{150}$

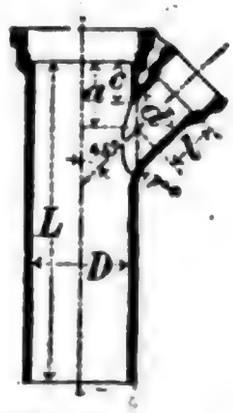


Abb. 319. **Ü** 300

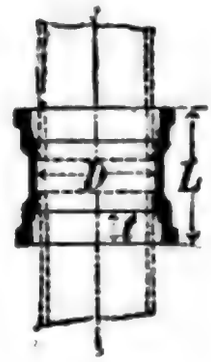


Abb. 320. **E** 300.

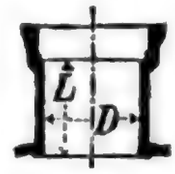


Abb. 321. **F** 300

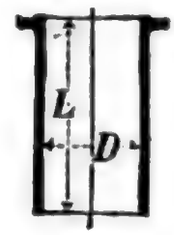


Abb. 322. **R** $\frac{300}{200}$

Abb. 323. **L** $\frac{300}{3}$

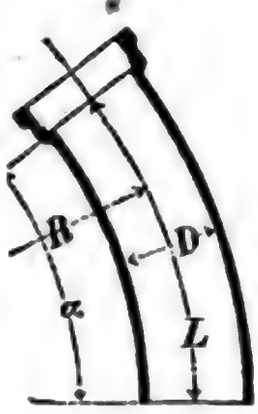


Abb. 324. **J** 300

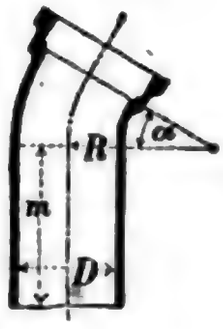


Abb. 325. **K** $\frac{300}{6}$

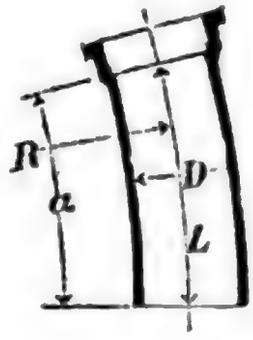


Abb. 326. Flanschen-Deckel.

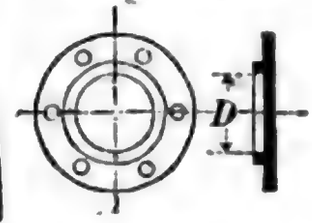


Abb. 327.

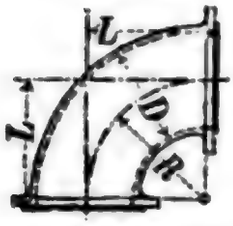


Abb. 328.

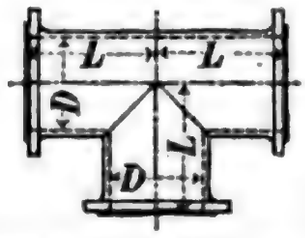


Abb. 329.

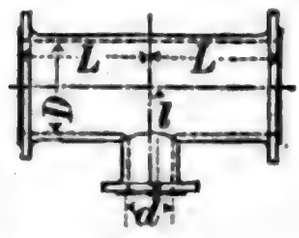
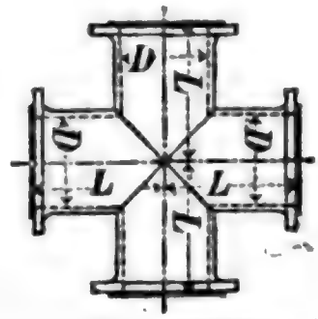


Abb. 330.



Flanschen-Formstücke.

Die **Baulänge** L **der Absperrschieber** beträgt für

Flanschenschieber . . . . . $L = D + 200$ mm,

Muffenschieber m. unmittelb. eingetrieb. Ringen $L = 0{,}7\,D + 100$ mm,

Muffenschieber mit eingebleiten Sitzringen . . $L = D - 2t + 250$ mm.

Flanschendeckel Abb. 326.

Gewichte gufseiserner Rohr-Formstücke in kg.

D	A-Stücke (Abb. 316)							B-Stücke (Abb. 317)						
	d (in mm) =							d (in mm) =						
mm	D	80	100	150	200	300	400	D	80	100	150	200	300	400
40	14	·	·	·	·	·	·	14	·	·	·	·	·	·
50	19	·	·	·	·	·	·	19	·	·	·	·	·	·
60	22	·	·	·	·	·	·	22	·	·	·	·	·	·
70	27	·	·	·	·	·	·	27	·	·	·	·	·	·
80	30	30	·	·	·	·	·	31	31	·	·	·	·	·
90	33	32	·	·	·	·	·	34	33	·	·	·	·	·
100	37	35	37	·	·	·	·	38	36	38	·	·	·	·
125	54	49	51	·	·	·	·	55	50	52	·	·	·	·
150	68	59	63	68	·	·	·	70	60	64	70	·	·	·
175	88	79	81	84	·	·	·	90	80	82	86	·	·	·
200	97	88	90	91	97	·	·	100	89	91	94	100	·	·
225	106	95	97	100	104	·	·	110	96	98	102	107	·	·
250	125	111	113	116	121	·	·	130	112	114	118	124	·	·
275	144	126	128	131	136	·	·	150	127	129	133	139	·	·
300	162	146	148	152	155	162	·	170	147	149	154	158	170	·
350	241	174	178	182	187	199	·	250	175	179	184	190	207	·
400	290	210	212	216	222	234	299	310	211	213	218	225	242	310
450	348	240	243	248	255	268	340	354	246	249	254	260	276	346
500	414	284	288	293	300	312	388	416	287	290	295	301	320	396
550	562	327	330	337	346	426	452	582	328	331	340	350	437	468
600	630	367	370	377	386	473	500	658	368	371	380	390	485	516

D	C-Stücke (Abb. 318)						Ü-Stücke (Abb. 319)	E-Stücke (Abb. 320)	F-Stücke (Abb. 321)	K-Stücke (Abb. 325)			
	d (in mm) =									Winkel α =			
mm	D	80	100	150	200	300	kg	kg	kg	45°	30°	22,5°	15°
40	16	·	·	·	·	·	7	9	8	7	6	·	·
50	21	·	·	·	·	·	8	11	10	9	7	·	·
60	25	·	·	·	·	·	10	13	12	13	9	·	·
70	31	·	·	·	·	·	12	15	14	16	13	·	·
80	37	37	·	·	·	·	14	17	16	21	16	14	·
90	40	39	·	·	·	·	17	19	18	25	18	16	·
100	48	42	47	·	·	·	19	21	20	30	22	18	·
125	65	57	60	·	·	·	24	26	26	45	33	28	·
150	82	66	72	82	·	·	31	32	32	66	47	39	·
175	106	88	91	101	·	·	38	39	40	94	65	53	·
200	119	95	98	108	119	·	45	47	48	·	87	70	·
225	132	102	105	115	126	·	53	55	54	·	112	90	·
250	152	113	118	128	139	·	62	62	63	·	142	113	83
275	178	135	136	146	157	·	71	70	71	·	176	140	·
300	229	149	152	162	173	229	82	78	80	·	215	170	123
325	255	174	67	177	188	245	91	85	90	·	·	202	·
350	282	179	182	192	203	261	103	95	100	·	·	240	173
375	310	199	202	212	223	281	114	104	110	·	·	272	·
400	354	218	221	231	242	309	125	116	120	·	·	·	230
425	371	229	232	243	256	330	135	126	130	·	·	·	·
450	417	250	253	263	276	355	146	138	140	·	·	407	290
475	500	270	273	284	297	380	157	152	150	·	·	·	·
500	553	294	297	307	320	410	175	167	212	·	·	·	376

Digitized by Google

Gewichte gufseiserner Rohr-Formstücke in kg.

D	R-Stücke (Abb. 322)																
	Lichter Durchmesser d des Muffenendes in mm																
mm	50	60	70	80	90	100	125	150	175	200	225	250	275	300	350	400	450
60	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	19	20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
80	21	22	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	23	25	27	28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
100	24	26	30	32	34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
125	27	29	32	35	37	40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
150	34	35	38	40	43	45	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
175	42	43	45	47	49	51	56	62	.	.	.	.	.	.	.	.	.
200	.	49	52	54	56	58	63	69	72	.	.	.	.	.	.	.	.
225	.	.	58	61	62	64	69	75	80	82	.	.	.	.	.	.	.
250	.	.	66	68	70	72	77	82	88	90	93	.	.	.	.	.	.
275	.	.	.	76	77	79	84	90	96	102	104	105	.	.	.	.	.
300	.	.	.	82	84	86	91	97	103	110	118	124	126	.	.	.	.
325	.	.	.	.	94	96	100	106	112	119	126	134	136	137	.	.	.
350	.	.	.	.	.	103	108	114	120	127	134	141	146	150	.	.	.
375	.	.	.	.	.	.	118	124	130	136	142	148	154	162	167	.	.
400	.	.	.	.	.	.	.	130	136	142	148	157	163	172	176	.	.
425	.	.	.	.	.	.	.	.	145	154	160	166	174	184	190	198	.
450	.	.	.	.	.	.	.	.	.	166	172	178	185	194	204	212	.
475	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	184	190	196	204	218	224	232
500	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	208	215	232	238	245
550	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	260	270	280

Flanschen-Formstücke.

(Abb. 327 bis 330, S. 911.)

Lichter Durchm. D	Flanschen-Durchmesser	Flanschen-Deckel	Flanschen-Krümmer	Flanschen-T-Stücke	Flanschen-+-Stücke	Lichter Durchm. D	Flanschen-Durchmesser	Flanschen-Deckel	Flanschen-Krümmer	Flanschen-T-Stücke	Flanschen-+-Stücke
mm	mm	kg	kg	kg	kg	mm	mm	kg	kg	kg	kg
40	140	2,5	7	10	13	225	370	21	65	88	117
50	160	3	8	13	17	255	400	25	80	110	147
60	175	3,5	10	15	20	270	425	29	95	135	180
70	185	4	13	19	25	300	450	33	110	165	205
80	200	4,5	15	21	28	325	490	39	130	190	255
90	215	5	18	25	33	350	520	45	150	220	295
100	230	6	20	29	39	375	550	50	175	255	340
125	260	8	26	40	53	400	575	54	200	290	390
150	290	10	35	52	69	425	600	60	226	328	436
175	320	13	45	64	85	450	630	66	255	370	490
200	350	17	55	76	102	475	655	70	.	.	.

Bauart nach Drawe*) zur Vermeidung von Rissen, infolge von Guſs- und Wärmespannungen.

*) Drawe, Z. d. V. d. I. 1910 S. 360 ff.

Digitized by Google

Nach einem D. R. P. von Bonte, Karlsruhe, ausgeführt von der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg, wird die gefährdete Stelle am Uebergang der Ventilkammer zum Laufzylinder durch ein eingegossenes Siemens-Martin-**Stahlrohr** verstärkt und gekühlt (Abb. 313, S. 907).

B. Rohre.

(Tafeln über Normalien und Gewichte S. 908 ff.)

Die **Rohrweite** D, d. h. der lichte Durchm. einer Rohrleitung, ist so zu bemessen, dafs die Geschwindigkeit des durchströmenden Stoffes und seine Reibungswiderstände innerhalb gegebener Grenzen bleiben. — Für gröfsere Leitungen ist das vorteilhafteste D derart zu ermitteln, dafs Zinsen und Tilgung der (mit D wachsenden) Anlagekosten und die (mit wachsendem D abnehmenden) Betriebskosten zusammen möglichst klein sind.*)

Ausgleichvorrichtungen. Bei langen Rohrleitungen in geringer Tiefenlage und bei Leitungen für warme Flüssigkeiten oder Dämpfe sind die bei den verschiedenen Temperaturen eintretenden Längenänderungen aufzunehmen, u. zw. durch starke, elastische Dichtungsscheiben aus Gummi oder Asbestpappe, besser aber durch Einschalten elastischer Federrohre (S. 919) oder Wellrohre (S. 923) oder entlasteter Dehnungsrohre (A. L. G. Dehne, Halle a. S.). Gewöhnliche Stopfbüchsenrohre nicht ratsam, da sie auf die Dauer nicht dicht halten. Auch Gelenkflansche werden benutzt.**) Neuerdings Einschaltung kurzer, in Kugelgelenken endigender Querrohre; beide Gelenke sind entlastet (F. Seiffert & Co., A. G., Berlin SO).

Die achsial wirkenden Kräfte sind bei Aenderungen der Richtung der Rohrachse durch Verankerungen aufzunehmen.

a. Gufseiserne Rohre.

1. Wandstärke. 1. Bei geringem Drucke verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Verlegung sowie auf die zusätzlichen Beanspruchungen durch äufsere Kräfte, z. B. bei Erdleitungen durch ungleichmäfsige Auflagerung, Bodensenkungen usw., meist gröfsere Wandstärke, als die Rechnung nach 1. auf S. 604 liefert. Besser setze man die Wandstärke s gufseiserner Leitungsrohre vom lichten Durchm. D cm:

$s = {}^1/_{60}\,D + 0{,}7$ cm für stehend gegossene Rohre,

$s = {}^1/_{50}\,D + 0{,}9$ cm für liegend gegossene Rohre,

sofern der Betriebsdruck 10 at, der Prüfungsdruck 20 at nicht überschreitet und erhebliche Temperaturunterschiede in der Leitung nicht stattfinden. Dampfrohre sowie Leitungen, die besonders schädigenden Einflüssen ausgesetzt sind, verlangen von etwa $D = 10$ cm an meist eine Vergröfserung dieser Werte von s um 12,5 bis 25 %. Rohre mit kleinem innerem Ueberdruck (Gas- und Windrohre) können schwächer sein.

*) P. Willner und R. Mehmke, Z. d. V. d. I. 1890 S. 103, 150 u. 1008.

**) M. Westphal, Z. d. V. d. I. 1904 S. 588, Kritik der wichtigsten Ausgleichvorrichtungen; Z. d. V. d. I. 1910 S. 1842, Ausgleichstück für die Hochdruckleitung einer Wasserkraftanlage; Mitt. Forschungsarb. 1911 Heft 96, A. Bantlin, Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichrohre.

Digitized by Google

Deutsche Rohr-Normalien von 1882 für gufseiserne Muffen- und Flanschenrohre S. 908 bis 913. In Abb. 314 (S. 909) u. 315 (S. 909) sind die Querschnittsteile, die für die Angaben des Muffen- bzw. Flanschgewichtes in der Tafel S. 908 u. 909 maſsgebend sind, doppelt schraffiert. Der Anschluſs des Flansches an die Rohrwandung (Abb. 315) nimmt etwa von der Stärke d bis auf s mit der Neigung 1 : 5 ab; das Anschluſsgewicht ist im Flanschgewicht mit enthalten. Um nicht die ganze Stirnfläche des Flansches bearbeiten zu müssen, gibt man diesem eine Arbeitsleiste (Dichtungsleiste).

Die Beanspruchung der Flanschenschrauben, wie die Normalien (S. 909) sie gestatten, ist bei den gröſseren lichten Weiten für einen Betriebsdruck von 10 at (mit $k_z = 700$ kg/qcm) zu hoch, was bei einer Steigerung des Druckes zu beachten ist.

Biegeversuche, auf der Friedrich-Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr) mit normalen Muffenrohren (S. 908), nach dem Belastungsfall Nr. 2 (S. 546) angestellt, ergaben bei $l = 2{,}62$ m Freilänge die folgenden Grenzwerte der Bruchbelastung P:

$D =$ 80 mm	$P =$ 1400 bis 1770 kg,	$D =$ 175 mm	$P =$ 7 350 bis 9 200 kg,
100 „	2060 „ 2780 „,	200 „	10 140 „ 13 280 „.
125 „	2930 „ 4120 „,		

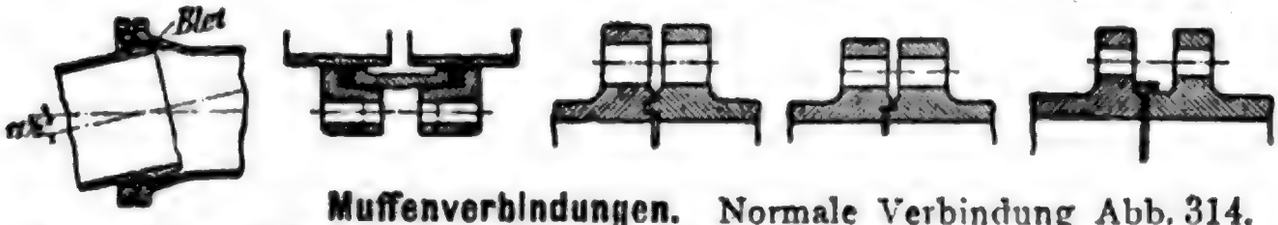
2. Bei hohem Druck (z. B. für Druckwasserleitungen) wird die Wandstärke der Rohre nach 1. auf S. 604 ermittelt und hierzu bei stehendem Guſs 0,7 cm zugeschlagen; dabei ist p_i (in at) der gröſste Betriebsüberdruck und $k_z = 200$ kg/qcm. Bei liegendem Guſs ist ein gröſserer Zuschlag als 0,7 cm erforderlich.

Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung, aufgestellt vom V. d. I. 1912 s. S. 924.

2. Schutz gegen Rostbildung für die gufseisernen Wasser- und Gasleitungsrohre meist durch heifsen Asphalt oder Teer; die geputzten, auf etwa 100 bis 150° erwärmten (vorher gepreſsten) Rohre werden darin eingetaucht und längere Zeit belassen. Nach anderem Verfahren wird Asphaltlack mittels Haarbürsten auf die erwärmten Rohre aufgetragen, wobei das Muffeninnere und die Aufsenfläche des Rohrendes (die bei dem ersten Verfahren vor dem Eintauchen mit Kalkmilch angestrichen werden) unmittelbar frei bleiben.

3. Dichtungsmittel der Muffenrohre für Gas- und Wasserleitungen: ein mit Teer getränkter Hanfstrick und ein (durch vorgelegten Tonring ermöglichter) stetiger Bleieinguſs; Strick und Blei werden mit Hammer und Setzeisen verstemmt. — Bei Flanschenrohren werden in Form von Scheibenringen Gummi (mit Einlagen von feinem Drahtgeflecht, Hanf usw.), Blei, Pappe mit Mennige, Asbestpappe usw., bei Dampfleitungen auch wohl profilierte Kupferringe (auch Lechlersche Kupferringe mit Asbesteinlage) verwendet.

Abb. 331. Abb. 332. Abb. 333. Abb. 334. Abb. 335.



Muffenverbindungen. Normale Verbindung Abb. 314. Bewegliche Verbindung (Halberger Hütte) für Dückerrohrleitungen (Abb. 331); Muffe und Flanschring mit Blei ausgegossen und ver-

Digitized by Google

stemmt. Kobersche Verbindung (Abb. 332) für Druckluftleitungen ermöglicht Bewegung der Rohrstücke bei Wärmeänderungen.

Flanschverbindungen. Normale Verbindung Abb. 315. Verbindungen, die ein Entweichen der Dichtung nach aufsen verhindern, Abb. 333, 334 u. 335.

4. Besondere Leitsätze und **Normalien für Flanschen und Formstücke zu Heizungszwecken** sind im Jahre 1902 von dem Verbande deutscher Zentralheizungs-Industrieller (Berlin SW 47, Yorckstrafse 83) herausgegeben worden s. auch III. Bd. S. 413. Betriebsdruck 5 at bei Füllung mit kaltem Wasser, 3 at bei solcher mit heifsem Wasser oder Dampf.

5. Normalien für gufseiserne Abflufsrohre für Entwässerungsanlagen wurden aufgestellt von dem Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine 1902; Muffenrohre von 50, 70, 100, 125, 150 und 200 mm lichtem Durchm.

Erlafs des preufsischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905: Diese Normalien sind nicht in allen Fällen annehmbar.

Unterm 18. Juli 1908 wurden durch Erlafs desselben Ministers Normalien für gufseiserne Abflufsrohre aufgestellt, veröffentlicht im Zentralbl. Bauv. vom 27. Januar 1909 S. 57 ff. — Für gerade Rohre ist Folgendes festgelegt:

Lichte Weite D mm	Wandstärke mm	Baulängen L ohne Muffe: 2 m	1,5 m	1,25 m	1 m	0,75 m	0,50 m	0,25 m	0,15 m
		Gewichte in kg							
50	5	13,0	10,0	8,6	7,0	5,6	4,0	2,6	2,0
70	5	18,0	14,0	11,6	9,6	7,6	5,6	3,6	2,6
100	6	30,0	23,0	19,6	16,3	12,6	9,3	5,6	3,3
125	6	37,5	29,0	24,6	20,3	16,0	11,6	7,3	5,6
150	6	44,5	34,3	29,3	24,0	19,0	14,0	8,6	6,3
200	6	60,0	46,0	39,3	32,3	25,6	19,0	12,0	9,0

Im Zentralbl. Bauv sind auch die Mafse und Gewichte der Uebergangsrohre, Verbindungen, Knierohre usw. veröffentlicht. — Allgemein gilt noch:

In den Wandungen dürfen keine gröfseren Abweichungen als etwa 15 % auftreten. Rohre und Formstücke mit schwächeren Wandungen sind auszuschliefsen. — Rohre und Formstücke von anderen Abmessungen (gröfseren Wandstärken) nur zuzulassen, wenn sie billiger sind.

Normalien für Abflufsrohre aus Blei und Steinzeug S. 930, ferner III. Bd. 14. Abschn. S. 698 Städteentwässerung.

b. Schmiedeeiserne Rohre.

1. Genietete Rohre*) für grofse Weiten oder bei grofsen äufseren Kräften (Wind- und Lüftungsleitungen usw.). Ueber Berechnung der

*) Genietete Hochdruckleitungen für Wasserkraftanlagen III. Bd. Abschn. Wasserkraftanlagen S. 581, auch Z. d. V. d. I. 1910 S. 957 u. 1842 und die v. d. Gesellschaft für Hochdruck-Rohrleitungen G. m. b. H., Berlin O. herausgegebene Schrift »Rohrleitungen, Berlin 1909.

Digitized by Google

Blechdicke s, Herstellung usw. S. 604, 755 ff. s abhängig aufser vom Betriebsdruck von der Rostbildung, Abnutzung oder äufseren Kräften.

Verbindung der Leitungsrohre durch aufgenietete Winkeleisenflansche, nach deren Nietteilung sich die Schraubenteilung richtet.

Ueber **Rostschutz** (vgl. S. 667), insbesondere an schmiedeisernen Rohren auch für Kesselanlagen (für Gufseisen vgl. S. 915), durch Zinkprotektoren Mitt. Materialpr.-Amt 1908 Heft 1 u. 2.

2. Gelötete Rohre (hart gelötet) zu Dampfheizungen.

3. Geschweifste Rohre mit stumpfer Schweifsnaht (Gasrohre) oder, besser, mit übereinandergelappter Schweifsnaht (Siede- oder Kesselrohre). Je nach dem Verwendungszweck zu Leitungen für Flüssigkeiten, Gas, Luft, Dampf, zu Heizungs-, Lüftungs- und Kondensationsanlagen usw. bleiben die Rohre entweder roh, oder sie werden asphaltiert, mit Mennige oder Oelfarbe gestrichen, oder verzinnt.

Rohre für höheren Innendruck mittels Schrauben und loser oder fester Flansche verbunden; die losen Flansche sitzen 1. hinter umgebördelten Rohrenden; 2. hinter aufgeschweifsten Bunden, die in- oder übereinandergreifen oder glatt sind; 3. benutzt man feste (vernietete oder aufgelötete) schmiedeiserne Winkelflansche (S. 925 ff.); Geschweifste Rohre von 0,4 m und mehr Weite erhalten häufig Muffenverbindung [D. R. P. Nr. 30 757 des Blechwalzwerks Schulz Knaudt, A. G. in Essen (Ruhr); dieses Werk fertigt geschweifste Dampfkessel-Feuerrohre von $D = 0{,}4$ bis 2,0 m Durchm. in Blechdicken von 8 bis 40 mm; Längen bis 10 m, Gewichte bis 5000 kg].

Geschweifste Rohre von W. Fitzner, Laurahütte (O.-S.) in folgenden gangbaren Abmessungen bis zu 12 m Länge.

Durchm. 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550 mm, 4 bis 10 mm stark.
Durchm. 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 1000 mm, 6 bis 12 mm stark.

Auch andere Abmessungen sowie Längen bis zu 22 m erhältlich. Geschweifste Krümmer. Flanschverbindungen Abb. 336, 337 u. 338, oder mit losen sog. Sicherheitsflanschen, auch mit angeschweifsten Winkelflanschen. Auch werden flufseiserne Muffenrohre angefertigt.

Abb. 336. Abb. 337. Abb. 338.

Gasrohre (stumpf geschweifst, für Gas- und Wasserleitungen) mit Gewinde (S. 748) und Muffe. Für Wasserleitungen verzinkt, ebenso wie die Verbindungsstücke (Fittings) aus schmiedbarem Gufs. Uebliche Abmessungen der Gasrohre enthält die folgende Tafel, worin D die lichte Weite (in Z. engl.), s die Wandstärke in mm, g das Rohrgewicht in kg/m. Das auf S. 748 angegebene Gasrohrgewinde setzt eine um etwa 1 mm gröfsere Wandstärke s voraus, mithin auch gröfseres Gewicht.

$D =$	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/2	4
$s =$	1,9	2,1	2,3	2,7	3	3	3,3	3,3	3,7	3,9	4	4,3	4,5	4,7	4,8	5	5,3	5,3
$g =$	0,4	0,57	0,87	1,15	1,50	1,72	2,25	2,44	3,4	4,2	4,6	5,8	6,8	7,7	8,9	10	11,5	13,5

Rohre für hohen Druck, für Manometer, Wasserdruckpressen usw.:

Innerer Durchmesser in engl. Z.	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2
" " " mm	6	10	13	16	19	25	32	38	44	51
Rohrgewicht bei 1/4 engl. Z. Wandstärke in kg/m	2,05	2,5	2,9	3,4	3,9	4,9	6,0	7,0	7,8	9,0

Spiralgeschweifste Rohre der Rheinischen Metallwaren- und Maschinenfabrik zu Düsseldorf-Derendorf. Aus bestem Schweifseisen von $K_s = 3000$ bis 3600 kg/qcm Baulänge normal 12 m, über 12 m und unter 3 m Preisaufschläge. Asphaltiert, verzinkt, gestrichen (Mennige, Oelfarbe) oder mit Juteumwicklung und Goudronanstrich geliefert. Verbindung auf eine der auf S. 917 unter 3. angegebenen Arten, auch mit Gufseisenflanschen oder mit aufgenieteten Bunden und losen Flanschen, endlich mit angewalzter Muffe.

Brunnen- und Bohrrohre (von Balcke, Tellering & Cie., A. G. in Benrath) mit langem Gewinde und tonnenförmigen Muffen, gewöhnlich verzinkt. Uebliche Längen 3 bis 5,5 m. Aeufserer Rohrdurchm. bei den versch. Wandstärken unverändert, nur die lichte Weite wird mit zunehmender Wandstärke kleiner. Uebliche Aufsendurchm. 33, 42, 48 51,5, 59, 69, 76, 82 und 89 mm; Wandstärken 4, 4,5, 5, 6 und 7 mm.

c. Nahtlose Stahlrohre (Mannesmannrohre) der Mannesmannröhren-Werke in Düsseldorf.

1. Nahtlos gewalzte Mannesmannrohre von 38 bis 305 mm Aufsendurchm. mit normal 2,25 bis 7,5 mm Wandstärke, geliefert mit bis zu 10 mm stärkeren Wandungen, zu Lokomotiv-, Schiffs- und anderen Röhrenkesseln, Dampfleitungen, Saft- und Säureleitungen, Deckstützen usw.; auch zu Rohrschlangen gewunden. Uebliche Längen 5 bis 7 m; jedoch auch je nach Durchm. bis zu 15 m in einem Stück. Probedruck für Siederohre, wenn nicht anders vorgeschrieben, 50 at. Tafeln über die üblichen Abmessungen und Gewichte in den Drucksachen der Mannesmannröhren-Werke, Düsseldorf.

Abb. 339.

Für **Hochdruckleitungen** dient die Doppelbördel-Flanschverbindung (D. R. P. Nr. 87 026) (Abb. 339), wobei die beiden Doppelbördel eine Ringnut bilden, worin eingepreſst ein Guttapercha- oder Gummiring liegt, der durch einen übergreifenden Kupferring (von kreuzförmigem Querschnitt) am Ausweichen verhindert wird. Bei sehr hohen Drücken verstärkter Doppelbördel.

2. Mannesmann-Flanschenrohre in den Abmessungen wie unter 1. mit allen gebräuchlichen Verbindungsarten für Dampfleitungen, Wasserleitungen, Steige- und Schachtleitungen in Bergwerken usw.

Abb. 340.
Innen mit glatter Fläche.

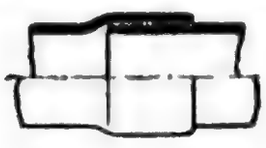


Abb. 341.
Aufsen mit glatter Fläche.

Abb. 342.
Innen und aufsen glatt.

Abb. 343.
Aufsen glatt mit Nippel.

Abb. 344.
Innen glatt mit übergeschraubter gerader Muffe.

3. Mannesmann-Brunnen- und Bohrrohre 2″ bis 11½″ Aufsenmafs, Verbindung Abb. 340 bis 344; **Gestängerohre**, auch mit verdickten Enden; **Gasrohre** mit Gewinde und Muffen, auch für Wasser- und Dampfleitungen.

Digitized by Google

4. Absatzweise verjüngte Mannesmannröhren aus hartem, zähem Sonderbaustoff, für Licht- und Stromleitungsmaste, Blitzableiterstangen, Telephongestänge, Bausäulen, Bootsdavits, Ladebäume, Schiffsmaste, Rahen, Gaffeln, Stengen.

5. Nahtlos kaltgezogene Präzisionsrohre bis 275 mm Aufsenmafs, für den Fahrrad-, Kraftfahrzeug-, Luftschiff- und Flugzeugbau, für Wasserrohrkessel der Marine, Lokomotiven, Verdampfapparate usw.

6. Mannesmann-Stahlmuffenrohre mit aus dem verstärkt gewalzten Rohrende hergestellter, kegelig verengter Rohrmuffe. Fabrikationslänge bis 15 m. Probedruck 75 at. Gegen Verrosten durch Heifsasphaltierung und Umhüllung mit asphaltierter Jute geschützt. Die nachstehenden Bezeichnungen D, D_2, f und t enthält Abb. 314 (S. 909.)

Lichte Weite D . mm	40	50	60	70	75	80	90	100	125	150	175	200	225	250	300
Wandstärke s . . mm	3	3	3	3,25	3,5	3,5	3,75	4	4	4,5	5	5,5	6,5	7,0	7,75
Muffenweite D_2 . „	60	72	82	91,5	97	102	112,5	123	148	174	200	227	254	282	332,5
Stärke der Dichtungsfuge f . . „	7	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8	8	8,5	8,5
Muffentiefe t . . „	81	85	88	90	91	111	113	115	118	122	127	135	135	139	150
Gewicht f. 1 m . kg	3,85	4,9	5,5	6,3	7,8	8,6	10,5	11,6	14,0	19,0	25,0	30,0	40,0	47,0	64,0

d. Kupfer-, Bronze- und Messingrohre.

Hart gelötet (also mit Naht) in Längen bis etwa 4 m oder gezogen (ohne Naht) in Längen von 0,3 bis 7 m in den Handel gebracht u. zw. Kupfer- und Bronzerohre in Weiten $D = 3$ bis 380 mm

(Fortsetzung auf S. 920.)

Kupferne Federrohre, Knierohre, T- und +-Stücke

von F. G. Rühmkorff & Co. in Hannover-Herrenhausen.

Sämtliche Rohre sind bei 10 at geprüft und bis zu 5 at verwendbar; höherer Arbeitsdruck bedingt gröfsere Wandstärke.

Lichter Durchmesser D	Kupferne Federrohre							Kupferne Knierohre		
	Wandstärke f. 5 at Arbeitsdr.	Für eine Längenausdehnung von 50 mm			Für eine Längenausdehnung von 100 mm			Wandstärke für 5 at Arbeitsdruck mm		
		Annäh. Kupfer-Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	Annäh. Kupfer-Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	2,5	3,0	3,5
mm	mm	kg	mm	mm	kg	mm	mm	Annähernde Kupfergewicht in kg		
40	2,5	6,5	500	590	7	500	675	1,2	1,4	1,7
50	„	8	525	625	9,5	550	730	1,6	1,8	2,1
60	„	10	550	660	11,5	600	800	1,9	2,2	2,6
70	„	12,5	600	700	15	650	850	2,3	2,5	3,2
80	„	15	650	745	18	700	925	2,8	3,2	3,8
90	3,0	21	700	775	25,5	750	980	3,2	3,6	4,2
100	„	25	750	870	31	800	1140	4	5	5,5
125	„	36	800	970	43	900	1285	5,9	6,6	7,3
150	3,5	57	900	1090	74	1000	1440	8	9	10
175	„	70	950	1160	94	1100	1620	10	11,3	12,3
200	„	86,5	1100	1240	120	1200	1750	12,5	14	15,3
225	4,0	117	1150	1330	165	1300	1925	14,8	16,5	18,3
250	„	144	1250	1500	200	1400	2100	18	20	22
275	„	160	1350	1600	245	1500	2250	20,5	23,1	25,5
300	„	180	1350	1700	292,5	1600	2400	24	26,5	29,5

Digitized by Google

Die **Federrohre** müssen bei ihrem Einsetzen in eine eiserne Leitung um ein Drittel der berechneten Längenausdehnung (1,2 mm/m auf 100° Temperaturunterschied) auseinandergespannt eingeschaltet werden. Bei Mangel an Raum für Federrohre empfehlen sich Wellrohre.

Lichter Durchmesser D mm	Kupferne T-Stücke, Wandstärke mm: 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5 — Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg	Lichter Durchmesser D mm	Kupferne T-Stücke, Wandstärke mm: 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5 — Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg
40	2,5	3	3,6	4,4	5	125	9,5	12,4	14,9	17,9	21,5
50	3	3,6	4,4	5	6	150	11,6	14	16,8	20	24
60	3,6	4,3	5	6	6,8	175	14,5	17,4	20,9	25	30
70	4,4	5	6	6,8	8,2	200	18,5	22	26,2	31	37,2
80	5	6	6,8	8	9,6	225	22	26,4	31,5	37,6	45
90	6	6,8	8	9,6	11,6	250	26,5	31,8	37,2	44,6	53,5
100	6,8	8,2	9,9	11,9	14,3						

Lichter Durchmesser D mm	Kupferne +-Stücke, Wandstärke mm: 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5 — Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg	Lichter Durchmesser D mm	Kupferne +-Stücke, Wandstärke mm: 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5 — Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg
40	3,4	4,2	4,8	5,4	6,8	125	12,5	15	18,5	24	30
50	4	4,8	5,4	6,8	8,2	150	15,5	19,6	24	30	35
60	4,8	5,4	6,8	8,2	9,4	175	20,8	25	30	35	42
70	5,4	6,8	8,2	9,4	11	200	25	30	35	42	40
80	6,8	8,2	9,4	11	13	225	30	36	42	49	56
90	8,2	9,4	11	13	17,5	250	35	42	49	56	63
100	9,4	11	13	17,5	24						

Kupferne **Trompetenrohre** und **Schlangen** S. 923; Länge der T-Stücke nächste Seite oben.

mit Wandstärken $s = 1$ bis 10 mm, Messingrohre in äufseren Durchm. $D' = 5$ bis 180 mm mit Wandstärken $s = 0{,}5$ bis 5 mm (Tafeln auf S. 921 u. 922). Nahtlose Kupferrohre mit $D = 3$ bis 2500 mm und $s = 0{,}5$ bis 15 mm liefert Elmores Metall A.-G. in Schladern (Sieg). Für Verzinnen der Rohre innen oder aufsen oder innen und aufsen Preiszuschlag. Die Rohre kommen hart gezogen zur Ablieferung, werden auf Verlangen jedoch auch ausgeglüht geliefert ohne Preisaufschlag. — Bei gebogenen Kupferrohren mit kleinem D sei der Halbmesser der gekrümmten Mittellinie $R \geqq 2$ bis $3\,D$; für gröfsere Werte von D sei $R \geqq 4$ bis $5\,D$.

Nach Bestimmungen der Kaiserlich Deutschen Marine*) sind gelötete Rohre für höhere Dampfspannungen auszuschliefsen; zu verwenden sind entweder gezogene oder aus Kupferblech hergestellte, mit Doppellaschen zusammengenietete Rohre. $k_z \leqq 200$ kg/qcm. Bei umwickelten Rohren ist die Festigkeit der Umwicklung aufser Rechnung zu lassen. Im weiteren s. die Bestimmungen der Normalien des V. d. I. S. 924 ff.

*) Z. d. V. d. I. 1895 S. 780 ff.

Digitized by Google

Bei den (um 90° gebogenen) **Knierohren**, den **T-** und **+-Stücken** ist, wie bei den normalen gufseisernen Flanschenformstücken (Abb. 327, 328 u. 830, S. 911), $L = D + 100$ mm, wenn D den lichten Rohrdurchm. bedeutet. Durchm. D' und Lochkreisdurchm. D'' der **schmiedeisernen Flansche** wie in Tafel S. 909.

Gezogene Kupfer-, Bronze- und Messingrohre ohne Naht.

Kupfer- und Messingwerk von C. Heckmann in Duisburg-Hochfeld.

1. Kupfer- und Bronze-Rohre.

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Metall wiegt 9000 kg.)

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm							
	1	1½	2	2½	3	3½	4	5
3	0,11	0,19	0,28	0,30	0,51	0,64	.	.
4	0,14	0,23	0,34	0,46	0,59	0,74	.	.
5	0,17	0,28	0,40	0,53	0,68	0,84	1,02	.
6	0,20	0,32	0,45	0,60	0,76	0,94	1,13	1,55
8	0,25	0,40	0,56	0,74	0,93	1,14	1,36	1,84
10	0,31	0,49	0,68	0,88	1,10	1,34	1,58	2,12
12	0,37	0,57	0,79	1,02	1,27	1,53	1,81	2,40
13	0,40	0,61	0,85	1,07	1,36	1,63	1,92	2,54
15	0,45	0,70	0,96	1,24	1,53	1,83	2,15	2,83
16	0,48	0,74	1,02	1,31	1,61	1,93	2,26	2,97
18	0,54	0,83	1,13	1,45	1,78	2,13	2,49	3,25
20	0,59	0,91	1,24	1,59	1,95	2,33	2,71	3,53
22	0,65	1,00	1,36	1,73	2,12	2,52	2,94	3,82
25	0,73	1,12	1,53	1,94	2,37	2,82	3,28	4,24
28	0,82	1,25	1,70	2,16	2,63	3,12	3,62	4,66
30	0,88	1,34	1,81	2,30	2,80	3,31	3,84	4,95
32	0,93	1,42	1,93	2,44	2,97	3,51	4,07	5,23
35	1,02	1,55	2,09	2,65	3,22	3,81	4,41	5,66
38	1,10	1,67	2,26	2,86	3,48	4,11	4,75	6,08
40	1,16	1,76	2,37	3,00	3,65	4,30	4,98	6,36
45	1,30	1,97	2,66	3,36	4,07	4,80	5,54	7,07
50	1,44	2,18	2,94	3,71	4,50	5,29	6,11	7,77
55	1,58	2,40	3,22	4,06	4,92	5,79	6,67	8,48
60	1,72	2,61	3,51	4,42	5,34	6,28	7,24	9,19
65	1,87	2,82	3,79	4,77	5,77	6,78	7,80	9,90
70	2,01	3,03	4,07	5,12	6,19	7,27	8,37	10,60
75	2,15	3,24	4,35	5,48	6,62	7,77	8,93	11,31
80	2,29	3,46	4,64	5,83	7,04	8,26	9,50	12,02
85	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73
90	2,57	3,88	5,20	6,54	7,89	9,25	10,63	13,43
95	2,71	4,09	5,48	6,89	8,31	9,75	11,20	14,14
100	2,86	4,30	5,77	7,24	8,74	10,24	11,76	14,84
105	.	4,52	6,05	7,60	9,16	10,74	12,33	15,55
110	.	4,73	6,33	7,95	9,59	11,23	12,89	16,26
115	.	4,94	6,61	8,30	10,01	11,73	13,46	16,97
120	.	5,15	6,90	8,66	10,44	12,22	14,02	17,67
125	.	5,36	7,17	9,01	10,86	12,72	14,59	18,37
130	.	5,58	7,46	9,36	11,28	13,21	15,15	19,08

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm						
	3	3½	4	5	6	7	8
135	11,71	13,73	15,76	19,82	23,92	28,15	32,35
140	12,13	14,20	16,29	20,59	24,77	29,11	33,47
145	12,56	14,70	16,83	21,21	25,61	30,09	34,61
150	12,98	15,19	17,41	21,91	26,46	31,08	35,73
155	13,39	15,68	17,98	22,61	27,31	32,06	36,86
160	13,82	16,18	18,55	23,33	28,16	33,06	38,01
165	14,25	16,68	19,11	24,03	29,01	34,03	39,12
170	14,67	17,17	19,67	24,74	29,85	35,03	40,26
175	15,09	17,67	20,24	25,53	30,71	36,02	41,34
180	15,53	18,16	20,81	26,15	31,55	37,01	42,53
185	15,93	18,65	21,36	26,85	32,40	38,04	43,63
190	16,37	19,15	21,94	27,57	33,25	39,09	44,78
195	16,77	19,64	22,49	28,27	34,10	40,02	45,90
200	17,22	20,14	23,08	28,08	34,95	40,97	47,05
205	17,63	20,64	23,63	29,68	35,80	41,95	48,16
210	18,06	21,13	24,20	30,39	36,65	42,95	49,31
215	18,49	21,63	24,75	31,09	37,49	43,93	50,43
220	18,92	22,13	25,34	31,82	38,34	44,93	51,58
225	19,33	22,62	25,89	32,52	39,18	45,91	52,68
230	19,76	23,11	26,46	33,22	40,03	46,91	53,83

	4	5	6	7	8	9	10
240	27,59	34,63	41,73	48,89	56,08	63,36	70,69
250	28,72	36,05	43,43	50,87	58,34	65,91	73,52
260	29,85	37,46	45,13	52,85	60,60	68,45	76,34
270	30,98	38,87	46,82	54,83	62,87	70,99	79,16
280	32,11	40,28	48,52	56,81	65,12	73,55	82,00
290	33,25	41,70	50,21	58,79	67,38	76,09	84,83
300	34,38	43,11	51,91	60,76	69,66	78,63	87,65
310	.	44,53	53,61	62,74	71,93	81,17	90,48
320	.	45,95	55,31	64,72	74,19	83,72	93,30
330	.	47,36	57,00	66,70	76,45	86,27	96,13
340	.	48,77	58,70	68,68	78,72	88,81	98,96
350	.	50,19	60,39	70,66	80,98	91,36	101,79
360	.	51,60	62,09	72,64	83,24	93,96	104,61
370	.	53,01	63,79	74,62	85,50	96,44	107,44
380	.	54,43	65,48	76,60	87,76	98,99	110,28

Innere Durchm. von 200 bis 230 mm auch mit 9 und 10 mm Wandstärke.

2. Messingrohre.

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Messing wiegt 8500 kg.)

Äußerer Durchm. mm	Wandstärke in mm																
	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/2	5
5	0,06	0,08	0,11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	0,07	0,10	0,13	0,16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	0,10	0,15	0,19	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	0,13	0,19	0,24	0,29	0,34	0,39	0,43	0,47	0,50	0,53	.	.	.	.	.	.	.
12	0,15	0,22	0,29	0,36	0,42	0,48	0,53	0,59	0,63	0,68	0,72	.	.	.	.	.	.
13	0,17	0,24	0,32	0,39	0,46	0,53	0,59	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,89	.	.	.	.
14	0,18	0,26	0,35	0,42	0,50	0,57	0,64	0,70	0,77	0,83	0,88	0,93	0,98	.	.	.	
15	0,19	0,28	0,37	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,83	0,90	0,96	1,02	1,07	1,13	1,17	.	
16	0,21	0,30	0,40	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,97	1,04	1,11	1,16	1,23	1,28	1,38	1,47
18	0,23	0,35	0,45	0,56	0,66	0,76	0,85	0,95	1,03	1,12	1,20	1,28	1,35	1,43	1,50	1,62	1,73
20	0,26	0,39	0,51	0,62	0,74	0,85	0,96	1,07	1,17	1,27	1,36	1,45	1,54	1,63	1,71	1,86	2,00
22	0,29	0,43	0,56	0,69	0,82	0,95	1,07	1,19	1,30	1,41	1,52	1,63	1,73	1,83	1,92	2,10	2,27
24	0,31	0,47	0,61	0,76	0,90	1,04	1,17	1,31	1,43	1,56	1,68	1,80	1,92	2,03	2,14	2,34	2,54
25	0,33	0,49	0,64	0,79	0,94	1,09	1,23	1,37	1,50	1,63	1,76	1,89	2,01	2,13	2,24	2,46	2,67
26	0,34	0,51	0,67	0,83	0,98	1,13	1,28	1,43	1,57	1,71	1,84	1,97	2,10	2,23	2,35	2,58	2,80
28	0,37	0,55	0,72	0,89	1,06	1,23	1,39	1,55	1,70	1,85	2,00	2,15	2,29	2,43	2,56	2,82	3,07
30	0,39	0,59	0,77	0,96	1,14	1,32	1,50	1,67	1,84	2,00	2,16	2,32	2,48	2,63	2,78	3,06	3,34
32	0,42	0,63	0,83	1,03	1,22	1,41	1,60	1,79	1,97	2,15	2,32	2,49	2,66	2,83	2,99	3,30	3,60
35	0,46	0,69	0,91	1,13	1,34	1,55	1,76	1,97	2,17	2,37	2,56	2,75	2,94	3,13	3,31	3,66	4,01
38	0,50	0,75	0,99	1,23	1,46	1,69	1,92	2,15	2,37	2,59	2,80	3,02	3,22	3,43	3,63	4,03	4,41
40	0,53	0,79	1,04	1,29	1,54	1,79	2,03	2,27	2,50	2,73	2,96	3,19	3,41	3,63	3,84	4,27	4,67
42	0,56	0,83	1,09	1,36	1,62	1,88	2,14	2,39	2,64	2,88	3,12	3,36	3,60	3,83	4,06	4,51	4,94
45	0,60	0,89	1,17	1,46	1,74	2,02	2,30	2,57	2,84	3,10	3,36	3,62	3,88	4,13	4,38	4,87	5,34
48	0,64	0,95	1,25	1,56	1,86	2,16	2,46	2,75	3,04	3,32	3,60	3,88	4,15	4,43	4,70	5,23	5,74
50	0,66	0,99	1,31	1,63	1,94	2,25	2,56	2,87	3,17	3,47	3,76	4,06	4,35	4,63	4,91	5,47	6,01
52	0,69	1,03	1,36	1,69	2,02	2,35	2,67	2,99	3,30	3,62	3,92	4,23	4,53	4,83	5,13	5,71	6,27
55	0,73	1,09	1,44	1,79	2,14	2,49	2,83	3,17	3,50	3,83	4,16	4,49	4,81	5,13	5,44	6,06	6,67
58	0,76	1,15	1,52	1,89	2,26	2,63	2,99	3,35	3,71	4,06	4,41	4,75	5,09	5,43	5,76	6,42	7,07
60	0,79	1,19	1,58	1,96	2,34	2,72	3,10	3,47	3,84	4,20	4,57	4,92	5,28	5,63	5,98	6,66	7,34
65	0,85	1,29	1,71	2,13	2,54	2,95	3,36	3,77	4,17	4,57	4,97	5,36	5,75	6,13	6,51	7,26	8,01
70	0,92	1,39	1,84	2,29	2,74	3,19	3,63	4,07	4,51	4,94	5,37	5,79	6,21	6,63	7,04	7,87	8,67
75	0,98	1,49	1,97	2,46	2,94	3,42	3,90	4,37	4,84	5,30	5,77	6,23	6,68	7,13	7,58	8,47	9,34
80	1,06	1,59	2,11	2,63	3,14	3,65	4,16	4,67	5,17	5,67	6,17	6,66	7,15	7,63	8,11	9,07	10,01
85	.	.	2,24	2,79	3,34	3,89	4,43	4,97	5,51	6,04	6,57	7,09	7,61	8,13	8,65	9,67	10,68
90	.	.	2,38	2,96	3,54	4,12	4,70	5,27	5,84	6,41	6,97	7,53	8,08	8,63	9,18	10,27	11,34
95	.	.	.	.	3,74	4,36	4,96	5,57	6,17	6,77	7,37	7,96	8,55	9,13	9,71	10,87	12,01
100	.	.	.	.	3,94	4,60	5,23	5,87	6,50	7,14	7,77	8,39	9,01	9,63	10,25	11,47	12,68
105	.	.	.	.	4,14	4,83	5,50	6,17	6,84	7,51	8,17	8,83	9,48	10,14	10,78	12,07	13,35
110	.	.	.	.	4,34	5,07	5,77	6,47	7,18	7,88	8,57	9,26	9,95	10,64	11,32	12,68	14,02
115	.	.	.	.	4,55	5,29	6,04	6,77	7,52	8,24	8,97	9,70	10,42	11,14	11,85	13,27	14,69
120	.	.	.	.	4,77	5,53	6,30	7,07	7,84	8,61	9,37	10,13	10,88	11,64	12,38	13,88	15,36
125	.	.	.	.	.	.	6,57	7,37	8,18	8,98	9,77	10,56	11,35	12,14	12,92	14,48	16,02
130	.	.	.	.	.	.	6,83	7,67	8,51	9,34	10,17	10,99	11,82	12,64	13,46	15,08	16,68
135	.	.	.	.	.	.	7,10	.	8,84	.	10,57	.	12,29	.	13,99	.	17,36
140	.	.	.	.	.	.	7,37	.	9,18	.	10,97	.	12,76	.	14,53	.	18,02
145	.	.	.	.	.	.	7,64	.	9,51	.	11,37	.	13,22	.	15,06	.	18,69
150	.	.	.	.	.	.	7,90	.	9,85	.	11,78	.	13,69	.	15,59	.	19,36
155	.	.	.	.	.	.	8,17	.	10,18	.	12,18	.	14,16	.	16,13	.	20,03
160	.	.	.	.	.	.	8,44	.	10,51	.	12,58	.	14,63	.	16,66	.	20,69
165	.	.	.	.	.	.	.	.	10,85	.	12,98	.	15,10	.	17,20	.	21,36
170	.	.	.	.	.	.	.	.	11,19	.	13,38	.	15,56	.	17,73	.	22,03
175	.	.	.	.	.	.	.	.	11,52	.	13,78	.	16,03	.	18,27	.	22,70
180	.	.	.	.	.	.	.	.	11,85	.	14,18	.	16,50	.	13,80	.	23,37

Digitized by Google

Kupferne Trompetenrohre.*)

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Für eine Längenausdehnung von 50 mm: Kupfergewicht kg	Für eine Längenausdehnung von 50 mm: Abstand v. Flansch zu Flansch mm	Für eine Längenausdehnung von 100 mm: Kupfergewicht kg	Für eine Längenausdehnung von 100 mm: Abstand v. Flansch zu Flansch mm
40	2,5	7	500	7,5	500
50	"	9	525	10	550
60	"	10,5	550	11,5	600
70	"	14	600	16	650
80	"	17	650	19	700
90	3,0	26	700	28,5	750
100	"	28,5	750	33,5	800
125	"	38,5	800	47	900

Kupferne Schlangen.*)

Gewicht in kg/qm.

Wandstärke mm	Lichter Durchmesser in mm: 40	50	60	70	80	90	100	125
2,0	20	20	20	20	20	20	20	20
2,5	25	25	25	25	25	25	25	25
3,0	30	30	30	30	30	30	30	30

8. Biegsame Tombakrohre ohne Naht.

Deutsche Waffen- und Munitionsfabriken in Karlsruhe.

Aus nahtlos gezogenen Rohren, in die schraubenförmig verlaufende Wulste eingewalzt werden, in Tombak hergestellt, in Längen von 2,7 bis 4,2 m. Querschnitt der Wulste Abb. 345.

Abb. 345.

Durch Umhüllung mit einfachem oder doppeltem Geflechtüberzug, wodurch die Biegsamkeit der Rohre nicht vermindert wird, kann der in der folgenden Tafel angegebene Betriebsdruck auf das 3- bis 5fache erhöht werden. Bei Umwicklung mit Messingdraht **und** doppeltem Geflechtüberzug steigt der Betriebsdruck auf das 9- bis 10fache. Die Längsfederung der Rohre bei zwangsweiser Führung beträgt 50 mm/m für Rohre mit 15 mm und mehr lichtem Durchm. Aufser zur Fortleitung von Luft, Gas, Dampf und Flüssigkeiten sind die biegsamen Messingrohre auch als Dehnungsrohre benutzbar.

Verbindung mittels Muffen, in denen das Rohr entweder mit Weichlot vergossen oder verschraubt wird.

Durchmesser lichter mm	Durchmesser äufserer mm	Betriebsdruck at	Gewicht f. 1 m kg	Durchmesser lichter mm	Durchmesser äufserer mm	Betriebsdruck at	Gewicht f. 1 m kg
6	10,2	50	0,11	35	58,5	7	2,00
8	13	50	0,15	40	62,6	6	2,27
10	19,5	22	0,36	45	68,5	6	2,44
12	22,5	20	0,41	50	73	6	2,70
15	28,5	18	0,54	60	86	6	3,20
20	36,5	12	0,81	70	96	5	3,70
25	42,5	9	1,10	80	107	5	4,00
30	51,5	8	1,69	90	116,5	4,5	5,10

*) Von F. G. Rühmkorff & Co. in Hannover-Herrenhausen.

Digitized by Google

e. Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung,

aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1912.*)

Die Abmessungen der Rohre wurden den tatsächlichen Ausführungen der Rohrwalzwerke entsprechend aufgenommen. Für die Herstellung ist der **Aufsendurchmesser** maßgebend. Die lichte Weite wird aus ihm durch Abziehen der Wandstärken erhalten. Aenderungen der letzteren beeinflussen also die lichte Weite, die in der Zahlentafel als Bezeichnung dient.

Von den in der Zahlentafel enthaltenen Abmessungen sollen nur die Maße für Flansch- und Lochkreisdurchmesser sowie die Angaben für Zahl und Stärke der Schrauben bindend sein.

In die Normalien 1912 sind die Verbindungen für **Kupferrohre** sowie die Verbindungsteile aus Bronze nicht mehr aufgenommen worden, weil diese für überhitzten Dampf nicht empfohlen werden können. Die Konstruktion der Flansche mit Dichtungsnuten ist weggelassen worden, weil sie nach den angestellten Erhebungen nur ausnahmsweise ausgeführt wird (Ziffer 4c, letzter Absatz).

Absperrvorrichtungen.

Von der Aufnahme der Baulängen für die Ventile ist abgesehen worden.

Bei den großen Dampfgeschwindigkeiten, wie sie in neuerer Zeit zugelassen werden, wird von der einen Seite eine größere Baulänge der Ventile für notwendig erachtet, um die erforderlichen Durchgangsquerschnitte herstellen zu können, während von anderer Seite darauf hingewiesen wird, daß bei einer Vergrößerung der Baulängen den Fabrikanten von Absperrvorrichtungen ein außerordentlich großer Aufwand für neue Modelle zugemutet werden würde.

Ueberdies gelangen in neuerer Zeit mehr und mehr Schieber zur Verwendung.

Prüfung der Rohrleitungen.

Die in den früheren Normalien enthaltene Empfehlung, die fertigen Rohrleitungen nach den für Dampfkessel geltenden Vorschriften zu prüfen, ist fallengelassen worden, insbesondere im Hinblick auf die Schädigung, welche die Leitungen bei der Prüfung erfahren können (Wassergewicht), sowie deswegen, weil bei dieser Prüfung wesentliche Einflüsse des Betriebes doch nicht zur Geltung kommen können.

Baustoffe.

Für Gußeisen, dessen Anwendungsbereich keine Aenderung erfahren hat, sollen die Prüfungsbestimmungen angewendet werden, die der Verein deutscher Eisengießereien und der Deutsche Verband für die Materialprüfungen der Technik neuerdings für Maschinenguß von hoher Festigkeit angenommen haben.

Flußeisen, Schweißeisen, Stahlguß.

Die angegebenen Festigkeitszahlen sollen nur als Empfehlung, nicht als Vorschrift gelten. — Nahtlose Rohre werden von einer Reihe von Firmen in vorzüglicher Beschaffenheit geliefert, worauf besonders hingewiesen sei.

Rohrverbindungen.

Durch Versuche der Kgl. Materialprüfungsanstalt in Stuttgart**) ist die Zulässigkeit der für die Flanschverbindungen vorgeschlagenen Abmessungen nachgewiesen worden. Ferner wurde ermittelt, daß die Befestigung durch Einwalzen, wenn es sachgemäß erfolgt, bei Flußeisen- und Stahlgußflanschen sich als ausreichend widerstandsfähig erwiesen hat. Die in den Abb. gezeichneten Rillenformen, die von namhaften Fabriken ausgeführt werden, sollen nur als Beispiele gelten. Es empfiehlt sich, die Rillenformen so auszuwählen, daß unnötige Quetschungen des Materials sowie scharfe Kanten nach Möglichkeit vermieden werden.

Rohrnormalien 1912.

1. Geltungsbereich der Normalien hinsichtlich des Rohrdurchmessers und des Dampfdruckes; Prüfungsdruck.

Die Normalien gelten für Rohre von 25 bis 400 mm Durchm. für einen Betriebsdruck bis 20 at Ueberdruck und für eine Dampftemperatur bis 400° C.

*) Zu beziehen von der Geschäftstelle des V. d. I., Berlin NW 7, Sommerstraße 4a; vgl. Z. d. V. d. I. 1912, S. 1480.

**) Mitteilung aus der Materialprüfungsanstalt der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart, Z. d. V. d. I. 1912 S. 161.

Digitized by Google

Die Einzelstücke sind bei gewöhnlicher Temperatur mit dem Zweifachen des höchsten Betriebsdruckes zu prüfen. Dabei sind sie, während sie unter Druck stehen, mit dem Hammer abzuklopfen.

2. Druckfläche der Flanschverbindungen.

Die den Festigkeitsberechnungen zugrunde gelegte Druckfläche der Flanschverbindungen ist gleich der Kreisfläche, welche sich bis zur Aufsenkante der Dichtungsringfläche erstreckt.

3. Baustoffe.

a) Gufseisen.

Gufseisen darf bis 8 at zu Rohren, Formstücken und Ventilkörpern für alle Durchm.,
von 8 bis 13 at zu Ventilkörpern und Formstücken für alle Durchm., zu Rohren nur bis 150 mm Durchm.,
über 13 at überhaupt nicht verwendet werden, mit Ausnahme von Ventilen bis 50 mm Durchm.

Das Gufseisen mufs für 30 mm starke Rundstäbe mit Gufshaut bei 600 mm Entfernung der Auflager eine Biegungsfestigkeit von mindestens 3400 kg/qcm und eine Durchbiegung von wenigstens 10 mm ergeben.

b) Bronze.

Für Ventilkörper und Formstücke ist bei Temperaturen bis 220° C gewöhnliche Bronze zulässig, vorausgesetzt, dafs sie bei Zimmertemperatur eine Zugfestigkeit von mindestens 2000 kg/qcm bei wenigstens 15 % Dehnung besitzt.

Soll bei Verwendung von Legierungen über 220° C hinausgegangen werden, so ist vorher die Ermittlung der Festigkeitseigenschaften für die in Betracht kommenden höheren Temperaturen geboten.

c) Flufseisen, Schweifseisen, Stahlgufs.

Aus Flufseisen oder Schweifseisen können angefertigt werden: die Schrauben und die Rohrwandungen; aus Flufseisen, Schweifseisen oder Stahlgufs: die Flansche. Die Ventile werden aus Stahlgufs, die Formstücke aus Stahlgufs, Flufs- oder Schweifseisen hergestellt, sofern nicht Gufseisen oder Bronze im Rahmen der für diese Baustoffe geltenden Beschränkungen gewählt wird.

Die Zahlen der Festigkeit und der Dehnung (auf die Meſslänge $l = 11{,}3\sqrt{f}$, wenn f der Stabquerschnitt) sollen betragen:

für Flufseisen: 3600 bis höchstens 4500 kg/qcm bei wenigstens 20 % Dehnung.

für Schweifseisen: in der Längsrichtung mindestens 3100 kg/qcm bei wenigstens 12 % Dehnung, in der Querrichtung mindestens 3200 kg/qcm bei wenigstens 8 % Dehnung.

für Stahlgufs: mindestens 3800 kg/qcm bei wenigstens 20 % Dehnung.

Bei Stahlgufs gelten die angegebenen Festigkeitszahlen für angegossene Probestücke.

Stumpfgeschweifste Rohre (sog. Gasrohre) sollen nicht verwendet werden.

4. Rohrverbindungen.

a) Flansche und Bordringe.

Winkelflansche sind für alle Rohrdurchmesser und für Drücke bis 20 at zulässig.

Die Verbindung der Flansche mit den Rohren mittels Lötung allein ist nicht zulässig; die Sicherung der Flanschköpfe gegen Abschieben von den Rohren mufs durch Schweifsen oder Nieten, durch Einwalzen, mittels Gewindes oder durch Umbördeln erzielt werden.

Das Einwalzen mit Walzapparaten ist zweckmäfsig, erfordert aber da, wo die Wandstärke gröfser als 8 mm ist, maschinelle Vorrichtungen. Sind diese nicht vorhanden, so ist Nietung zu empfehlen.

Das Aufschweifsen von Bordringen ist bis 250 mm zulässig, wobei der Schweifsdruck durch mechanische Vorrichtungen zu erzeugen ist. Das Vorschweifsen von Bordringen oder Flanschen kann nur für die gröfseren Rohrweiten empfohlen werden, bei denen eine beiderseitige Bearbeitung der Schweifsnaht möglich ist.

Die Flansche können mit Schrägsitz oder mit Flachsitz ausgeführt werden.

b) Flanschdurchmesser, Lochkreisdurchmesser.

Bis zu 80 mm Durchm. stimmen die Flansch- und Lochkreisdurchm. mit den Mafsen der gufseisernen Flanschrohre für geringen Druck überein; über 80 mm Durchm. hinaus sind sie gröfser.

c) Die glatten Bordringe und Flansche setzen voraus, dafs ein dem hohen Druck und der hohen Temperatur entsprechend gewähltes Dichtungsmaterial verwendet wird.

Die Abmessungen der Bordringe und Flansche gestatten auch die Herstellung von Nut und Feder.

Digitized by Google

Normalien zu Rohrleitungen für

Aufgestellt vom Verein

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	Rohre					**Flansche und**								
Bezeichnung	Tatsächlicher Durchm.		Wanddicke		Wanddicke am Hals des Ventils Abb. 354 u. 355	Aeufserer Durchm. der losen Flansche Abb. 346 bis 353 sowie der festen Flansche Abb. 354 u. 355.	Lochkreisdurchm. Abb. 346 bis 355	Innerer Durchm. der losen Flansche D_3					Höhe der losen Flansche Abb. 346 bis 353	Höhe der festen Flansche Abb. 354 u. 355 sowie des Bordringes Abb. 346 bis 353
	aufsen	innen	im Schaft Abb. 346 bis 355	am Bordring Abb. 348 u. 349				bei aufgeschweifstem Bordring: mit Flachsitz Abb. 346	bei aufgeschweifstem Bordring: mit Schrägsitz Abb. 347	bei vorgeschweifstem Bordring: mit Flachsitz Abb. 348	bei vorgeschweifstem Bordring: mit Schrägsitz Abb. 349	bei aufgewalztem u. aufgenietetem Bordring: mit Flachsitz und Schrägsitz Abb. 350 bis 353		
	D_a*)	D_i	s	s_1	s_2	D_1	D_2						h	h_1
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
25	32	26	3	—	11	120	90	35	50	—	—	52	13	13
30	38	32	3	—	11	125	95	42	55	—	—	58	14	14
35	41.5	35.5	3	—	12	130	100	45	60	—	—	64	14	14
40	47,5	41,5	3	—	12	140	110	52	65	—	—	70	15	15
45	51	45	3	—	12	150	115	55	70	—	—	76	15	15
50	57	51	3	—	13	160	125	62	75	—	—	82	16	16
55	60	54	3	—	13	165	130	65	80	—	—	88	16	16
60	63,5	57,5	3	—	13	175	135	68	85	—	—	92	17	17
65	70	64	3	—	14	180	140	74	90	—	—	100	17	17
70	76	70	3	—	14	185	145	80	95	—	—	106	18	18
80	89	82,5	3 1/4	—	14	200	160	94	110	—	—	118	19	18
90	95	88,5	3 1/4	—	15	220	180	100	120	—	—	130	20	19
100	108	100,5	3 3/4	—	15	240	195	114	130	—	—	142	21	20
110	121	113		—	15	250	200	126	144	—	—	154	22	21
120	127	119	4	—	16	260	210	132	156	—	—	164	23	22
125	133	125	4	—	16	270	220	138	164	—	—	170	24	22
130	140	131	4 1/2	—	16	280	230	145	170	—	—	178	25	23
140	152	143	4 1/2	—	17	290	240	158	180	—	—	190	26	24
150	159	150	4 1/2	—	17	300	250	165	190	—	—	200	27	25
160	171	162	4 1/2	—	18	310	260	176	200	—	—	212	28	26
180	191	180	5 1/2	—	19	335	285	198	220	—	—	235	30	27
200	216	203	6 1/2	—	20	360	310	224	242	—	—	262	32	28
225	241	228	6 1/2	—	21	390	340	248	270	—	—	286	34	29
250	267	253	7	—	22	420	370	274	300	—	—	312	36	30
275	292	277	7 1/2	15	23	450	400	—	—	314	330	340	38	31
300	318	303	7 1/2	15	24	480	430	—	—	340	355	370	40	32
325	343	327	8	16	25	520	465	—	—	366	380	396	42	33
350	368	352	8	16	26	550	495	—	—	392	405	424	45	34
375	394	377	8 1/2	17	27	580	525	—	—	418	430	452	48	35
400	420	402	9	18	28	605	550	—	—	446	455	480	50	36

Die durch gröfseren Druck kenntlich gemachten Abmessungen gelten für

*) Diese Werte sind durch Umrechnung aus englischem Mafs erhalten.

Digitized by Google

Dampf von hoher Spannung 1912.
deutscher Ingenieure.

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Bordringe						**Niete**			**Schrauben**					
Aeufserer Durchm. des Bordringes D_4		Hals der aufgewalzten und aufgenieteten festen Flansche sowie des aufgewalzten und aufgenieteten Bordringes Abb. 350 bis 355		Aeufserer Durchm. der Dichtungsleiste Abb. 346 bis 355	Höhe der Dichtungsleiste Abb. 346 bis 355	Anzahl	Durchm.	Abstand von Oberkante Hals Abb. 352 u. 353	Gesamtdruck $P = \frac{\pi}{4} D_6^2 \cdot 20$	Anzahl i	Durchm.	Werte von $P : if$, worin f Kernquerschnitt der Schraube	Durchm. des Schraubenloches	Bezeichnung
aufgeschweifst Abb. 346 u. 347 sowie vorgeschweifst Abb. 348 u. 349	aufgewalzt Abb. 350 u. 351 sowie aufgenietet Abb. 352 u. 353	Aeufserer Durchm. D_5	Höhe h_2	D_6	a			e						
mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm	mm	kg		Zoll engl.	kg/qcm	mm	
60	64	48	18	60	2	—	—	—	565	4	1/2	180	14	25
65	68	54	10	65	2	—	—	—	665	4	1/2	212	14	30
70	74	60	20	70	2	—	—	—	770	4	1/2	246	14	35
75	80	66	21	75	2	—	—	—	885	4	1/2	282	14	40
80	88	72	22	80	2	—	—	—	1005	4	5/8	192	17	45
85	94	78	23	85	2	—	—	—	1135	4	5/8	216	17	50
90	100	82	24	90	2	—	—	—	1270	4	5/8	242	17	55
95	106	86	25	95	2	—	—	—	1420	4	5/8	271	17	60
102	114	94	26	102	2	—	—	—	1635	4	5/8	312	17	65
110	122	102	27	110	2	—	—	—	1900	4	5/8	363	17	70
125	134	114	28	125	2	—	—	—	2455	8	5/8	234	17	80
135	146	124	29	135	2	—	—	—	2865	8	5/8	273	17	90
145	158	138	30	145	2	—	—	—	3305	8	5/8	315	17	100
160	172	150	31	160	3	—	—	—	4020	8	3/4	257	21	110
172	182	160	32	172	3	—	—	—	4645	8	3/4	296	21	120
180	188	165	33	180	3	—	—	—	5090	8	3/4	324	21	125
185	195	174	34	185	3	—	—	—	5375	8	3/4	343	21	130
195	206	186	36	195	3	—	—	—	5975	10	3/4	305	21	140
205	216	195	38	205	3	—	—	—	6600	10	3/4	337	21	150
215	230	208	40	215	3	—	—	—	7260	10	3/4	370	21	160
238	252	230	44	238	3	—	—	—	8900	10	7/8	327	24	180
260	280	256	48	260	4	—	—	—	10620	10	7/8	390	24	200
290	305	280	50	275	4	—	—	—	11880	12	7/8	364	24	225
320	332	306	52	305	4	—	—	—	14610	12	1	341	28	250
350	362	334	54	330	4	—	—	—	17105	12	1	399	28	275
380	395	362	56	355	4	20	16	28	19795	14	1	396	28	300
405	420	388	58	380	4	20	18	29	22680	14	1 1/8	360	32	325
430	450	416	60	410	4	20	18	30	26405	14	1 1/8	419	32	350
455	478	444	62	435	4	22	18	31	29725	16	1 1/8	413	32	375
485	510	472	64	460	4	22	18	32	33240	16	1 1/8	462	32	400

Rohrweiten, die als Zwischengröfsen und nicht als normal anzusehen sind.

Digitized by Google

Abb. 346.

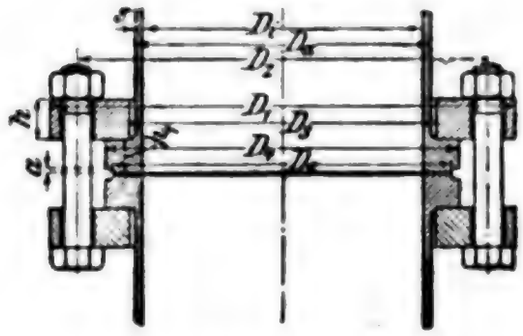


Abb. 347.

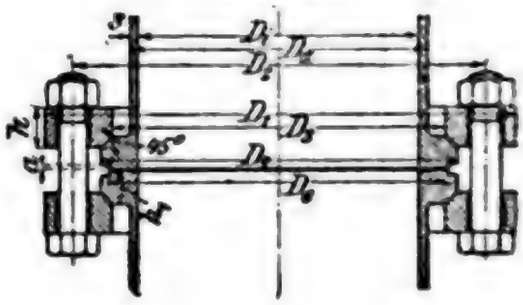


Abb. 348.

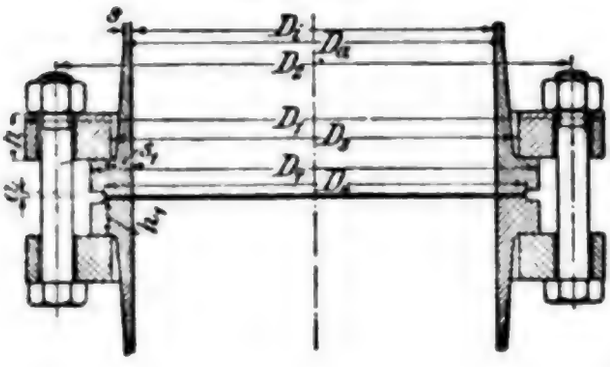


Abb. 349.

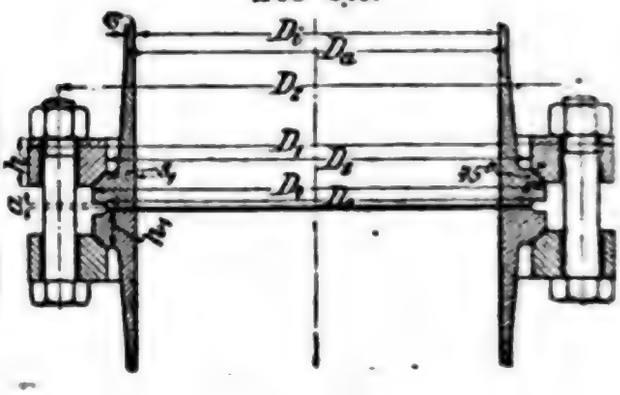


Abb. 350.

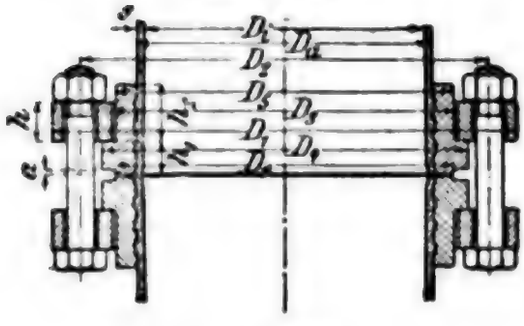


Abb. 351.

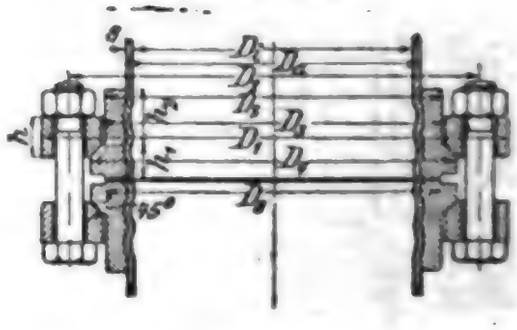


Abb. 352.

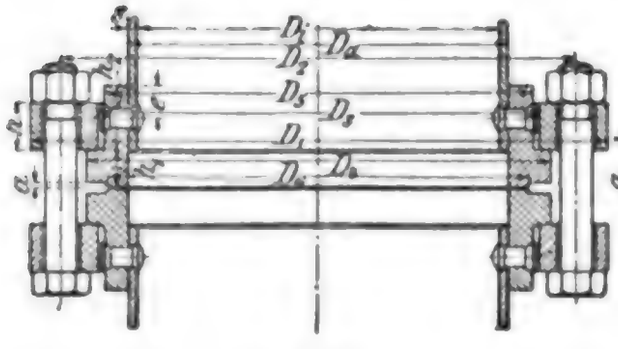


Abb. 353.

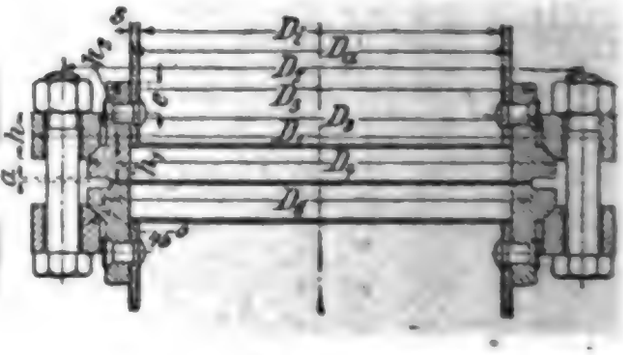


Abb. 354.

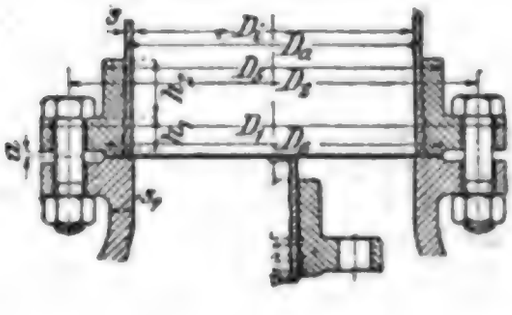
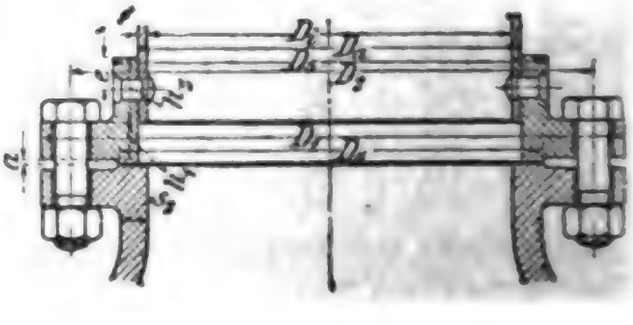


Abb. 355.



Digitized by Google

f. Blei- und Zinnrohre.*)

1. Zinnrohre.**)

Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Gewicht von 1 m Rohr kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck at
4	2,0	0,30	55	60	15	1.5	0,55	29,0	12	27	3.0	2,05	19.5	13,0
5	1,5	0,25	66	36	15	2,0	0,80	20,0	16	28	2,0	1,40	28.5	8.0
5	2,0	0,35	47	48	15	3.0	1,25	12.5	24	28	3.0	2,15	18.5	12.5
6	1,5	0,30	55	30	16	1.5	0.60	26,5	11	29	2,0	1,40	28.5	8,0
6	2,0	0,35	47	40	16	2,0	0.85	18,5	15	29	3,0	2,20	18,0	12,0
7	1,5	0,30	55	25	16	3,0	1.30	12,0	22	30	2,0	1,45	27.5	8,0
7	2,0	0,40	41	34	17	1.5	0.65	24.5	10	30	3.0	2,30	17.0	12,0
8	1.5	0,35	47	22	17	2.0	0.90	17,5	14	32	2.0	1.55	23.0	7.5
8	2,0	0,45	36	30	17	3,0	1.40	11,0	21	32	3.0	2.40	15.0	11.0
8	2,5	0,60	27	37	18	1.5	0,70	22,5	10	35	2,0	1,70	21,0	6,5
9	1,5	0,35	47	20	18	2,0	0,90	17,5	13	35	3,0	2,60	13.8	10,0
9	2.0	0,50	33	26	18	3.0	1.45	27,5	20	36	2.0	1.75	20.5	6.5
9	2,5	0,65	25	33	19	2.0	1.00	16,0	12	36	3,0	2.70	13.3	10.0
10	1,5	0,40	41	18	19	3.0	1.50	26,5	19	38	2.0	1.85	19.0	6,0
10	2.0	0,55	30	24	20	2.0	1.00	40,0	12	38	3,0	2,80	12,8	9,0
10	2,5	0,70	23,5	30	20	3,0	1,60	25,0	18	40	2.0	1,95	18,5	6,0
10	3,0	0,90	18.0	36	21	2.0	1,05	38,0	11	40	3,0	2,95	12.2	9,0
11	1.5	0,45	36,5	16	21	3.0	1,65	24,0	17	41	2.0	2,00	18,0	5,5
11	2.0	0,60	27.5	21	22	2,0	1.10	36,0	10	41	3,0	3.05	11,8	8,5
11	2,5	0,80	20,5	27	22	3.0	1,70	23,5	17	42	2.0	2,00	18,0	5,5
11	3.0	0,95	17.0	32	23	2,0	1.15	34,5	10	42	3.0	3.10	11,6	8,5
12	1.5	0,45	36.5	15	23	3,0	1.80	22,0	15,5	44	2,0	2.10	17.0	5,0
12	2,0	0,65	25.0	20	24	2,0	1.20	33,0	10	44	3,0	3,25	11.0	8,0
12	2.5	0,85	19.0	25	24	3.0	1,85	21,5	15	46	2,0	2,20	16,0	5,0
12	3,0	1,05	15.0	30	25	2,0	1,25	32,0	9	46	3,0	3,40	10,5	7,5
13	1.5	0,50	33,0	13	25	3,0	1.95	20,5	14	48	2,0	2,30	15,5	5,0
13	2,0	0,70	23.5	18	26	2.0	1,30	30,5	9	48	3,0	3.50	10.3	7.5
13	2,5	0,90	18.0	23	26	3,0	2.00	20,0	13,5	50	2,0	2.40	15.0	4.5
13	3,0	1,10	14.5	27	27	2,0	1.35	29,5	8,5	50	3.0	3,65	9,8	7,0

2. Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre).**)

10	4,0	2,0	12,5	20	21	4,5	4,1	14,6	10	29	4,5	5.4	12.0	7,0
11	4,0	2,1	11.9	18	21	5,0	4.6	13,0	12	29	5,0	6.1	10.6	8,0
12	4,0	2,3	10.8	16	22	4,5	4,2	14,2	10	29	5,5	6.8	9.5	9,0
13	4,0	2,4	20.0	15	22	5,0	4.8	12,5	11	30	4,5	5,5	11,8	7,0
13	4,5	2,8	17,0	17	23	4,5	4.4	13,5	9	30	5,0	6,3	10,3	8,0
13	5,0	3,2	18,7	19	23	5,0	5,0	12,0	10	30	5,5	7,0	9,2	9,0
15	4,5	3,1	19,3	15	24	4,5	4,6	13,0	9	30	6.0	7.7	8.4	10,0
15	5,0	3,6	16,6	16	24	5,0	5,2	11,5	10	30	6.5	8.4	7.7	10,5
16	4,5	3,3	18,2	14	25	4,5	4.7	12,7	9	32	5,0	6,6	9.6	8.0
16	5,0	3,7	16,2	15	25	5,0	5,4	11,1	10	32	5.5	7.4	8,6	8,0
17	4,5	3.4	17,6	13	25	5,5	6,0	10,0	11	32	6,0	8.1	7,9	9,0
17	5,0	3,9	15,3	14	25	5.75	6,3	9,5	11,5	35	5.0	7.2	8.7	7,0
18	4.5	3,6	16.6	12	26	4,5	4,9	13.4	8	35	5.5	8.0	7,8	8.0
18	5,0	4,1	14,6	14	26	5,5	6,2	10.6	10	36	5.0	7.3	8.6	7,0
19	4,5	3,8	15,7	12	27	4,5	5,1	12,7	8	36	5.5	8.1	7,7	7.5
19	5,0	4,3	13,9	13	27	5,5	6,4	10,1	10	38	5,0	7,7	8,1	6.5
20	4,5	3,9	15.3	11	28	4,5	5,2	12,5	8	38	5.5	8.5	7,4	7,0
20	5,0	4,5	13,3	12	28	5,0	5,9	11,0	9	40	5,0	8,0	7,7	6,0
20	5,25	4,7	12,7	13	28	5,5	6,6	9,8	9,5	40	5,5	8,9	6,9	7,0

*) Bemerkung S. 930. — **) Kgl. Sächsische Hüttenwerke in Freiberg in Sachsen

Digitized by Google

Das Handelsbureau der Kgl. Sächsischen Hüttenwerke in Freiberg in Sachsen liefert Rohre aus Weichblei und Hartblei von 3 mm lichter Weite mit Wandstärken von 1, 1,5 und 2 mm bis zu 300 mm lichter Weite und Wandstärken von 5, 7,5 und 10 mm. Näheres in den Preislisten. (Bei gröfseren Aufträgen werden auch andere Abmessungen geliefert.)

Sämtliche Bleirohrsorten werden 1) unverzinnt, 2) innen (durch Schwefelnatrium) geschwefelt, 3) innen und aufsen verzinnt und 4) innen oder aufsen verzinnt geliefert, ausschl. der Rohre von 3, 4, 5, 6 und 7 mm lichtem Durchm., die nur unverzinnt oder aufsen verzinnt hergestellt werden.

Hartbleirohre aus Weichblei mit einem Zusatz von 10 % oder 15 % Antimonblei haben gröfsere Elastizität bei Temperaturwechsel als Weichbleirohre und sind für Dampfleitungen diesen vorzuziehen. Der Antimongehalt beträgt 1 bis 2 oder 2 bis 3 %.

Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre) haben 0,5 mm Zinnstärke. Das Mantelrohr wird nur in vollen Preflängen abgegeben.

Der **zulässige innere Druck** bezieht sich nur auf mittlere Temperaturen bis 30°; er ist nach der Formel (2) auf S. 605 berechnet, wobei, entsprechend 5- bis 6 facher Sicherheit gegen Bruch (vgl. S. 486 ff.), für Hartblei $k_z = 50$ kg/qcm, für Weichblei $k_z = 35$ kg/qcm und für Zinn $k_z = 60$ kg/qcm gesetzt wird.

Für höhere Temperaturen sind wesentlich stärkere Wandungen erforderlich.

Abweichungen in den **Gewichtangaben** bis zu ± 5 % bleiben vorbehalten.

Die unverzinnten und die innen geschwefelten **Bleirohre** können bis zu den gröfsten Längen in einem Stück ohne Naht oder Lötstelle gepreßt werden; in der Regel werden jedoch Teillängen geliefert. Die Rohre, die sich beim Aufwickeln breitdrücken würden, werden in Stangen geschnitten versendet. — Die übrigen in Bunden. Wird vom Besteller das Bundgewicht nicht vorgeschrieben, so werden nur Bunde bis zu 140 kg abgegeben. — Bei innen oder aufsen sowie bei innen und aufsen verzinnten Rohren beträgt das Höchstgewicht eines Bundes dagegen nur 75 kg.

g. Normalien für Abflufsrohre aus Blei oder Steinzeug.

Runderlafs des preufsischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905.*)

Der Verband deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine hat Normalien für Abflufsrohre aufgestellt, die, soweit sie Bleirohre und Steinzeugrohre betreffen, fortan bei den von der preufsischen Staatsbauverwaltung auszuführenden Bauten zu beachten sind.

Hiernach sind die nachstehenden Bezeichnungen einheitlich zu wählen:

a) Ableitungen für liegende Leitungen, sog. Gefälleleitungen, Sohlleitungen usw.; sie werden in Hauptleitungen und Nebenleitungen geteilt;

b) Fallrohre für senkrecht herabkommende Leitungen; sie werden in Hauptfallrohre und Nebenfallrohre geteilt;

c) Schrägleitungen für alle Leitungen, die an der Wand geschleift werden;

d) Knierohre für Rohre in Bogenform mit Halbmessern von 2 Rohrdurchmessern;

e) Bogenrohre für Rohre in Bogenform mit gröfseren Halbmessern, als unter d) angegeben;

f) Hülfsluftleitung statt sekundärer Ventilation;

g) Fufsbogen statt Fufskrümmer;

h) Verbindungen statt Abzweigungen;

i) Bogenverbindungen statt Pfeifenköpfe;

k) Sprungrohre statt Etagenbogen, S-Stücke usw.;

l) Uebergangsrohre statt Reduktionen, Sprung usw.;

m) Uebermuffen statt Ueberschieber.

Bleiabflufsrohre erhalten folgende Durchm., Wandstärken und Gewichte:

Lichter Durchm. . . .	mm	25	30	40	50
Wandstärke	mm	3,0	3,5	4,0	4,0
Gewicht für 1 m . . .	kg	3,0	4,2	6,3	7,7

Steinzeugrohre erhalten folgende Abmessungen:

Lichter Durchm.	cm	10	12,5	15	20
Kleinste zulass. Wandstärke . .	cm	1,5	1,6	1,7	1,9

dabei die Baulänge der geraden Rohre 60 und 100 cm und die Muffentiefe 6 bis 7 cm.

Die Innenfläche der Muffe und das Schwanzende des Rohres werden auf 5 cm Länge mit mindestens 5 Riefen versehen.

Die Dichtungsstärke an der vorderen Muffenwand soll 1,5 cm betragen und darf sich bis zum Muffenboden bis auf 1,2 cm vermindern.

*) Zentralbl. Bauv. 1905 S. 613.

Digitized by Google

Für die Bogenrohre gelten folgende Abmessungen:
bei 15° Zentriwinkel 206 cm Halbmesser und 52 cm Baulänge,
„ 30° „ 100 „ „ „ 52 „ „ „
„ 45° „ 60 „ „ „ 47 „ „ „

Für besondere Fälle (senkrechte Anschlüsse) sind Knierohre mit 90° Zentriwinkel und mit einem Halbmesser gleich ungefähr dem Zweifachen des Rohrdurchm. zu verwenden; Knierohre dürfen jedoch in liegenden Leitungen nicht verwendet werden.

Die Uebergangsrohre sind auf 60 cm Baulänge bemessen und vermitteln, mit Ausnahme des Ueberganges von 10 auf 15 cm, nur den Uebergang von einem Rohrdurchm. auf den nächstfolgenden Durchm.

Die Verbindungsrohre sind auf 60 cm Baulänge bemessen. Der Anschlufsstutzen bildet mit dem Hauptrohr einen Winkel von 60°. Anschlüsse unter anderen Winkeln sowie Doppelverbindungen sind ausgeschlossen.

h. Seilrohre und Metallschläuche.

1. **Seilrohre.** Um ein Bleirohr ist eine Lage asphaltierten Hanfgarnes und dann eine Bewehrung aus verschlossenen Formdrähten gelegt. Die Bewehrung ist zum Schutz gegen Rosten von einer dickeren Lage asphaltierten Hanfes umgeben und um das Ganze verzinkter Eisendraht gewickelt. Verbindung durch Muffen, die auf der Aufsenseite der Drahtumwicklung festgeschraubt sind; Lederpackung und Schraubenverbindung. Für Wasser- und Petroleumleitungen durch Flüsse, Seen und Moräste geeignet.

Seilrohre von Felten & Guilleaume Carlswerk A. G., Mülheim a. Rhein.

Zulässiger Betriebsdruck 5 at					Zulässiger Betriebsdruck 10 at				
Lichter Durchmesser mm	Wandstärke des Bleirohres mm	Aufserer Durchmesser mm	Gewicht des Seilrohres kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m	Lichter Durchmesser mm	Wandstärke des Bleirohres mm	Aufserer Durchmesser mm	Gewicht des Seilrohres kg/m	Gröfste Fabrikationslänge m
15	1,50	39	3,5	1000	15	1,5	32	3,5	1000
20	1,50	39	4,5	875	20	2,0	40	5,0	875
25	1,75	46	6,0	750	25	2,5	47	6,75	750
30	2,00	52	7,5	625	30	3,0	54	9,0	625
35	2,25	58	9,0	525	35	3,5	61	11,5	525
40	2,50	64	10,5	425	40	4,0	67	13,5	425
45	2,75	70	14	350	45	4,5	75	18,0	350
50	3,00	77	16	300	50	5,0	81	20,5	300
55	3,25	83	18	250	55	5,5	88	23,75	250
60	3,50	88	20	225	60	6,0	93	27,0	225
65	3,75	94	23	200	65	6,5	99	31,0	200

2. **Metallschläuche.***) Ein Metallband (aus Stahl, Kupfer, Messing, Neusilber) geeigneter Querschnittform (z. B. ⌐⌙) ist schraubenförmig aufgerollt, so dafs die Ränder beweglich in- oder übereinandergreifen. Die entstehenden Rinnen sind mit Dichtungsstoff (Gummi, Asbest usw.) ausgefüllt. Verwendung zu beweglichen Leitungen aller Art, auch als Schutz für elektr. Kabel; ferner zum Ausgleich der Wärmeausdehnung bei Dampfleitungen. Ueber Abmessungen z. B. die Preislisten der

*) Herstellung von Metallspiralschläuchen Z. d. V. d. I. 1911 S. 82 ff.

Metallschlauchfabrik Pforzheim vorm. Hch. Witzenmann oder der Zwickauer Metallschlauchfabrik Gebrüder Jacob, Zwickau i. Sachsen.*) — **Doppelschläuche** aus zwei ineinandersteckenden Metallschläuchen mit entgegengesetzt gerichteten Windungen bleiben dicht bei allen Bewegungen.

C. Ventile.

a. Hubventile.

Selbsttätige Teller- und Kegel-Hubventile**) (bei Pumpen, Gebläsen, Kompressoren usw.) erfordern zuverlässige **Ventilführung**, wobei die Gleitflächen, um Abnutzung und seitliche Ablenkung zu vermeiden, grofs und die Reibung behufs leichten Spieles gering sein mufs. Kugelventile wegen mangelhafter Führung nur für untergeordnete Zwecke, für unreine und schlammige Flüssigkeiten zu empfehlen. Richtige Führung wird unterstützt durch tiefe Lage des Ventilschwerpunktes und des Ventilkastens, wobei der Flüssigkeitsstrom innerhalb des Ventilkastens von dessen Achse nicht abgelenkt wird.

Das Ventil ist nicht schwerer als nötig zu machen; das spezifisch schwerere Ventil ist das bessere. Für Pumpen mit grofser Hubzahl ist die Ventilmasse tunlichst zu vermindern und das Fehlende an Belastung durch Federn zu ersetzen.

Dichtungsfläche. Entweder sind Sitz und Ventil metallisch, oder das Ventil ist elastisch gelidert (Leder, Hartgummi, Vulkanfiber, Asbest usw.). Die Dichtungsfläche ist nach Möglichkeit klein zu halten, jedoch mufs die Abdichtung gesichert sein. Die Breite der Dichtungsfläche wird mit Rücksicht auf den zulässigen Flächendruck k (in kg/qcm) allgemein bestimmt aus:

$$Vp = Sk,$$

worin V die obere Druckfläche des Ventils in qcm,
S die Dichtungsfläche (Sitzfläche) des Ventils in qcm,
p den Flüssigkeitsdruck auf das Ventil in kg/qcm bezeichnet.

Gröfste zulässige Auflagerdrücke k (bei stofsfreiem Gange):

für Rotguſs	bis	150	kg/qcm,
„ Phosphorbronze . .	„	200	„ „
„ Gufseisen	„	80	„ „
„ Gummi und Leder .	„	30	„ „ ***)

Für gewöhnliche, aufgeschliffene Pumpen-Metallventile genügt eine Breite der Sitzfläche $b = 0{,}8\sqrt{d}$,
wo d den lichten Durchm. der Ventilsitzöffnung in **mm** bezeichnet.

Bei reinem Wasser und sofern man sicher ist, dafs das Ventil sich ruhig aufsetzt, genügt eine geringere Breite b.

Nicht spielende Ventile (Sicherheitsventile) erhalten etwa 1,5 bis 2,5 mm Sitzbreite.

Tellerventile mit Leder erhalten $b = 1{,}25\sqrt{d}$.

*) Schuppenpanzerschlauch v. Gebrüder Jacob als Saugrüssel f. pneumatische Getreideförderung Z. d. V. d. I. 1914 S. 154.

**) Vgl. auch Hartmann-Knoke, Die Pumpen, 3. Aufl. von H. Berg. Berlin 1906 sowie Z. d. V. d. I. 1908 S. 1842; Fufsnoten auf S. 934.

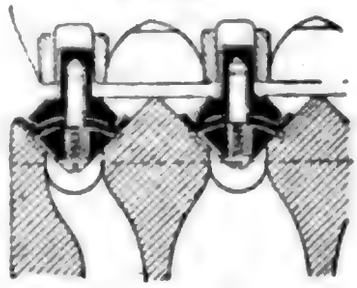
***) Nach Riedler bei sicherer Ventilführung und ruhiger Berührung des Sitzes bis 85 kg/qcm bei Leder, 200 kg/qcm bei Hartgummi.

Digitized by Google

Die **Gehäusewelte** d_2 ergibt sich, wenn im Gehäuse dieselbe Durchflufsgeschwindigkeit wie im Sitz bestehen soll, aus $d_2 = \sqrt{d_1^2 + d^2}$.

Um auch für grofse Ventildrücke elastische Dichtung verwenden zu können, **entlastet** man die Dichtung nach O. Fernis (Abb. 356) dadurch, dafs man die (metallische) Druckfläche von der eigentlichen Dichtungsfläche (Leder) trennt (Flüssigkeitsdruck p statt des Flächendruckes k).*)

Abb. 356.
Mehrfaches Ringventil von O. Fernis.



Bedeutet f den freien Durchgangsquerschnitt des Ventils in qcm und u den (kleinsten) freien Durchgangsumfang des Ventils in cm, so ergibt sich der **Ventilhub** h in cm bei einsitzigem Ventil, wenn dieselbe Durchflufsgeschwindigkeit wie im Sitz bestehen soll, aus der Gleichung

$$f = u\,h.$$

Für den Kreisquerschnitt vom Durchm. d mufs, wenn der Durchflufs-Ringquerschnitt $\pi d h$ beim einfachen Tellerventil (Abb. 359 u. 360 sowie 364 bis 366) gleich dem Kreisquerschnitt $\frac{\pi d^2}{4}$ werden soll, der Hub $h = \frac{d}{4}$ werden; wegen der hydraulischen Widerstände wähle man jedoch h etwas gröfser als $0{,}25\,d$. Für ein Ventil mit unterer Führung durch i Rippen, die aufsen die Breite s, innen die Breite s_1 haben, ist $\mu = \pi d - i s$ und $f = \frac{\pi d^2}{4} - i s_1 \frac{d}{2}$ zu setzen.

Bei Ventilen nach Abb. 361 u. 362 ist zu beachten, dafs die Kanalweite x (Abb. 357) beim Ventilhub h nur beträgt:

$$x = h \cos \alpha,$$

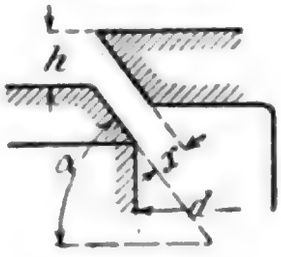
mit dem üblichen Kegelwinkel $\alpha = 45^0$ wird also

$$x = 0{,}7\,h,$$

für $h = 0{,}25\,d$ ist somit

$$\boldsymbol{x = 0{,}175\,d.}$$

Abb. 357.



Will man die Kanalweite $x = 0{,}25\,d$ herstellen, so mufs demnach der Hub des Ventils werden (statt $0{,}25\,d$):

$$\boldsymbol{h = \frac{d}{2{,}8} = 0{,}357\,d.}$$

Bei **Kolbenpumpen** mufs der **Schlufs** des Ventils genau im Hubwechsel stattfinden, damit Stöfse durch plötzliche Beschleunigung oder Verzögerung der Flüssigkeitsmassen vermieden werden; daher ist unter Abweichung von vorstehender Regel bei Kolbenpumpen der Ventilhub h um so kleiner zu machen, je gröfser die Kolbengeschwindigkeit ist und je rascher der Hubwechsel erfolgt.

Der freie Ventilhub h ist ferner abhängig von der **wirksamen Ventilbelastung** P, d. h. von dem Gewichte des Ventils, vermindert um den Auftrieb des Ventils innerhalb der Flüssigkeit (S. 263) und vermehrt um den etwa vorhandenen Federdruck.

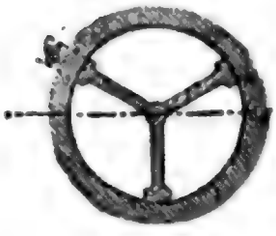
*) Z. d. V. d. I. 1887 S. 557.

Unter sonst gleichen Umständen bleibt nach C. Bach der **rechtzeitige Ventilschluſs** einer Pumpe erhalten, wenn die Ventilbelastung P proportional der geförderten Flüssigkeitsmenge und der minutlichen Umdrehungszahl genommen wird. Bezeichnet

P die wirksame Ventilbelastung, die das gehobene Ventil gegen das strömende Wasser im Gleichgewichte hält, in kg,
d den Durchm. der Ventilsitzöffnung in m,
$f = {}^1/_4 \pi d^2$ den Querschnitt der Ventilsitzöffnung in qm,
v die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch den Querschnitt f der Ventilsitzöffnung fließt, in m/sk,
ζ die Widerstandszahl des Ventils, entsprechend den **gesamten** durch letzteres verursachten hydraulischen Bewegungswiderständen (S. 305),
α, β, γ, λ und μ Erfahrungswerte,
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m/sk^2,
i die Anzahl der Rippen im Falle der Abb. 360,
s die Breite dieser Führungsrippen (Abb. 358), gemessen auf dem Umfange πd, in m,
$b = {}^1/_2 (d_1 - d)$ die **radiale** Breite der Dichtungsfläche in m (Abb. 359 bis 363),
h die Hubhöhe des Ventils in m,

so ist nach C. Bach*) je nach der Ventilform

Abb. 358.



$$1)\quad P = 1000\, f \frac{v^2}{2g}\left[\lambda + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right],$$

$$2)\quad P = 1000\, f \frac{v^2}{2g}\left[\lambda + \left(\frac{f}{\mu(\pi d - is)h}\right)^2\right],$$

$$3)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2,$$

$$4)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d^2}{(\pi d - is)h}\right)^2,$$

$$5)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right) + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Für die in Abb. 359 bis 363 dargestellten fünf Ventilformen hat man unter der Voraussetzung, daſs ${}^1/_4 \pi (d_2^2 - d_1^2) = 1{,}8 \cdot {}^1/_4 \pi d^2 = 1{,}8\, f$, d. h., daſs der ringförmige Querschnitt zwischen Ventilteller und Gehäusewandung um 80 % gröſser als die Ventil-

Abb. 359.

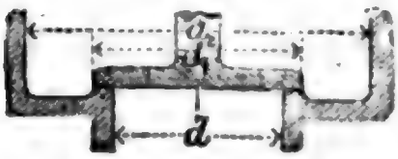


Abb. 360.

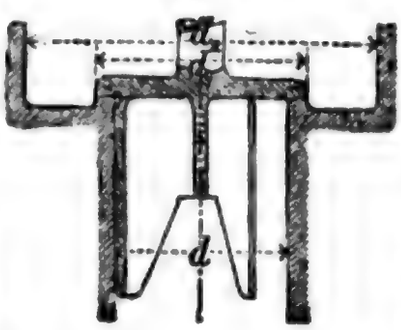


Abb. 361.

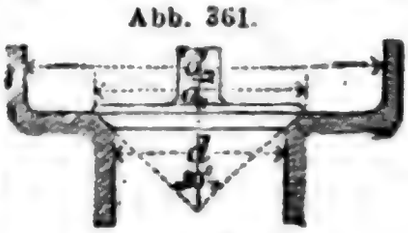
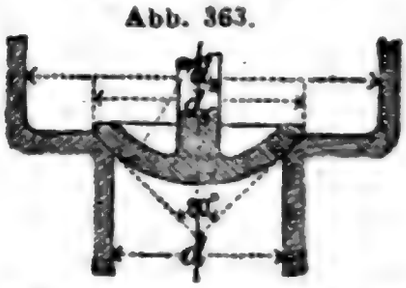


Abb. 362.

Abb. 363.



sitzöffnung ist, zur Berechnung des Ventilgewichtes und des Druckhöhenverlustes, den ein gegebenes Ventil verursacht:

1. **Für Abb. 359** (Tellerventil ohne untere Führung),**) wenn $b = 0{,}10\, d$ bis $0{,}25\, d$ und $h = 0{,}10\, d$ bis $0{,}25\, d$:

*) C. Bach, Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand, Berlin 1884, J. Springer. — C. Bach, Versuche zur Klarstellung der Bewegung selbsttätiger Pumpenventile, Stuttgart 1887; Z. d. V. d. I. 1886 S. 421, 475, 801, 1036 u. 1038; 1887 S. 41 u. 61. — J. Tobell, Pumpen- und Gebläseventile, Z. d. V. d. I. 1889 S. 25 (und S. 1150); 1890 S. 325. — M. Westphal, Gröſsenbestimmung von Pumpenventilen, Z. d. V. d. I. 1893 S. 381. — Zusammenfassung in Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 925 ff.

**) Berechnung f. Pumpen mit Kurbelantrieb Berg, Z. d. V. d. I. 1904 S. 1093, 1186.

igitized by Google

Formel 1) mit $\lambda = 2{,}5 + 19\,\frac{b - 0{,}1\,d}{d}$ und $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}62$;

Formel 3) mit $\alpha = 0{,}55 + 4\,\frac{b - 0{,}1\,d}{d}$ und $\beta = 0{,}16$ bis $0{,}15$.

Die ersten Werte von μ und β gelten bei breiter, die zweiten bei schmaler Dichtungsfläche.

II. **Für Abb. 360** (Tellerventil mit unterer Führung), wenn $b = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$ und $h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 2) mit λ und $\mu = 10\,\%$ kleiner als bei 1;

Formel 4) mit α um 0,8 bis 1,6 gröfser als bei 1 und $\beta = 1{,}75$ bis $1{,}70$.

III. **Für Abb. 361** (Kegelventil mit ebener Unterfläche), wenn $b = 0{,}1\,d$ und $h = 0{,}10\,d$ bis $0{,}15\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = -1{,}05$ und $\mu = 0{,}89$;

Formel 5) mit $\alpha = 2{,}60$, $\beta = -0{,}80$ und $\gamma = 0{,}14$.

IV. **Für Abb. 362** (Kegelventil mit kegelförmiger Unterfläche), wenn $h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = 0{,}38$ und $\mu = 0{,}68$;

Formel 3) mit $\alpha = 0{,}60$ und $\beta = 0{,}15$.

V. **Für Abb. 363** (Kegelventil mit kugelförmiger Unterfläche), wenn $h = 0{,}10\,d$ bis $0{,}25\,d$:

Formel 1) mit $\lambda = 0{,}96$ und $\mu = 1{,}15$;

Formel 5) mit $\alpha = 2{,}70$, $\beta = -0{,}80$ und $\lambda = 0{,}14$.

Abb. 364.

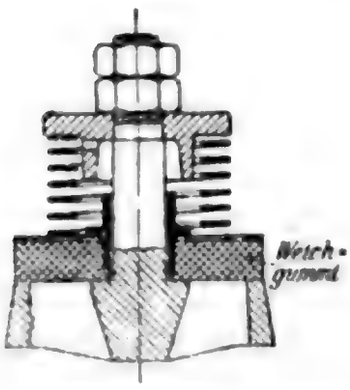


Abb. 365.

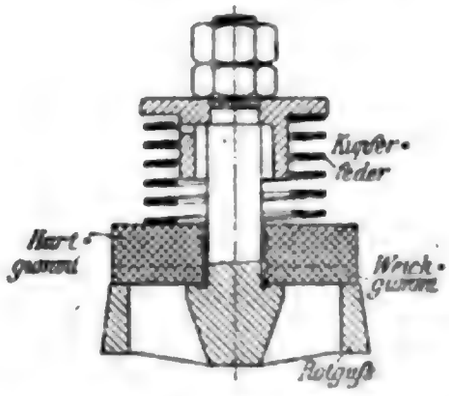
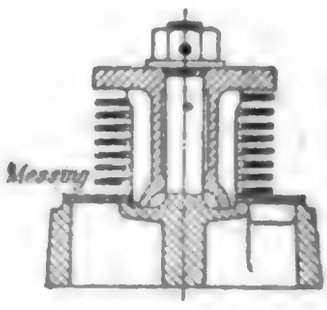


Abb. 366.



Die Abb. 364 bis 366 zeigen neuere Ausführungen von kleinen Teller- und Ringventilen; die ersten beiden mit weicher, die dritte mit harter Dichtung, die einzeln oder gruppenweise angeordnet von A. Borsig, Tegel, angewendet werden.

Kugelventile werden als Vollkugeln aus Bronze (Abb. 367) oder nur mit kugelförmiger Sitzfläche ausgeführt; gröfsere Kugeln aus Kautschuk mit Kern aus Blei oder Eisen; besonders für unreine Flüssigkeiten. Zur Vermeidung des Festklemmens sei $\beta < 45^0$.

Dann ergibt sich $d_k \sin\beta = d + b$;

für mittlere Verhältnisse und $\beta = 45^0$ wird hieraus der Kugeldurchm.

$$d_k = 1{,}2 \text{ bis } 1{,}6\,d.$$

Hubhöhe h wie beim Kegelventil ohne untere Führung.

Der **Umfang** u (in m) eines Ventils folgt unter Zugrundelegung einer bestimmten mittleren Wassergeschwindigkeit v (in m/sk) zwischen Ventil und Sitz ($v = 1{,}0$ bis $2{,}5$ m/sk bei Kolbenpumpen, u. zw. nimmt man für Saugventile die kleineren, für Druckventile die gröfseren Werte) aus der gewählten Hubhöhe h des Ventils (in m), der mittleren Kolbengeschwindigkeit c_m (in m/sk) und der Kolbenfläche F (in qm) nach

$$u\,h\,v = F\,c_m.$$

Um dem rechnerisch kaum zu ermittelnden Flüssigkeitsanprall auf die Ventilflächen, der durch die Kolbenbewegung entsteht, durch regelbare

Digitized by Google

Federkräfte entgegenzusetzen, ist das in Abb. 368 abgebildete, für schnellaufende Pumpen und Kompressoren (bis 300 Umdr./Min.) be-

Abb. 368.

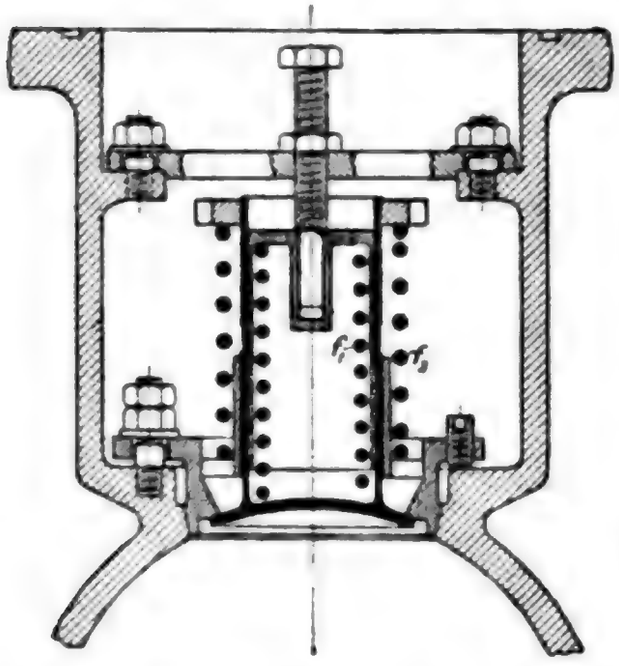
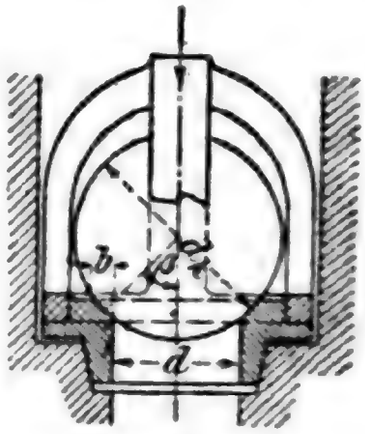


Abb. 367.



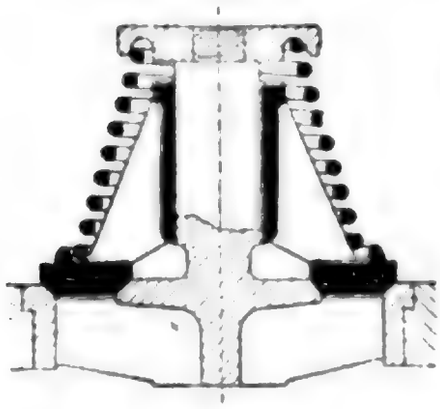
stimmte Ventil von O. Klepal,*) Charlottenburg, mit zwei Federn versehen, die jede für sich eingestellt werden können. Da die Feder f_1 das Ventil auf seinen Sitz drückt, während f_2 es vom Sitz abhebt, kann das Ventil z. B. auch so eingestellt werden, dafs es von den Federkräften völlig entlastet ist, wenn es auf seinem Sitz aufliegt.

Der sich aus dem kleinen Ventilhube h ergebende grofse Ventilumfang u wird durch folgende **Anordnungen** erreicht:

α) Mehrsitzige Ventile.

1. **Ringventile.** Abb. 369 zeigt ein einfaches, Abb. 370 ein doppeltes, die Abb. 371 bis 373 mehrfache Ringventile.**) Die Abb. 372 u. 373 sind Bauarten von A. Borsig. Bei Abb. 372 besteht der Sitz aus Gufseisen, das mit Rotgufs belegt ist; das Ventil Abb. 373 ist vielfach bei Wasserwerkpumpen und Wasserhaltungen für mäfsige Tiefe verwendet. Es dichtet mit Hartgummi auf Rotgufs ab.

Abb. 369.



Eine neuere Art von Ringventilen, besonders bei **Gebläsen** angewendet („Lenkerventile" nach **Hoerbiger**),***) zeigt Abb. 374 in einer Ausführungsform. Die Ventile werden mit mehreren Ringen ineinander und auch übereinander ausgeführt. Die abdichtenden Ventilringe bestehen aus einer 3 mm starken Stahlscheibe, gegen die sich mit kleinem Zwischenraum eine 1,5 mm starke Scheibe aus Phosphorbronze legt. Dieser

*) Z. d. V. d. I. 1909 S. 2075.

**) Bei Abb. 371 sind die Ringe zur Erleichterung der Dichtung für sich beweglich.

***) Z. d. V. d. I. 1901 S. 218: Hochofengebläse mit Lenkerventilen; 1903 S. 477: Verbundkompressor mit Lenkerventilen; 1913 S. 1246: Versuche mit grofsen durch Blattfedern geführten Ringventilen.

Digitized by Google

Zwischenraum füllt sich im Betriebe mit Oel und dient dann als Puffer zum Abfangen des Schlages bei der Eröffnung des Ventils. Die Ringe

Abb. 370.

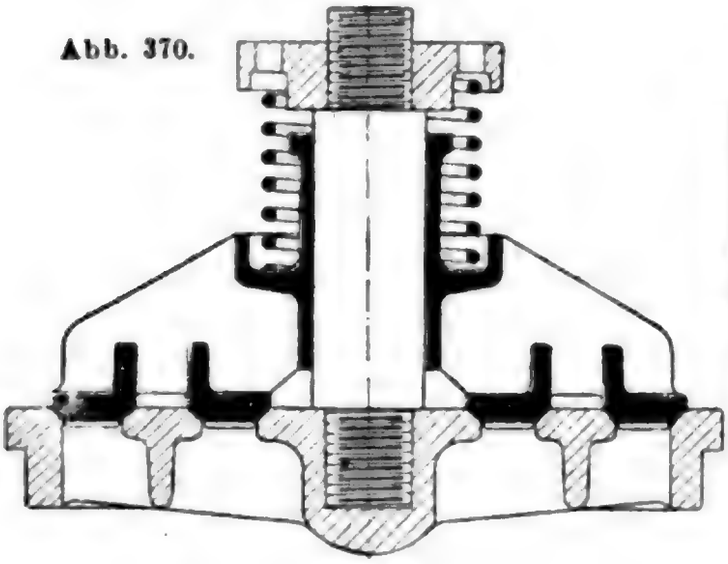


Abb. 371.

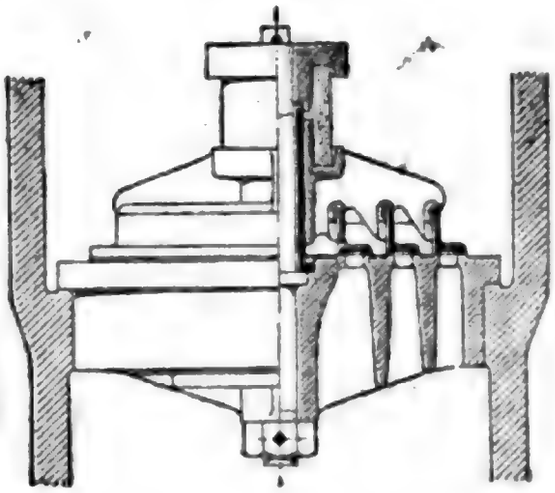


Abb. 372.

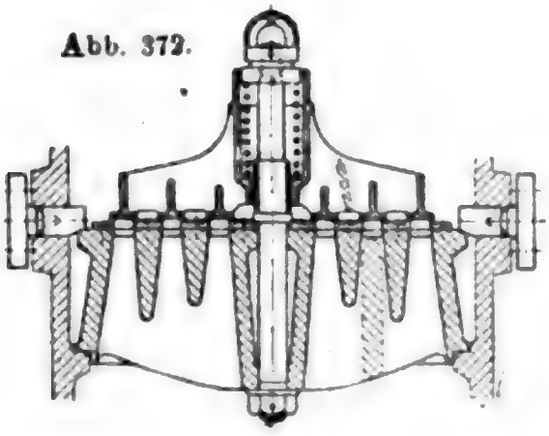
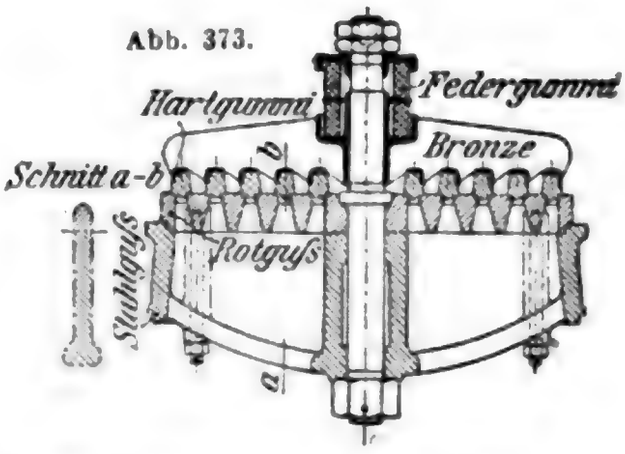
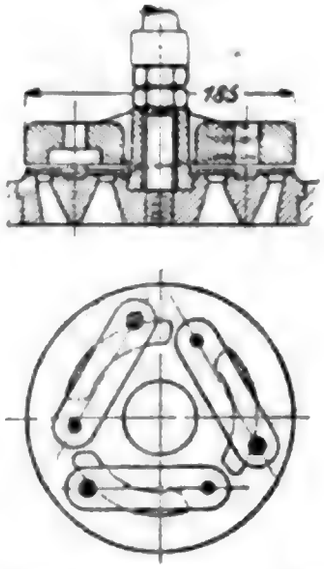


Abb. 373.



sind am Ventilfänger an nur 0,7 mm starken Lenkern aus Uhrfederstahl aufgehängt.

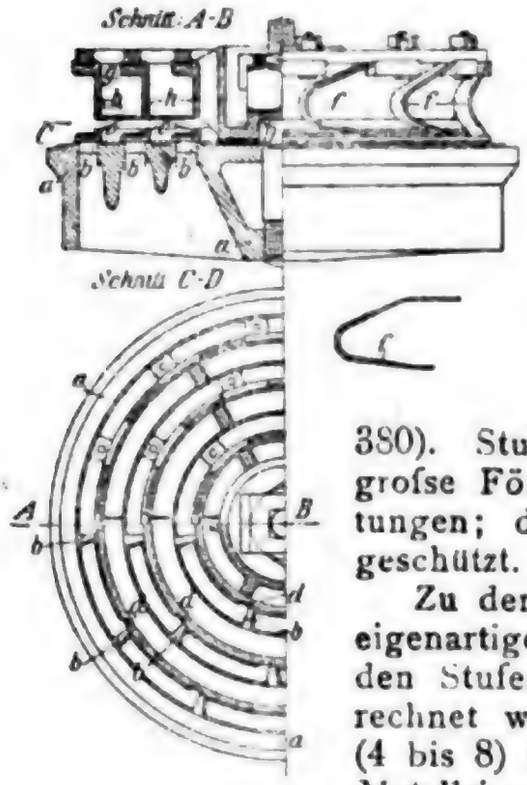
Abb. 374.



Ein von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann in Chemnitz gebautes Ringventil (ebenfalls Lenkerventil) zeigt Abb. 375. Die Ventilringe liegen ohne feste Führung und ohne feste Verbindung mit den Lenkern frei auf den Sitzen. Die doppelte Krümmung der Federn *f* hat gegenüber einer einfachen (Schrauben-)Feder den Vorteil, dafs ein Ausweichen des freien Federendes beim Zusammendrücken vermieden wird. Das freie Ende der Federn macht eine genau senkrechte Bewegung, wodurch auch bei grofsem Hube richtige Führung der Ventilringe gesichert ist. Die auf dem Ventilsitz *a* liegenden Ventilringe *b* sind mit seitlich übergreifenden Rändern *c* versehen, unter die sich seitliche Ansätze *d* der in der Aufsicht nach der Krümmung der Ventilringe gebogenen Federn *f* schieben. Die Federn sind am oberen Ende in den Federhalter *g* fest derart eingespannt, dafs die inneren Kanten der seit-

lichen Ansätze *d* in einem Kreis liegen, der dem inneren Umfang der Eindrehung der Ventilringe entspricht.

Abb. 375.



Zur Begrenzung des Hubes der Ventilringe sind die ringförmigen Versteifungsrippen *h* des Federhalters *g* so weit nach unten gezogen, dafs die Ränder der Ventilringe sich gegen deren Unterkanten legen können.

2. **Glockenventile** mit übereinanderliegenden, ebenen oder kegelförmigen Sitzflächen (Abb. 376 u. 377).

3. **Stufenventile** mit Ringen von verschiedenem (Abb. 378) oder von gleichem Durchmesser (Abb. 379 u. 380). Stufenventil (Abb. 379) von **A. Borsig** für grofse Förderhöhen (über 400 m) bei Wasserhaltungen; die weiche Dichtung durch Metallringe geschützt.

Zu den mehrsitzigen Ventilen gehört auch das eigenartige Ventil nach Abb. 381, das ebenso zu den Stufenventilen wie zu den Ringventilen gerechnet werden kann. Es besteht aus mehreren (4 bis 8) Gummiringen, die gegen doppelkegelige Metallringe abdichten. Gebaut von Gebr. Körting A. G., Körtingsdorf bei Hannover, für schnellaufende Pumpen, auch zur Förderung von unreinem, sandhaltigem Wasser bis 60 m Druckhöhe.

Abb. 376.

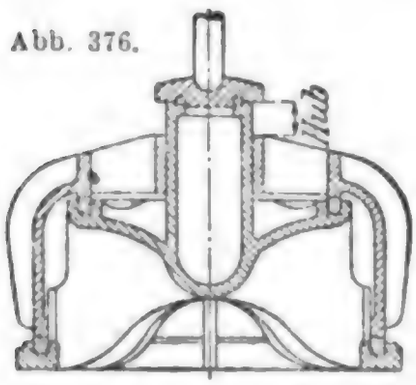
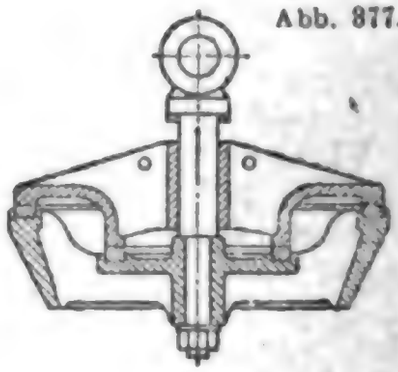


Abb. 377.



β) Gruppenventile.

Bestehen aus mehreren einsitzigen Ventilen oder besser aus mehreren einfachen Ringventilen (z. B. nach Abb. 364 bis 366). Für Massenherstellung von Pumpen sind Gruppenventile den gleichachsig angeordneten Ringventilen überlegen, da wenige Sorten von Einzelventilen für alle Pumpengröfsen genügen (Abb. 382).

Federbelastung des Ventils (im Wasser Rohr-Gummifedern oder gehärtete Messingfedern zu benutzen) zur Erzielung schnellen Ventilschlusses der reinen Gewichtbelastung vorzuziehen.

Gesteuerte Hubventile (für raschlaufende Pumpen usw.) öffnen sich selbsttätig und bleiben nahezu während des ganzen Kolbenhubes offen; kurz vor dem Hubwechsel werden sie durch die Steuerung **zwangläufig** bis nahe an den Ventilsitz bewegt und erreichen diesen wieder durch den Flüssigkeitsdruck. Meist einfache Teller oder Ringventile mit

Digitized by Google

Stiftführung.*) Gesteuertes Einlafsventil (Doppelsitzventil) für Dampfmaschinen (Abb. 383). — Als Ersatz für diese Doppelsitzventile werden von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann A. G. in Chemnitz Kolbenventile (Bauart van den Kerchove) mit breiten selbstspannenden Liderungsringen verwendet (Abb. 384).

Abb. 378.

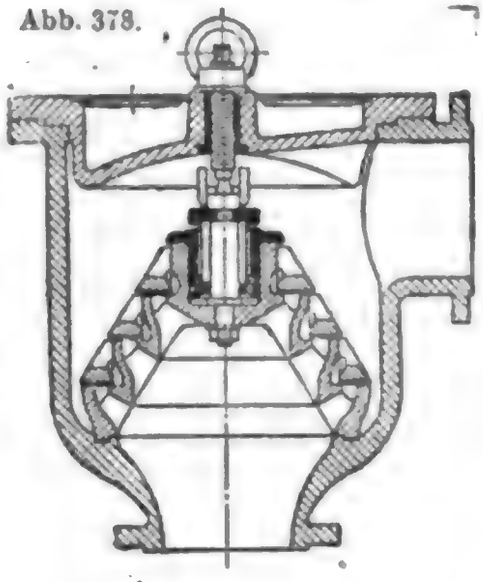
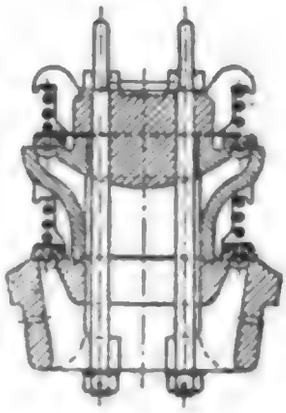


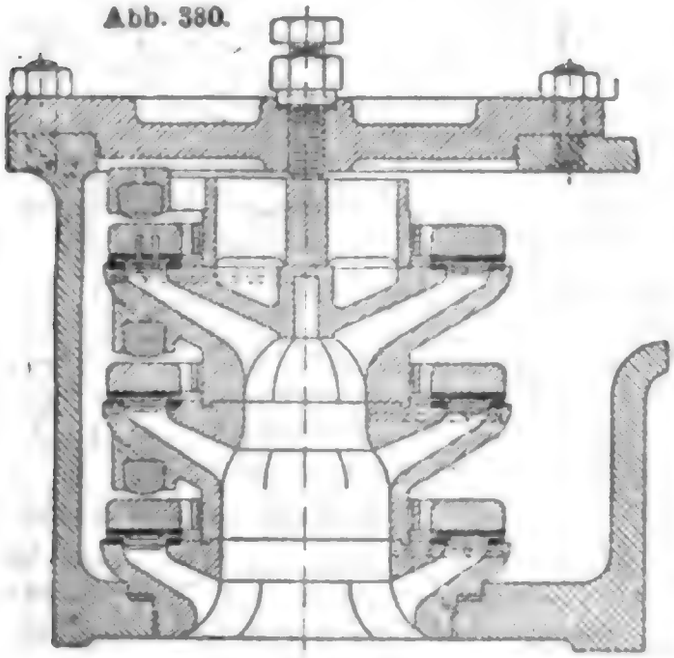
Abb. 379.



Sicherheitsventile für Dampfkessel II. Bd. S. 60 u. 70.

Ein Sicherheitsventil für hydraulische Pressenanlagen usw., das für einen Wasserdruck von 300 at bestimmt ist, zeigt Abb. 385. Das Ventil**) hat eine Sitzfläche von grofsem Durchm. und sichere Führung der Feder, die zugleich gegen Berührung mit etwa austretendem Wasser geschützt ist.

Abb. 380.



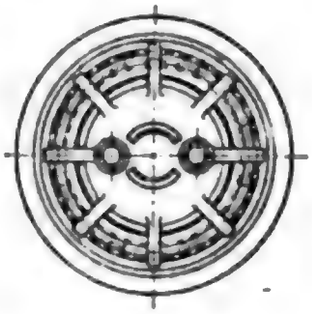
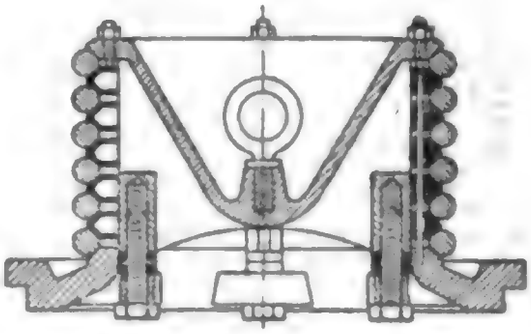


Abb. 381.



b) Klappenventile.

Abb. 386 u. 387 zeigen als Lederklappen ausgebildete Fufsventile mit Kasten und anschliefsendem Korb für die Saugleitung einer Pumpe. In Abb. 386 Gelenk aus Metall, in Abb. 387 ein solches aus Leder.

Die Gröfse der Klappenventile hängt ab von der Form der Sitzöffnung, die sich für eine bestimmte Durchflufsgeschwindigkeit der

*) Weiteres Z. d. V. d. I. 1885 S. 522, 1890 S. 537; A. Riedler, Schnellbetrieb, Berlin 1899; Hartmann-Knoke, Die Pumpen, 3. Aufl. von H. Berg, Berlin 1906, S. 188 ff. und Z. d. V. d. I. 1902, Untersuchung über gesteuerte Ventile, S. 660 ff.

**) Geschützte Bauart von Eduard Müller. Z. d. V. d. I. 1909 S. 2122: „Hydraulische Sicherheitsventile".

Digitized by Google

Flüssigkeit mit Rücksicht auf die Verengungen durch Rippen und Schrauben sowie auf die Einschnürung bestimmt. Bei Gummiklappen

Abb. 383.

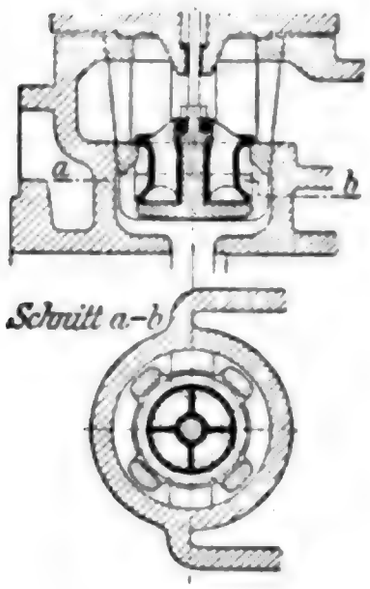


Abb. 382.

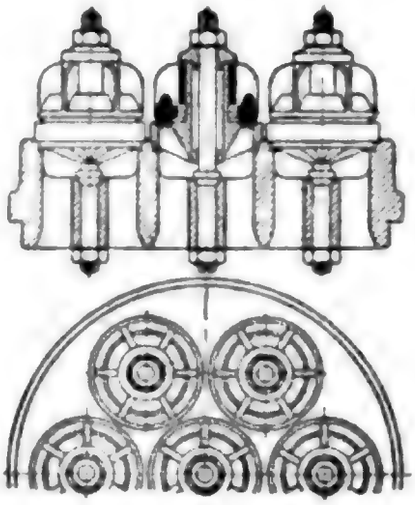


Abb. 385.

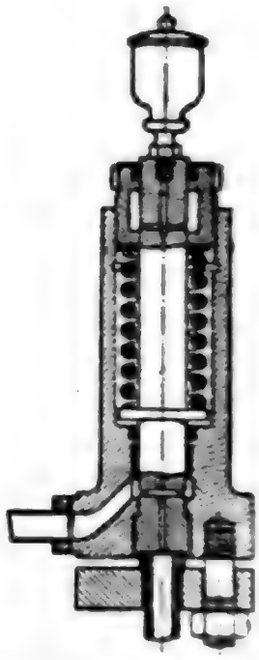
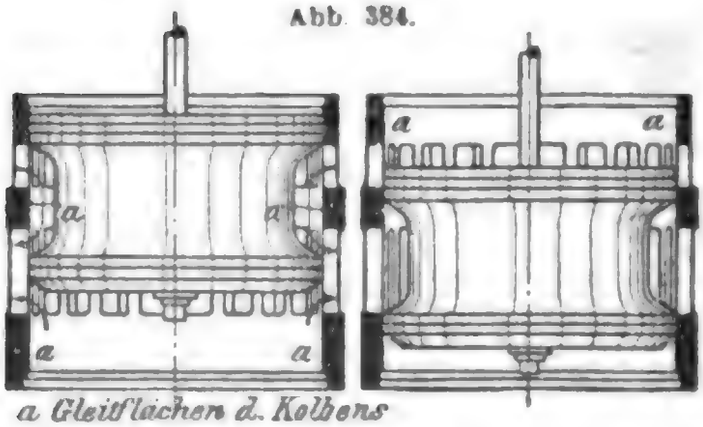


Abb. 384.



a Gleitflächen d. Kolbens

betragen die Verengungen durch die Gitterstäbe etwa 0,3 bis 0,5 der Sitzöffnung. Die Einschnürungszahl ist für kreisförmige Oeffnung etwa 0,9, für rechteckige 0,8. — Der Hub h hängt von der Art der Gelenkigkeit und von der Grundrifsform der Klappe ab.

Für den **rechteckigen** Kanalquerschnitt von der Breite a und der Länge c beträgt, wenn die Bewegung um eine zu c parallele Achse erfolgt, der Querschnitt, durch den bei geöffneter Klappe, entsprechend dem Drehwinkel β, die Flüssigkeit entweichen kann, nahezu

$$h\,(c + a\cos\beta).$$

Die durch die Klappe mit der Geschwindigkeit v (in m/sk) strömende Flüssigkeitsmenge Q (in cbm/sk) ergibt sich mit Rücksicht auf die Einschnürung zu

$$Q = \alpha\, h\,(c + a\cos\beta)\, v,$$

worin $h = a\sin\beta$ und der Wert $\alpha = 0{,}85$ bis $0{,}9$. v zweckmäfsig gleich der Geschwindigkeit anzunehmen, mit der die Flüssigkeit durch den freien Kanalquerschnitt $a\,c$ strömt. Für $a = c$ angenähert $\beta = 30^0$.

Für **kreisförmigen** Kanalquerschnitt vom Durchm. d und für Bewegung um eine kurze Achse am Umfang (Abb. 386) ist etwa

$$Q = \frac{\pi d}{4}\,(1 + \cos\beta)\, h\, v = \frac{\pi}{4}\, d^2 v.$$

Da $h = d\sin\beta$, so folgt auch hier nahezu $\beta = 30^0$.

Digitized by Google

Für **Gummiklappen**, die sich um eine kreisförmige Kante drehen (Abb. 388), ist die Durchgangsfläche der Mantel eines Kegelstumpfes

Abb. 386.

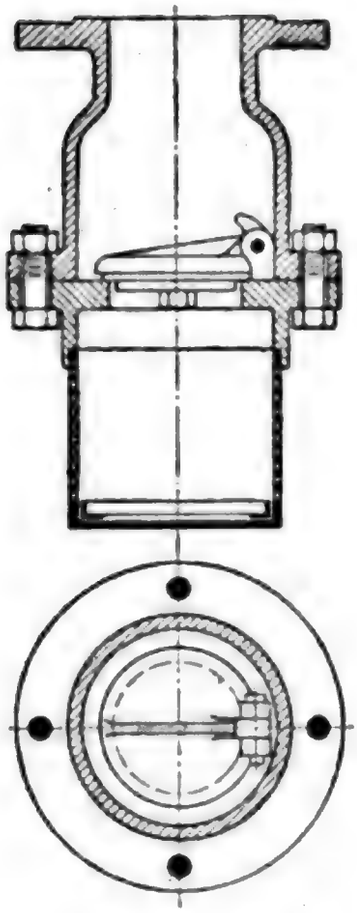


Abb. 387.

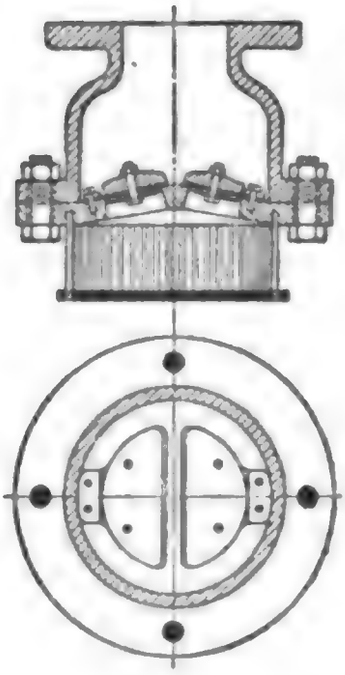


Abb. 388.

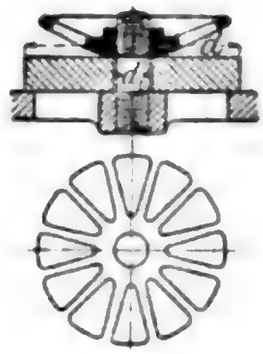
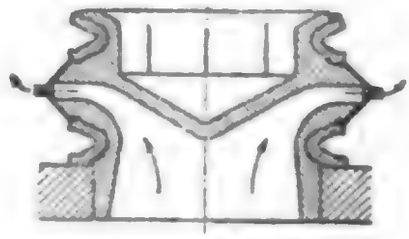


Abb. 389.

Abb. 390.



von den Durchm. d und $d - 2h \sin\beta$ und der Kegelkante h. Mithin

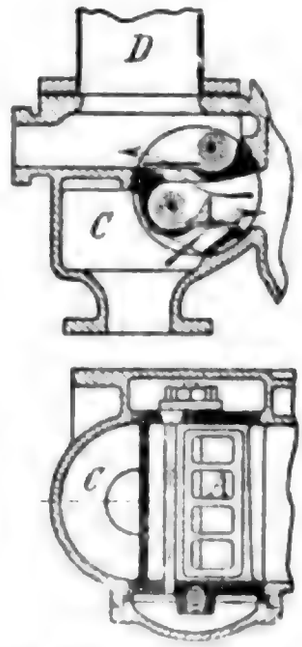
$$Q = \alpha \pi h (d - h \sin\beta) v,$$

wobei angenähert

$$h = {}^1/_2 (d - d_i) \sin\beta,$$

wenn d_i der Durchm. des inneren zylindrischen Teiles des Klappensitzes ist. Es genügt meist, $\beta = 30^0$ oder $h = 0{,}25\, d$ zu nehmen.

Abb. 391.



Als Ersatz für solche Gummiklappen werden nach Gutermuth federnde Stahl- oder Bronzeplatten (Abb. 389) verwendet, die ebenso wie die Gummiklappen Ventilkörper und Feder in einem Stück vereinen und ebenfalls kleine Masse und leichtes Spiel haben. In verschiedenen Ausführungsformen (Gruppenanordnungen) bei Pumpen und besonders auch bei **Kompressoren** verwendet. Abb. 391 zeigt die Gutermuthklappe mit einer Ventilöffnung, die den Flüssigkeitsstrom in der Richtung der geöffneten Klappe leitet; hierbei sind die Klappen in ein seitlich herausnehmbares, eingeschliffenes zylindrisches Gehäuse (A) zwischen Saugwindkessel (C) und Druckwindkessel (D) einer Pumpe eingebaut.

Digitized by Google

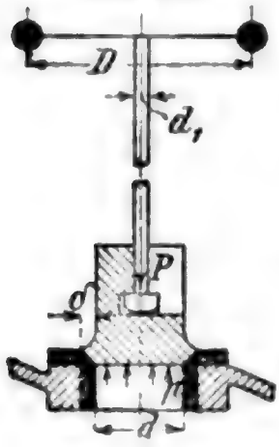
Als Ersatz für Ringventile, Gummiklappen usw. werden als so gut wie „masselos" Membran- und Lippenventile verwendet. Abb. 390 zeigt ein **Lippenventil** mit Ringspalt der Maschinenbau-A. G. **Balcke** in Frankenthal (Pfalz).

c. Absperrventile.

1. Berechnung der Absperrventile.

Es bezeichne
P die erforderliche Kraft in kg,
p den Druck der Flüssigkeit in kg/qcm,
p_0 den Dichtungsdruck in kg/qcm (50 bis 80 at üblich),
D den Handraddurchm. in cm ($D = 1{,}5\,d + 10$ cm üblich),
d die lichte Weite des Ventils in cm,
d_1 den Kerndurchm. der Spindel in cm,
δ die Breite der Projektion der Dichtungsfläche,
α den Steigungswinkel des Gewindes,
ϱ den Reibungswinkel.

Abb. 392.



Es ist $P = \frac{\pi d^2}{4} p + d\,\pi\,\delta\,p_0$ (zweites Glied: Dichtungskraft).

Die Spindel (Abb. 392) kann beansprucht werden auf Zug oder auf Druck sowie auf Verdrehung. Bei Druckbeanspruchung ist die Spindel auf Knickung und in der Regel gleichzeitig auf Verdrehung zu berechnen.

$$P = \text{Handkraft} \times \frac{D}{d_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}.$$

Die Handkraft eines Arbeiters kann gesetzt werden ~ 10 kg bei $D = 10$ cm und ~ 50 kg bei $D = 50$ cm.

2. Konstruktion der Absperrventile.

Kleine Ventile ganz aus Rotguſs, gröſsere aus Guſseisen mit Rotguſssitz (dieser kegelig eingezogen oder eingewalzt). Bei überhitztem Dampf Rotguſs und Kupfer der höheren Temperaturen wegen unbrauchbar, da sie brüchig werden und auch die dem Guſseisen gegenüber verschiedene Ausdehnungszahl mehr zur Geltung kommt. Daher für überhitzten Dampf als Sitz Nickelringe, in schwalbenschwanzförmige Nuten eingehämmert; aufserdem bei Heifsdampfventilen Führungsrippen oben (dem Frischdampf nicht unmittelbar ausgesetzt); besser Hohlzylinder als Führung, um gleichartige Ausdehnung zu sichern. — Dichtungsringe aus Asbest nach Patent Eckert*) sollen sich nicht nur für niedrige Drücke, sondern auch für Dampfdrücke von 12 bis 15 at und 250 bis 300° C bewährt haben.

Absperrventil für gerade Rohrleitung, Mutter aufsenliegend (Abb. 393), nach einer Ausführung von Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover (Bruchventil); Absperrventil für eine Aenderung der Rohrrichtung um 90° (sog. Eckventil) mit innenliegender Mutter (Abb. 394). Beide

*) Eckert-Asbest Dampfdichtungs-Co. G. m. b. H., Eisenach.

Digitized by Google

Ventile sowohl für Dampf wie für Wasser benutzbar; Stromrichtung von *A* nach *B* (Abb. 394), d. h. gegen die Unterfläche des Ventils, mit Rücksicht auf die Verbindung zwischen Spindel und Ventil und die Verpackung der Stopfbüchse unter Druck. Im Falle der Abb. 394

Abb. 393.

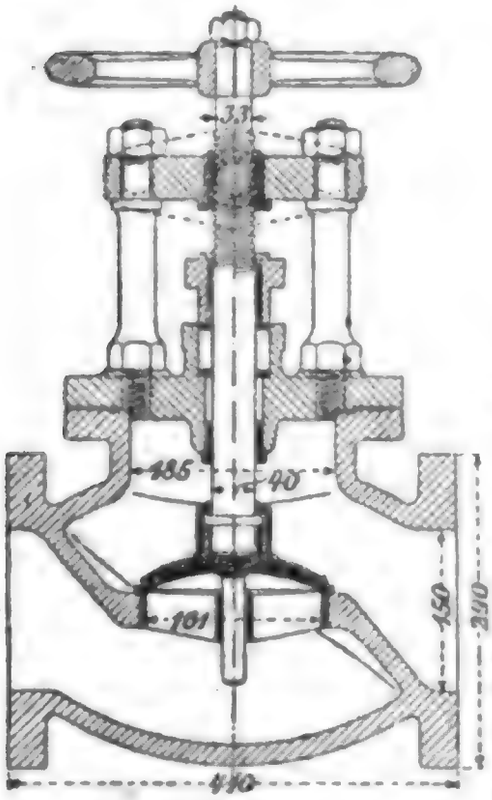


Abb. 394.

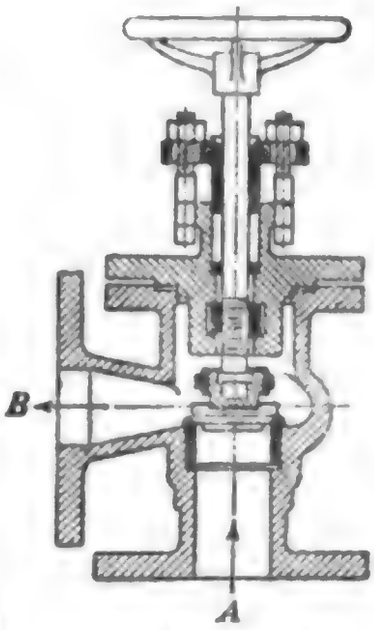
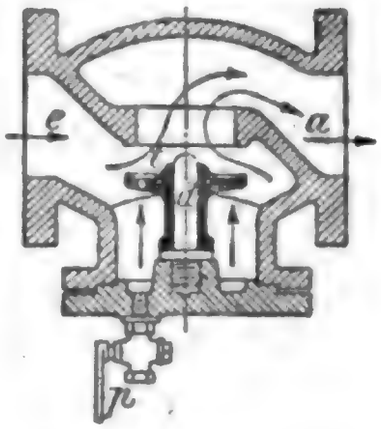


Abb. 395.



soll das Spindelgewinde nicht in den Packungsraum der Stopfbüchse treten können. Bei der Ausführung nach Abb. 393 ist das Gewinde gegen die chemischen und mechanischen Einflüsse der Flüssigkeit geschützt; bedingt aber gröfsere Bauhöhe.

Die Art der Verbindung zwischen Spindel und Ventil soll stets dem letzteren eine gewisse Beweglichkeit ermöglichen. — Flügelführung des Ventils verursacht Querschnittverengung und bei

Abb. 396.

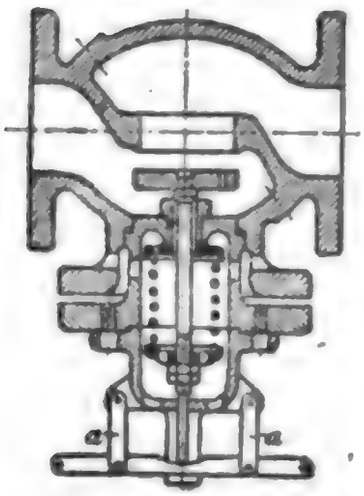


Abb. 397.

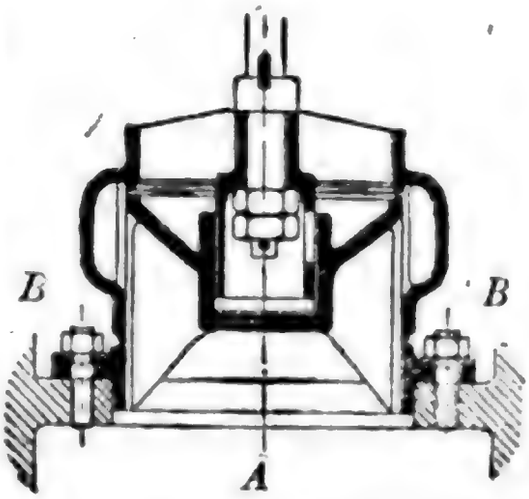
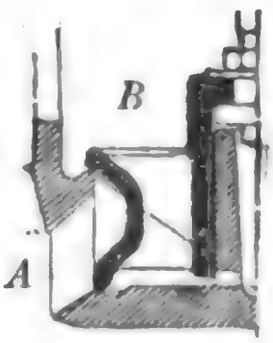


Abb. 398.



gröfserer Stromgeschwindigkeit Erzitterungen, mit rascher, ungleichmäfsiger Abnutzung der Dichtungs- und Führungsflächen.

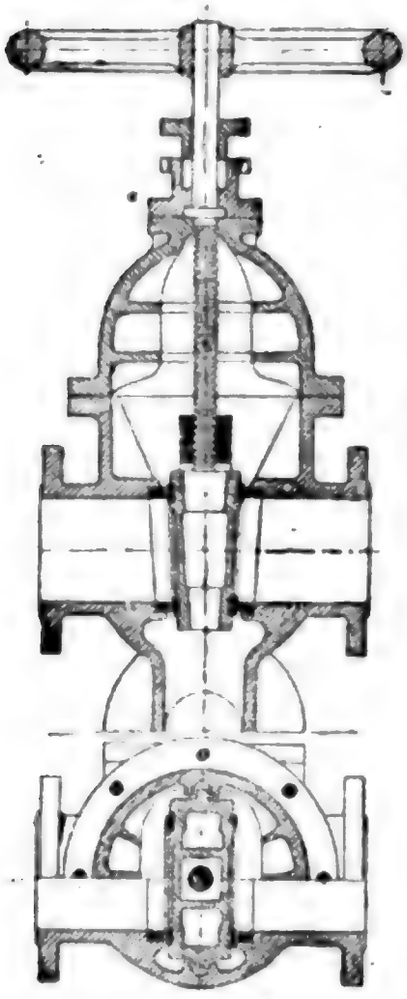
Soll bei Rohrbrüchen von Dampfleitungen zur Verhütung von Unfällen die Leitung schnell geschlossen werden, so werden **Rohrbruch-**

Digitized by Google

oder **Selbstschlufsventile** angewendet,*) die sich bei plötzlichem Druckunterschied vor und hinter dem Ventil selbsttätig schliefsen. Abb. 395 Selbstschlufsventil von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Der auf dem Dorn *d* geführte Ventilteller *t* wird, sobald bei *a* infolge Rohrbruches Entlastung eintritt, durch die Saugwirkung in *a* und durch die Expansion des Dampfkissens unter *t* an den Sitz gedrückt und hier so lange festgehalten, bis die Leitung vom Kessel abgesperrt und der Druck bei *e* gefallen ist. *p* ist ein Hülfshahn.

Abb. 396 Rohrbruchventil von Franz Seiffert & Co., Berlin SO, bei dem das von einer einstellbaren Feder offen gehaltene Ventil sich bei Ueberschreitung der zulässigen Dampfgeschwindigkeit selbst schliefst. Das Ventil kann auch durch seitliches Umlegen der Doppelhebel *a*, *a* aus einiger Entfernung geschlossen werden.

Abb. 399.

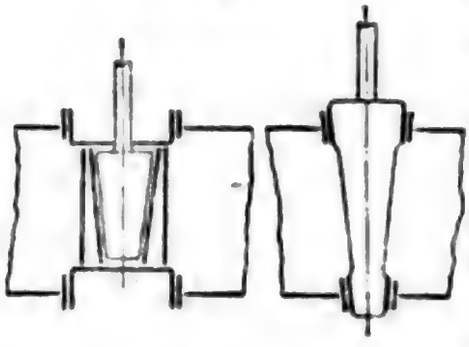


Durch Doppelsitz entlastete **Absperrventile** zeigen Abb. 397 (Glockenventil) und 398 (Rohrventil); die gröfsere Entlastung entsteht bei ihnen für die Stromrichtung von *A* nach *B*. Sind gröfsere Wärmeunterschiede im Ventilkörper zu erwarten, so müssen entweder Ventil und Sitz aus demselben Metall bestehen, oder es müssen sich die verlängerten Querschnittlinien der beiden Sitzflächen (wie in Abb. 397) in der Ventilachse schneiden.

d. Absperrschieber**) (Abb. 399).

Herstellung der Dichtungsflächen (an beiden Seiten des Schiebers anzubringen) schwieriger als bei Ventilen. Neigung der Kegelflächen 1:8 bis 1:15. Dichtungsflächen möglichst nicht Gufseisen, sondern in Nuten eingehämmerte Bronze; bei überhitztem Dampf Nickel oder Nickellegierungen. — Gerade Anpressung der Dichtungsflächen nach Abb. 400 besser, wenn auch die Bauart umständlicher wird als Abb. 401.

Abb. 430 u. 431.



e. Absperrhähne.**)

Die Hähne werden durch Anziehen einer Schraubenmutter (Abb. 402 u. 403) oder selbsttätig durch Flüssigkeitsdruck oder durch Federdruck abgedichtet. Neigung der Kegelseite gegen die Achse 1:8 bis 1:15.

*) Köhler, Heft 34 Mitt. Forschungsarb., hrsg. v. V. d. I.

**) Ueber Schieber und Hähne usw. für Strafsen- und Hauswasserleitungen „Der städtische Tiefbau" von Otto Lueger, Leipzig 1908, besonders II. Bd. 2. Abt., Einzelbestandteile der Wasserleitungen.

Digitized by Google

Zwei- und Dreiwegehähne, besonders für saure und alkalische Flüssigkeiten geeignet*), der Maschinen- und Armaturenfabrik Gebr. Reuling in Mannheim (Abb. 404 u. 405). — Gehäuse und Kegel bestehen aus besonders zusammengesetztem Gufseisen, für Sonder-

Abb. 402. Zweiwegehahn.

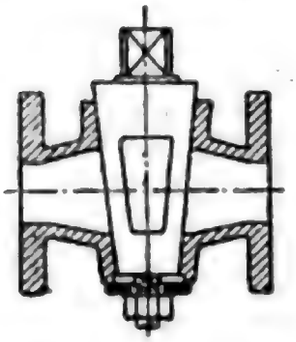


Abb. 403. Dreiwegehahn.

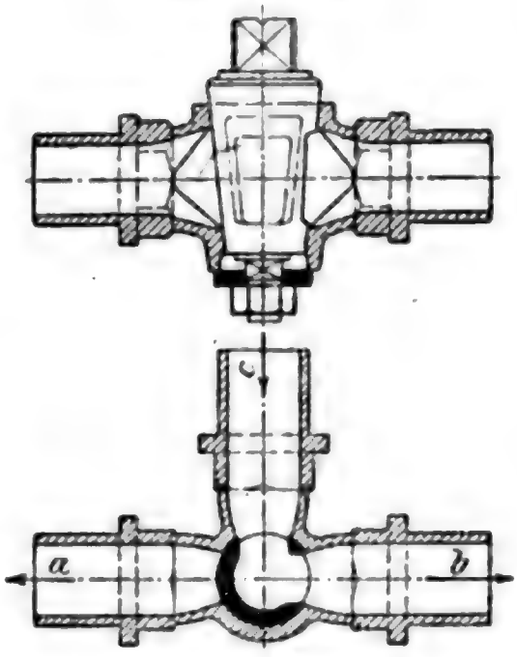


Abb. 404.

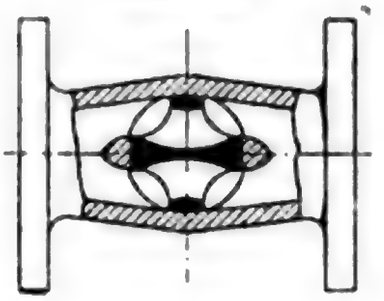
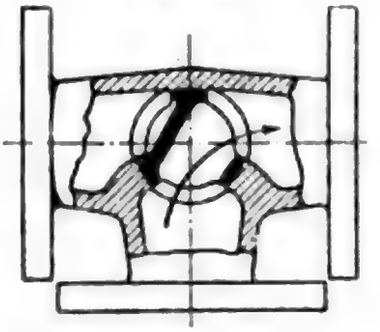


Abb. 405.



zwecke aus Aluminium, Phosphorbronze o. dgl. Die Flüssigkeit berührt nur die sehr widerstandsfähige Gufshaut, nicht aber die eingeschliffenen Flächen, die bei offenem wie bei geschlossenem Hahn gedeckt sind.

Hähne mit Asbestfutter und zylindrischem Küken von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Das Küken berührt die Metallflächen des Gehäuses, ohne zu schleifen; Abdichtung durch einen über und einen unter der Hahnbohrung liegenden Asbestring und vier achsiale Asbeststreifen in schwalbenschwanzförmigen Nuten.

VII. Regelnde Maschinenteile.

A. Schwungräder.

a. Abmessungen der Schwungräder.

1. Schwungradgewicht.

In der Regel hat das Schwungrad die Aufgabe, **periodische Arbeitsüberschüsse** $\mathfrak{A}$ aufzunehmen und wieder abzugeben. Bedeutet dann

$\mathfrak{A}_s$ die mafsgebende Arbeitsdifferenz,

E die Wucht des Schwungrades bei der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω,

*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 599.

J das Trägheitsmoment des Schwungrades, bezogen auf sein Drehachse,
M die Masse und G das Gewicht des Schwungringes,
V die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes,
V_{max} und V_{min} die größte und die kleinste Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes,
ω die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades,
ω_{max} und ω_{min} die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades,

so wird der **Ungleichförmigkeitsgrad** des Schwungrades erklärt als

$$\delta_s = \frac{V_{max} - V_{min}}{V} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega}.$$

Für die erforderliche Wucht E, das Trägheitsmoment J und die Schwungringmasse M gilt die **Grundgleichung:**

$$\mathfrak{A}_s = 2E\delta_s = J\omega^2\delta_s \sim MV^2\delta_s.$$

Von dem hieraus folgenden Schwungringgewicht $G = Mg$ braucht wegen des Einflusses der Nabe und der Arme etwa nur 0,95, bei sehr gedrungenen Rädern bis herab auf etwa 0,9 ausgeführt zu werden.

Für die Wahl des Ungleichförmigkeitsgrades gibt nachstehende Tafel einen Anhalt.

Mittlere Werte des Ungleichförmigkeitsgrades δ_s:

Antrieb von Pumpen und Schneidwerken . . .	$\delta_s = 1:20$ bis $1:30$
„ „ Werkstätten-Triebwerken	$\delta_s = 1:35$ bis $1:40$
„ „ Webstühlen und Papiermaschinen .	$\delta_s = 1:40$,
„ „ Mahlmühlen	$\delta_s = 1:50$,
„ „ Spinnmaschinen f. niedrige Garn-Nrn.	$\delta_s = 1:60$,
„ „ „ „ hohe „	$\delta_s = 1:100$,
„ „ Dynamomaschinen für Lichtbetrieb (ohne Akkumulatoren)	$\delta_s = 1:150$,
„ „ Drehstrommaschinen	$\delta_s = 1:300$.

Die genaue Ermittlung der Arbeitsüberschüsse $\mathfrak{A}$ S. 950 ff.

Brauchbare **Näherungswerte** für G ohne Aufzeichnung von Diagrammen erhält man nach der Formel $G = \frac{c}{\delta_s}\frac{N}{nV^2}$,

worin N die Nutzleistung in PS,
n die minutliche Umlaufzahl des Schwungrades,
V die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes in m/sk und
c eine Unveränderliche bedeutet, die folgender Tafel*) zu entnehmen ist, in der
p_a den Anfangsdruck in kg/qcm und
$p_b = \omega^2 r \frac{q}{g}$ den auf 1 qcm Kolbenfläche bezogenen, von der größten Kolbenbeschleunigung $\omega^2 r$ herrührenden Massendruck des Kurbelgetriebes bedeutet.

*) Vgl. K. Mayer, Z. d. V. d. I. 1889 S. 113 und Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 87.

Digitized by Google

Tafel der Unveränderlichen c bei Kompression bis $0{,}7\,p_a$.

1. Einzylindermaschinen ohne Kondensation.

Füllung	$p_b : p_a = 0{,}05$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1:6	$c = 9600$	8700	7200	6100	5500	5300	—
1:4	$c = 9000$	8300	7200	6300	6000	6000	6200
1:3	$c = 8500$	8100	7100	6500	6300	6300	—
1:2	$c = 7800$	7500	7000	6900	—	—	—

2. Einzylindermaschinen mit Kondensation.

Füllung	$p_b : p_a = 0{,}05$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1:10	$c = 10\,000$	9100	7500	6400	5700	5300	5200
1: 8	$c = 9\,700$	8800	7400	6500	6000	5700	4800
1: 6	$c = 8\,900$	8300	7100	6400	6100	—	—
1: 5	$c = 8\,500$	8100	7200	6400	6100	—	—
1: 4	$c = 8\,000$	7800	7400	7000	6600	6200	—
1: 3	$c = 7\,500$	7400	7000	6900	6900	6800	6800
1: 2	$c =$ —	—	6800	—	—	—	—

3. Zwillingsmaschinen.

Füllung = 1:6	1:4	1:3	1:2
$c = 2900$	2400	2000	1500

4. Dreizylindermaschinen.

$c = 1400$.

Für Maschinen ohne Kompression werden die Werte von c etwa 5 bis 10 % kleiner.

Soll das Schwungrad bei **wechselnder äufserer Belastung** einen solchen Ausgleich vermitteln, dafs ihm zeitweise unter Arbeitsabgabe eine höhere Leistung entnommen wird, als den Abmessungen der Maschine entspricht, so mufs es je nach der Dauer der Kraftabgabe, den zuzulassenden Geschwindigkeitsunterschieden usw. reichlicher bemessen werden. Man kann nach Grafsmann setzen

bei Maschinen für elektrische Strafsenbahnen über 100 PS und bei Werkstätten-Betriebsmaschinen mit ähnlichen Schwankungen:

$$G \geqq 6000 \frac{N + 100}{V^2}.$$

Bei vorhandener Pufferbatterie ist G kleiner, bei bergigem Gelände und fehlender Batterie bis 50 % gröfser zu nehmen.

Für Holzbearbeitungsmaschinen, Warmeisensägen usw. genügt etwa

$$G \geqq 3000 \frac{N + 20}{V^2}.$$

2. Festigkeitsrechnung und Konstruktion.

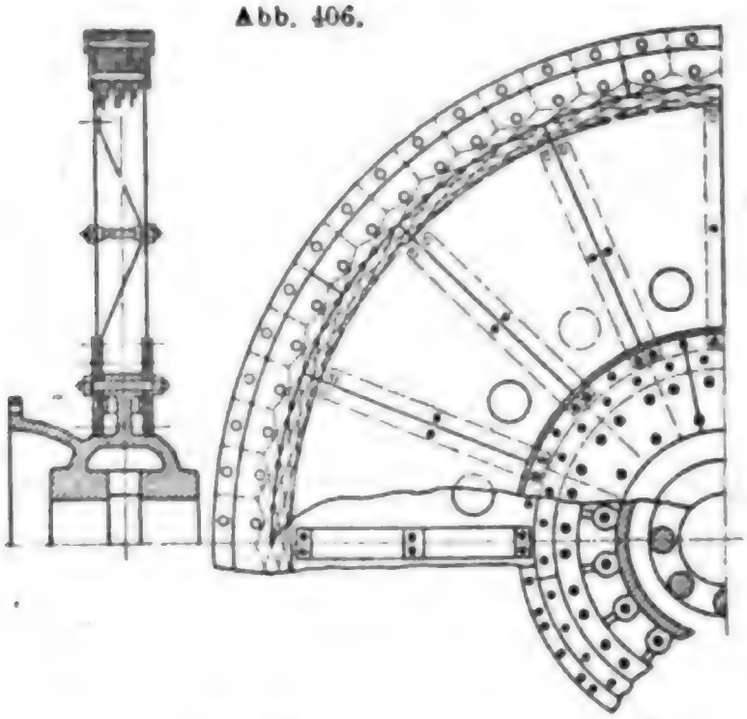
Die genaue Ermittlung der Spannungen ist ziemlich umständlich und unsicher;*) daher begnügt man sich meist mit folgender **Näherungs-**

*) J. Goebel, Schwungradexplosionen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 353; Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 163; J. H. Bauer, Festigkeitsberechnung der Schwungräder, Dingler Pol. J. Bd. 323, Heft 23 bis 26; G. Lindner, Maschinenelemente S. 116.

Digitized by Google

rechnung. Man denkt sich den Ring freischwebend (durch die Zugspannung der Arme wird die Beanspruchung erhöht) und setzt gleichmäfsige Verteilung der Spannungen über den ganzen Ringquerschnitt voraus. Dann beträgt die tangential gerichtete Zugspannung im Ring $\sigma_z = \frac{\gamma}{g} V^2$.

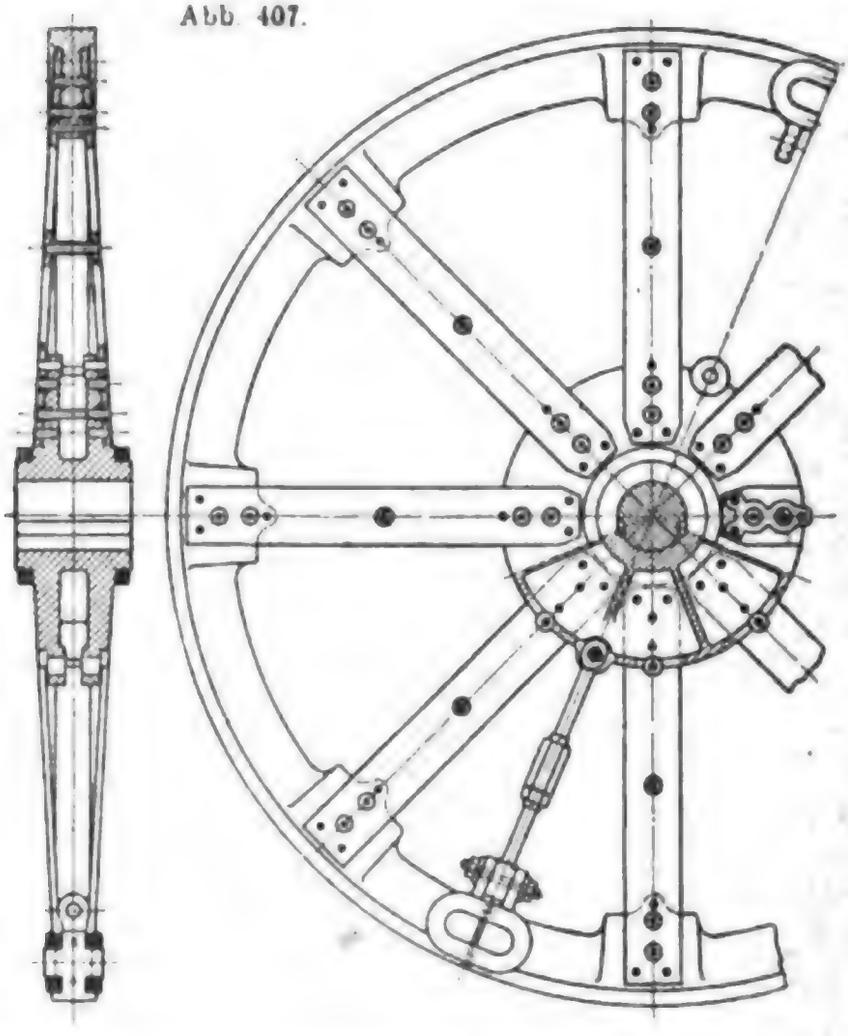
Abb. 406.



Für Gufseisen mit $\gamma = 7{,}25$ kg/cdm und V in m/sk wird z. B.: $\sigma_z = 0{,}074\, V^2$ kg/qcm, für Flufsstahl mit $\gamma = 7{,}85$ kg/cdm: $\sigma_z = 0{,}08\, V^2$ kg/qcm.

Die Beanspruchung hängt also nur von der Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes ab. Bei gröfseren Geschwindigkeiten benutzt man daher nicht mehr Gufseisen, sondern Schmiedeisen (Abb. 406) oder Stahlgufs für den Kranz und Schmiedeisen für die Arme (Abb. 407). Um den nachteiligen Einfluss der Arme zu vermeiden, verwendet man bei grofsen Umfangsgeschwindigkeiten an Stelle der Arme volle Scheiben aus Blechtafeln (Abb. 408).

Abb. 407.



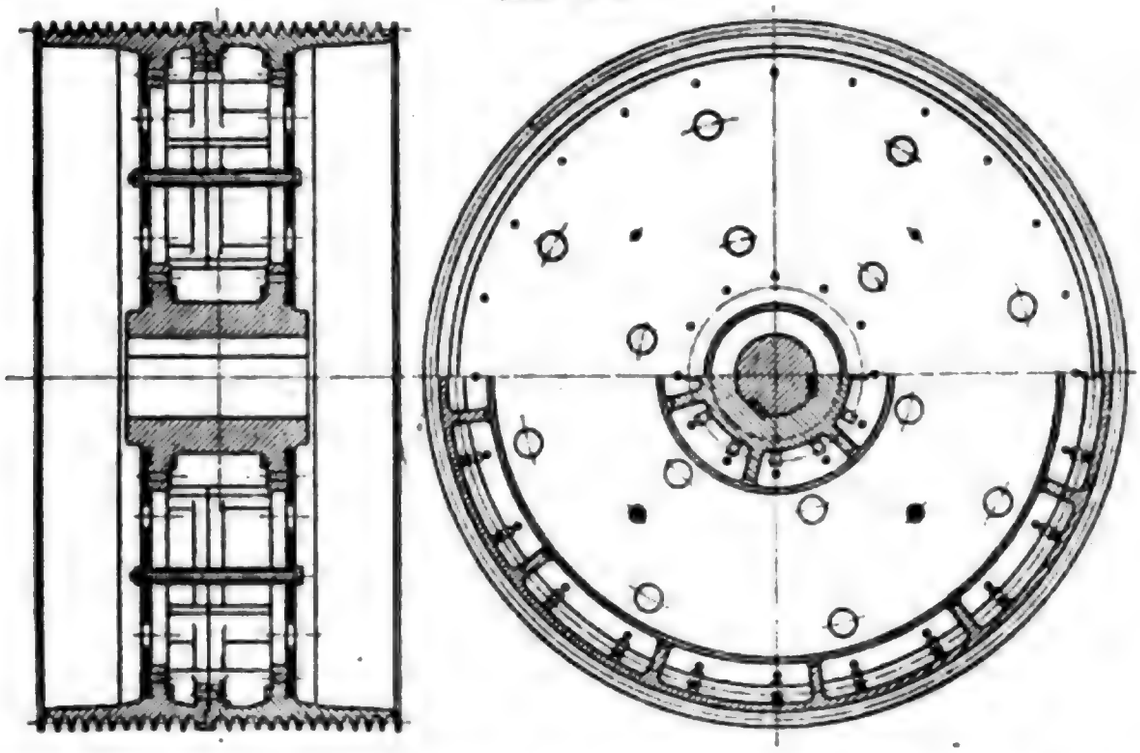
Weitere Beispiele von Schwungrädern zeigen Abb. 409 bis 414. Abb. 409 ist ein Rad für Seilscheiben, Bauart der BAMAG, besitzt 10 Rillen für 50 mm starke Seile, Gesamtgewicht 25 t, Kranzgewicht 18 t, Umfangsgeschwindigkeit $V = 31{,}4$ m/sk. Schrauben von

Digitized by Google

4″ Durchm. für die Kranzverbindung werden in die gebohrten Löcher der Flansche stramm eingepafst.

Abb. 410 ist ein Rad in einem Stück gegossen, bei dem zum Ausgleich der Gufsspannungen in die Nabenform 3 oder 4 mit Graphit

Abb 408.



bestrichene dünne Platten eingelegt werden; die verbleibenden Nabenzwischenräume werden nachher mit Zink ausgegossen und die Nabe

Abb. 409.

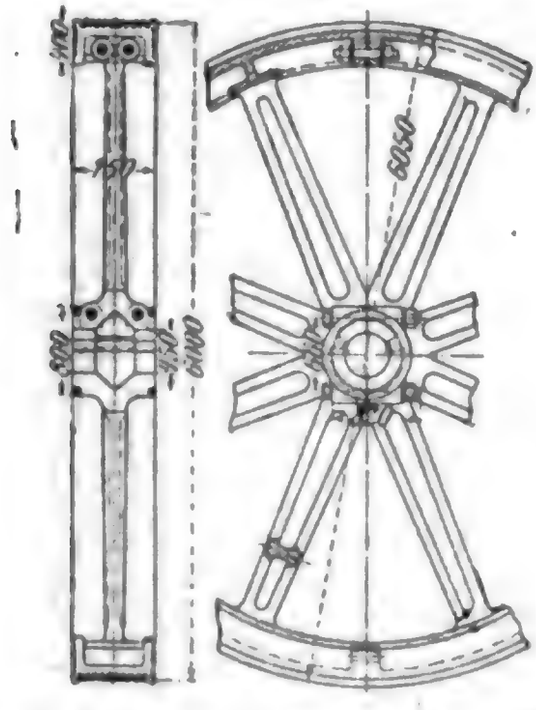
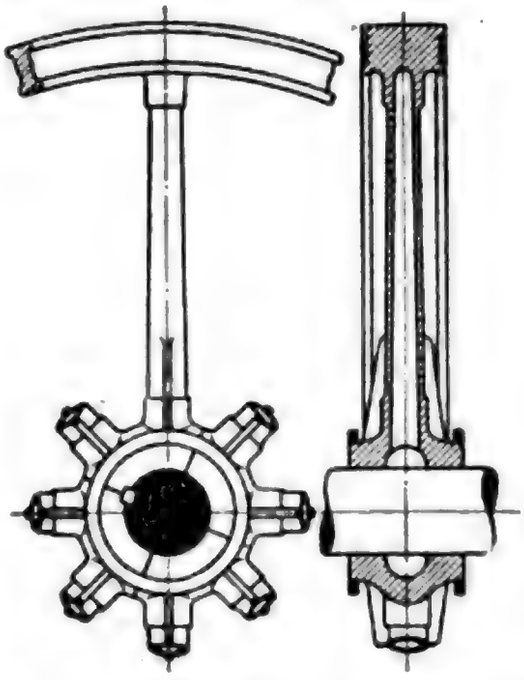


Abb. 410.



durch Schrumpfringe verstärkt. Werden gröfsere Räder zur Vermeidung von Gufsspannungen geteilt hergestellt, so ist auf sorgfältigste Kranzverbindung zu achten; Biegungsspannungen sind möglichst zu ver-

Digitized by Google

meiden, die Verbindungskonstruktion ist so dicht wie möglich an den Schwerpunkt des Kranzquerschnittes heranzurücken (Abb. 411 bis 414); dies wird möglich durch Keilbolzen (Abb. 411) oder Schrumpfringe (Abb. 412 u. 413) oder Schrumpfringe in Verbindung mit Schrauben

Abb. 411.

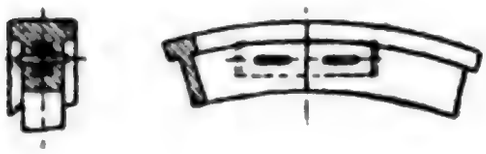


Abb. 412.

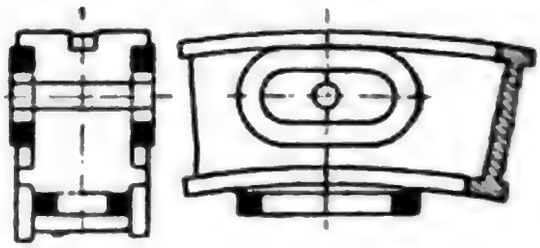


Abb. 413.

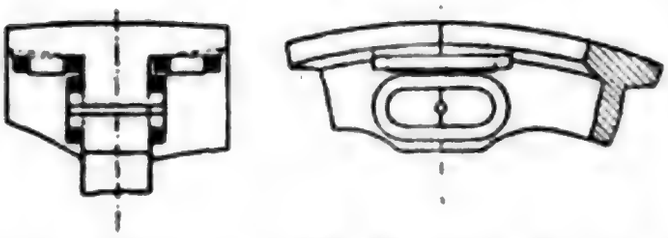
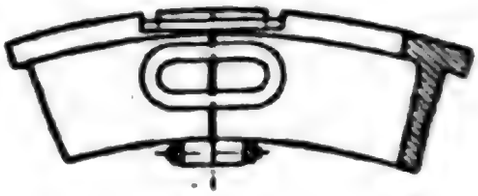


Abb. 414.



(Abb. 414). In Abb. 409 ruft die ziemlich weit vom Schwerpunkt des Kranzquerschnittes angreifende Schraubenverbindung nicht unerhebliche Biegungsspannungen hervor.

Zur Vermeidung von Luftwirbeln, die durch die Arme entstehen, ist Verschalung durch Blechtafeln empfehlenswert.

b. Ermittlung der Arbeitsüberschüsse $\mathfrak{A}$ mit Hülfe von Drehkraftkurven.

1. Allgemeines.

Im Beharrungszustande einer Kolbenkraftmaschine wiederholen sich (meist) alle Vorgänge periodisch während einer Umdrehung der Kurbelwelle; daher ist fast immer das Diagramm auf eine volle Umdrehung auszudehnen. Bisweilen kann man sich auf eine halbe Umdrehung, d. h. auf einen Kolbenhub beschränken, z. B. wenn nur eine Kurbel oder mehrere Kurbeln mit 0^0 oder 180^0 Kurbelversetzung vorhanden sind und von dem Einfluss der endlichen Stangenlängen abgesehen wird. Es empfiehlt sich, alle Kräfte: Dampfdrücke, Kolbenüberdrücke, Widerstände und Massendrücke auf 1 qcm Kolbenfläche zu beziehen; sind verschiedene Kolbendurchmesser zu berücksichtigen, so bezieht man alle Kolbenkräfte auf denselben Kolbenquerschnitt, ebenso führt man bei verschiedenen Kolbenhüben alle Werte auf den gleichen Kolbenhub zurück. Als Grundlinie der Kolbendruckdiagramme wählt man in der Regel 10 cm (oder 20 cm), der Kurbelzapfenkreis hat dann einen Umfang von $\pi \cdot 10 \sim 32$ cm, der vorteilhaft in 16 oder 32 gleiche Teile eingeteilt wird.

Bedeutet in den Diagrammen 1 cm Ordinate i at, ist der zugrunde gelegte Kolbenquerschnitt $= F$ qcm, der zugrunde gelegte Kolbenhub $= s$ m, so entspricht (bei 10 cm Grundlinie für das Kolbendruckdiagramm) einem qcm Diagrammfläche $i/10\,Fs$ mkg Arbeit, d. h. f qcm Diagrammfläche bedeuten $\mathfrak{A} = i/10\,Fs \cdot f$ mkg Arbeit.

Digitized by Google

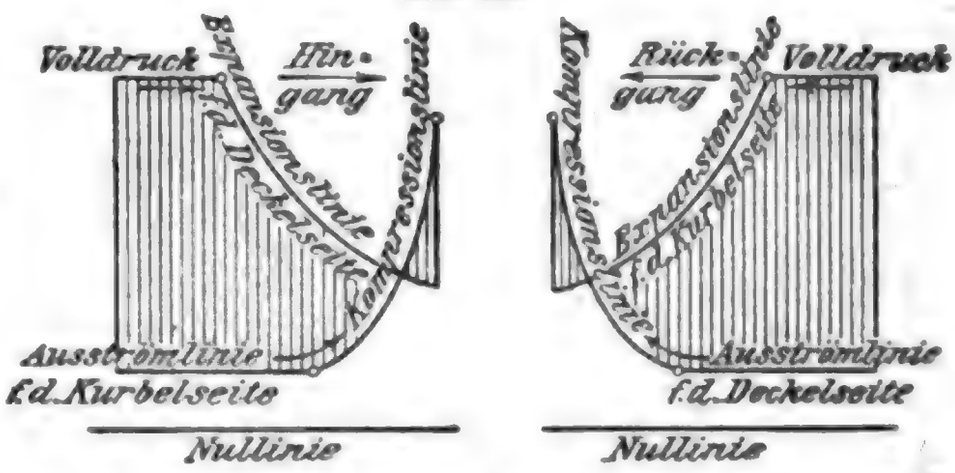
Wird der Widerstand der Kraftmaschine durch einen unveränderlichen Tangentialdruck W gebildet (die Arbeit z. B. durch Riemen, Seile oder Zahnräder abgeleitet), so ergibt sich der W entsprechende, auf 1 qcm Kolbenfläche bezogene Widerstand p_w bei einem mittleren Kolbenüberdruck p_i:

$$p_w = \frac{2}{\pi} p_i .$$

2. Ueberdruck- und Widerstandsdiagramme (ohne Rücksicht auf die Massen des Kurbeltriebes).

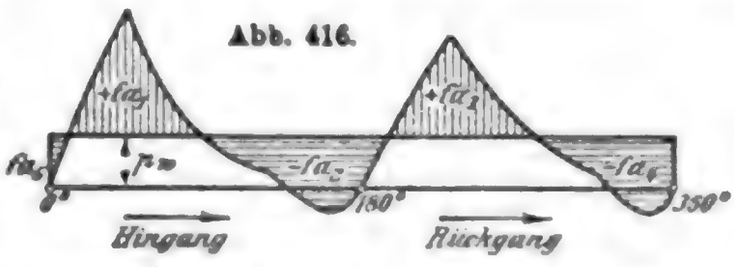
Den Ausgang bilden die Dampfdruckdiagramme; daraus leitet man die **Ueberdruckdiagramme** ab, indem man je für Hin- und Rückgang die Differenz der Drücke vor und hinter dem Kolben bildet (Abb. 415).

Abb. 415.



Man teilt nun den abgewickelten Kurbelkreis in eine Anzahl (etwa 32) gleicher Teile und sucht die zu den einzelnen Kurbelstellungen 0, 1, ... 32 gehörigen Kolbenstellungen, entnimmt die entsprechenden Ueberdrücke den Ueberdruckdiagrammen, ermittelt, wie S. 886 angegeben, die gleichwertigen Tangentialkurbeldrücke, kurz Drehkräfte genannt, und trägt diese als Ordinaten in den entsprechenden Punkten des abgewickelten Kurbelkreises a b. So erhält man eine **Drehkraftkurve**. Wenn man schliefslich noch die Widerstände als Drehkräfte p_w in das Drehkraftdiagramm einträgt, so liefern die zwischen der Widerstandslinie und der Drehkraftkurve der Ueberdrücke gelegenen Flächen f_a (Abb. 416) die Arbeitsüberschüsse, die von dem Schwungrad während einer Umdrehung aufzunehmen und wieder abzugeben sind. Dafs auch von den bewegten Teilen der Schubkurbelgetriebe ein Teil der Arbeit als Wucht aufgenommen wird, ist dabei noch nicht berücksichtigt (dieser Einfluss wird unter 3 klargestellt); für die Schwungringberechnung dürfen also die so gefundenen Arbeitsüberschüsse $\mathfrak{A} = i/10\, F s\, f_a$ nur bei sehr kleinen Massen des Kurbeltriebes oder bei sehr langsam laufenden Maschinen benutzt werden.

Abb. 416.



Von den meist verschieden grofsen Ueber- oder Unterschufsflächen f_a liefert bei vier Ueberschneidungen (für eine volle Periode) der Ueberdrucklinie mit der Widerstandslinie die absolut gröfste Fläche,

bei mehr als vier Ueberschneidungen die gröfste algebraische Summe der aufeinander folgenden Ueber- und Unterschufsflächen durch Multiplikation mit $i/10\,Fs$ die für die gröfste Geschwindigkeitsschwankung mafsgebende Arbeitsdifferenz Q_δ.

Abb. 417.

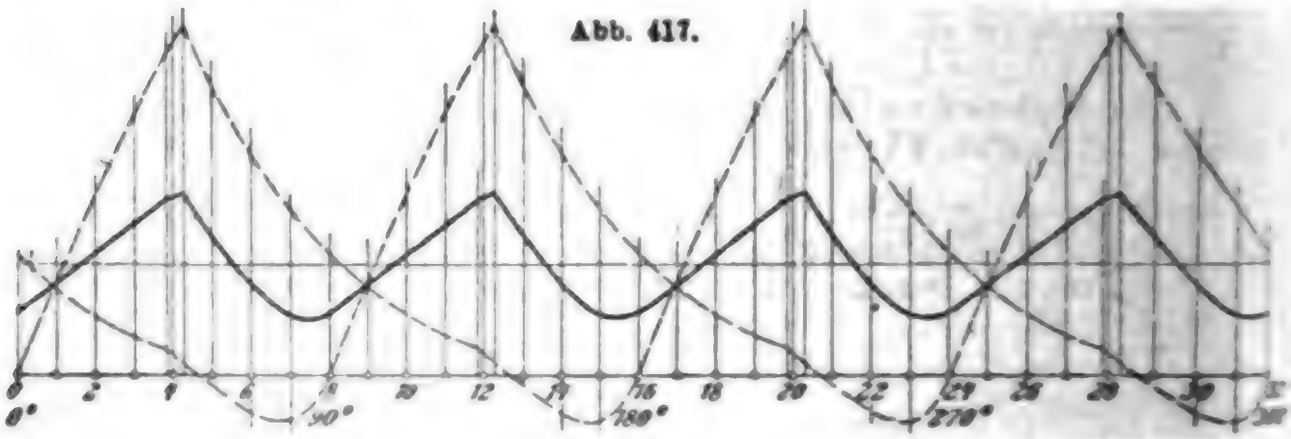
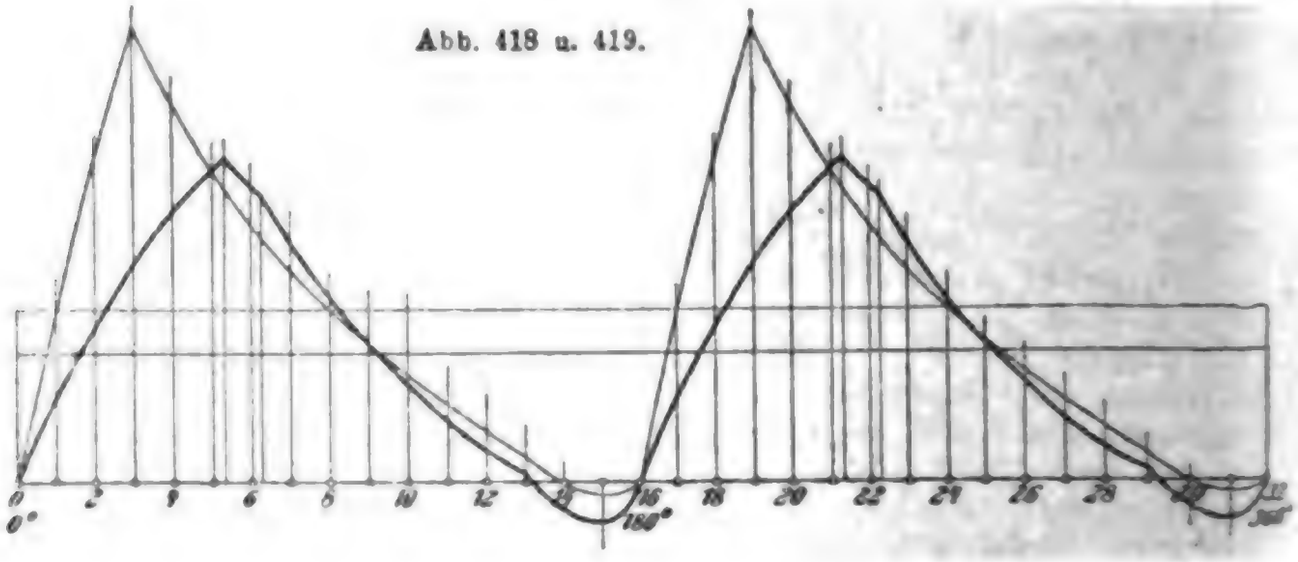
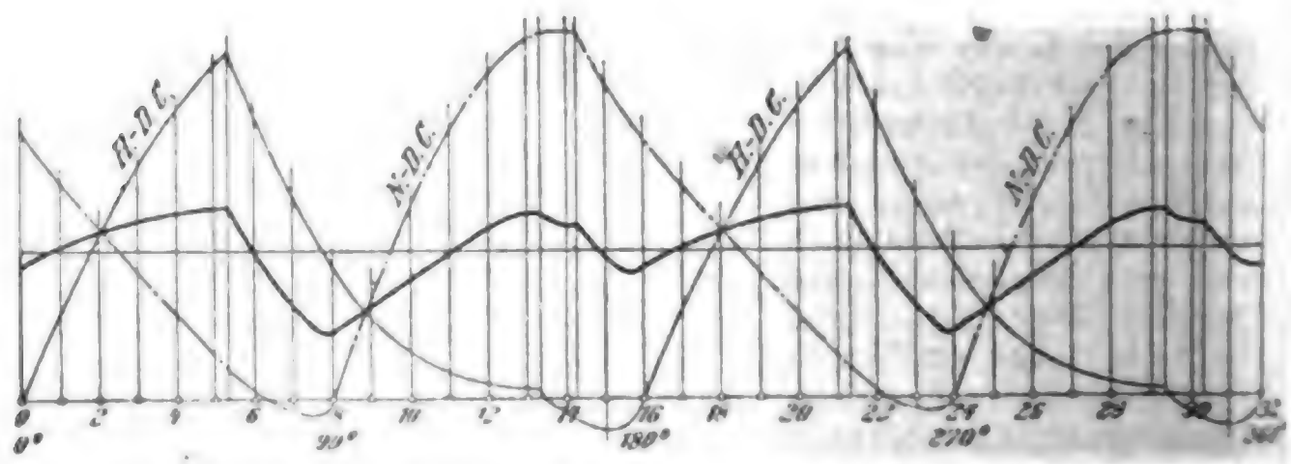


Abb. 418 u. 419.





Die Annahme unendlich langer Schubstange ($\lambda = 0$) ermöglicht zwar erhebliche Vereinfachung der Konstruktionen (Zuordnung der Kolben- und Kurbelstellungen durch senkrechte Projektion, bequeme Bestimmung der Drehkraft p_t aus Ueberdruck p nach der Beziehung $p_t = p \sin \alpha$, d. h. durch Abtragen von p auf der zugehörigen

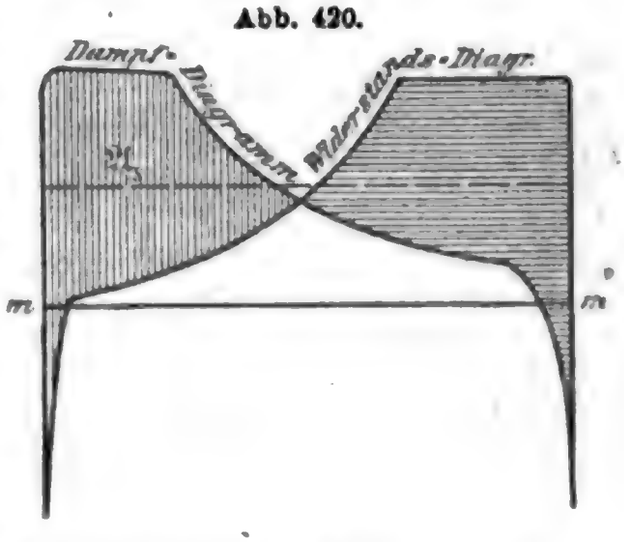
Digitized by Google

Kurbelrichtung und wagerechtes Hinüberprojizieren usf.), liefert aber nur ungenaue Ergebnisse für $\mathfrak{A}$, meist um 10 bis 20 % zu kleine. Um das Schwungradgewicht nicht zu klein zu bekommen, erhöhe man also die unter Annahme $\lambda = 0$ gefundenen Werte von $\mathfrak{A}$ um etwa 20 %.

Beispiele von Drehkraftkurven Abb. 417 bis 419; Abb. 417 für eine Zwillingsmaschine mit 90° Kurbelversetzung, Schubstangen unendlich; die punktierten Linien gelten für die einzelnen Zylinder, die ausgezogene Linie ist die gesamte Drehkraftkurve, wobei der Maßstab halb so groß genommen wurde wie für die Einzeldiagramme. Abb. 418 zeigt die Drehkraftkurve für Tandem- und Woolfsche Maschinen; die fein ausgezogenen Linien gelten für eine Einzylindervergleichsmaschine mit derselben Anfangsspannung und demselben Füllungsgrad. (Der höhere mittlere indizierte Ueberdruck der Einzylindermaschine erklärt sich dadurch, daß hier die Kompression nicht so weit getrieben werden konnte wie bei zweimaliger Kompression in den beiden Zylindern.) Die Tandemmaschine liefert, wie man erkennt, kleinere Arbeitsüberschüsse als die Einzylindermaschine. Abb. 419 gilt für eine Verbundmaschine mit 90° Kurbelversetzung: fein ausgezogen = Drehkraftkurve für den Hochdruckzylinder, strichpunktiert für den Niederdruckzylinder, stark ausgezogen = gesamte Drehkraftkurve (in halbem Maßstab).

In einigen Fällen läßt sich das Aufzeichnen von Drehkraftkurven umgehen, z. B. bei Gebläsen und Pumpmaschinen mit unmittelbarem Antrieb, bei denen **Widerstand und Kolbenkraft an derselben Stange wirken.**

Abb. 420.



Im Gebläse- oder Pumpen-Ueberdruck-Diagramm sind die Ordinaten durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kolbenflächen auf den Dampfzylinder zurückzuführen; dann ist durch Vergrößerung der Ordinaten im Verhältnis $N_i : N_e$ die Fläche des Widerstandsdiagramms der Fläche des Dampfdiagramms gleichzumachen. Dampf- und Widerstandsdiagramm sind hierauf über derselben Grundlinie *mm* zu verzeichnen. Die überschießende Fläche ergibt die maßgebende Arbeitsdifferenz $\mathfrak{A}_s$. Beispiel für eine Gebläsemaschine Abb. 420 (für eine Pumpe würde die gestrichelte Linie gelten).

8. Berücksichtigung der Kurbeltriebmassen.

Bei größeren Umlaufzahlen ist der Einfluß der hin und her gehenden Massen der Kurbelgetriebe nicht mehr zu vernachlässigen. In den meisten Fällen genügt es, die Massendrücke der Kurbeltriebe unter folgenden Näherungsannahmen zu bestimmen: 1. die Schubstangenmasse wird ersetzt durch eine im Kreuzkopf gedachte Masse (die bei den üblichen Stangenformen etwa = 0,4 der Schubstangenmasse zu nehmen ist); 2. die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle ist unveränderlich (gleich dem Mittelwert ω), so daß die Kolben-

Digitized by Google

beschleunigungen nach den S. 884 angegebenen Konstruktionen aufgesucht werden können.

α) Verfahren von Radinger.*)

Man trägt in die einzelnen Ueberdruckdiagramme die Massendrücke p_b (bezogen auf 1 qcm Kolbenfläche) als Ordinaten so auf, dafs sie, falls sie Beschleunigungsdrücke sind, von dem Ueberdruck abgezogen, falls sie Verzögerungsdrücke sind, dazugezogen werden. Unter der Annahme einer unendlich langen Schubstange ($\lambda = 0$) wird die Massendrucklinie eine Gerade (entsprechend AA' in Abb. 259 S. 885), für endliche Stangenlänge eine Parabel ($A_0 A_0'$ in Abb. 259 S. 885). Zu den Differenzwerten zwischen Ueberdruck und Massendruck sucht man dann, wie unter 2. S. 951 ausgeführt, die gleichwertigen Drehkräfte und trägt diese zu einer Drehkraftkurve zusammen; weiter verfährt man wie unter b) 2. angegeben.

Vorteil dieser Methode: Man erhält nebenbei die Kräfte, die bei der Berechnung der Abmessungen des Kurbeltriebes zugrunde zu legen sind, und erkennt aus dem Ueberdruckdiagramm, wie der Druckwechsel**) im Gestänge erfolgt. Nachteil: Beim Vergleich verschiedener Umlaufzahlen sind lauter neue Drehkraftkurven, von den einzelnen Ueberdruckdiagrammen ausgehend, zu konstruieren; der Einfluss der Massendrücke ist nicht leicht zu übersehen.

β) Verfahren von Tolle.***)

1. Man entwickelt zunächst die Drehkraftkurven für die reinen Dampfüberdrücke und getrennt die **Drehkraftkurven für die Massendrücke.** Es ist nur nötig, die letzteren für eine Umdrehungszahl n_1 zu konstruieren; für andere Werte von n sind dann die Ordinaten der Massendruckdrehkräfte einfach im Verhältnis $\left(\frac{n}{n_1}\right)^2$ abzuändern; ebenso kann eine für ein bestimmtes Stangenverhältnis $\lambda = r : l$ konstruierte Massendruckdrehkraftkurve bei gleichem λ immer wieder benutzt werden, wenn nur die Ordinaten proportional den Grundwerten $\frac{q}{g}\omega^2 r = \frac{q}{g}\frac{v^2}{r}$ (vgl. S. 885) abgeändert werden.

Zieht man die Drehkräfte der Beschleunigungsdrücke für verschiedene Umlaufdrehzahlen von den Drehkräften der Dampfüberdrücke ab und zählt die Drehkräfte der Verzögerungsdrücke zu den ent-

*) Joh. Radinger, Ueber Dampfmaschinen mit grofser Kolbengeschwindigkeit, 3. Aufl., Wien 1892.

**) Wegen der unvermeidlichen Spielräume zwischen Zapfen und Lagerschale treten beim Druckwechsel Stöfse auf; nach Radinger werden diese am ungefährlichsten beim Druckwechsel in den Totpunkten. Stribeck (Z. d. V. d. I. 1893) ist der entgegengesetzten Ansicht, dafs die Totlage oder deren unmittelbare Nähe die gefährlichste Gegend für einen Druckwechsel ist; der Druckwechsel geht um so langsamer vor sich, der Stofs wird also um so weicher, je flacher die resultierende Kolbenkraftkurve die Nullinie schneidet. H. Polster (Berlin 1913, Experimentelle Untersuchung der Druckwechsel und Stöfse im Kurbelgetriebe von Kolbenmaschinen) findet die Stofsstärke von der Lage des Stofspunktes unabhängig, proportional der Umlaufzahl, abhängig von der Gröfse des Spielraumes, vor allem aber von der Schmierung: je besser die Schmierung, um so sanfter die Schläge.

***) Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 63 ff.

ed by Google

sprechenden Ueberdruckdrehkräften hinzu, so erhält man die resultierenden Drehkraftkurven (Abb. 421a); die zwischen ihnen und der Widerstandslinie im Drehkraftdiagramm liegenden Flächen f_a geben die Arbeitsüberschüsse $\mathfrak{A}$ an.

Noch bequemer gestaltet sich die Ermittlung von $\mathfrak{A}$, wenn man die Massendruckdrehkräfte als Widerstände auffafst und zu dem Drehkraft-

Abb. 421a.

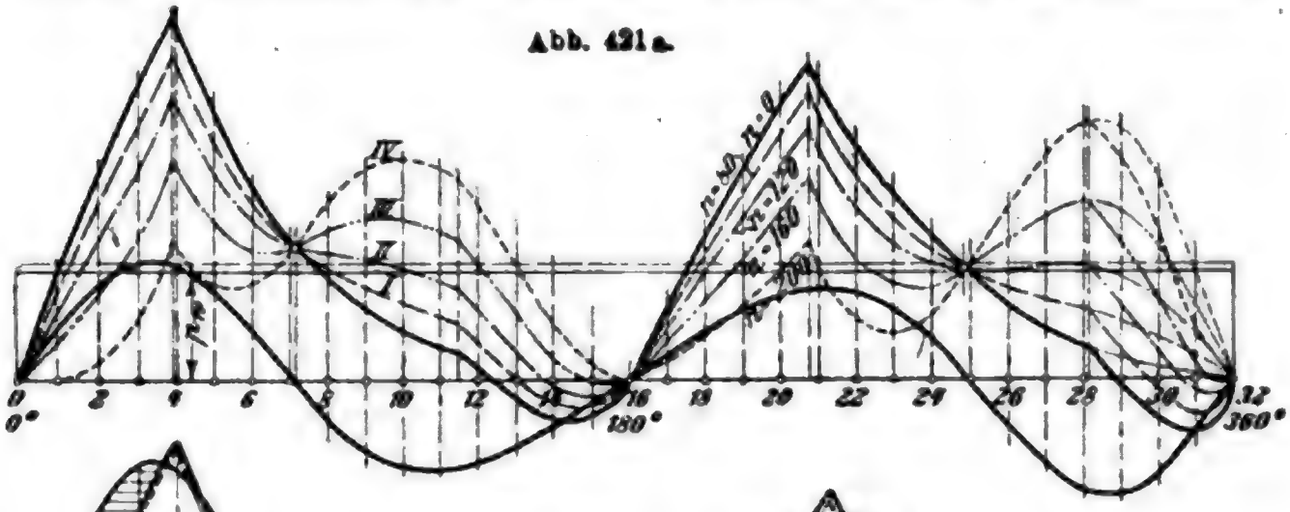
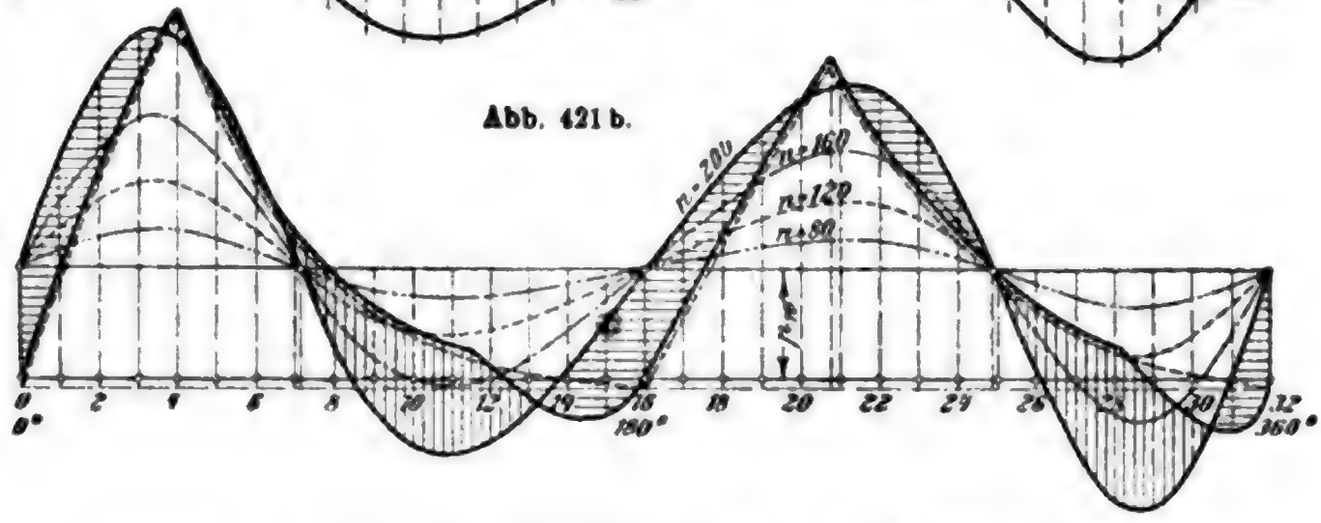


Abb. 421b.



widerstand p_w addiert (Abb. 421b); da p_w in der Regel als unveränderlich anzunehmen ist, so hat man einfach über der Geraden, die p_w begrenzt, als Grundlinie die Drehkraftkurve der Massendrücke zu entwickeln und erhält sofort die Arbeitsüberschüsse in den Flächen zwischen der Ueberdruckdrehkraftkurve und der Massendruckdrehkraftkurve.

Anmerkung. In Abb. 421 sind, um den Einfluss der Kompression zu zeigen, zwei Varianten behandelt: die stark ausgezogene Linie der Ueberdrücke gilt für den Fall mit Kompression, die feine Linie in Abb. 421a ohne Kompression, desgl. in Abb. 421b die punktierte Linie; in Abb. 421a ist die Widerstandslinie für den Fall mit Kompression ausgezogen, ohne Kompression punktiert, ebenso in Abb. 421b die Grundlinie für die Ueberdruckdrehkräfte.

2. Unter der Annahme **unendlicher Stangenlänge** ($\lambda = 0$) werden die Drehkraftkurven der Massendrücke besonders einfach: es ist $p_{tb} = \frac{1}{2}\frac{q}{g}\omega^2 r \sin 2\alpha$, die Drehkraftkurve für einen Kurbeltrieb also eine gewöhnliche Sinuslinie (Projektion einer Schraubenlinie), die in bekannter Weise leicht zu konstruieren ist. Abb. 422 zeigt die praktische Durchführung des Verfahrens für eine Einzylindermaschine,

Digitized by Google

und zwar für verschiedene Anfangsspannungen p_a bei gleicher Endspannung, mit und ohne Kondensation und für verschiedene Umlaufzahlen n.

Bei **Mehrkurbelmaschinen** wird die resultierende Drehkraftkurve der Massendrücke (für $\lambda = 0$) wieder eine einfache Sinuslinie, deren Amplitude und Phase durch geometrische Addition der Werte $\frac{q}{g}\omega^2 r$ für die einzelnen Kurbeln gefunden wird, indem man die Strecken $\frac{q}{g}\omega^2 r$ unter den verdoppelten Kurbelversetzungswinkeln gegeneinander geneigt aufträgt.

Abb. 422a.

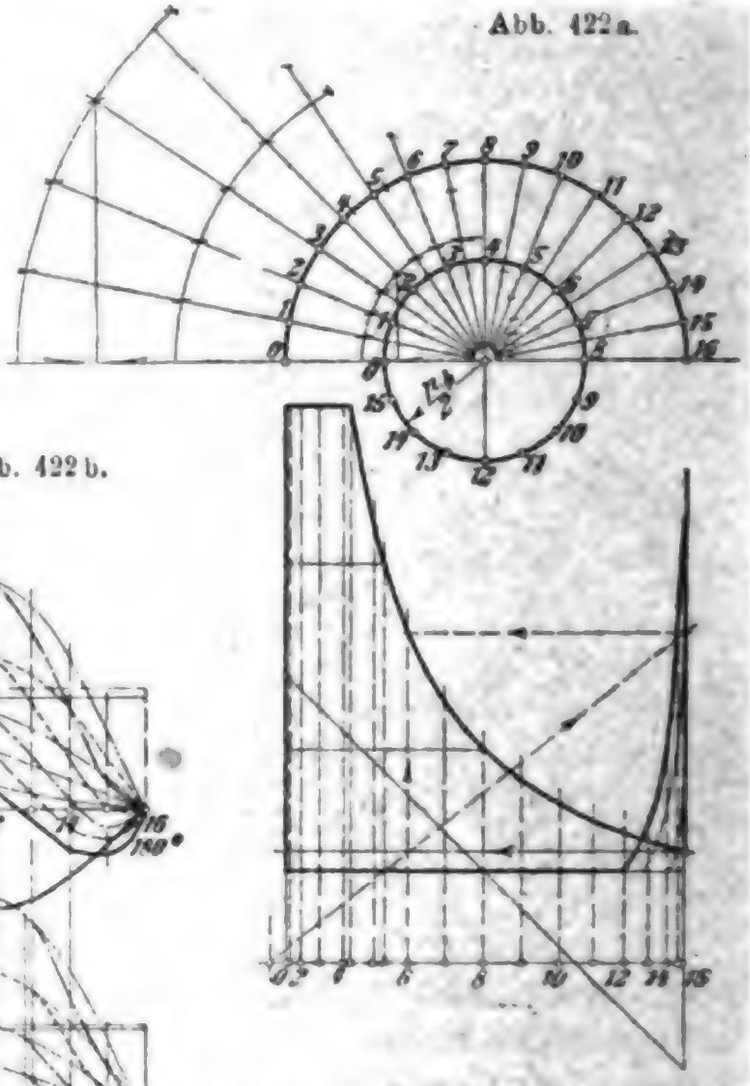
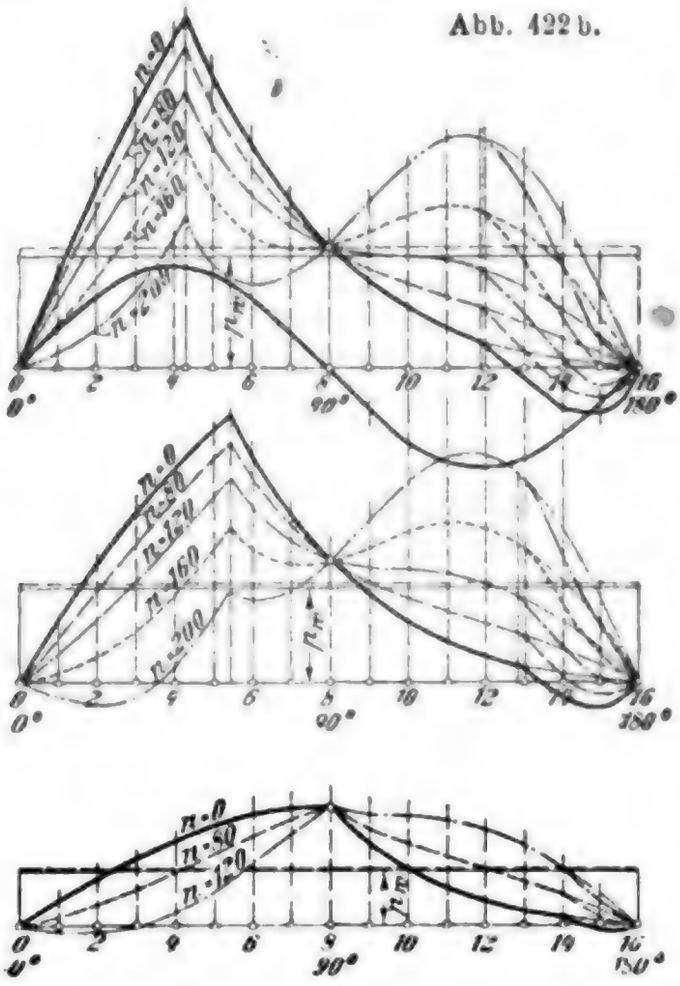


Abb. 422b.



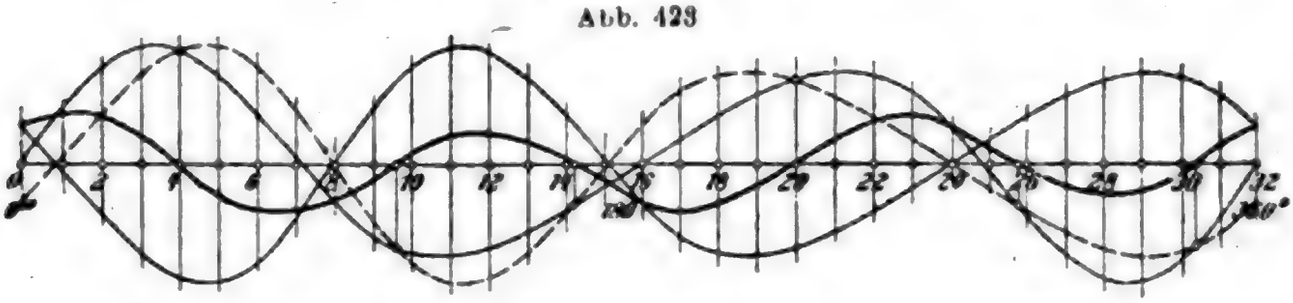
Daraus folgt z. B., dafs bei Zwillingsmaschinen mit 90° Kurbelversetzung, ebenso bei Drillingsmaschinen mit je 60° oder je 120° Kurbelversetzung (für $\lambda = 0$) die Massendrücke der Kurbelgetriebe sich vollständig aufheben.

3. Wird die **endliche Stangenlänge** berücksichtigt ($\lambda = \lambda$), so findet man für ein Kurbelgetriebe die Massendruckdrehkraftkurve, indem man einfach zu den Werten p_b (begrenzt von der Massendruckparabel, Abb. 259 S. 885) die gleichwertigen Drehkräfte aufsucht. Die Gestalt der Drehkraftkurve für $\lambda = \frac{1}{5}$ ist aus Abb. 423 zu erkennen; liegt einmal eine solche Kurve gezeichnet

Digitized by Google

vor, so sind (für gleiches λ) immer nur für andere Werte von $\frac{q}{g}\omega^2 r$ die Ordinaten proportional zu verändern. Für Mehrkurbelmaschinen erhält man die gesamte Massendruckdrehkraftkurve durch Addieren der Ordinatenwerte für die einzelnen Kurven; Abb. 423 zeigt in den

Abb. 423



fein ausgezogenen Linien die letzteren für eine Zwillingsmaschine mit 90° Kurbelversetzung, in der stark ausgezogenen Linie die resultierende Drehkraftkurve der Massendrücke. Die hier vorhandenen 6 Ueberschneidungen mit der Grundlinie finden sich auch bei beliebiger Kurbelzahl.

c. Schwungradberechnung mit Hülfe des Massenwuchtdiagramms.*)

1. Allgemeines.

Bei diesem streng dynamischen, von Wittenbauer**) angegebenen Verfahren brauchen keinerlei beschränkende Annahmen über die Winkelgeschwindigkeit gemacht zu werden; es eignet sich daher besonders für stark veränderliche Winkelgeschwindigkeiten, z. B. für die An- und Auslaufperiode oder für Maschinen mit besonders kleinen Schwungmassen. Dem Verfahren liegt der Wuchtsatz zugrunde: die Zunahme an Wucht (kinetischer Energie) ist gleich der von allen Kräften geleisteten Arbeit; nennt man für irgend eine Getriebestellung die von einer Anfangsstellung o aus von den Kräften geleistete Arbeit $\mathfrak{A}_k$, die Wucht in dieser Stellung E, die Anfangswucht E_0, so ist also

$$E = E_0 + \mathfrak{A}_k.$$

Man wählt nun einen Bezugspunkt, hier am besten einen Kurbelzapfen; ist dessen augenblickliche Geschwindigkeit v_r und haben die Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \ldots$, so ist

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{v_r}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{v_r}\right)^2 + \ldots\right] v_r^2;$$

nennt man $$M_r = m_1\left(\frac{v_1}{v_r}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{v_r}\right)^2 + \ldots$$

die reduzierte Masse, so ist $E = \frac{M_r}{2} v_r^2$; daraus folgt die Geschwindigkeit des Bezugspunktes $v_r = \sqrt{\frac{2E}{M_r}} = \sqrt{\frac{2(E_0 + \mathfrak{A}_k)}{M_r}}$.

*) Ausführliche Darstellung Tolle, Regelung der Kraftmaschinen. 2. Aufl. S. 97 ff.

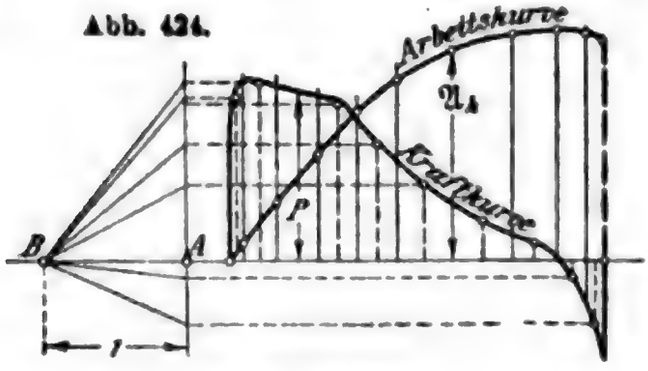
**) Z. d. V. d. I. 1905 S. 471, F. Wittenbauer, Die graphische Ermittlung des Schwungrades, ein Beitrag zur graphischen Dynamik.

Für jede Getriebestellung ist nun das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte durch den geometrischen Zusammenhang gegeben, daher $\frac{v_1}{v_r}$, $\frac{v_2}{v_r}$ ... bekannt, die reduzierte Masse M_r somit leicht bestimmbar; ebenso kann die jedesmalige Arbeit $\mathfrak{A}_k$ (durch graphische Integration) bequem aufgesucht, darauf $v_r = \sqrt{\frac{2\,(E_0 + \mathfrak{A}_k)}{M_r}}$ berechnet und schliefslich mit Hülfe von v_r die Geschwindigkeit aller Punkte für die einzelnen Getriebestellungen $v_1 = v_r\left(\frac{v_1}{v_r}\right)$, $v_2 = v_r\left(\frac{v_2}{v_r}\right)$ ... ermittelt werden.

2. Integralkurve für die Arbeit $\mathfrak{A}_k$.

Ohne vorher irgendwelche Kräftereduktionen vorzunehmen, bestimmt man die Arbeit der Kräfte (der Dampfdrücke und des Widerstandes), wo sie am bequemsten zu finden ist: der Dampfüberdrücke im Indikatordiagramm, des tangential wirkenden Widerstandes im Drehkraftdiagramm, und trägt sie (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) in irgend einem Diagramm zusammen, so dafs natürlich die zusammengehörigen Kolben- und Kurbelstellungen entsprechenden Werte addiert werden. Die Einzelwerte der Arbeiten sucht man am besten mit Hülfe je einer Integralkurve, deren Entwicklung für eine Dampfüberdruckkurve in Abb. 424 erläutert ist:

Abb. 424.



Man trägt auf der Grundlinie der gegebenen Kraftkurve im Kräftemafsstab die Strecke $AB = 1$ ab, zieht beliebige Ordinaten der Kraftkurve und überträgt sie auf die Senkrechte durch A; zu den von B ausgehenden Strahlen laufen alsdann die Tangenten an die Arbeitskurve parallel. Um diese selbst zu finden, beginnt man mit irgend einem Anfangswert für $\mathfrak{A}_k$ (in Abb. 424 mit null) und setzt die Integralkurve aus lauter geraden Stückchen, die die Richtung der Tangenten haben, zusammen. Ist die Kraft unveränderlich, wie z. B. der Tangentialwiderstand, so verläuft die Arbeitskurve geradlinig.

3. Die reduzierten Massen beim Kurbeltrieb.

Als Reduktionspunkt wählt man am besten den Kurbelzapfen. Die Masse M_2 der Schubstange kann mit hinreichender Genauigkeit ersetzt werden durch eine Masse $m_1 = \frac{J_2}{l^2}$ im Kurbelzapfen und eine Masse $m_3 = M_2 - m_1$ im Kreuzkopfbolzen, wenn mit J_2 das auf die Kreuzkopfbolzenmitte bezogene Trägheitsmoment der Schubstange und mit l die Stangenlänge bezeichnet wird. Im Durchschnitt kann man setzen: $m_1 = 0{,}6\,M_2$, $m_3 = 0{,}4\,M_2$.

Digitized by Google

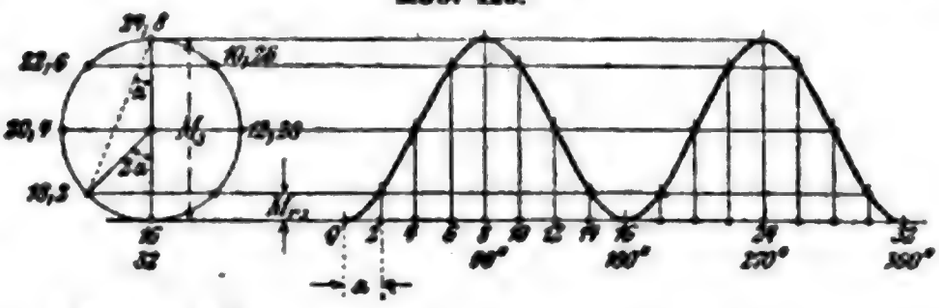
Ist das Trägheitsmoment der Kurbel einschliefslich Schwungrad $= J_1$, der Kurbelhalbmesser r, so ist die reduzierte Masse von Kurbel und Schwungrad gleichbleibend $= J_1 : r^2$; dazu kommt der gleichbleibende Wert m_1. Die Kolben- und Kreuzkopfmasse, vermehrt um den Betrag m_3, sei $= M_3$; dann liefert M_3 veränderliche Beiträge M_{r3} zu der reduzierten Masse, die sich folgendermafsen bestimmen lassen:

Für unendliche Stangenlänge ($\lambda = 0$) ist

$$M_{r3} = M_3 \sin^2 \alpha;$$

dieser Ausdruck läfst sich bequem darstellen, wie Abb. 425 zeigt; es handelt sich um eine Sinuslinie mit zwei vollen Perioden für eine Kurbelumdrehung.

Abb. 425.

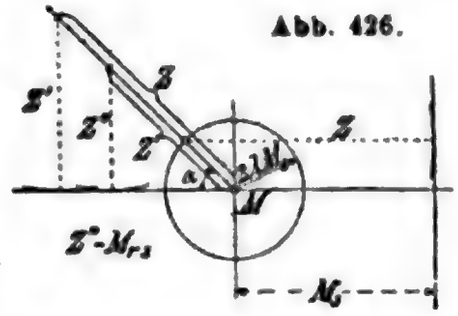


Für endliche Stangenlänge ($\lambda = \lambda$) gilt

$$M_{r3} = M_3 \sin^2 \alpha \,(1 + 2\lambda \cos \alpha);$$

dieser Ausdruck läfst sich nach Abb. 426 zeichnen: Man schlage einen Kreis mit dem Halbmesser $2\lambda M_3$, von dessen Mittelpunkte man die Kurbelstellungen ausgehen läfst, und ziehe eine Senkrechte im Abstande M_3 vom Mittelpunkt des Kreises entfernt; der senkrechte Abstand Z des Schnittpunktes von Kreis und Kurbelstellung beträgt dann $Z = M_3 (1 + 2\lambda \cos \alpha)$, ist also zweimal mit $\sin \alpha$ zu multiplizieren, indem man Z auf die Kurbelstellung abträgt, $Z' = Z \sin \alpha$ senkrecht herunter mifst, Z' auf der Kurbelstellung abträgt und wieder senkrecht hinunter mifst; $Z'' = Z' \sin \alpha$ ist daher M_{r3}.

Abb. 426.



Für Mehrkurbelmaschinen finden sich die reduzierten Massen durch Addition der für die einzelnen Zylinder ermittelten Werte ihrer reduzierten Massen unter Berücksichtigung der Kurbelversetzungswinkel.

4. Massenwuchtdiagramm.

Trägt man die zu den einzelnen Kurbelstellungen gehörigen reduzierten Massen M_r (oder auch die M_r entsprechenden Gewichte $G_r = g M_r$) als Abszissen und die zu den gleichen Stellungen gehörenden Wuchtgröfsen $E = E_0 + \mathfrak{M}_k$ als Ordinaten auf, so erhält man die Massenwuchtkurve, die zur Schwungradberechnung folgendermafsen zu benutzen ist.

1. Aus G_r und E berechnet sich die der Stellung entsprechende **Kurbelzapfengeschwindigkeit** v oder die **Winkelgeschwindigkeit** ω zu

$$v = \sqrt{\frac{2gE}{G_r}}, \qquad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2gE}{G_r}};$$

darin ist $r =$ Kurbelhalbmesser. Bezeichnet (Abb. 427) φ den Winkel,

Digitized by Google

den der nach einem Punkte P der Massenwuchtkurve vom Anfangspunkte O aus gezogene Strahl mit der Abszissenachse bildet, so ist

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{2g}\,.\sqrt{\operatorname{tg}\varphi};$$

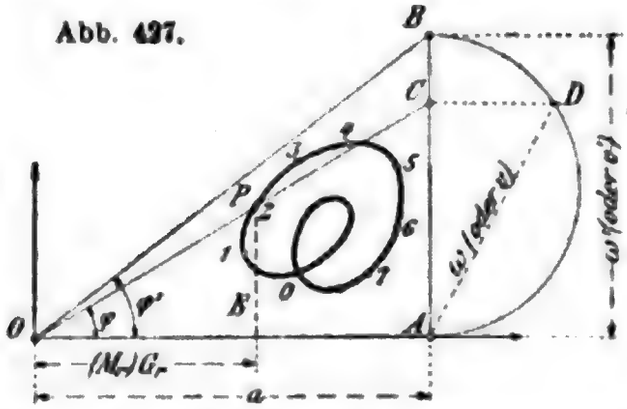
wächst also φ, so nimmt die Geschwindigkeit zu, wird φ kleiner, so nimmt die Geschwindigkeit ab. Der gröfsten und der kleinsten Geschwindigkeit entsprechen die höchste und die tiefste durch O gehende Tangente an die Massenwuchtkurve.

Hat man für einen beliebigen Winkel φ' den zugehörigen Wert

$$v' = \sqrt{2g}\sqrt{\operatorname{tg}\varphi'} \quad \text{oder} \quad \omega' = \frac{\sqrt{2g}}{r}\sqrt{\operatorname{tg}\varphi'}$$

berechnet (besonders zweckmäfsig ist $\varphi' = 45^0$ oder $\varphi' = \varphi_{max}$ zu nehmen), so kann man für jeden anderen Winkel den Wert von v oder ω bequem aufsuchen, indem man (Abb. 427) v' oder ω' als Ordinate AB zwischen Fahrstrahl und Abszissenachse einschiebt, über AB einen Halbkreis zeichnet, den beliebigen Strahl OP mit AB zum Schnitt in C bringt und CD wagerecht bis zum Halbkreise über AB zieht; AD ist dann gleich dem zu φ gehörigen Wert von v oder ω.

Abb. 427.



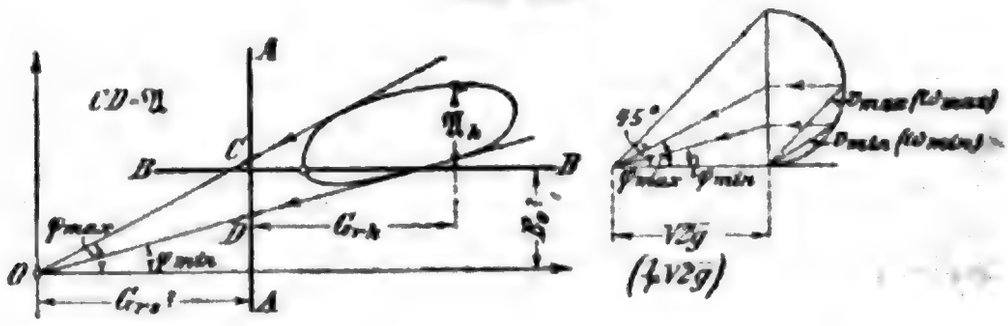
2. Bei der Schwungradberechnung ist das reduzierte Gewicht G_{rs} des Schwungrades in der Regel unbekannt, ebenso die Anfangswucht E_0; dagegen kennt man bei vorgeschriebener mittlerer Geschwindigkeit v oder ω und gegebenem Ungleichförmigkeitsgrad δ_s v_{max} und v_{min}: es ist nämlich

$$v_{max} = v\left(1 + \frac{\delta_s}{2}\right); \qquad v_{min} = v\left(1 - \frac{\delta_s}{2}\right)$$

$$\omega_{max} = \omega\left(1 + \frac{\delta_s}{2}\right); \qquad \omega_{min} = \omega\left(1 - \frac{\delta_s}{2}\right).$$

Hiermit können zunächst (Abb. 428 rechts) die Winkel φ_{max} und φ_{min}, d. h. die Richtungen der Fahrstrahlen festgelegt werden. Die

Abb. 428.



Massenwuchtkurve erhält man ohne Kenntnis des Koordinatenanfangspunktes O, indem man auf der beliebigen Wagerechten BB die redu-

Digitized by Google

zierten Gewichte G_{rk} des Kurbeltriebes (ohne Schwungradmasse) als Abszissen, die zu den gleichen Kurbelstellungen gehörigen Arbeitswerte $\mathfrak{A}_k$ als Ordinaten aufträgt. Zieht man die Tangenten an die Massenwuchtkurve unter φ_{max} und φ_{min} geneigt, so liefert deren Schnittpunkt den Koordinatenanfangspunkt O, und der Abstand von O bis AA ist das reduzierte **Schwungradgewicht.** Bei den üblichen kleinen Werten von δ_s wird G_{rs} im Verhältnis zu G_{rk} sehr grofs, der Schnittpunkt O fällt sehr weit nach links und wird wegen des flachen Schnittes der beiden Strahlen unter φ_{max} und φ_{min} ziemlich ungenau. Man berechnet deshalb die Schwungringmasse M besser nach der Grundgleichung $\mathfrak{A}_s = J\omega^2\delta_s = MV^2\delta_s$, wobei die mafsgebende **Arbeitsdifferenz** $\mathfrak{A}_s$ dem Massenwuchtdiagramm als Strecke CD (Abb. 428) entnommen wird, die auf der Senkrechten AA von den beiden äufsersten Tangenten an die Massenwuchtkurve abgeschnitten wird.

B. Kraftmaschinenregler.

a. Allgemeines.

1. Erklärungen.

Jeder brauchbare Regler mufs auf allen Teilen seines Hubes **stabil** sein, d. h. fortschreitender Entfernung der Schwungmassen von der Achse mufs ständiges Wachsen der Umlaufzahl entsprechen. Der umgekehrte, unbrauchbare Fall **(labil)** oder der indifferente Zustand **(astatisch)** kann durch den Regler allein oder durch die Anordnung der von ihm beeinflufsten Teile verursacht sein.

Statisch sind Regler, wenn jeder höheren Muffenstellung eine gröfsere minutliche Umlaufzahl entspricht.

Astatisch sind Regler, bei denen zu allen Muffenstellungen dieselbe Umlaufzahl gehört, die also nur bei einer einzigen Umlaufgeschwindigkeit in allen Muffenstellungen im Gleichgewicht sind. Bei allen übrigen Geschwindigkeiten verharren diese Regler an einer der beiden Hubbegrenzungen der Muffe.

Pseudoastatisch sind solche Regler, die sich dem astatischen Zustande stark nähern.

Astatische Punkte nennt man solche Stellungen der Schwungkörper, bei denen in zwei unendlich nahen Lagen die gleiche Winkelgeschwindigkeit vorhanden ist. Der Uebergang von labilen Lagen zu statischen und umgekehrt erfolgt in solchen astatischen Punkten.

Da bei den gebräuchlichsten Reglern Pendellagen in der Nähe astatischer Punkte benutzt werden, so darf man den Hub s eines in theoretischer Beziehung nicht genau bekannten Reglers nach keiner Richtung hin willkürlich erweitern, weil sonst labile Lagen herbeigeführt werden könnten.

Ungleichförmigkeitsgrad δ heifst das Verhältnis des Unterschiedes zwischen der Umlaufzahl für die höchste und der für die niedrigste Muffenstellung zu der mittleren Umlaufzahl eines Reglers, der nicht mit dem Stellzeug gekuppelt ist.

Von der richtigen Wahl des Ungleichförmigkeitsgrades hängt in erster Linie die Regelungsfähigkeit des Reglers ab. Wird δ zu klein genommen, so vollführt der Regler bei Aenderung der Belastung der Maschine lang dauernde Pendelungen oder kommt nicht mehr zur

Ruhe. Wird δ zu grofs gemacht, so nähert sich der Regler der neue Gleichgewichtslage absatzweise in Zeiten gleicher Dauer mit imme kleiner werdenden Wegstücken, erreicht also (theoretisch) die neu Lage erst in unendlich grofser Zeit.

Der günstigste Ungleichförmigkeitsgrad, bei welchem ohn Ueberregeln sofort die neue Gleichgewichtslage erreicht wird, ist nac Tolle angenähert $$\delta = 2\sqrt[3]{\frac{s_r}{g\,T_a^2}},$$ der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad (ohne Anwendung eine Oelbremse) angenähert $\delta_{min} = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g\,T_a^2}}$,

worin T_a die Anlaufzeit in sk, d. h. die Zeit, in welcher der Moto vom Ruhezustande aus bei gröfster Füllung und ohne Be lastung seine normale Umlaufzahl erlangt,

g die Beschleunigung durch die Schwere = 981 cm/sk²,

s_r den reduzierten Muffenhub des Reglers in cm

bedeutet, und zwar ist

$$s_r = \frac{\text{Summe aller Gewichte} \times \text{den Quadraten ihrer Wege}}{\text{Arbeitsvermögen des Reglers}}.$$

Bei Reglern mit verhältnismäfsig grofser Gewichtbelastung de Muffe (grofser Umlaufzahl) ist $s_r \sim x$ = dem Muffenhub in cm. Feder regler ergeben nur dann wesentlich kleinere Werte von s_r und gestatte somit kleinere Ungleichförmigkeitsgrade, wenn jede Gewichtbelastun (aufser der durch die Schwungmassen bedingten) vermieden und wen durch grofse Umlaufzahl und grofsen Abstand der Schwungmassen vo der Spindel die Massen gering und ihr Ausschlag klein gehalte werden. (Vgl. die Angaben über s_r auf S. 972 bis 974.) Je kleine s_r im Verhältnis zum wirklichen Hub, um so gröfser ist die Regel fähigkeit des Reglers und um so kleiner darf unter gleichen Um ständen δ genommen werden.

Bezeichnet L die gröfste Leistung des Motors in mkg/sk,

M die Masse des Schwungringes in $\frac{\text{kg sk}^2}{\text{m}}$,

V dessen Geschwindigkeit in m/sk,

so ist die Anlaufzeit $$T_a = \frac{MV^2}{L} \text{ sk}.$$

Kleine Werte von δ erfordern also, da T_a gegen s_r im Quadra erscheint, in erster Linie möglichst schwere Schwungräder bei grofse Umfangsgeschwindigkeit.

Flüssigkeitskatarakte (Oelbremsen mit Hahn in dem Verbindungsrohr beider Kolbenseiten zum Berichtigen; senkrechte Stellung, damit der Kolben sich reibungsfrei im Zylinder bewegt) ermöglichen einen etwas kleineren Ungleichförmigkeitsgrad, als vorstehend angegeben, erzeugen aber durch ihren Widerstand gröfsere Unempfindlichkeit.

Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad ε. Der Widerstand P, den jeder mit Reguliervorrichtung verbundene Regler zu überwinden

Digitized by Google

hat, gemessen an der Muffe im Sinne ihrer Verschiebung, setzt sich zusammen aus dem nützlichen Teil W, der durch das Stellzeug auf die Muffe übertragen wird, und dem von der Eigenreibung des Reglers herrührenden Teile R. P wirkt also, ähnlich wie die Reibung in einem Getriebe, stets der angestrebten Bewegung entgegen.

In jeder Stellung des durch die Kraft P belasteten Reglers tritt erst dann ein Steigen oder Sinken der Muffe ein, wenn die minutliche Umlaufzahl n eine bestimmte Aenderung in positivem oder negativem Sinne ($+\Delta n$ oder $-\Delta n$) erfahren, d. h., wenn die Fliehkraft C der umlaufenden Schwungmassen um einen gewissen Betrag ΔC zu- oder abgenommen hat. Die Muffe bleibt also bei einer Aenderung der Umlaufzahl zwischen $n-\Delta n$ bis $n+\Delta n$ unbeweglich oder unempfindlich; man bezeichnet das Verhältnis

$$\frac{(n+\Delta n)-(n-\Delta n)}{n}=\frac{2\,\Delta n}{n}=\varepsilon$$

als den Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad.

Weil Δn im allgemeinen gegen n sehr klein ist, so ist auch angenähert

$$\varepsilon=\frac{(n+\Delta n)^2-n^2}{n^2}=\frac{\Delta C}{C}.$$

Der Unempfindlichkeitsgrad ε eines Reglers darf bei Maschinen mit hin- und hergehender Bewegung nicht kleiner sein als der Ungleichförmigkeitsgrad δ_s des zugehörigen Schwungrades (S. 946), wenn ein Zucken des Reglers während eines jeden Maschinenhubes vermieden werden soll. Manche Konstrukteure nehmen $\varepsilon<\delta_s$, um ein Tanzen des Reglers herbeizuführen, das den Regler absolut empfindlich macht und die kleinen Geschwindigkeitsschwankungen beseitigt, die trotz gleichbleibender Maschinenbelastung innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades auftreten.

Muffendruck S nennt man die Kraft, welche der ruhend und vom Stellzeug nicht belastet gedachte Regler an der Muffe ausübt. Die Gröfse von S ist durch Auswägen des Muffendruckes bei ruhender Spindel für jede Muffenstellung praktisch leicht zu ermitteln.

Mit Hülfe des Muffendruckes S läfst sich ε auch schreiben:

$$\varepsilon=\frac{P}{S}=\frac{W+R}{S}=\frac{W}{S}+\frac{R}{S}=\varepsilon_w+\varepsilon_r.$$

Der Unempfindlichkeitsgrad ε setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: aus

ε_w, herrührend von der nützlichen Verstellkraft, und aus

ε_r, bedingt durch die Eigenreibung des Reglers. Je niedriger ε_r, um so günstiger ist der Regler, um so gröfser darf bei vorgeschriebenem ε der nützliche Teil ε_w und um so kleiner demnach bei gegebener Verstellkraft W der Muffendruck S genommen werden.

Bei den meisten Reglern ist ε_r für die einzelnen Muffenstellungen verschieden. Zur vollständigen Beurteilung sind also Angaben von ε_r mindestens für die tiefste, mittlere und höchste Muffenstellung erforderlich. (Zahlenangaben für verschiedene Systeme S. 971 bis 974,

Digitized by Google

Ermittlung von ε_r S. 969.) Am zweckmäfsigsten sind Regler mit möglichst unveränderlichem ε_r.

Von der Verstellkraft W ist meist nur ein Mittelwert bekannt; Abhängigkeit von den Muffenstellungen wird zwar häufig vorhanden, aber, da meist unbekannt, nicht zu berücksichtigen, vielmehr gleichbleibende Verstellkraft W vorauszusetzen sein. Bestimmung des Widerstandes W durch Auswägen an der vorhandenen Regelungsvorrichtung (unter Dampf), zweckmäfsig mittels Federwage.

Mit Rücksicht auf gleichbleibende Unempfindlichkeit für alle Muffenstellungen ist deshalb **unveränderlicher Muffendruck** S am günstigsten; bei Gewichtsbelastung der Muffe ist S für pseudoastatische Regler unveränderlich, wenn die Schwungmassen im Verhältnis zur Muffenbelastung klein, die Umlaufzahlen also grofs gemacht werden. Viele der bekannten Regler mit Federbelastung zeigen starke Veränderlichkeit des Muffendruckes (Zunahme mit steigender Muffe bei Hartung, Trenck, Zabel, Steinle usw., Abnahme bei Proell); unveränderlichen Muffendruck haben die Federregler nach Tolle, die neueren Regler von Hartung, Steinle und Jahns.

Unveränderlicher Muffendruck ermöglicht, ohne Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades die Hülsenbelastung zu vergröfsern oder zu verkleinern und damit die Umlaufzahl zu ändern. Regler mit stark veränderlichem S erfordern auch genaues Auswuchten des Stellzeuges, damit nicht durch Be- oder Entlastung der Muffe der Ungleichförmigkeitsgrad verändert, z. B. labile Anordnung herbeigeführt wird.

Gesamter Ungleichförmigkeitsgrad i. Der gesamte und tatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad, den der Regler für die Maschine herbeiführt, beträgt angenähert

$$i = \delta + \varepsilon;$$

er entspricht dem mit dem Stellzeug gekuppelten Regler.

Der Wert von i ist schliefslich für die gröfsten auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen des Motors mafsgebend. Da sich ε und δ gegenseitig bedingen (ε soll $\sim \delta$ sein), so gestatten nur solche Regler die geringsten Schwankungen, die sowohl kleine Unempfindlichkeitsgrade ε (geringe Eigenreibung und grofsen Muffendruck) als auch kleine Ungleichförmigkeitsgrade δ (Federbelastung, kleine Schwungmassen mit möglichst kleinen Ausschlägen) zulassen; aufserdem mufs natürlich der Motor selbst einen niedrigen Ungleichförmigkeitsgrad δ_s des Schwungrades besitzen (da $\varepsilon \geq \delta_s$).

Arbeitsvermögen des Reglers nennt man das Produkt aus dem mittleren Muffendruck S_m und dem Muffenhub s, also

$$\text{Arbeitsvermögen } \mathfrak{A} = S_m s = \int S\,ds.$$

Unmittelbar wirkende Regler sind beständig mit dem Reguliergewerk verbunden und verstellen dieses mit der Kraft W, entsprechend der Beziehung

$$W = \varepsilon S - R = (\varepsilon - \varepsilon_r) S.$$

Bei käuflichen, unmittelbar wirkenden Reglern ist meist die obere Grenze des Arbeitsvermögens $\mathfrak{A} \sim 15$ bis 18 mkg bei Belastung der Muffe ausschliefslich durch Gewichte; bei Belastung durch Federkraft steigt $\mathfrak{A}$ bis auf etwa 90 mkg. Bei den gröfseren Nummern ist zu prüfen, ob nicht die Anlage eines mittelbar wirkenden Reglers billiger ausfällt.

Digitized by Google

Mittelbar wirkende Regler mit Stellhemmung kuppeln nur an den Hubgrenzen mittels der Kraft W eine Hülfskraft mit der Regelungsvorrichtung. Sie gestatten die Verwendung eines kleinen Muffenhubes, was einen geringen Ungleichförmigkeitsgrad δ zur Folge hat; da auch W klein gehalten werden kann, so ist es möglich, trotz grofsen Kraftbedarfs für Wasserschützen, Rider- und Meyer-Steuerung usw. noch mit dem üblichen Aufwande von Reglermassen den gesamten Ungleichförmigkeitsgrad δ in niedrigen Grenzen zu halten. Sie sind jedoch durch die Regler mit Hülfsmotor fast ganz verdrängt.

Mittelbar wirkende Regler mit Hülfsmotor S. 974.

Leistungsregler*) für Pumpwerke, von F. J. Weifs in Basel eingeführt, erstreben nicht, wie die gewöhnlichen (Geschwindigkeits-) Regler, eine möglichst gleichbleibende Umlaufzahl der Maschine bei verschiedener Belastung, sondern gestatten bei gleicher Hubarbeit stark wechselnde Maschinengeschwindigkeit. Die Leistungsregler sind daher sehr stark statisch (Ungleichförmigkeitsgrad δ bis zu 5,6). Indem die Lage der Reglermuffe zur Steuerung nach Belieben abgeändert werden kann, wird es möglich, dem gleichen Füllungsgrade der Dampfmaschine verschiedene Muffenstellungen, also auch verschiedene Umlaufzahlen des Reglers zuzuordnen.

Die Weifsschen Regler haben Gewichtbelastung; bequemer kann man stark statische Regler durch Federbelastung erzielen und dadurch sowohl die dynamische Wirkung verbessern wie auch die Eigenreibung bedeutend vermindern (Regler von Tolle und von Stumpf, letztere mit astatischem Sicherheitshub).

Beharrungsregler. Ein Fliehkraftregler (meist Flachregler) wird mit einer Hülfsschwungmasse verbunden, die entweder mit der Fliehmasse des Reglers zu einem starren Stück vereinigt ist, oder um einen besonderen Bolzen (am besten um die Reglerachse) drehbar schwingt und an der Bewegung der Fliehmasse vermöge zwangläufiger Verbindung durch Zugstangen usw. teilnimmt. Der tangentiale Trägheitswiderstand der Hülfsschwungmasse (der sog. Beharrungsmasse), der bei einer Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Reglerspindel wachgerufen wird, überträgt sich auf den eigentlichen Fliehkraftpendelregler und vergröfsert dessen Verstellkraft.

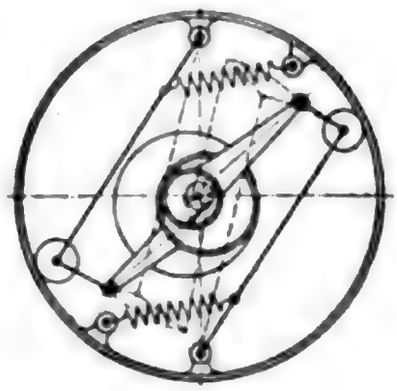
2. Einteilung der Fliehkraftregler.

Man unterscheidet:

a) Muffenregler, bei denen die Relativverschiebung der Schwungkörper gegen die Reglerwelle auf eine Muffe, die sich auf der Welle in der Längsrichtung verschiebt, übertragen und von dort mittels eines sich nicht drehenden Gleitringes auf das Steuerungsgestänge abgeleitet wird.

b) Achsenregler, bei denen sich die äufsere Steuerung auf der Reglerwelle befindet, sich mit dieser gleichzeitig dreht

Abb. 429.



*) Vgl. Z. d. V. d. I. 1891 S. 1065 ff.

Digitized by Google

und durch die Relativbewegung der Reglerschwungmassen eine Relativverschiebung erfährt (Abb. 429).

Weiter kann man unterscheiden:

1. Kegelregler, bei denen die Schwungkörper um Zapfen schwingen, die senkrecht zur Reglerspindel stehen, und

2. Flachregler, bei denen sich die Schwungkörper in Ebenen senkrecht zur Reglerwelle bewegen. Die Muffenregler sind Kegel- oder Flachregler, die Achsenregler meist Flachregler.

Als Mittel zur Uebertragung der Bewegung der Schwungkörper auf die Muffe kommen als einfachste nur in Betracht:

a) das Schubkurbelgetriebe und

b) die Kurbelschleife.

Dabei können die Schwungmassen

sich entweder um einen festen Drehpunkt an der Spindel (mit ihren sämtlichen Punkten in Kreisen) bewegen (unmittelbare Aufhängung) oder

mit einem Gliede des Getriebes (z. B. der Lenkstange des Kurbelgetriebes) verbunden sein, wobei ihre einzelnen Punkte verschiedene Bahnen beschreiben (umgekehrte Aufhängung).

Die Fliehkraft der umlaufenden Schwungmassen wird im Gleichgewicht gehalten

1. entweder durch die Gewichtwirkung der Schwungmassen allein oder in Verbindung mit einer Gewichtbelastung der Hülse (Gewichtregler) oder

2. durch Federbelastungen (Federregler). Federregler ergeben wegen der geringeren zu beschleunigenden Massen einen kleineren reduzierten Muffenhub (vgl. S. 962) und gestatten deshalb bei gleicher Regelungsfähigkeit einen kleineren Ungleichförmigkeitsgrad.

b. Untersuchung und Berechnung der Fliehkraftregler auf Grund von Diagrammen.*)

1. *C*-Kurven, Ungleichförmigkeitsgrad.

Bestimmt man für einen gegebenen **Kegelregler** durch Zeichnung oder Rechnung die Kräfte C, die im Schwerpunkt der Schwungmassen, winkelrecht zur Spindel nach aufsen wirkend, den belastenden Kräften (Hülsengewicht Q, Gewicht der Schwungkörper G und Federbelastung F) in den verschiedenen Reglerstellungen das Gleichgewicht halten, und trägt diese als Ordinaten von einer Achse ON aus senkrecht unter den Schwerpunkten M ab, so liegen die Endpunkte auf der **Charakteristik** oder ***C*-Kurve** des Reglers (Abb. 430 bis 435). Um den Einfluſs der einzelnen Gröſsen zu erkennen, empfiehlt es sich, die Anteile, welche G, Q und F zu C beitragen, d. h. die Kraft C_G, welche G allein, die Kraft C_Q, welche Q allein, und C_f, welche F allein das Gleichgewicht halten würden, getrennt zu ermitteln und ebenso als Ordinaten zu einer C_G-, C_Q- und C_f-Kurve aufzutragen.

Im folgenden sind stets **alle Kräfte auf eine Schwungmasse** bezogen gedacht; es bedeute also

G das Gewicht und M die Masse aller Schwungkörper zusammen,
C deren gesamte Fliehkraft,
Q die Hülsenbelastung,
x den Abstand des Schwerpunktes M von der Spindel,

dann ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit ω und die minutliche Umlaufzahl n aus C:

*) M. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl.

Digitized by Google

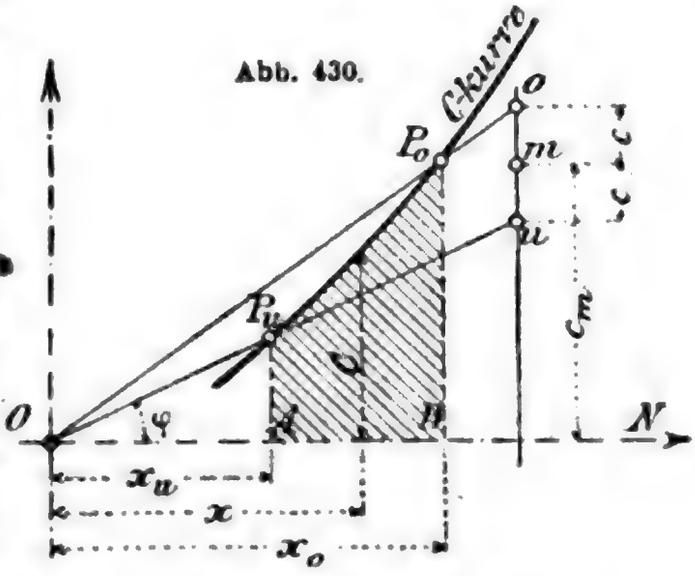
$$C = \omega^2 M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} G x$$

(wenn x in m gemessen, so wird $\frac{\pi^2}{g} \sim 1$).

Das Arbeitsvermögen eines Reglers ist gleich dem Inhalt der von der C-Kurve, der ON-Achse und den beiden Endwerten der C-Kräfte eingeschlossenen Fläche ($\mathfrak{A}$ = Fläche $A P_u P_o B$ in Abb. 430).

Ist der Regler astatisch, so ist die C-Kurve eine Gerade durch O.

Abb. 430.



Wächst der Winkel φ, den der Strahl OP in Abb. 430 mit der Achse ON bildet, mit wachsendem Pendelausschlage, so ist der Regler stabil, nimmt φ mit zunehmendem x ab, so ist der Regler labil. Der Berührungspunkt einer Tangente, die von O aus an die C-Kurve gezogen werden kann, bedeutet einen astatischen Punkt (P_a in Abb. 431 u. 432); falls nicht zufällig P_u ein Wendepunkt der C-Kurve ist, trennt P_a den brauchbaren Teil — Regler stabil — von dem unbrauchbaren — Regler labil. Ist OP_a eine Wendetangente, so kann der Regler ganz stabil oder ganz labil sein (Abb. 432).

Abb. 431.

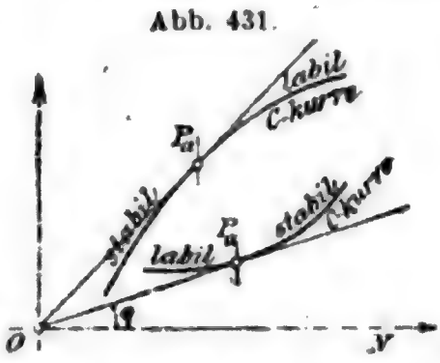
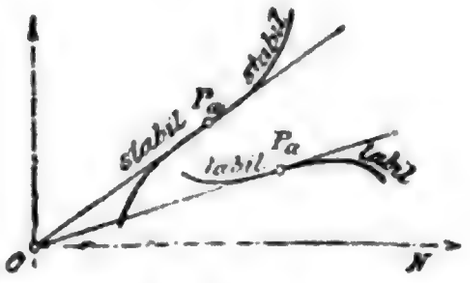


Abb. 432.



Zieht man in Abb. 430 durch die Endpunkte P_u und P_o des benutzten Teiles der C-Kurve die Strahlen von O aus, schneidet diese durch eine beliebige Senkrechte in o und u und mißt die Strecke c_m von ON bis zur Mitte m zwischen o und u, so erhält man den

Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = \frac{c}{c_m}.$$

Soll umgekehrt zu einer gegebenen tiefsten Muffenstellung die einem vorgeschriebenen Ungleichförmigkeitsgrade δ (vgl. S. 961) entsprechende höchste Stellung ermittelt werden, so ziehe man Ou durch P_u, trage $uo = 2c = 2\delta c_m$ nach oben ab und schneide mit Oo die C-Kurve im gesuchten höchsten Punkte P_o.

Da sich die C-Kurven **unabhängig** von der Lage der Spindel ergeben, so kann nachträglich beim Entwurf eines Reglers der Ungleichförmigkeitsgrad δ durch Verlegen der Spindel beliebig abgeändert werden:

rückt man die Spindel nach den Schwungmassen hin, so nimmt δ ab, rückt man die Spindel von den Schwungmassen ab, so wächst δ.

In der Nähe eines astatischen Punktes P_a ist δ am leichtesten klein zu halten; deshalb verwendet man meist solche Stücke der C-Kurve, die ungefähr mit P_a beginnen und stabil sind. Ist die C-Kurve, wie bei den meisten Reglern, oben konkav, so liegt ihre benutzbare Strecke oberhalb des astatischen Punktes; ist sie oben konvex, so liegt jene Strecke unterhalb dieses Punktes.

Vorstehende Beziehungen gelten nur, wenn die Schwungkörper so gestaltet sind, dafs ihre Trägheitsmomente, bezogen auf Schwerachsen, die die Spindel schneiden, gleich grofs sind, was z. B. für Umdrehungskörper zutrifft, deren Drehachse senkrecht zur Pendelebene steht. Schneidet eine Trägheitshauptachse der Schwungkörper deren Zapfenmitte, so ist die C-Kurve für gleichbleibende Winkelgeschwindigkeit zwar auch eine Gerade, die aber nicht durch O geht; in allen anderen Fällen ist die astatische C-Kurve eine krumme Linie (Tolle, Reg. d. Kr., 2. Aufl., S. 450).

Die den einzelnen Belastungen (Gewicht G der Schwungkörper, Muffenbelastung Q, Federkraft F) entsprechenden C-Kurven geben Aufschlufs, ob und wie weit eine Aenderung dieser Gröfsen zulässig ist. Hat z. B. die C_G-Kurve den gleichen Charakter wie die gesamte C-Kurve (ist sie annähernd astatisch), so darf G ohne Beeinflussung von δ abgeändert werden; ist die C_Q-Kurve genau oder annähernd astatisch, so kann die Hülsenbelastung (z. B. zur Erhöhung der Umlaufzahl) vergröfsert werden.

Regler mit astatischer C_q-Kurve erfahren auch durch gröfsere Verstellkräfte keine Aenderung ihres Ungleichförmigkeitsgrades; labile Anordnungen infolge des Stellzeuges sind deshalb hier ausgeschlossen.

Anspannen von Federn bedeutet Hinzufügen einer unveränderlichen Kraft; ergibt eine an Stelle der Feder gedachte unveränderliche Kraft eine astatische C-Kurve, so ist Anspannen der Feder zulässig. Federregler mit Federkraft unmittelbar an der Hülse gestatten also nur dann Aenderung der Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung, wenn die C_q-Kurve astatisch ist; andernfalls, z. B. wenn die C_q-Kurve stark labil ist, wird durch Spannen der Feder labile Anordnung herbeigeführt.

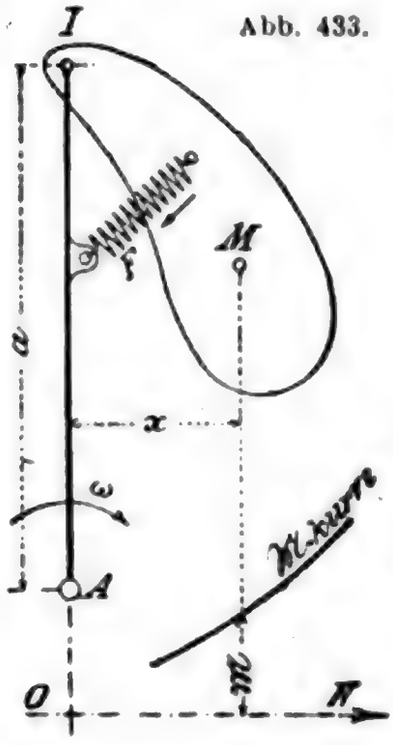


Abb. 433.

Ist in Abb. 433 M der Schwerpunkt des beliebig gestalteten Schwungkörpers eines **Flachreglers**, der sich um die Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, und bedeutet

a den Abstand des Zapfenmittelpunktes I von der Drehachse A,

$\mathfrak{M}$ das Moment der Fliehkraft des Pendels von der Masse M und dem Gewicht G, das dem Moment der belastenden Federkräfte in den einzelnen Stellungen das Gleichgewicht zu halten hat,

so bleiben vorstehende Beziehungen gültig, wenn man von einer zu AI winkelrechten Achse ON aus unter M die Momente $\mathfrak{M}$ als Ordinaten errichtet. Die **$\mathfrak{M}$-Kurve ist dann so zu benutzen wie die C-Kurve beim Kegelregler.** Hier gilt zur Bestimmung von ω und n:

$$\mathfrak{M} = \omega^2 a M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} a G x.$$

Digitized by Google

Rückt man beim Entwurf Schwungkörper samt angreifender Feder in der Richtung AI von A fort, so bleibt die $\mathfrak{M}$-Kurve und der Anfangspunkt O, demnach auch der Ungleichförmigkeitsgrad erhalten; es ändert sich nur a und damit die Umlaufzahl gemäfs vorstehender Gleichung.

Statt der $\mathfrak{M}$-Kurve läfst sich auch bei den Flachreglern eine **C-Kurve** der Beurteilung zugrunde legen, die genau wie die C-Kurve beim Kegelregler (auch zur Ermittlung des Arbeitsvermögens, was bei der $\mathfrak{M}$-Kurve nicht zutrifft) zu benutzen ist, und die man erhält, indem man als Abszissen die Abstände $r = AM$ und als zugehörige Ordinaten die Kräfte C aufträgt, die in M, radial nach aufsen wirkend, den Federbelastungen das Gleichgewicht halten.

2. Regler mit Schubkurbelgetriebe und Gewichtbelastung.

α) Unmittelbare Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 434 alle erforderlichen Gröfsen durch Zeichnung, wie folgt:

C_g: trage vom festen Pendeldrehpunkt I aus G nach unten, ziehe gg wagerecht; auf dieser schneiden die Strahlen IM die Werte C_g ab.

C_q: trage von I aus Q nach oben ab, ziehe qq wagerecht, bringe die Wagerechte durch M mit der Lenkstange II III zum Schnitt in B, ziehe BID, ferner IA parallel III II, so ist DA auf qq gelegen $= C_q$.

$$C = C_g + C_q.$$

Muffendruck S: Stets ist $\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}$, deshalb S als Höhe aus einem zu DA ähnlichen Dreieck mit C als Grundlinie zu entnehmen.

Zapfendrücke: Z_3 (für den Zapfen III) $= Z_2$ (für Zapfen II) $= IA$. Z_1 (für Zapfen I) $=$ Strecke DE.

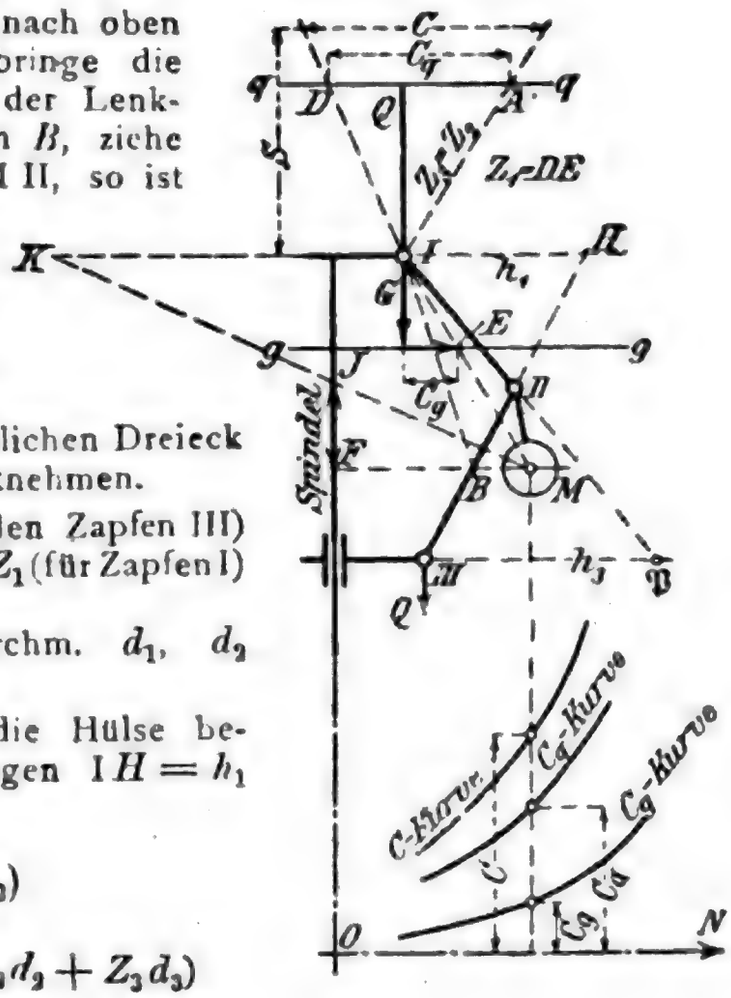
Hieraus die Zapfendurchm. d_1, d_2 und d_3.

Eigenreibung R (auf die Hülse bezogen): entnimm die Längen $IH = h_1$ und III $\mathfrak{P} = h_3$, so ist

$$R = \frac{\mu}{2h_1}(Z_1 d_1 + Z_2 d_2) + \frac{\mu}{2h_3}(Z_2 d_2 + Z_3 d_3)$$

und, wenn $d_1 = d_2 = d_3 = d$:

Abb. 434.



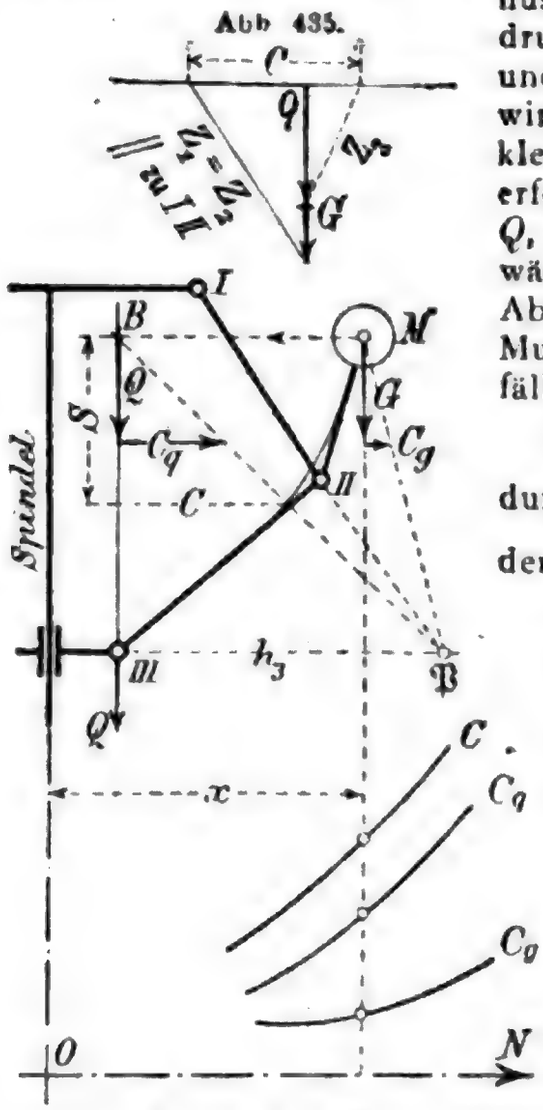
$$R = \frac{\mu d}{2}\left(\frac{Z_1 + Z_2}{h_1} + \frac{Z_2 + Z_3}{h_3}\right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{R}{S}; \qquad \varepsilon_w = \frac{W}{S}; \qquad \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_w.$$

$\delta\,(= c : c_m)$ nach Abb. 430. Arbeitsvermögen nach Abb. 430.

Für **rhombische Aufhängung** (I und III haben gleichen Abstand von der Spindel, I II = II III, I, II, M liegen auf einer Geraden), d. h. bei den Reglern von Watt, Porter und Kley sind die C_G-, C_Q- und C-Kurve von gleicher Gestalt, Q und G können, ohne δ zu beeinflussen, beliebig abgeändert werden; Muffendruck S unveränderlich; Eigenreibung R und somit ε_r am geringsten für Ausschlagwinkel = 45°, zur Erzielung von genügend kleinem δ, dann Kreuzung der Stangen erforderlich. Je gröfser ferner G gegen Q, je niedriger also die Umlaufzahl gewählt wird und je gröfser h_1 und h_3 in Abb. 434, d. h. je mehr Platz bei gleichem Muffendruck gestattet ist, um so kleiner fällt ε_r aus.

Abb. 435.



Nach Bartl*) ergibt die Zeichnung durch Abtragen von $IK = \frac{Q}{G} \cdot IH$, Ziehen der Geraden KM und FM in der Strecke JF den Wert von $\frac{g}{\omega^2}$, worin $g = 9{,}81$ und ω die Winkelgeschwindigkeit des Reglers bedeutet.

β) Umgekehrte Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 435 durch Zeichnung:

C_g: Bringe III mit der Wagerechten durch III zum Schnitt im Pol $\mathfrak{P}$, ziehe $M\mathfrak{P}$, trage von M aus G nach unten ab; auf der Wagerechten durch den Endpunkt von G schneidet $M\mathfrak{P}$ dann C_g ab.

C_q: Ziehe die Wagerechte MB, mifs von B aus Q nach unten und lege durch den Endpunkt von Q eine Wagerechte; auf dieser schneidet $B\mathfrak{P}$ C_q ab.

$$C = C_g + C_q.$$

S: Stets ist $\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}$, deshalb S als Höhe aus einem Dreieck

*) Vgl. Civilingenieur 1893, 1896; dann auch Bartl, Die Berechnung der Zentrifugalregulatoren (Leipzig 1900). Daselbst sind auch einfache Verfahren zur Ausmittlung von S, der Eigenreibung und des Einflusses der Stangenmassen angegeben.

Digitized by Google

mit C als Grundlinie zu entnehmen, ähnlich dem, durch welches C_q aus Q gefunden wurde.

Zapfendrücke: Trage von einer Wagerechten aus (Abb. 435 oben) $Q + G$ nach unten ab, ziehe durch den Endpunkt von G eine Parallele zu I II, deren Länge $= Z_1 = Z_2$ wird, und miſs auf der Wagerechten C ab; der Endpunkt von C hat vom Endpunkte der Kraft Q einen Abstand $= Z_3$.

R und ε_r wie unter 1 S. 966 ff. Ungleichförmigkeitsgrad δ und Arbeitsvermögen nach Abb. 430 S. 967.

Für **rhombische Aufhängung** sind die C_g-, C_q- und C-Kurven von gleicher Gestalt (u. zw. wie bei unmittelbarer Aufhängung). Die umgekehrte Aufhängung des Pendels bietet keine Vorteile; Nachteile: bei gleichen Gewichten kleinerer Muffendruck und gröfsere Eigenreibung (ε_r wird um so gröfser, je gröfser G gegen Q, je kleiner also die Umlaufzahl genommen wird).

Abb. 436. Proell.

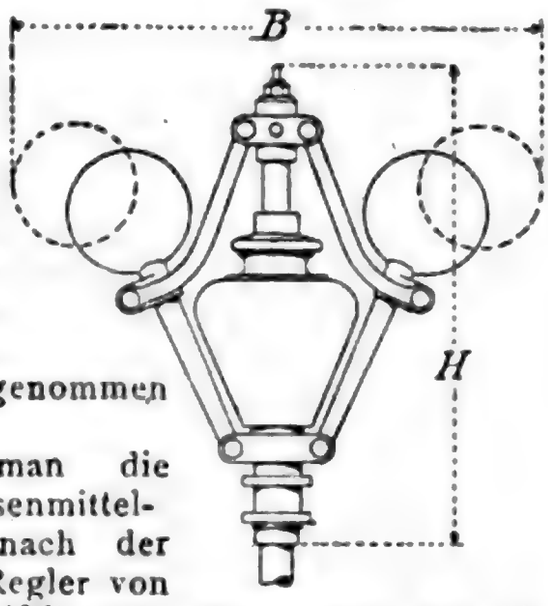
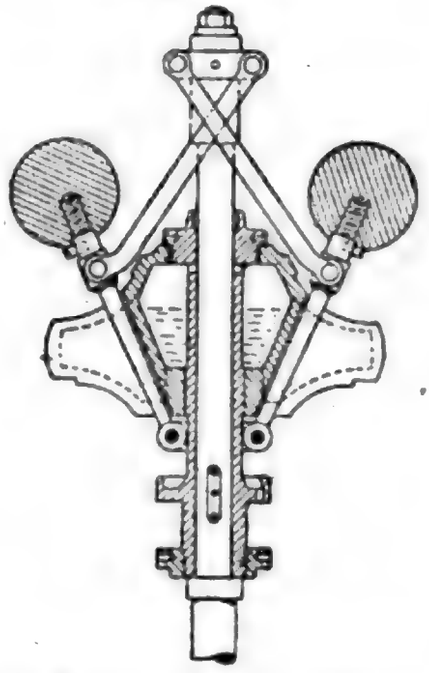


Abb. 437. Steinle.



Verlegt man die Schwungmassenmittelpunkte M nach der Spindel zu (Regler von Proell, Abb. 436) oder kreuzt man nur die Stangen I II (nach Steinle, Abb. 437), so wird zunächst die C_g-Kurve labil, während die C_q-Kurve noch statisch bleibt. Durch Ausgleich beider erhält die gesamte C-Kurve die gewünschte Annäherung an die Astasie. Vergröfserung von Q vergröfsert δ, Vergröfserung von G vermindert δ.

$\varepsilon_r = 1$ bis 1,5 %.

c. Käufliche Federregler.

α) Regler mit Längsfeder.

Da die C_q-Kurve bei den Reglern nur mit einer Feder an der Muffe stark labil sein mufs, so bewirkt Aenderung der Muffenbelastung starke Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades, das Stellzeug ist also genau auszugleichen.

1. Regler von R. Trenck, Erfurt, mit Gewicht- und Federbelastung.

Nach Abb. 438: 9 Nummern mit $n = 300$ bis 160 Umdr. i. d. Min.; mittlerer Muffendruck $S = 42$ bis 760 kg; Muffenhub $s = 30$ bis 115 mm. Spannmutter der Feder unzugänglich. Aenderung der Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung ist unzulässig, deshalb wird eine be-

sondere Einrichtung zur Aenderung der Umlaufzahl geliefert. C_q-Kurve astatisch; Energie nach oben zu stark zunehmend. $\varepsilon_r \sim 1\ \%$. Der reduzierte Hub s_r (S. 962) ist i. M. gleich $^1/_2\ s$, gleich dem halben Muffenhub.

Abb. 438.

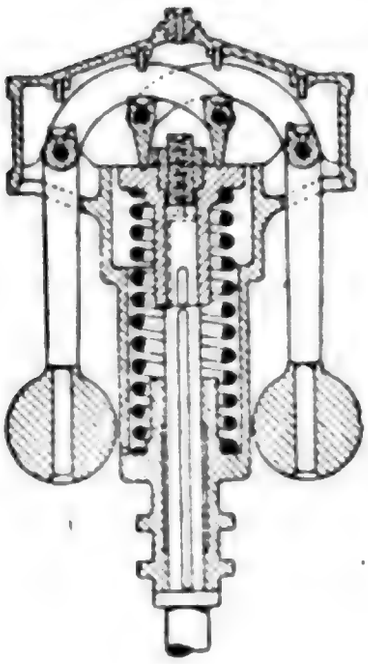
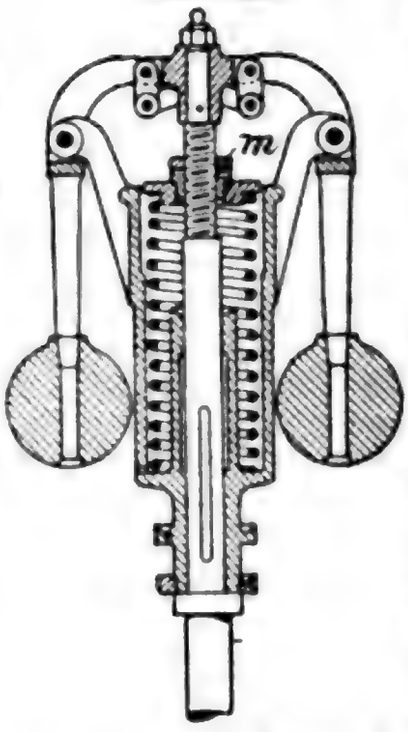


Abb. 439.



2. Federregler von Zabel & Co., Quedlinburg.

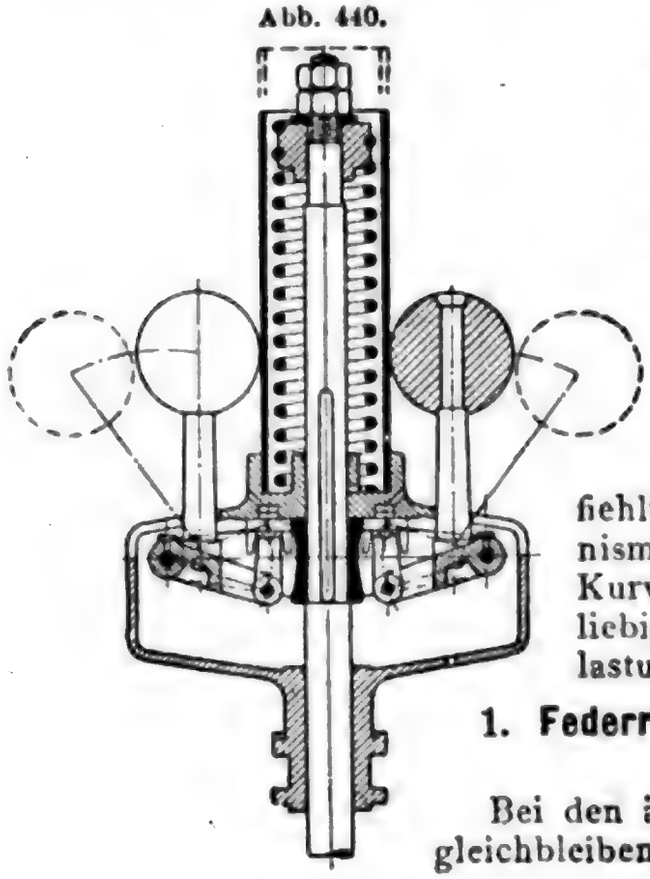
Nach Abb. 439: 7 Nummern mit $n = 240$ bis 150 Umdr. i. d. Min.; mittlerer Muffendruck $S = 58$ bis 625 kg; Muffenhub $s = 30$ bis 115 mm. Spannmutter der Feder freigelegt zum Ausgleichen der Be- oder Entlastung durch das Stellzeug. C_q, C_Q, S, ε_r wie vorstehend bei Trenck. Reduzierter Hub $s_r = 0{,}3$ bis $0{,}4\ s$.

Erhöhung der Umlaufzahl durch 2 oder 3 Zusatzfedern.

3. Federregler von Franz Beyer & Co., Erfurt.

Nicht blofs die Umlaufzahl (durch Veränderung der Federspannung), sondern auch der Ungleichförmigkeitsgrad ist von aufsen einstellbar. Letzteres wird ermöglicht durch Verdrehen des oberen Federtellers (Abb. 440). Gröfseren Ungleichförmigkeitsgraden entspricht eine geringere Anzahl der wirksamen Federgänge.

Abb. 440.



β) Regler mit Querfedern.

Hier kann die C_q-Kurve beliebig gemacht werden; es empfiehlt sich, den Uebertragungsmechanismus so zu wählen, dafs die C_q-Kurve astatisch wird; dann ist beliebige Aenderung der Muffenbelastung zulässig.

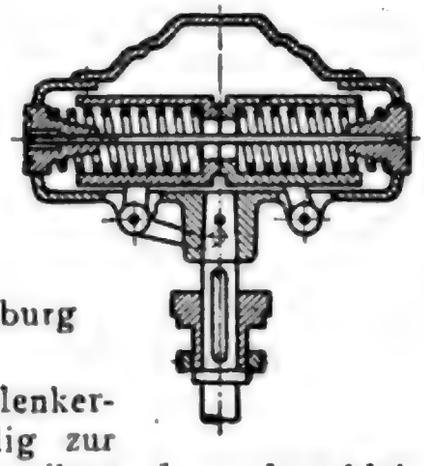
1. Federregler von H. Hartung Nachf., Düsseldorf.

Bei den älteren Reglern (Abb. 441) ist C_q gleichbleibend (stark labil), daher Muffendruck

Digitized by Google

S nach oben stark zunehmend. Eigenreibung, d. h. ε_r, sehr gering, i. M. $\varepsilon_r = 0{,}3\,\%$ (ohne Muffenbelastung); für je $^1/_{10}$ des Muffendrucks als zusätzliche Muffenbelastung wird ε_r um $\sim 0{,}2\,\%$ gröfser, s_r (S. 962) $= {}^1/_5\, s$ für die kleineren, bis $^1/_3\, s$ für die gröfseren Nummern. Aenderungen der Umlaufzahl nur innerhalb enger Grenzen möglich. Bei den neueren Reglern ist die C_q-Kurve fast astatisch, daher Aenderung der Muffenbelastung oder -entlastung in beliebigen Grenzen möglich.

Abb. 441.



2. Regler von Steinle u. Hartung, Quedlinburg (Abb. 442).

Führung der Schwungkörper durch Parallellenkerführung fast genau in Geraden rechtwinklig zur Spindel; die C_q-Kurve ist astatisch, die Eigenreibung besonders klein, $\varepsilon_r = 0{,}20$ bis $0{,}14\,\%$; selbst mit Federwage zur Erhöhung der Umdrehzahl um $10\,\%$ noch $\varepsilon_r = 0{,}37$ bis $0{,}43\,\%$.

Abb. 442.

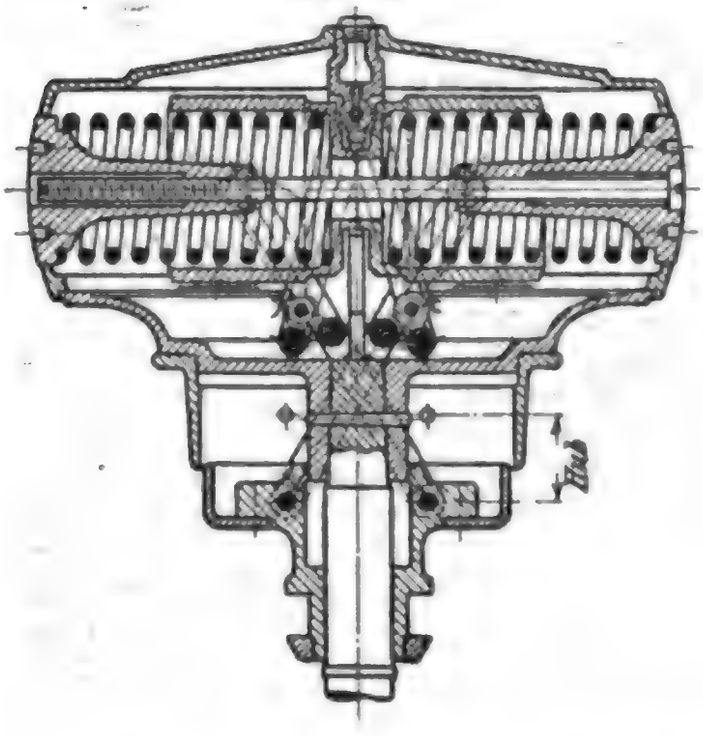
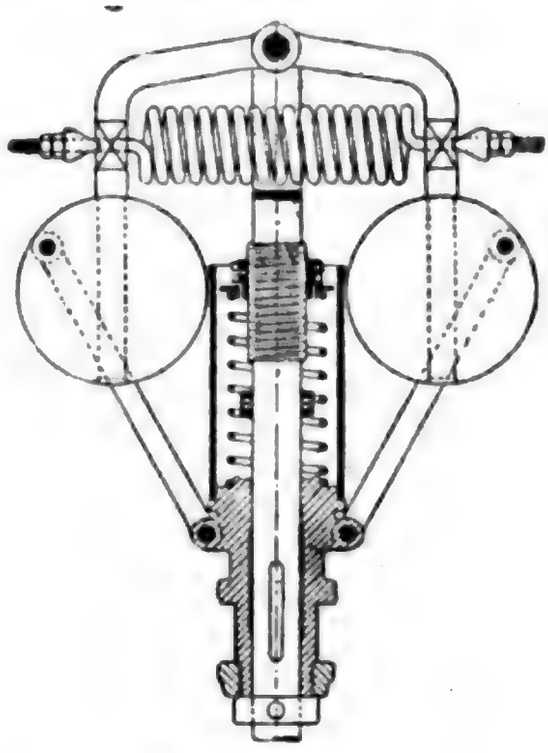


Abb. 443.



3. Regler der Jahns-Regulatoren-Gesellschaft m. b. H., Offenbach a. M., besitzen bei sorgfältig durchgebildeten Schmiervorrichtungen besonders kleine Eigenreibung.

4. Federregler von Tolle.

Nach Abb. 443: 13 Nummern mit $n = 360$ bis 220 Umdr. i. d. Min.; mittlerer Muffendruck $S = 31$ bis 770 kg; Muffenhub $s = 28$ bis 115 mm. Verkleinerung oder Vergröfserung des Ungleichförmigkeitsgrades durch Spannen oder Entspannen der Querfeder; Aenderung der Umlaufzahl ohne Beeinflussung von δ durch Spannen oder Entspannen der

Digitized by Google

Längsfeder in beliebigen Grenzen. C_q astatisch, ebenso C_g, Muffendruck unveränderlich; bei Ausführung nach Abb. 443 $\varepsilon_r = 0.5\,\%$; s_r (S. 962) $= {}^1/_{12}\,s$ für die kleineren, bis ${}^1/_{15}\,s$ für die gröfseren Nummern (sehr gering).

Aufser den normalen Federreglern, deren Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung um 15 % geändert werden kann, werden Regler mit Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges 1. bis zu 15 %, 2. bis 50 % und 3. bis 100 % geliefert.

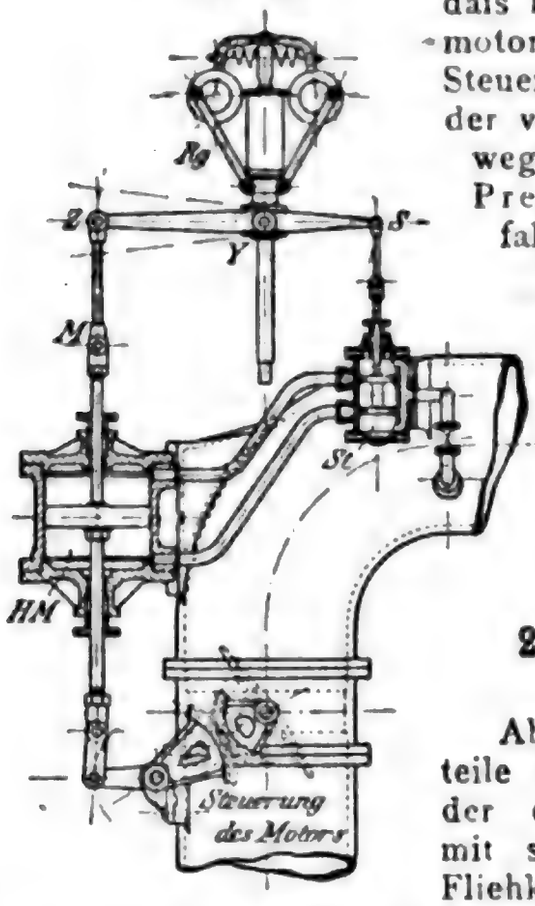
d. Mittelbare Regelung.

α) Bestandteile und Wirkungsweise der hydraulischen Regler.

1. Allgemeines.

Praktisch kommen zur Zeit nur noch mittelbare Regler mit Hülfsmotor in Betracht; die sog. mechanischen Regulatoren, bei denen als Hülfskraft zur Steuerungsverstellung ein Teil der vom Hauptmotor erzeugten, z. B. durch Riemenwendegetriebe abgeleiteten mechanischen Arbeit benutzt wird, werden wegen ihres verwickelten Baues und ihrer langsamen Wirkung bei besseren Regelungen kaum noch angewendet. Fast immer benutzt man sog. hydraulische Regler, deren Hauptwirkung darin besteht, dafs Prefsflüssigkeit den Kolben eines Hülfsmotors verschiebt, dessen Bewegung auf die Steuerung der Hauptmaschine übertragen und der von einer durch den Fliehkraftregler bewegten Hülfssteuerung beherrscht wird. Als Prefsflüssigkeit dient bei Wasserturbinen, falls das Druckwasser rein ist und mindestens 3 bis 4 at Pressung hat, das Triebwasser selbst, sonst Oel, das durch Kapselpumpen auf 6 bis 10 at oder durch Mehrzylinderkolbenpumpen auf 12 bis 20 at gepreſst wird. Meist läuft die Prefspumpe ununterbrochen; das Prefsöl fliefst, soweit es nicht vom Hülfsmotor gebraucht wird, durch einen Rücklauf wieder in den Vorratsbehälter.

Abb. 444.



2. Hydraulische Regler mit starrer Rückführung.

Abb. 444 zeigt die wesentlichen Bestandteile eines hydraulischen Reglers, und zwar der einfachsten Anordnung, eines Reglers mit starrer Rückführung: Rg ist der Fliehkraftregler, HM der Hülfsmotor, St die Steuerung des Hülfsmotors, MZ die sog. Rückführung, deren Wirkung darin besteht, dafs der Drehpunkt Z des Reglerstellhebels ZYS nicht fest ist, sondern der Bewegung des Hülfsmotorkolbens folgt. Jedesmal, nachdem eine Verstellung des Hülfsmotorkolbens durch Verschiebung der Reglermuffe und Einwirkung der Hülfssteuerung St

Digitized by Google

erfolgt ist, mufs diese wieder (bei anderer Lage der Reglermuffe) in die Mittelstellung zurückgeführt werden; dies geschieht durch die zwangläufige Verbindung des Hülfsmotorkolbens mit dem Reglerhebel. Ohne Rückführung ist eine richtige mittelbare Regelung unmöglich. Fast immer ist (wie in Abb. 445 bei *H* angedeutet) eine Abstellvorrichtung vorgesehen, die auch zur Veränderung der Umlaufzahl innerhalb des Ungleichförmigkeitsgrades des Fliehkraftreglers dienen kann; zu diesem Zweck ist die Länge der Rückführstange *MZ* oder der Steuerstange *SSt* veränderlich. Verkürzt man *MZ* genügend, so bringt man *S* in die oberste Stellung, der Hülfsmotorkolben wird ebenfalls nach oben gedrängt, der Kraftzufluſs zum Hauptrohr wird abgesperrt. Statt der starren Rückführung benutzt man auch die Muffenrückdrängung (nach Proell) oder die Tourenrückführung (beim Sturgess-Regler).

Abb. 445.

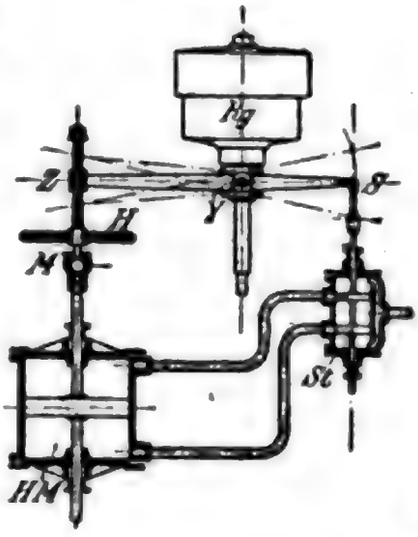
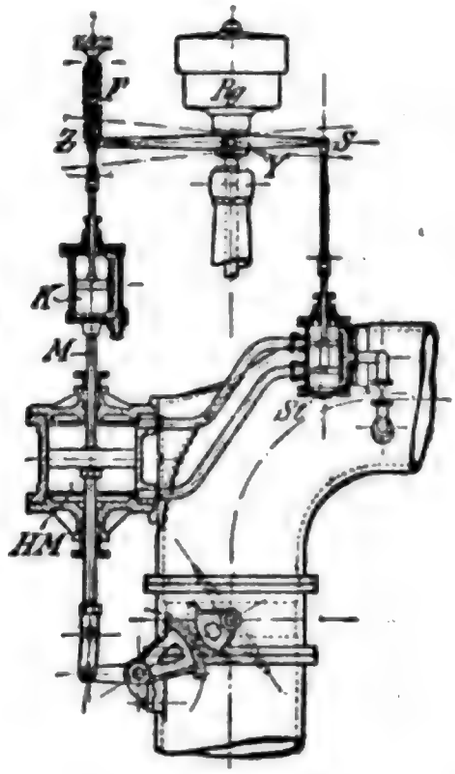


Abb. 446.



3. Isodromregler.

Die starre Rückführung ergibt wie bei unmittelbarer Einwirkung des Fliehkraftreglers auf die Hauptmaschinensteuerung für jeden Belastungsgrad eine andere Umlaufzahl (entsprechend der Ungleichförmigkeit des Reglers); die mittelbare Regelung ermöglicht aber auch genau die gleiche Umlaufzahl für alle Belastungsgrade. Solche Anordnungen heifsen Isodromregler; sie haben (Abb. 446) nachgiebige Rückführung, bestehend aus einer Rückführstange *MZ* von veränderlicher Länge, deren Aenderung nur mit Ueberwindung des Widerstandes einer Oelbremse *K* erfolgen kann, und aus einer Rückdrängung des Rückführpunktes *Z* in die Mittellage durch Federkraft *F* oder durch Flüssigkeitsdruck (wie z. B. bei dem Sturgess-Regler). Ruhestellung des hydraulischen Reglers ist trotz verschiedener Stellung des Hülfsmotorkolbens hier nur möglich, wenn der Reglerhebel *ZYS* wagerecht steht, der Regler *Rg* sich in Mittellage befindet, d. h. der Motor stets genau die gleiche Umlaufzahl hat. Durch Aenderung der Rückdrängung des Hebelpunktes *Z* läfst sich dem Motor eine beliebige, von dem Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers abweichende Ungleichförmigkeit erteilen, sogar einer gröfseren Belastung eine gröfsere Umlaufzahl zuordnen, ohne dafs die Stabilität der Regelung verloren geht.

β) Theorie der mittelbaren Regelung.

1. Grundgröfsen.

Für die Wirkungsweise der hydraulischen Regler sind vor allem folgende **Zeitkonstanten** mafsgebend:

T_a = Anlaufzeit der Kraftmaschine (S. 962);

T_s = Schlufszeit des Hülfsmotors, das ist die Zeit, in der bei unveränderlicher Geschwindigkeit der Hülfsmotorkolben seinen ganzen Hub durchläuft oder in der, falls die Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens von der Stellung der Hülfssteuerung abhängt, der Hülfsmotorkolben bei gröfster Geschwindigkeit seinen ganzen Hub zurücklegt;

T_r = halbe Fallzeit des Reglers $= \sqrt{\frac{s_r}{2\,g}}$, d. i. die Hälfte der Zeit, in der ein stillstehender Regler, aus seiner obersten Stellung losgelassen, bis in die unterste Stellung gelangt;

T_k = halbe Kataraktzeit des Reglers, d. i. die Hälfte der Zeit, in welcher der mit einer Oelbremse versehene stillstehende Regler durch den Muffendruck unter Ueberwindung des Widerstandes der Oelbremse mit gleichbleibender Geschwindigkeit den ganzen Muffenhub durchlaufen würde;

T_i = Isodromzeit $= \frac{k_i}{f_i}$, wenn k_i den Widerstand der Oelbremse K in der Rückführungsstange (Abb. 446) für die Geschwindigkeit 1 cm/sk und f_i die Federkraft bedeutet, die bei einer Längenänderung der Rückführungsfeder (F in Abb. 446) um 1 cm entsteht. Für $T_i = 0$ fehlt die Rückführung, für $T_i = \infty$ ist die Rückführung starr.

Zur Beurteilung der Regelungsvorgänge eignen sich am besten folgende **verhältnismäfsige Abweichungen:**

φ = Geschwindigkeitsabweichung $= \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$, d. i. das Verhältnis des Unterschiedes $\Delta\omega$ zwischen der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit und der anzustrebenden, der neuen Belastung entsprechenden Winkelgeschwindigkeit zu der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_m;

η = Reglerabweichung $= \frac{y}{y_{max}}$, d. i. das Verhältnis des Abstandes y der Muffe von der anzustrebenden Muffenstellung zum ganzen Muffenhub y_{max};

μ = Motorabweichung $= \frac{m}{m_{max}}$, d. i. das Verhältnis des augenblicklichen Abstandes des Hülfsmotorkolbens von der anzustrebenden Gleichgewichtstellung zum ganzen Weg m_{max} des Hülfsmotorkolbens.

Ist $\mu = 0$, so ist die richtige Füllung des Hauptmotors eingestellt; für $\mu = 1$ stellt der Hülfsmotor die gröfste Füllung ein, während der Hauptmotor unbelastet ist.

Digitized by Google

$\sigma =$ Steuerungsverstellung $= \frac{s}{s_{max}}$, d. i. die Verschiebung der Steuerung des Hülfsmotors aus der Mittellage im Verhältnis zur gröfsten Ausweichung s_{max} nach unten oder oben von der Mittellage.

$\zeta =$ Rückführungsabweichung $= \frac{z}{z_{max}}$, d. i. das Verhältnis des Abstandes z des Rückführpunktes Z von der anzustrebenden, der neuen Belastung entsprechenden Lage zum ganzen Ausschlag z_{max} des Rückführpunktes.

$\beta = \frac{m_{max}}{z_{max}}$.

Zwischen den vorstehenden Gröfsen bestehen folgende **Grundgleichungen:**

die Reglergleichung: $T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta + \varphi = 0$,

„ Motorgleichung: $\mu = T_a \varphi'$,

„ Steuerungsgleichung: $\sigma = \eta - \zeta$,

„ Rückführungsgleichung: $\zeta + T_i \zeta' - \beta T_i \mu' = 0$,

„ Hülfsmotorgleichung für den Fall veränderlicher Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens: $\mu' = \frac{\sigma}{T_s}$ oder für den Fall gleichbleibender Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens: $\mu' = \pm \frac{1}{T_s}$.

η' und η'' sind der erste und der zweite Differentialquotient von η nach der Zeit t, dsgl. φ', μ' und ζ' der erste Differentialquotient von φ, μ und ζ.

2. Beurteilung der Regelungsvorgänge.

a) Regler mit veränderlicher Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens.

Aus den Grundgleichungen ergeben sich für φ bis ζ Gleichungen derselben Gestalt (nur mit verschiedenen Unveränderlichen); für den Regler mit **starrer Rückführung** wird:

$$\varphi = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t} + C_3 e^{w_3 t} + C_4 e^{w_4 t},$$

worin w_1 bis w_4 die Wurzeln w der charakteristischen Gleichung:

$$T_a T_s T_r^2 w^4 + (T_a T_r^2 + T_a T_s T_k) w^3 + (\delta T_a T_s + T_a T_k) w^2 + \delta T_a w + 1 = 0.$$

Der Vorgang ist nur dann stabil, d. h. φ nähert sich der Grenze Null, wenn sämtliche Wurzeln w negativ sind oder negative reelle Teile haben; daraus ergibt sich die Stabilitätsbedingung:

$$\delta^2 T_a T_s^2 T_k + \delta T_a (T_r^2 + T_s T_k) T_k - (T_r^2 + T_s T_k)^2 > 0$$

oder mit den Verhältniswerten

$$\tau_a = \frac{T_a}{T_s}; \quad \tau_k = \frac{T_k}{T_s} \quad \text{und} \quad \tau_r = \frac{T_r}{T_s}:$$

$$\delta^2 \tau_a \tau_k + \delta \tau_a \tau_k (\tau_r^2 + \tau_k) - (\tau_r^2 + \tau_k)^3 > 0.$$

Hiernach ist erforderlich 1. ein positiver Ungleichförmigkeitsgrad δ und 2. eine Oelbremse für den Regler; man kommt mit einer möglichst schwachen Oelbremse aus (τ_k wird am kleinsten) für

$$\tau_k = \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2} \tau_r^2 \sim \tau_r^2;$$

Digitized by Google

in diesem Falle mufs sein $r_a \geqq \left(\frac{2 r_r}{\delta + r_r^2}\right)^2 \gtrsim \left(\frac{2 r_r}{\delta}\right)^2$.

Der Regler soll also ein möglichst kleines T_r, d. h. einen möglichst kleinen reduzierten Muffenhub haben, und δ darf nicht zu klein genommen werden. Bei den neueren Turbinenreglern ist T_r meist so klein, dafs $r_r \sim 0$ gesetzt werden, dafs gleichsam der Regler als masselos gelten kann; mit dieser Näherungsannahme werden in der Regel die Untersuchungen der mittelbaren Regler durchgeführt, wie auch nachstehend geschieht.

Für den **masselosen Isodromregler** wird

$$\varphi = C_1 e^{w_1 t} + e^{pt}(C_2 \cos qt + C_3 \sin qt),$$

worin w_1 die reelle Wurzel der charakteristischen Gleichung:

$$w^3 + \left(\frac{1}{T_i} + \frac{\beta}{T_s}\right) w^2 + \frac{w}{\delta T_a T_s} + \frac{1}{\delta T_a T_s T_i} = 0$$

und $\quad w_2 = p + qi, \qquad w_3 = p - qi$

deren komplexe Wurzeln sind. Für den (seltener vorkommenden) Fall, dafs alle drei Wurzeln reell sind (aperiodische Regelung), ist

$$\varphi = C_1' e^{w_1 t} + C_2' e^{w_2 t} + C_3' e^{w_3 t}.$$

Die Unveränderlichen C_1 bis C_3 finden sich

$$C_1 = -\frac{\lambda}{T_a} \frac{2p}{(p - w_1)^2 + q^2}; \qquad C_2 = -C_1;$$

$$C_3 = \frac{\lambda}{T_a} \frac{1}{q} \frac{q^2 - p^2 + w_1^2}{(p - w_1)^2 + q^2},$$

wenn mit λ die verhältnismäfsige Entlastung der Maschine bezeichnet wird. Hiernach lassen sich die auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen durch Aufzeichnen einer Kurve für φ bequem untersuchen. Nachstehende Tafel gibt für einige gebräuchliche Verhältnisse die gröfsten auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen φ_{max} und die Zeit t_1 bis zur Erreichung dieses Maximums an; je gröfser φ_{max} und t_1, um so ungünstiger ist der Regelungsverlauf.

Annahmen			φ_{max}	t_1
$\delta \tau_a = 0{,}05$	$\tau_i = 0$		$4{,}50\ \lambda\delta$	$0{,}35\ T_s$
	$\tau_i = 0{,}5$ und	$\beta = 2$	$4{,}75\ \lambda\delta$	$0{,}40\ T_s$
	$\tau_i = 2{,}5$ und	$\beta = 2$	$4{,}90\ \lambda\delta$	$0{,}41\ T_s$
$\delta \tau_a = 0{,}25$	$\tau_i = 0$		$2{,}00\ \lambda\delta$	$0{,}78\ T_s$
	$\tau_i = 0{,}5$ und	$\beta = 2$	$2{,}30\ \lambda\delta$	$1{,}00\ T_s$
	$\tau_i = 2{,}5$	$\beta = 2$	$2{,}30\ \lambda\delta$	$1{,}10\ T_s$
		$\beta = 1$	$2{,}00\ \lambda\delta$	$0{,}90\ T_s$
fast aperiodisch:				
$\delta \tau_a = 0{,}5$;	$\tau_i = 1{,}5$;	$\beta = 1$	$2{,}55\ \lambda\delta$	$1{,}85\ T_s$
$\delta \tau_a = 1{,}0$;	$\tau_i = 3{,}0$;	$\beta = 1$	$1{,}50\ \lambda\delta$	$2{,}12\ T_s$
$\delta \tau_a = 1{,}5$;	$\tau_i = 4{,}5$;	$\beta = 1$	$1{,}08\ \lambda\delta$	$2{,}90\ T_s$
$\delta \tau_a = 2{,}0$;	$\tau_i = 6{,}0$;	$\beta = 1$	$0{,}98\ \lambda\delta$	$3{,}60\ T_s$
aperiodisch:				
$\delta \tau_a = 2{,}37$;	$\tau_i = 8{,}0$;	$\beta = 1$	$0{,}95\ \lambda\delta$	$4{,}32\ T_s$

Vergröfsert man alle Zeitkonstanten auf das m-fache, so verlaufen die Regelungsvorgänge genau wie vorher, nur erfordern sämtliche entsprechenden Vorgänge die m-fache Zeit.

Versieht man einen Isodromregler mit einer Vorrichtung, durch die die Hauptmaschine einen (positiven oder negativen) Ungleichförmigkeitsgrad $i\delta$ erhält, so darf die Masse M_i der Isodromeinrichtung höchstens so grofs werden, dafs sie der Gleichung genügt

Digitized by Google

$$\frac{M_i}{k_i} < \frac{\beta}{i} T_i + \frac{\delta T_a T_s}{T_s + i \delta T_a}.$$

Für negatives i wird schon bei masseloser Isodromeinrichtung die Regelung labil, wenn der Absolutbetrag $i \gtrless \frac{\beta T_i^2}{\delta T_a (T_s + \beta T_i)}$.

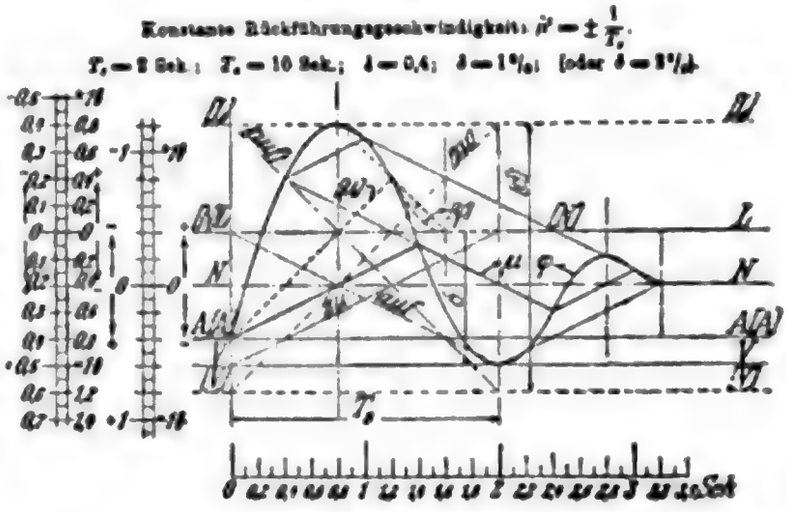
b) Regler mit unveränderlicher Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens.

Bei dieser Annahme kann die Verfolgung der Regelungsvorgänge nur zeichnerisch geschehen, da sich die Geschwindigkeit des Hülfsmotorkolbens sprungweise ändert, $\mu' = + \frac{1}{T_s}$ bei Umsteuerung des Hülfsmotors in $\mu' = - \frac{1}{T_s}$ überspringt. Die aus $\mu' = \pm \frac{1}{T_s}$ folgenden Geraden

$$\mu = \mu_0 \pm \frac{t}{T_s}$$

heifsen **Motorgerade;** ihre Ordinaten, gemessen von der der neuen Gleichgewichtslage entsprechenden Wagerechten NN, sind die Motorabweichungen μ, sie bedeuten die in jedem Augenblick eingestellte Füllung des Hauptmotors (Abb. 447).

Abb. 447.

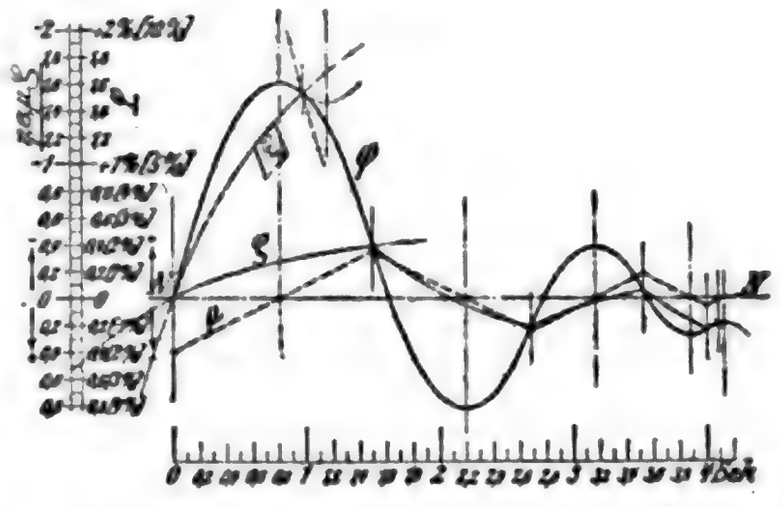


Die Rückführungsgleichung wird mit vorstehendem Wert von μ:

$$\zeta = C c^{-\frac{t}{T_i}} \pm \frac{\beta T_i}{T_s};$$

sie stellt eine logarithmische Linie dar, die für jede Periode nur eine andere Unveränderliche C aufweist; die ganze **Rückführungskurve** setzt sich also aus Stücken derselben logarithmischen Linie zusammen, die in wagerechter Richtung so verschoben sind, dafs (abwechselnd die konkave Seite nach unten und nach oben gerichtet) die Stücke ununterbrochen aneinandergereiht erscheinen (Abb. 448).

Abb. 448.



Bei starrer Rückführung fallen die Rückführungskurven und die Motorgeraden zusammen.

Die Motorgleichung lautet integriert:

$$\eta = \eta_0 + \frac{\eta_0}{T_a}\, t \pm \frac{1}{2\, T_a\, T_s}\, t^2;$$

sie stellt mit t als Abszissen und η als Ordinaten eine Parabel, die **Geschwindigkeitsparabel** dar; bei jedem Vorzeichenwechsel von σ, d. h. mit jeder neuen Periode, beginnt eine neue Geschwindigkeitsparabel, jedoch mit dem gleichen Parameter $p = T_a T_s$. Die ganze Geschwindigkeitslinie zeigt sich als stetig verlaufende Wellenlinie, die einzelnen Parabelstücke setzen sich ohne Knick aneinander.

Nach der Reglergleichung $T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta + \varphi = 0$ wird die **Reglerabweichung**

$$\eta = e^{\mu t}(C_1 \cos q_e t + C_2 \sin q_e t) - \frac{\varphi}{\delta} + A + Bt,$$

setzt sich also zusammen aus den Beträgen der Eigenschwingung des Reglers, aus dem der Geschwindigkeitsabweichung φ entsprechenden Betrage und aus einem mit der Zeit t linear veränderlichen Anteil. Die Aufzeichnung einer **η-Kurve** macht danach ziemliche Schwierigkeiten; man begnügt sich meist damit, einen masselosen Regler ($T_r = 0$ und $T_k = 0$) anzunehmen und erhält dann $\eta = -\frac{\varphi}{\delta}$; abgesehen von dem Faktor $-\frac{1}{\delta}$ werden η und φ identisch, d. h. die η-Kurve kann gleichzeitig als φ-Kurve dienen.

Mit Hülfe der η-Kurve und der Rückführungskurve läfst sich der Regelungsvorgang verfolgen: jedesmal wenn $\sigma = \eta - \zeta = 0$ wird, wird der Hülfsmotor umgesteuert, eine neue Periode beginnt in dem Augenblick, in dem sich die η-Kurve und die ζ-Kurve schneiden. Man reiht nun φ-Parabel, Motorgerade, η-Kurve und ζ-Kurve so lange aneinander, bis für $\sigma = 0$ η, μ und ζ den der anzustrebenden Gleichgewichtslage entsprechenden Wert annehmen.

Für den masselosen Regler mit starrer Rückführung beschränkt sich das Verfahren auf das Zeichnen einer Geschwindigkeitslinie (bestehend aus den φ-Parabeln) und der Motorgeraden (Abb. 447). Bei Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades δ behält man die φ-Linie bei, ändert nur den Mafsstab für η und gibt der μ-Linie (eigentlich wird $\mu\delta = \zeta\delta$ abgetragen) die entsprechende andere Neigung. Je gröfser δ, um so schneller wird hier die neue Gleichgewichtslage erreicht. Trägt man in die erste Geschwindigkeitsparabel alle Motorgeraden so ein, dafs sie sich zu einer ununterbrochenen Zickzacklinie zusammensetzen, so entsteht das Proellsche Diagramm.

Besonders nachteilig machen sich **Verzögerung der Verstellbewegung** (durch Spielräume in den Gelenken und Ueberdeckungen des Steuerkolbens) und die **Unempfindlichkeit des Reglers** bemerkbar, sind daher auf das kleinste Mafs zu beschränken. Infolge eines Unempfindlichkeitsgrades ε z. B. tritt eine bleibende Geschwindigkeitsschwankung $\pm \eta_b$ auf, die ε weit übertreffen kann:

$$2\,\eta_b = \left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta}\right)^2 \frac{T_s}{T_a},$$

die also besonders bei kleinen Ungleichförmigkeitsgraden und grofser Schlufszeit sehr grofs ausfällt, wenn nicht ε ganz aufserordentlich klein $\left(< \frac{1}{2}\,\eta_0\right)$ gemacht wird.

Digitized by Google

Anhang.

A. Münztafel.

GW. = Gold-, SW. = Silber-, DW. = Doppel-, PW. = Papierwährung.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	₰
Abessinien.	1 Maria-Theresien-Taler (Ber)	4	21
	1 Menelik-Tal. (Talari) zu 28,075 g 0,835 f. Silb. zu 16 Guerche	2	—
Afghanistan.	1 Tilla Gold	11	90
Aegypten. (GW.)	1 Sequin (ägypt. Pfd.) Gold zu 100 Piaster zu 10 Oschr-el-Gersch (7,4375 g Gold)	20	73
	1 Beutel zu 500 Piaster		
	1 Piaster (Tarif-, Regierungs-) zu 40 Para (Medini) zu 12 Gedid (Silber)	—	20 73
	1 Kurant-Piaster etwa $^1/_2$ Tarif-Piaster.		
Arabien.	1 Krusch zu 40 Diwani	1	67,5
	1 Mahmudi zu 20 Gafs	—	21,4
	1 Mokkataler zu 80 Cabir	3	53
	1 Maria-Theresien-Taler (Silberwert*)	2	73
Argentinien (GW. fakt. PW.)	1 Peso nacional (Gold) zu 100 Centavos	4	05
	1 Peso fuerte (früher)	2	53,5
	1 Papier-Peso offiziell = 0,44 Gold-Peso	1	73
	Goldstücke: 5 und $2^1/_2$ Pesos; Silberstücke: 1 Peso, 50, 20 und 10 Centavos.		
Belgien. (DW.)	Wie Frankreich.		
Bolivia. (GW.)	Im Umlauf hauptsächlich 20-Centavostücke, 5 enthalten 20,25 g f. Silb. statt 22,5 wie		
	1 Boliviano (Peso nacional) zu 100 Centavos	4	05
Brasilien (GW. fakt. PW.)	1 Gold-Peso zu 100 Centavos	4	05
	10 Milreis (Goldstück) = 8,216 g Gold	20	95
	1 Conto di Reis (Rechnungsmünze, Rs. 1:000 $ 000) = 1000 Milreis (Rs. 1 $ 000)	2003	75
	1 Milreis zu 1000 Reis Silber-Schm.		
	1 Cruzado zu 4 Tostoes zu 5 Vintem = $ 400 Silber-Schm.		
	1 Papiermilreis ∼ 12 Pence (1903)	1	02,1
Bulgarien u. Ostrumelien. (DW.)	1 Lew (Franc) zu 100 Stotinki	—	81
	Wenige eigene Goldmünzen, nur Silbermünzen und in Gold einlösbare Banknoten.		
Chile (GW. fakt. PW.)	1 Peso (nuevo) 20 g 0,835 f. Silb. zu 100 Centavos	1	5.
	1 Peso corriente	3	0.
	1 Colon zu 11,982 g, 1 Dublone zu 5,991 g, 1 Escudo zu 2,9955 g $^{11}/_{12}$ fein Gold = gesetzl. Goldmünzen, aber nicht im Umlaufe befindlich.		
China.** (SW.)	Man zahlt in Silber und Gold nach Gewicht (Taël).		
	1 Haikuan (Regierungs-)Taël = 1,114 Shangai- oder 1,1015 Swatau- oder 1,05 Tientsin-Taël usw., amtlich unter Zugrundelegung des längst nicht mehr bestehenden Gold-Silber-Verhältnisses 15,5:1	6	41
	1 Shangai-Taël hat 33,46 g f. Silber, mithin Wert von 1 Haikuan-Taël bei dem Preise: 1 Unze Standard-Silber = 23 Pence = 2,13 ℳ (1 kg f. Silber = 73,97 ℳ)	—	7
	Einzige Münze: Käsch (Li, Tangtsian, Sapek, Pitre; aus Kupfer und Zinn; 1600 bis 1700 Käsch = 1 Taël Silber		

*) Als Silberwert ist in der Tafel angenommen 25 Pence für 1 Unze Standard-Silber (s. Anm. auf folg. Seite). Londoner Börsenkurs im März 1914 ∼ 26,79 Pence Unze.

**) Das neue Währungsgesetz vom 8. Februar 1914 setzt die Silbervaluta fest u. bestimmt als Münzeinheit ein chinesisches Dollarstück, den Yan, mit etwa 24 g Reinsilber (also z. Z. etwa 2 ℳ Silberwert). Andere Silbermünzen: 50-, 20-, 10-Centstücke mit 10% Kupferbeimischung. Kupfermünzen 1- und 2 Cents. Nickelmünze von 5 Cent.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	Deutsche ₰
Columbia. (GW.)	1 Goldpeso zu 100 Cents	4	05
	1 Papierpeso (= $^1/_{100}$ Goldpeso)	—	04
Costarica. (GW.)	1 Colon = 0,7082 g f. Gold zu 100 Cents	1	95,4
	2-, 5-, 10-, 20-Colonstücke in Gold; 5-, 10-, 25-, 50-Centstücke in Silber.		
Cuba.	1 Peso = 0,6, 1 Peseta = 0,12, 1 Real = 0,06 $.		
Dänemark. (GW.)	10-Kronenstück = 4,03225 f. Gold	11	25
	1 Krone Silber zu 100 Oere	1	12,5
Westindien.	1 Taler (auch Dollar) zu 100 Schillinge (Cents) . . .	4	05 auch
	Seit 1905 GW. mit dem Franc als Münzeinheit.	4	19
Deutsches Reich.*) (GW.)	1 Mark (ℳ) zu 100 Pfennig (₰)	1	—
	1 Krone mit 3,5842 g f. Gold	10	—
	Bei $^9/_{10}$ Feingehalt wiegen 2511 Mark in Gold 1 kg (Rauhgewicht); dsgl. 180 Mark in Silber 1 kg.*)		
	In Gold: 20- u. 10-Markstücke von 8 u. 4 g Gewicht.		
	In Silber: 5-, 3-, 2-, 1-, $^1/_2$-Markstücke.		
	In Nickel: 25-, 10-, 5-Pfennigstücke.		
	In Kupferbronze: 2- und 1-Pfennigstücke.		
	Früher: 1 Taler = 30 Groschen zu 12 Pfennig . .	3	—
	7 Gulden süddeutsche Währung = 4 Taler.		
	1 kg f. Gold = 2790 Mark *)		
	In den Kolonien deutsche Reichswährung; auch die indische Rupie	1	36
Dominikanische Republik (GW. fakt. PW.)	1 Peso nacional (Gourde)	4	05
	Jetzt der nordamerikanische Golddollar Grundlage des Geldwesens.		
Ecuador. (GW.)	1 Condor mit 7,3224 g f. Gold zu 10 Sucré zu 100 Cents	20	43
Frankreich.**) (DW. fakt. GW.)	1 Franc = 20 Sous = 100 Centimes	—	81
	1 20 Francstück mit 5,806 g Gold ($^9/_{10}$ Feingehalt) .	16	20
	1 kg fein Gold = 3444,44 Francs | $\frac{\text{Gold}}{\text{Silber}} = 15{,}5$		
	1 kg fein Silber = 222,22 Francs /		
	3100 Frcs. Gold oder 40 silb. 5-Francstücke wiegen 1 kg.		
	In den Kolonien Franc-Währung, außerdem in		
Tunis.	1 Piaster (Sbiglen) zu 16 Karruben zu $3^1/_2$ Asper Silber	—	48,6
Vorderindien u. Cochinchina.	1 Goldpagode zu $3^1/_2$ Rupien zu 8 Fanous zu 24 Käsch	6	72
	1 Silberrupie	1	36
Indochina.	1 Piaster Silber (24,49 g f. Silb.), Silberwert 1,81 Mark	4	40
	1 Kwan zu 10 Mahs od. Mottien zu 60 Sapeks (Dong od. Peti).	—	85
	1 Schuck zu 10 Kwan (Tschutschu).		

*) Durch Einführung der Goldwährung in Deutschland (Münzgesetze vom 4. Dezember 1871 und 9. Juli 1873) ist das Marksilber zur Scheidemünze herabgesetzt und das frühere Wertverhältnis zwischen Gold und Silber 15,5 : 1 hinfällig geworden. Wenn heute die Börsennotiz in London für 1 (Troy-) Unze Standard-Silber (Feingehalt 0,925) z. B. 25 Pence ist (am 9. Juli 1873 war sie $60^7/_8$ Pence für 1 Unze; ferner ist 1 Unze = 31,103 496 g und 1 £ = 240 d = 20,43 Mark), so ist heute:

$$1\text{ kg Feinsilber} = \frac{1000 \cdot 25 \cdot 20{,}43}{31{,}1035 \cdot 0{,}925 \cdot 240} = 73{,}97\ \mathcal{M},\quad \text{oder Gold : Silber} = \frac{2790}{73{,}97} = 37{,}72 : 1.$$

Zur Ermittlung des **Goldwertes der Silbermünzen** würde also auf Grund des vorstehenden Kurses deren Silberwert mit 15,5 : 37,72 (= 25 d : $60^7/_8$ d) = 0,411 zu multiplizieren sein. Hiernach wäre z. B. der Wert von 3 Mark Silber = 1,23 Mark Gold.

Nach dem Münzgesetze brauchen von dem als Scheidemünze geltenden Marksilber ($^1/_2$-, 1-, 2-, 3-, und 5-Markstücke) jedesmal nur für 20 Mark, von Nickel- und Kupfermünzen nur für 1 Mark in Zahlung angenommen zu werden. – In 200 Mark Silber ist 1 kg fein Silber enthalten.

**) Frankreich steht in Münzunion mit Italien, Belgien, Griechenland und der Schweiz; diese Vereinigung wird lateinische Münzunion genannt; auch Luxemburg hat Franc-Währung.

Digitized by Google

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	₰
Frankreich.			
Westindien.	100 Francs westind.-franz. Kurant = 54,054 Francs franz.	43	78,3
Réunion.	1 Piaster zu 100 Cents	4	05
Madagaskar.	Maria-Theresien-Taler, ferner 1 Farasana = 5 Francs	4	05
Neukaledonien und Tahiti.	1 Fünf-Francstück	4	05
	1 Piaster	3	76
Griechenland. (DW. fakt. PW.)	1 Neudrachme zu 100 Lepta	—	81
	1 Altdrachme zu 100 Lepta	—	72,5
	1 20-Drachmenstück mit 5,8064 g Gold	16	20
Großbritannien. (GW.)	1 Pfund Sterling od. 1 Sovereign (£) mit 7,3224 g Gold zu 20 Shilling (s)	20	43
	1 Guinee zu 21 s	21	45
	1 Shilling = 12 Pence (deniers, d) zu 4 Farthings. Silberscheidemünzen: 1 Shilling = 94 Pf, Kronen zu 5, Florins zu 2 s; sixpence, fourpence, threepence zu 6, 4, 3 d.	1	02
	1 Troypfund Standard-(Münz-)Gold enthält 11 Unzen fein Gold = 46 £ 14,5 s, also ein Troypfund (12 Unzen) fein Gold = 50 £ 19 s.		
Cypern.	9 Kupferpiaster = 1 s.		
Indien.	1 Pfund Sterling zu 15 Rupien gesetzl. Zahlungsmittel		
	1 Rupie (10,692 g fein Silber) zu 16 Annas zu 12 Pie (oder 4 Pice) gesetzl. = 1 s 4 d	1	36
	1 Crore zu 4 Arebs zu 25 Lacs zu 100 000 Rupien = 10 Mill. Rupien.		
	1 Mohur mit 10,69 g Gold zu 15 Rupien (nominell) ∼	29	83
	1 10-Rupienstück = 2 5-Rupienstücke in Gold	19	89
Australien.	Englisches Geld.		
Kanada.	1 Dollar (franz. Piastre) Kurant zu 100 Cents (franz. Centins)	4	19,8
	1 Sovereign = 4,86 $.		
	1 Dollar	4	24
	Englisches Geld fast gar nicht im Umlauf. Außer kanadischem recht viel aus den Vereinigten Staaten als gleichwertig erachtet.		
Westindien.	Engl. Währung ohne Begrenzung der Zahlkraft von Silbergeld. Es kursieren Schillinge, Golddollar, Golddublonen (zu 64 s).		
Honduras.	1 Peso von Guatemala	4	05
Afrika.	Engl. Geld; in Mauritius 1 indische Rupie	1	36
Sansibar.	1 Nordamerik. Dollar zu 2 Nusu zu 2 Ruba	4	19
	1 Rupie	1	36
	außerdem Maria-Theresien-Taler (Januario).		
Guatemala. (SW. fakt. PW.)	1 Peso zu 100 Cents	4	05
	1 Papierpeso ∼	—	64
Haiti. (DW. fakt. PW.)	1 Gourde zu 100 Cents	4	05
	Silberwert	1	85
	100 Gold-Gourde = 258 Papier-Gourde (1903)		
Honduras. (SW.)	1 Dollar zu 8 Reales oder 100 Cents (Silberwert 1,85 ℳ)	4	05
Italien. (DW. fakt. GW.)	1 Lire (= 1 Franc) zu 100 Centesimi	—	81
	1 Scudo zu 5 Lire. 1 20-Lirestück mit 5,8064 g Gold	16	20
Libyen.	1 Mahbub (faktisch 1,39 ℳ)	3	20
Erythräa.	1 Erythräischer Taler = 5 Francs	4	05
	1 Maria-Theresien-Taler (Silberwert 1,73 ℳ)	4	21

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	₰
Japan. (GW.)	1 Goldyen zu 100 Sen zu 10 Rin	2	08
	Goldstücke: 5, 10 (7,4999 g Gold), 20 Yen. Silberstücke: 10, 20, 50 Sen. Nickelstücke: 5 Sen; Kupferstücke: 1 und 5 Rin.		
Korea. (GW.)	1 Golddollar = 1 Yen = 2 alte Silberdollar zu 100 Nickelcents . . . . . ∼	1	—
Luxemburg.	Französische, niederländische, deutsche Münzen. Eigene Landesmünzen zu 10 und 5 Centimes.		
Marokko. (SW.)	1 Piaster (26,2 g f. Silber) zu 10 Unzen od. 100 Centavos (Silberwert 1,94 ℳ)	4	72
Mexiko. (SW.)	1 Peso (Dollar) zu 100 Centavos (24,438 g f. Silber gesetzlich = 0,75 g f. Gold)	2	02
	Goldmünzen zu 5 und 10 Peso (3,75 und 7,5 g f. Gold = 10,5 und 21 ℳ). Silbermünzen: 50, 20, 10 Centavos. Nickelmünzen: 5 Centavos; Bronzemünzen: 2 und 1 Centavo.		
Montenegro.	Oesterreichische, türkische, russische Münzen.		
Nicaragua. (SW.)	1 Peso zu 100 Cents (Silberwert ∼ 1,55 ℳ) . . .	4	05
	1 Papier-Peso	—	58—63
Niederlande. (GW.)	1 Gulden zu 100 Cents	1	68,7
	1 Tientje (Willemsdor) zu 10 Gulden (6,048 g Gold) .	16	87
	In den Kolonien außerdem altspanische Piaster gesetzlich = 2,5 fl. holl., mexikanische Pesos gesetzlich = 2,55 fl. holl., Rupien.		
Norwegen. (GW.)	1 Krone zu 100 Öre	1	12,5
	1 20-Kronenstück (8,0645 g Gold)	22	50
Oesterreich-Ungarn. (GW.)	1 Krone zu 100 Heller = 50 Kreuzer	—	85
	1 Gulden ö. W. zu 100 Kreuzer	1	7[illegible]
	1 Gold-Gulden = 2 Kronen 38 Heller	2	02,5
	Goldmünzen: 20 Kronen (6,0975 g Gold) und 10 Kronen; Silbermünzen: 5, 2, 1 Krone (aus 1 kg 0,835 f. Silber 200 1-Kronenstücke mit 4,175 g Fein- od. 5 g Rauhgewicht); Nickelmünzen: 20 und 10 Heller; Bronzemünzen: 2 und 1 Heller; Handelsmünzen:		
	1 Dukaten (3,442 g Gold)	9	60
	1 Maria-Theresien-(Levantiner-)Taler = 23,3723 g Silber.		
Panama. (GW.)	1 Gold-Balboa 1,5048 g f. Gold = 1 $.	4	19
Paraguay. (PW.)	1 Peso zu 100 Centavos oder 8 Reales zu 4 Cuartilos in Gold (Oro, $)	4	05
	1 Peso fuerte, Papier . . . . . ∼	—	40
Persien. (SW.)	1 Toman zu 10 Neukran zu 10 Senaar zu 10 Bisti zu 10 Dinar	8	20
	1 Gold-Toman (2,5536 g f. Gold), nicht im Verkehr.	7	14
	1 Silber-Kran 4,14 g f. Silber.		
Peru. (GW.)	1 Peruanisches Pfd. (7,3224 g Gold) zu 10 Sol . . .	20	43
	1 Sol (Silber) zu 10 Dinaros zu 10 Centavos (Centimos) gesetzlich = 2 Sh.	2	04,3
Portugal. (GW. fakt. PW.)	1 Krone (16,257 g Gold) zu 10 Milreis ($) = 10 000 Reis (Reulen)	45	36
	1 Conto (Rechnungsmünze) = 1000 $.		
	1 Tostao (Silber) zu 100 Reis = 41,2 Pf., gerechnet zu	—	43,36
	1 Crusado meist = 480 Reis.		
Guinea.	1 Makuta zu 50 Reis (1½ m Leinwand)	—	32,5
Mozambique.	Minderwertige Milreisstücke . . . . . 2,7 ℳ bis	3	68
Goa.	1 Silberrupie	1	36

Digitized by Google

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche ℳ	₰
Portugal. Macao.	1 mexikan. Piaster zu 640 Reis.		
Timor.	1 holl. Gulden zu 360 Reis.		
Rumänien. (GW.)	1 Leŭ zu 100 Bani	—	81
	1 Carold'or zu 20 Leï (5,8064 g Gold)	16	20
Rußland. (GW.)	1 Imperial (11,6135 g Gold) zu 15 Rubel	32	40,17
	Goldstücke: 10 und 5 Rubel (10,80 bzw. 21,60 ℳ)		
	1 Rubel (17,9961 g Silber) zu 100 Kopeken gesetzl.	2	16
	100 Rubel Papier ∼	216	15
Finnland (GW.)	1 Mark zu 100 Penni (3100 aus 1 kg $^9/_{10}$ Gold)	—	81
	20- und 10-Markstücke in Gold (16,20 und 8,10 ℳ)		
Chiwa. Buchara.	Russisches Papiergeld.		
	1 Tilla Gold zu 21 (in Chiwa 28) Tangas (Silber) zu 44 Pulli (Kupfer)	11	90
Schweden. (GW.)	1 Krona zu 100 Oere	1	12,5
	1 20-Kronenstück (8,0645 g Gold)	22	50
Schweiz. (DW. fakt. GW.)	1 Franc zu 100 Centimes (Rappen)	—	81
	1 20-Francstück (5,8064 g Gold)	16	20
Serbien. (DW.)	1 Dinar zu 100 Para (Silber)	—	81
	1 20-Dinarstück (5,806 g Gold)	16	20
Siam.	1 Tikal (Bat) Silber (13,56 g f.) zu 4 Salungs zu 2 Fuangs zu 2 Songpai zu 2 Pai zu 2 Att zu 2 Lot (Silberwert 1,08 ℳ)	2	49
	10-Tikalstücke 6 g 20 f. Gold.		
Spanien. (DW. fakt. PW.)	1 Peseta zu 100 Centimos	—	81
	1 Duro nuevo (5-Silberpeseta)	4	05
	1 Papierpeseta	—	64
	Goldstücke: 20 Peseta (5,8064 g Gold), 10 und 5		
	Silberstücke: 5 und 1 Peseta.		
Türkei. (GW.)	1 türk. Piaster (Gersch) zu 40 Para zu 3 Asper (oder zu 100 Cents) nominell in Gold	—	18,44
	1 Medschidie (türk. Lira, türk. Pfund, Jüslik) zu 100 Piaster (6,615 g Gold)	18	44
	1 Beutel zu 500 Piaster	92	20
	1 Medschidie Silber (19,966 g f. Silber) zu 20 Piaster, Silberwert etwa 1,50 ℳ, seit 1880 = 19 Goldpiaster	3	40
	In Kleinasien und Afrika:		
	1 türk. Pfund = 127, 135 und 140 minderwert. Silberpiaster.		
Uruguay. (GW.)	1 Goldpeso (1,55615 g Gold) zu 100 Centimos	4	34,17
Venezuela. (DW.)	1 Bolivar zu 100 Cents	—	81
	1 Venezolano oder Peso zu 5 Bolivar	4	05
Vereinigte Staaten von Nord-Amerika. (GW.)	1 Dollar ($) zu 100 Cents (c) = 1,672 g Münzgold $^9/_{10}$ f. = 23,22 Gran f. Gold	4	19,8
	Goldstücke: 20 $ (Doppel-Eagle), 10 $ (Eagle), 5, $2^1/_2$ und 1 $.		
	Silberstücke: 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_{10}$ Dollar.		
	Nickelstücke zu 5, Bronzestücke zu 1 cent.		
	1 neuer Sovereign = 4 $ $80^1/_2$ c.		
	1 abgenutzter = 4 $ $85^9/_{10}$ c.		
Philippinen.	1 Philippino Peso ($) = 50 cents	2	10

Umrechnungssätze an der Berliner Börse, Mai 1914: 1 Fr., Lire, Leŭ, Peseta: 80 Pf. — Oest. 1 fl. Gold: 2 ℳ, Währ.: 1,10, 1 Kr.: 0,85. — 7 fl. südd.: 12. — 1 fl. holl.: 1,70. — 1 M. Banco: 1,50. — 1 Kr.: $1,12^1/_2$. — 1 Rbl.: 2,16, 1 Gold-Rbl.: 3,20. — 1 Peso: 4. — 1 Doll. 4,20. — 1 Lstrl.: 20,40 ℳ.

Digitized by Google

B. Vergleich der Mafse verschiedener Länder mit dem metrischen Mafs.

	Preufsen,*) Dänemark. 1 F. = 12 Z.	Bayern. 1 F. = 12 Z.	Sachsen. 1 F. = 12 Z.	Württemberg. 1 F. = 10 Z.	Baden, Schweiz. 1 F. = 10 Z.	Oesterreich.*) 1 F. = 12 Z.	England,*) Rufsland. 1 F. = 12 Z.	Schweden. 1 F. = 10 Z.	Frankreich.*) 1 Par. F. = 12 Z.
	1. Fufse.								
	1 Meter = n Fufs.								
n	3,1862	3,4263	3,5312	3,4905	3,3333	3,1637	3,2809	3,3681	3,0784
	1 Fufs = $1/n$ Meter.								
$1/n$	0,3139	0,2919	0,2832	0,2865	0,3000	0,3161	0,3048	0,2969	0,3248
	2. Quadrat-Fufse.								
	1 Quadrat-Meter = n Quadrat-Fufs.								
n	10,152	11,740	12,469	12,184	11,111	10,008	10,764	11,344	9,4768
	1 Quadrat-Fufs = $1/n$ Quadrat-Meter.								
$1/n$	0,0985	0,0852	0,0802	0,0821	0,0900	0,0999	0,0929	0,0882	0,1055
	3. Kubik-Fufse.								
	1 Kubik-Meter = n Kubik-Fufs.								
n	32,346	40,224	44,032	42,528	37,037	31,660	35,317	38,208	29,174
	1 Kubik-Fufs = $1/n$ Kubik-Meter.								
$1/n$	0,0309	0,0249	0,0227	0,0235	0,0270	0,0316	0,0283	0,0262	0,0343

	Preufsen. 1 R. = 12 F.	Bayern. 1 R. = 10 F.	Sachsen. 1 R. = 15⅛ F.	Württemberg. 1 R. = 10 F.	Baden, Schweiz. 1 R. = 10 F.	Oesterreich. 1 Klafter = 6 F.	England. 1 R. (pole) = 16,5 F.	Rufsland. 1 Faden (Saschehn) = 7 F.	Frankreich. 1 Toise = 6 F.
	4. Ruten.								
	10 Meter = n Ruten (Klafter, Faden, Toisen).								
n	2,6552	3,4263	2,3283	3,4905	3,3333	5,2726	1,9884	4,6870	5,1307
	1 Rute (Klafter, Faden, Toise) = $10/n$ Meter.								
$10/n$	3,7662	2,9186	4,2950	2,8649	3,0000	1,8965	5,0291	2,1336	1,9490
	5. Quadrat-Ruten.								
	1 Ar (100 Quadrat-Meter) = n Quadrat-Ruten usw.								
n	7,0499	11,740	5,4208	12,184	11,111	27,800	3,9538	21,968	26,324
	1 Quadrat-Rute usw. = $100/n$ Quadrat-Meter.								
$100/n$	14,185	8,5181	18,447	8,2077	9,0000	3,5971	25,292	4,5521	3,7987
	6. Kubik-Ruten.								
	1000 Kubik-Meter = n Kubik-Ruten usw.								
n	18,719	40,223	12,621	42,527	37,037	146,58	7,8618	102,96	135,06
	1 Kubik-Rute usw. = $1000/n$ Kubik-Meter.								
$1000/n$	53,423	24,861	79,233	23,515	27,000	6,8224	127,20	9,7123	7,4039

*) Mit Linie (‴) bezeichnet man im Duodezimalsystem den 12. Teil des Zolles (″) im Dezimalsystem den 10. Teil.

Digitized by Google

7. Meilen.

1 Aequ.-Gr. = 111307 km. 1 durchschnittlicher Meridiangrad = 60 Seemeilen = $^1/_{90}$ des Meridianquadranten = 111,120 km.

	Geograph. Meile 15 = 1 Aequ.-Gr.	Preußen. 1 Mile = 24000 F.	Baden. 1 Meile = 29629,6 F.	Oesterreich. 1 Mile = 24000 F.	Schweiz. 1 Wegstunde = 16000 F.	Franz. Seemeile (lieue marine) = $^1/_3$ Myriameter.	Engl. Seemeile = 6080 F. Vgl. II. Bd. S. 715.	Engl. Landmeile (Statute Mile) = 5280 F.	Rußland. 1 Werst = 500 Sashehn.
	1 Kilometer = n Meilen (Seemeilen, Wegstunden, Werst).								
n	0,1348	0,1328	0,1125	0,1318	0,2083	0,1800	0,5396	0,6214	0,9374
	1 Meile usw. = $1/n$ Kilometer.								
$1/n$	7,4204	7,5325	8,8890	7,5859	4,8000	5,5556	1,8532	1,6093	1,0668

8. Feldmaße.

	Preußen. 1 Morgen = 180 Qu.-Ruten.	Bayern. 1 Tagewerk = 400 Qu.-Ruten.	Sachsen. 1 Acker = 300 Qu.-Ruten.	Württemberg. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Baden. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Oesterreich. 1 Wiener Joch = 300 Qu.-Ruten.	England. 1 Acre = 160 Qu.-Ruten.	Rußland. Dessätine = 2400 Qu.-Sashehn.
	1 Hektar = n Morgen (Tagewerke usw.).							
n	3,9166	2,9349	1,8069	3,1729	2,7778	1,7377	2,4711	0,9153
	1 Morgen (Tagewerk usw.) = $1/n$ Hektar.							
$1/n$	0,2553	0,3407	0,5534	0,3152	0,3600	0,5755	0,4047	1,0925

9. Flüssigkeitsmaße.

	Preußen. 1 Quart = 64 Kub. Z.	Bayern. 1 Maßkanne = 0,043 Kub. F.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne = 71,186 Kub. Z.	Württemberg. 1 Hellelehnmaß = 78,125 Kub. Z.	Baden. 1 Maß = 0,05556 Kub. F.	Oesterreich. 1 Maß = 0,0448 Kub. F.	Rußland. 1 Krutschka (Stoof) = 75,057 Kub. Z.	England. *) 1 Imp. Gallon = 277,2738 Kub. Z.	Amerika. 1 altengl. Gallon = 231 Kub. Z.
	1 Liter = n Quart (Kannen usw.).								
n	0,8733	0,9354	1,0688	0,5444	0,6667	0,7068	0,8131	0,2201	0,2642
	1 Quart (Kanne usw.) = $1/n$ Liter.								
$1/n$	1,1450	1,0690	0,9356	1,8371	1,5000	1,4147	1,2299	4,5435	3,7852

10. Getreidemaße.

	Preußen. 1 Scheffel = 8072 Kub. Z.	Bayern. 1 Scheffel = 208 Maßkannen.	Sachsen. 1 Dresd. Scheffel = 7900 Kub. Z.	Württemberg. 1 Scheffel = 7647 Kub. Z.	Baden. 1 Malter = 150 Maß.	Oesterreich. 1 Wiener Metze = 1,9471 Kub. F.	England. *) 1 Quarter = 8 Gallonen.	Rußland. 1 Tschetwerik = 1001,2 Kub. Z.	Schweden. 1 Spann = 25 Kannen.
	1 Hektoliter = n Scheffel (Malter usw.).								
n	1,8194	0,4497	0,9631	0,5642	0,6667	1,6264	2,7512	3,8113	1,3646
	1 Scheffel (Malter usw.) = $1/n$ Hektoliter.								
$1/n$	0,5496	2,2236	1,0383	1,7723	1,5000	0,6149	0,3635	0,2624	0,7328

*) Vgl. die Fußnote S. 997.

Digitized by Google

11. Verwandlung des preufsisches Mafses in Metermafs.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	cbm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	cm	qcm	ccm
1	0,31385	0,09850	0,03092	1	2,6154	6,8406	17,891
2	0,6277	0,19701	0,06183	2	5,2309	13,681	35,782
3	0,9415	0,29551	0,09275	3	7,8463	20,522	53,673
4	1,2554	0,39402	0,12366	4	10,462	27,362	71,564
5	1,5693	0,49252	0,15458	5	13,077	34,203	89,456
6	1,8831	0,59102	0,18549	6	15,693	41,043	107,35
7	2,1970	0,68953	0,21641	7	18,308	47,884	125,24
8	2,5108	0,78803	0,24733	8	20,924	54,724	143,13
9	2,8247	0,88654	0,27824	9	23,539	61,565	161,02

12. Verwandlung des Metermafses in preufsisches Mafs.

m, qm, cbm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,1862	38,234	10,152	1461,9	32,346	55894
2	6,3724	76,469	20,304	2923,7	64,692	111787
3	9,5586	114,703	30,456	4385,6	97,038	167681
4	12,7448	152,938	40,607	5847,5	129,384	223575
5	15,9310	191,172	50,759	7309,3	161,729	279468
6	19,1172	229,406	60,911	8771,2	194,075	335362
7	22,3034	267,640	71,063	10233,1	226,421	391256
8	25,4896	305,875	81,215	11695,0	258,767	447150
9	28,6758	344,109	91,367	13156,8	291,113	503043

13. Verwandlung des englischen Mafses in Metermafs.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	cbm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	cm	qcm	ccm
1	0,304794	0,092900	0,028315	1	2,5400	6,4514	16,386
2	0,609589	0,185799	0,056631	2	5,0799	12,9028	32,772
3	0,914383	0,278699	0,084946	3	7,6199	19,3542	49,159
4	1,219178	0,371599	0,113261	4	10,1598	25,8055	65,545
5	1,523972	0,464498	0,141577	5	12,6998	32,2569	81,931
6	1,828767	0,557398	0,169892	6	15,2397	38,7083	98,317
7	2,133561	0,650298	0,198207	7	17,7797	45,1597	114,703
8	2,438356	0,743197	0,226522	8	20,3196	51,6111	131,089
9	2,743150	0,836097	0,254838	9	22,8596	58,0625	147,476

14. Verwandlung des Metermafses in englisches Mafs.

m, qm, cbm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,2809	39,3708	10,7643	1550,06	35,3166	61027,1
2	6,5618	78,7416	21,5286	3100,12	70,6332	122054,1
3	9,8427	118,1124	32,2929	4650,18	105,9498	183081,2
4	13,1236	157,4832	43,0572	6200,24	141,2664	244108,2
5	16,4045	196,8540	53,8215	7750,30	176,5830	305135,3
6	19,6854	236,2247	64,5858	9300,35	211,8996	366162,3
7	22,9663	275,5955	75,3501	10850,41	247,2162	427189,4
8	26,2472	314,9663	86,1144	12400,47	282,5328	488216,4
9	29,5281	354,3371	96,8787	13950,53	317,8494	549243,5

Digitized by Google

15. Verwandlung von Schachtruten in Kubik-Fuß und Kubik-Meter, und umgekehrt.*)

1 Schachtrute = 144 Kubik-Fuß = 4,4519 cbm.

Schtr.	Kub. F.	cbm	Schtr.	Kub. F.	cbm	Schtr.	Kub. F.	cbm	Schtr.	Kub. F.	cbm
1/144	1	0,031	19/48	57	1,763	1	144	4,452	46	6624	204,79
1/72	2	0,062	5/12	60	1,855	2	288	8,904	47	6768	209,24
1/48	3	0,093	7/16	63	1,948	3	432	13,356	48	6912	213,69
1/36	3 2/3	0,111	4/9	64	1,979	4	576	17,808	49	7056	218,14
1/36	4	0,124	11/36	66	2,040	5	720	22,260	50	7200	222,59
1/30	4 4/5	0,148	17/48	68	2,102	6	864	26,711	51	7344	227,05
1/28	5 1/7	0,159	23/64	69	2,134	7	1008	31,163	52	7488	231,50
1/24	6	0,185	1/2	72	2,226	8	1152	35,615	53	7632	235,95
1/20	7 1/5	0,223	25/48	75	2,319	9	1296	40,067	54	7776	240,40
1/18	8	0,247	19/36	76	2,350	10	1440	44,519	55	7920	244,85
1/16	9	0,278	13/24	78	2,412	11	1584	48,971	56	8064	249,31
3/72	10	0,309	5/8	80	2,473	12	1728	53,423	57	8208	253,76
1/12	11 1/12	0,342	9/16	81	2,504	13	1872	57,875	58	8352	258,21
1/12	12	0,371	7/12	84	2,597	14	2016	62,327	59	8496	262,66
1/11	13 1/11	0,405	3/5	86 2/5	2,671	15	2160	66,779	60	8640	267,11
1/10	14 2/5	0,445	29/48	87	2,690	16	2304	71,230	61	8784	271,57
1/9	16	0,494	11/18	88	2,722	17	2448	75,682	62	8928	276,02
2/17	16 16/17	0,524	5/8	90	2,782	18	2592	80,134	63	9072	280,47
1/8	18	0,556	23/36	92	2,844	19	2736	84,586	64	9216	284,92
1/8	20	0,618	31/48	93	2,875	20	2880	89,038	65	9360	289,37
1/7	20 4/7	0,636	2/3	96	2,968	21	3024	93,490	66	9504	293,83
7/48	21	0,649	11/18	99	3,061	22	3168	97,942	67	9648	298,28
3/20	21 3/5	0,668	25/36	100	3,092	23	3312	102,39	68	9792	302,73
1/6	24	0,742	7/10	100 4/5	3,116	24	3456	106,85	69	9936	307,18
2/11	26 2/11	0,809	17/24	102	3,153	25	3600	111,30	70	10080	311,63
3/16	27	0,835	13/18	104	3,215	26	3744	115,75	71	10224	316,08
7/36	28	0,865	35/48	105	3,246	27	3888	120,20	72	10368	320,55
1/5	28 4/5	0,890	3/4	108	3,339	28	4032	124,65	73	10512	324,99
5/24	30	0,927	37/48	111	3,432	29	4176	129,10	74	10656	329,44
2/3	32	0,989	7/8	112	3,463	30	4320	133,56	75	10800	333,89
11/48	33	1,020	19/24	114	3,525	31	4464	138,01	76	10944	338,34
1/4	36	1,113	29/36	116	3,586	32	4608	142,46	77	11088	342,80
13/48	39	1,206	13/16	117	3,617	33	4752	146,91	78	11232	347,25
5/16	40	1,237	5/6	120	3,710	34	4896	151,36	79	11376	351,70
5/7	42 1/7	1,272	41/48	123	3,803	35	5040	155,82	80	11520	356,15
7/24	42	1,298	31/36	124	3,834	36	5184	160,27	81	11664	360,60
3/10	43 1/5	1,336	7/8	126	3,895	37	5328	164,72	82	11808	365,05
11/36	44	1,360	5/6	128	3,957	38	5472	169,17	83	11952	369,51
5/16	45	1,391	43/48	129	3,988	39	5616	173,62	84	12096	373,96
1/3	48	1,484	11/12	132	4,081	40	5760	178,08	85	12240	378,41
25/72	50	1,546	15/16	135	4,174	41	5904	182,53	86	12384	382,86
17/48	51	1,577	17/18	136	4,205	42	6048	186,98	87	12528	387,31
13/36	52	1,608	23/24	138	4,267	43	6192	191,43	90	12960	400,67
5/8	54	1,670	29/36	140	4,328	44	6336	195,88	95	13680	422,93
7/18	56	1,731	47/48	141	4,359	45	6480	200,34	100	14400	445,19

*) Diese Tafel kann auch zur Verwandlung der Quadrat-Zolle in Quadrat-Fuße, ferner der Quadrat-Fuße in Quadrat-Ruten, und umgekehrt, benutzt werden. Z. B.: 6040 Qu.Z. = 35 Q.F.; 112 Q.F. = 7/9 Q.Rt.; 69 1/9 Q.Rt. = 9936 + 48 = 9984 Q.F.

Digitized by Google

16. Verwandlung von preufsischen Zollen in Millimeter.

Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 preufs. Zoll = 26,1545 mm

Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Zoll
0	0.00	1,63	3.27	4,90	6,54	8,17	9.81	11,44	13,08	14,71	16,35	17,98	19.62	21,25	22,89	24,52	0
1	26,15	27,79	29,42	31,06	32,69	34.33	35,96	37,60	39,23	40,87	42,50	44,14	45.77	47,40	49.04	50,67	1
2	52.31	53.94	55,58	57.21	58.85	60,48	62,12	63,75	65,39	67,02	68,66	70,29	71,93	73,56	75,19	76,83	2
3	78.46	80,10	81,73	83,37	85,00	86,64	88,27	89 91	91,54	93,18	94,81	96,45	98,08	99,71	101,35	102,98	3
4	104,62	106,25	107,89	109,52	111,16	112,79	114,43	116,06	117,70	119.33	120,96	122,60	124,23	125,87	127.50	129,14	4
5	130.77	132,41	134.04	135,68	137,31	138,95	140,58	142.21	143,85	145.48	147,12	148,75	150.39	152,02	153,66	155,29	5
6	156,93	158,56	160,20	161,83	163.47	165,10	166.73	168.37	170,00	171,64	173,27	174,91	176,54	178,18	179,81	181,45	6
7	183,08	184,72	186.35	187,99	189.62	191,25	192.89	194,52	196,16	197,79	199,43	201,06	202,70	204,33	205,97	207,60	7
8	209,24	210,87	212,50	214,14	215,77	217,41	219,04	220,68	222,31	223,95	225,58	227,22	228,85	230,49	232,12	233,76	8
9	235,39	237,02	238,66	240,29	241,93	243,56	245,20	246,83	248,47	250,10	251,74	253,37	255,01	256,64	258,28	259,91	9
10	261,54	263,18	264,81	266,45	268,08	269,72	271,35	272,99	274,62	276,26	277,89	279,53	281,16	282,80	284,43	286,06	10
11	287,70	289.33	290,97	292,60	294,24	295,87	297,51	299.14	300,78	302,41	304,05	305,68	307,31	308,95	310.58	312,22	11
12	313,85	315.49	317,12	318,76	320,39	322,03	323,66	325,30	326.93	328.57	330,20	331,83	333,47	335,10	336,74	338,37	12
13	340,01	341,64	343,28	344,91	346,55	348,18	349,82	351,45	353,09	354,72	356,35	357,99	359,62	361,26	362,89	364,53	13
14	366,16	367,80	369,43	371,07	372,70	374,34	375.97	377,60	379,24	380,87	382,51	384,14	385,78	387,41	389,05	390,68	14
15	392,32	393,95	395,59	397,22	398,86	400,49	402,12	403,76	405,39	407,03	408,66	410,30	411,93	413,57	415,20	416,84	15
16	418,47	420,11	421,74	423,38	425,01	426,64	428,28	429,91	431,55	433,18	434,82	436,45	438,09	439,72	441,36	442,99	16
17	444,63	446,26	447,90	449,53	451,16	452,80	454,43	456,07	457,70	459,34	460,97	462,61	464,24	465,88	467,51	469,15	17
18	470,78	472,41	474,05	475,68	477,32	478,95	480,59	482,22	483,86	485,49	487,13	488,76	490,40	492,03	493,67	495,30	18
19	496,93	498,57	500,20	501,84	503,47	505,11	506,74	508,38	510,01	511,65	513,28	514,92	516,55	518,19	519,82	521,45	19
20	523,09	524,72	526,36	527,99	529,63	531,26	532,90	534,53	536,17	537,80	539,44	541,07	542,71	544,34	545,97	547,61	20
21	549,24	550.88	552,51	554,15	555,78	557,42	559,05	560,69	562,32	563,96	565,59	567,22	568,86	570,49	572,13	573,76	21
22	575,40	577,03	578,67	580,30	581,94	583,57	585,21	586,84	588,48	590,11	591,74	593,38	595,01	596,65	598,28	599,92	22
23	601,55	603,19	604,82	606,46	608,09	609,73	611,36	613,00	614,63	616,26	617,90	619,53	621,17	622,80	624,44	626,07	23
24	627,71	629,34	630,98	632,61	634,25	635,88	637,51	639,15	640,78	642,42	644,05	645,69	647,32	648,96	650,59	652,23	24

Digitized by Google

25	653,86	655,50	657,13	658,77	660,40	662,03	663,67	665,30	666,94	668,57	670,21	671,84	673,48	675,11	676,75	678,38	25
26	680,02	681,65	683,29	684,92	686,55	688,19	689,82	691,46	693,09	694,73	696,36	698,00	699,63	701,27	702,90	704,54	26
27	706,17	707,81	709,44	711,07	712,71	714,34	715,98	717,61	719,25	720,88	722,52	724,15	725,79	727,42	729,06	730,69	27
28	732,32	733,96	735,59	737,23	738,86	740,50	742,13	743,77	745,40	747,04	748,67	750,31	751,94	753,58	755,21	756,84	28
29	758,48	760,11	761,75	763,38	765,02	766,65	768,29	769,92	771,56	773,19	774,83	776,46	778,10	779,73	781,36	783,00	29
30	784,63	786,27	787,90	789,54	791,17	792,81	794,44	796,08	797,71	799,35	800,98	802,61	804,25	805,88	807,52	809,15	30
31	810,79	812,42	814,06	815,69	817,33	818,96	820,60	822,23	823,87	825,50	827,13	828,77	830,40	832,04	833,67	835,31	31
32	836,94	838,58	840,21	841,85	843,48	845,12	846,75	848,39	850,02	851,65	853,29	854,92	856,56	858,19	859,83	861,46	32
33	863,10	864,73	866,37	868,00	869,64	871,27	872,91	874,54	876,17	877,81	879,44	881,08	882,71	884,35	885,98	887,62	33
34	889,25	890,89	892,52	894,16	895,79	897,42	899,06	900,69	902,33	903,96	905,60	907,23	908,87	910,50	912,14	913,77	34
35	915,41	917,04	918,68	920,31	921,94	923,58	925,21	926,85	928,48	930,12	931,75	933,39	935,02	936,66	938,29	939,93	35
36	941,56	943,20	944,83	946,46	948,10	949,73	951,37	953,00	954,64	956,27	957,91	959,54	961,18	962,81	964,45	966,08	36
37	967,71	969,35	970,98	972,62	974,25	975,89	977,52	979,16	980,79	982,43	984,06	985,70	987,33	988,97	990,60	992,23	37
38	993,87	995,50	997,14	998,77	1000,4	1002,0	1003,7	1005,3	1006,9	1008,6	1010,2	1011,9	1013,5	1015,1	1016,8	1018,4	38
39	1020,0	1021,7	1023,3	1024,9	1026,6	1028,2	1029,8	1031,5	1033,1	1034,7	1036,4	1038,0	1039,6	1041,3	1042,9	1044,5	39
40	1046,2	1047,8	1049,4	1051,1	1052,7	1054,4	1056,0	1057,6	1059,3	1060,9	1062,5	1064,2	1065,8	1067,4	1069,1	1070,7	40
41	1072,3	1074,0	1075,6	1077,2	1078,9	1080,5	1082,1	1083,8	1085,4	1087,0	1088,7	1090,3	1091,9	1093,6	1095,2	1096,9	41
42	1098,5	1100,1	1101,8	1103,4	1105,0	1106,7	1108,3	1109,9	1111,6	1113,2	1114,8	1116,5	1118,1	1119,7	1121,4	1123,0	42
43	1124,6	1126,3	1127,9	1129,5	1131,2	1132,8	1134,4	1136,1	1137,7	1139,4	1141,0	1142,6	1144,3	1145,9	1147,5	1149,2	43
44	1150,8	1152,4	1154,1	1155,7	1157,3	1159,0	1160,6	1162,2	1163,9	1165,5	1167,1	1168,8	1170,4	1172,0	1173,7	1175,3	44
45	1177,0	1178,6	1180,2	1181,9	1183,5	1185,1	1186,8	1188,4	1190,0	1191,7	1193,3	1194,9	1196,6	1198,2	1199,8	1201,5	45
46	1203,1	1204,7	1206,4	1208,0	1209,6	1211,3	1212,9	1214,5	1216,2	1217,8	1219,5	1221,1	1222,7	1224,4	1226,0	1227,6	46
47	1229,3	1230,9	1232,5	1234,2	1235,8	1237,4	1239,1	1240,7	1242,3	1244,0	1245,6	1247,2	1248,9	1250,5	1252,1	1253,8	47
48	1255,4	1257,0	1258,7	1260,3	1262,0	1263,6	1265,2	1266,9	1268,5	1270,1	1271,8	1273,4	1275,0	1276,7	1278,3	1279,9	48
49	1281,6	1283,2	1284,8	1286,5	1288,1	1289,7	1291,4	1293,0	1294,6	1296,3	1297,9	1299,5	1301,2	1302,8	1304,5	1306,1	49
50	1307,7	1309,4	1311,0	1312,6	1314,3	1315,9	1317,5	1319,2	1320,8	1322,4	1324,1	1325,7	1327,3	1329,0	1330,6	1332,2	50
51	1333,9	1335,5	1337,1	1338,8	1340,4	1342,1	1343,7	1345,3	1347,0	1348,6	1350,2	1351,9	1353,5	1355,1	1356,8	1358,4	51
52	1360,0	1361,7	1363,3	1364,9	1366,6	1368,2	1369,8	1371,5	1373,1	1374,7	1376,4	1378,0	1379,6	1381,3	1382,9	1384,6	52
53	1386,2	1387,8	1389,5	1391,1	1392,7	1394,4	1396,0	1397,6	1399,3	1400,9	1402,5	1404,2	1405,8	1407,4	1409,1	1410,7	53
54	1412,3	1414,0	1415,6	1417,2	1418,9	1420,5	1422,1	1423,8	1425,4	1427,1	1428,7	1430,3	1432,0	1433,6	1435,2	1436,9	54
Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Zoll

17. Verwandlung von englischen Zollen in Millimeter.

Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 engl. Zoll 25,399541 mm

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
0	0,000	1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,112	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812	0
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,512	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212	1
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,911	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611	2
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,311	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01	3
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41	4
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81	5
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21	6
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61	7
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01	8
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41	9
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81	10
11	279,39	280,98	282,57	284,16	285,74	287,33	288,92	290,51	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21	11
12	304,79	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61	12
13	330,19	331,78	333,37	334,96	336,54	338,13	339,72	341,31	342,89	344,48	346,07	347,66	349,24	350,83	352,42	354,01	13
14	355,59	357,18	358,77	360,36	361,94	363,53	365,12	366,71	368,29	369,88	371,47	373,06	374,64	376,23	377,82	379,41	14
15	380,99	382,58	384,17	385,76	387,34	388,93	390,52	392,11	393,69	395,28	396,87	398,46	400,04	401,63	403,22	404,81	15
16	406,39	407,98	409,57	411,16	412,74	414,33	415,92	417,50	419,09	420,68	422,27	423,85	425,44	427,03	428,62	430,20	16
17	431,79	433,38	434,97	436,55	438,14	439,73	441,32	442,90	444,49	446,08	447,67	449,25	450,84	452,43	454,02	455,60	17
18	457,19	458,78	460,37	461,95	463,54	465,13	466,72	468,30	469,89	471,48	473,07	474,65	476,24	477,83	479,42	481,00	18
19	482,59	484,18	485,77	487,35	488,94	490,53	492,12	493,70	495,29	496,88	498,47	500,05	501,64	503,23	504,82	506,40	19
20	507,99	509,58	511,17	512,75	514,34	515,93	517,52	519,10	520,69	522,28	523,87	525,45	527,04	528,63	530,22	531,80	20
21	533,39	534,98	536,57	538,15	539,74	541,33	542,92	544,50	546,09	547,68	549,27	550,85	552,44	554,03	555,61	557,20	21
22	558,79	560,38	561,96	563,55	565,14	566,73	568,31	569,90	571,49	573,08	574,66	576,25	577,84	579,43	581,01	582,60	22
23	584,19	585,78	587,36	588,95	590,54	592,13	593,71	595,30	596,89	598,48	600,06	601,65	603,24	604,83	606,41	608,00	23
24	609,59	611,18	612,76	614,35	615,94	617,53	619,12	620,70	622,29	623,88	625,47	627,05	628,64	630,23	631,82	633,40	24

Digitized by Google

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll
25	634,99	636,58	638,16	639,75	641,34	642,93	644,51	646,10	647,69	649,28	650,86	652,45	654,04	655,63	657,21	658,80	25
26	660,39	661,98	663,56	665,15	666,74	668,33	669,91	671,50	673,09	674,68	676,26	677,85	679,44	681,03	682,61	684,20	26
27	685,79	687,38	688,96	690,55	692,14	693,72	695,31	696,90	698,49	700,07	701,66	703,25	704,84	706,42	708,01	709,60	27
28	711,19	712,77	714,36	715,95	717,54	719,12	720,71	722,30	723,89	725,47	727,06	728,65	730,24	731,82	733,41	735,00	28
29	736,59	738,17	739,76	741,35	742,94	744,52	746,11	747,70	749,29	750,87	752,46	754,05	755,64	757,22	758,81	760,40	29
30	761,99	763,57	765,16	766,75	768,34	769,92	771,51	773,10	774,69	776,27	777,86	779,45	781,04	782,62	784,21	785,80	30
31	787,39	788,97	790,56	792,15	793,74	795,32	796,91	798,50	800,09	801,67	803,26	804,85	806,44	808,02	809,61	811,20	31
32	812,79	814,37	815,96	817,55	819,14	820,72	822,31	823,90	825,49	827,07	828,66	830,25	831,83	833,42	835,01	836,60	32
33	838,18	839,77	841,36	842,95	844,53	846,12	847,71	849,30	850,88	852,47	854,06	855,65	857,23	858,82	860,41	862,00	33
34	863,58	865,17	866,76	868,35	869,93	871,52	873,11	874,70	876,28	877,87	879,46	881,05	882,63	884,22	885,81	887,40	34
35	888,98	890,57	892,16	893,75	895,33	896,92	898,51	900,10	901,68	903,27	904,86	906,45	908,03	909,62	911,21	912,80	35
36	914,38	915,97	917,56	919,15	920,73	922,32	923,91	925,50	927,08	928,67	930,26	931,85	933,43	935,02	936,61	938,20	36
37	939,78	941,37	942,96	944,55	946,13	947,72	949,31	950,90	952,48	954,07	955,66	957,25	958,83	960,42	962,01	963,60	37
38	965,18	966,77	968,36	969,94	971,53	973,12	974,71	976,29	977,88	979,47	981,06	982,64	984,23	985,82	987,41	988,99	38
39	990,58	992,17	993,76	995,34	996,93	998,52	1000,1	1001,7	1003,3	1004,9	1006,5	1008,0	1009,6	1011,2	1012,8	1014,4	39
40	1016,0	1017,6	1019,2	1020,7	1022,3	1023,9	1025,5	1027,1	1028,7	1030,3	1031,9	1033,4	1035,0	1036,6	1038,2	1039,8	40
41	1041,4	1043,0	1044,6	1046,1	1047,7	1049,3	1050,9	1052,5	1054,1	1055,7	1057,3	1058,8	1060,4	1062,0	1063,6	1065,2	41
42	1066,8	1068,4	1070,0	1071,5	1073,1	1074,7	1076,3	1077,9	1079,5	1081,1	1082,7	1084,2	1085,8	1087,4	1089,0	1090,6	42
43	1092,2	1093,8	1095,4	1096,9	1098,5	1100,1	1101,7	1103,3	1104,9	1106,5	1108,1	1109,6	1111,2	1112,8	1114,4	1116,0	43
44	1117,6	1119,2	1120,8	1122,3	1123,9	1125,5	1127,1	1128,7	1130,3	1131,9	1133,5	1135,0	1136,6	1138,2	1139,8	1141,4	44
45	1143,0	1144,6	1146,2	1147,7	1149,3	1150,9	1152,5	1154,1	1155,7	1157,3	1158,9	1160,4	1162,0	1163,6	1165,2	1166,8	45
46	1168,4	1170,0	1171,6	1173,1	1174,7	1176,3	1177,9	1179,5	1181,1	1182,7	1184,3	1185,8	1187,4	1189,0	1190,6	1192,2	46
47	1193,8	1195,4	1197,0	1198,5	1200,1	1201,7	1203,3	1204,9	1206,5	1208,1	1209,7	1211,2	1212,8	1214,4	1216,0	1217,6	47
48	1219,2	1220,8	1222,4	1223,9	1225,5	1227,1	1228,7	1230,3	1231,9	1233,5	1235,1	1236,6	1238,2	1239,8	1241,4	1243,0	48
49	1244,6	1246,2	1247,8	1249,3	1250,9	1252,5	1254,1	1255,7	1257,3	1258,9	1260,5	1262,0	1263,6	1265,2	1266,8	1268,4	49
50	1270,0	1271,6	1273,2	1274,7	1276,3	1277,9	1279,5	1281,1	1282,7	1284,3	1285,9	1287,4	1289,0	1290,6	1292,2	1293,8	50
51	1295,4	1297,0	1298,6	1300,1	1301,7	1303,3	1304,9	1306,5	1308,1	1309,7	1311,3	1312,8	1314,4	1316,0	1317,6	1319,2	51
52	1320,8	1322,4	1324,0	1325,5	1327,1	1328,7	1330,3	1331,9	1333,5	1335,1	1336,7	1338,2	1339,8	1341,4	1343,0	1344,6	52
53	1346,2	1347,8	1349,4	1350,9	1352,5	1354,1	1355,7	1357,3	1358,9	1360,5	1362,1	1363,6	1365,2	1366,8	1368,4	1370,0	53
54	1371,6	1373,2	1374,8	1376,3	1377,9	1379,5	1381,1	1382,7	1384,3	1385,9	1387,4	1389,0	1390,6	1392,2	1393,8	1395,4	54
Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Zoll

C. Mafse und Gewichte

Meter-Konvention vom 20. Mai 1875. Dieser gehören an: Deutsches Reich, Oesterreich-Schweden, Norwegen, Schweiz, Türkei, Argentinische Republik, Vereinigte Staaten von Mexiko (1890), Bolivia, Brasilien, Chile, Columbia, Costarica, Ecuador, Guatemala, Honduras.

1. Herstellung und Vergleich der für die einzelnen Staaten bestimmten neuen Urmafse; 2. Aufbewahrung der Urmafse; 3. periodische Vergleichung der

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$ *)	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$ *)
Aegypten.	metrisch, früher:		metrisch, früher:	
	1 Pik Beledi = 0,5826 m	1,7164	1 Feddan = 42,008 33 a	0,023 804
	1 Pik Endaseh = 0,6384 m	1,5664		
	1 Pik Stambuli = 0,677 m	1,4771		
	1 Pik Meimari = 0,750 m	1,3333		
	1 Pik Nili = 0,5245 m	1,9066		
	1 Kasaabe = 3,55 m	0,2814		
Argentinische Republik.	metrisch, früher:		metrisch, früher:	
	1 Braza zu 2 Vara zu 4 Palmas oder 3 Pies = 1,732 m	0,5774	1 Qu.-Legua = 26,998 42 qkm	0,037 04
	1 Legua zu 3000 Braza = 5,196 km	0,1925		
Brasilien.	metrisch, früher altportugiesisch:		metrisch, früher altportugiesisch:	
	1 Covado zu 2 Pè zu 1,5 Palmos = 0,660 m	1,5152	1 Qu.-Covado = 0,4356 qm	2,293 7
	1 Brazza zu 2 Vara = 2,2 m	0,4545	1 Qu.-Pè = 0,1089 qm	9,182 7
	1 Legua = 6,183 km	0,1617	1 Qu.-Brazza = 4,84 qm	0,206 6
	1 Pè = 0,33 m	3,0303	1 Qu.-Legua = 38,2295 qkm	0,026 16
China.	1 Yin zu 10 Tschi (Covid. Fufs) zu 10 Tsun (Pant) zu 10 Fän = 3,73 m	0,2681	1 Mau = 631 qm	$\frac{1,584\,8}{1000}$
	1 Yin nach Vertrag mit England = 3,581 m	0,2793	1 King = 0,2453 ha	4,076 6
	1 Li (Meile) zu 180 Faden zu 10 Feldmesser-Covid = 0,5755 km	1,7376	Seidenzeug nach Gewicht.	
Deutsches Reich. (Deutsche Mafs- und Gewichts-Ordnung vom 30. Mai 1908.)	1 Meter (m) (= 1,000 003 01 Mètre des Archives = 443,297 27 Pariser Linien) zu 10 Dezimeter (dm) zu 10 Zentimeter (cm) zu 10 Millimeter (mm)		1 Quadratmeter (qm) zu 100 Quadratdezimeter (qdm) zu 100 Quadratzentimeter (qcm) zu 100 Quadratmillimeter (qmm)	
	1 Kilometer (km) = 1000 m		1 Hektar (ha) zu 100 Ar (a) zu 100 qm	
			1 Quadratkilometer (qkm) = 100 ha	
	1 dtsch. Landmeile = 7,5 km	0,1333		
	1 geographische Meile (15 = 1 Aequator-Grad) = 7,420 438 54 km	0,1348	1 geographische Quadratmeile = 55,062 91 qkm	0,018 16
	1 deutsche (und französ.) Seemeile (60 = 1 Meridian-Grad) = 1,852 km	0,5400		
	1 Faden = 1,829 m	0,5467		
	1 Kabel zu 120 Faden = 0,22 km	4,545		
	1 Aeq.-Grad = 111,3064 km			
	1 Mer.-Grad = 111,1111 km			

*) **Anmerkung.** In der Tafel sind alle Mafs- und Gewichtseinheiten durch eine Vergleichzahl n auf das metrische Mafs bezogen. In den Spalten $1,n$ sind die reziproken Werte der Vergleichzahlen angegeben. Es bedeutet also n die Anzahl metrischer Einheiten, die der betreff. Mafseinheit entspricht, und $1/n$ die Anzahl der betreff. Mafseinheiten, die der metrischen Einheit entspricht. Z. B. Grofsbritannien (S. 996): 1 Fathom = n Meter = 1,828 767 m, ome, mithin 683,

verschiedener Länder.

Ungarn, Belgien, Niederlande, Dänemark, Spanien, Frankreich, Italien, Portugal, Rufsland, Amerika, Peru, Venezuela, Serbien (1879), Rumänien (1882), Grofsbritannien (1884), Japan (1885), Luxemburg, Nicaragua, Paraguay, Salvador, Uruguay. — Die Meter-Konvention bezweckt: des Meters und Kilogramms; 2. Anwahl und Aufbewahrung neuer, das Meter und das Kilo- nationalen mit den internationalen Urmafsen, usw.

Raummafse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
metrisch, früher:		metrisch, früher:		**Aegypten.**
1 Ardeb zu 6 Quetehs zu 4 Rouhehs zu 12 Keles = 1,9775 hl	0.5 [illegible]	1 Cantaro toscano zu 36 Oka oder zu 100 Rottoli zu 144 Drachmen = 44.4931 kg	2 247 51	
			100	
		1 Oka zu 400 Drachmen = 1.23592 kg	0.8091	
metrisch, früher:		metrisch, früher:		**Argentinische Republik.**
1 Fanega zu 4 Cuartillos zu 3 Almudes = 1.372 hl	0.7289	1 Libra zu 2 Marcos zu 8 Onzas zu 16 Adarmes zu 36 Granos = 0.459 87 kg	2.176 91	
1 Barril zu 4 Cannecas zu 2 Frascos = 0,76 hl	1.3158	1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45.350 kg	2.176 91	
1 Pipa zu 4 Carcas zu 16 Cantagnes zu 3 Frascos = 4,56 hl	0.2193		100	
metrisch, früher:		metrisch, früher altportugiesisch:		**Brasilien.**
1 Mojo zu 15 Fangas zu 4 Alqueiras		1 Quintal zu 4 Arrobas zu 32 Arrateis = 58.752 kg	1,702 05	
1 Alqueira zu 4 Maquias in Rio de Janeiro = 0.3625 hl	2.7583		100	
in Bahia = 0.3114 hl	3.2113	1 Tonnelada = 13.5 Quintal = 793,152 kg	0 126 08	
1 Pipa zu 25 Almudes = 4,007 hl	0,2496		100	
1 Tschi Getreide zu 10 Sching = 1.031 hl	0,9708	1 Pikul zu 100 Kätties zu 16 Tael (Liang) = 60.453 kg	1.654 2	**China.**
			100	
1 Sai Getreide zu 2 Hwo zu 10 Sching = 1.2243 hl (Getreide und Flüssigkeiten sonst meist nach Gewicht.)	0.8168	1 Taël zu 10 Mähs oder Tsin zu 10 Conderin oder Fun zu 10 Käsch (Sabeck) = 37,783 g	2.616 69	
			100	
		(für Silber [Canton] = 37,573 g)	2,661 4e	
			100	
		als Haikuan Taël = 38.246 g	2,614 65	
			100	
1 Kubikmeter (cbm) zu 1000 Kubikdezimeter (cdm) oder Liter (l) zu 1000 Kubikzentimeter (ccm) zu 1000 Kubikmillimeter (cmm)		1 Kilogramm (kg) (= 0,999 999 842 Kilogramme prototype) zu 1000 Gramm (g) zu 1000 Milligramm (mg)		**Deutsches Reich.*)**
		100 Gramm = 1 Hektogramm		*) Betreffs der Mafs- und Gewichtsbezeichnungen gilt Folgendes: Den Buchstaben werden Schlufspunkte nicht beigefügt. Die Buchstaben werden an das
1 Hektoliter (hl) = 100 l	0.01	1 kg = 2 (alte) Zoll-Pfund	0,5	
1 Liter = 1000 Milliliter		1 Tonne (t) (früher zu 20 Zentner) = 1000 kg	0,001	
1 Scheffel = 0,5 hl (nicht mehr amtlich)		1 Doppelzentner (dz) = 100 kg	0,01	
1 Oxhoft = 2.20 hl	0.4545			
1 Stückfafs zu 7½ Ohm = 12.0 hl	0.0833	1 Schiffslast zu 2 Tonnen 2000 kg	0.0005	
1 Tonne (Schiffsmafs) = 2.12 cbm	0.4717			

Ende der vollständigen Zahlenausdrücke — nicht über das Dezimalkomma — gesetzt, also 5,37 m, nicht 5 m 37 und nicht 5 m 37 cm. Zur Trennung der Einerstellen von den Dezimalstellen dient das Komma, nicht der Punkt. Sonst ist das Komma bei Mafs- und Gewichtzahlen nicht anzuwenden, besonders nicht zur Abteilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Diese Abteilung ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraume zwischen den Gruppen zu bewirken. Statt qcm, qm usw. ist die Schreibweise cm^2, m^2 usw. zulässig, ebenso statt ccm, cbm usw. cm^3, m^3 usw.

Eichfähig sind: die Längenmafse, die dem Meter oder seinen ganzen Vielfachen, oder seiner Hälfte, seinem 5. oder seinem 10. Teile entsprechen; die Körpermafse, die dem ganzen oder halben Kubikmeter oder Hektoliter, oder den ganzen Vielfachen dieser Mafsgröfsen, oder dem Liter, seinem 2-, 5-, 10- oder 20-fachen, oder seiner Hälfte, seinem 4., 5., 10., 20., 50. oder 100. Teile entsprechen; die Gewichte, die dem Kilogramm, dem Gramm oder dem Milligramm, oder dem 2-, 5-, 10-, 20- oder 50-fachen dieser Gröfsen oder der Hälfte, dem 4., 5., 8. oder dem 10. Teile des Kilogramms sowie der Hälfte, dem 5. oder dem 10. Teile des Grammes entsprechen.

Digitized by Google

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$
Frankreich.	metrisch, früher: 1 Pariser Fufs = 0,324 839 m (1 m = 443,295 936 Par. Lin.)	3,0784 0,002 255 8	metrisch	
Griechenland	metrisch. 1 griechische Meile = 10 km	0,1	metrisch. 1 Stremma = 10 a	0,1
Grofsbritannien. (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)	1 Zoll. Inch (16- oder 12 teilig) = 2,539 954 cm 1 Fufs (= 12 Zoll) = 0,304 794 49 m 1 Yard (= 3 Fufs) = 0,914 8335 m 1 Fathom = 2 Yards = 6 Fufs = 72 Zoll = 1,828 767 m 1 Chain zu 100 Links zu 7,92 Inches = 20,12 m 1 Statute Mile zu 8 Furlongs zu 40 Ruten zu 2,75 Fathoms zu 2 Yards = 1760 Yards = 1,609 314 9 km Gewöhnl. engl. Meile = 5000 F. = 1,523 986 km 1 Nautical Mile (Knot) zu 6080 Fufs = 1,853 15 km *) Kaufmännisch: 12 Yards = 11 m	0,3937 3,2809 1,0936 0,5468 0,0497 0,6214 0,6562 0,5396	1 Qu.-Zoll = 6,451 4 qcm 1 Qu.-Fufs = 0,092 90 qm 1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 160 Qu.-Ruten = 4840 Qu.-Yard = 40,4671 a 1 Yard of land = 30 Acres = 12,1401 ha 1 Hide of land = 100 Acres = 40,467 ha 1 Mile of land = 640 Acres = 2,59 qkm	0,1550 10,764 3 1,196 17 0,024 71 0,082 4 0,024 71 0,386 10
Ostindien (britisch).	1 Guz zu 2 Hat zu 24 Angli = 1 engl. Yard = 0,9144 m 1 Meile zu 1000 engl. Faden zu 4 Cubits oder 2 Bombay-Guz = 1,8288 km 1 Cubit (Madras) = 0,4572 m 1 Guz (Bombay) = 0,6858 m 1 Guz (Bengalen) = 0,9144 m Im Grofshandel d. engl. Yard.	1,0936 0,5468 2,1872 1,4582 1,0936	1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 40,4671 a 1 Qu.-Fufs = 0,0929 qm 1 Qu.-Cubit = 0,209 qm 1 Qu.-Guz (Bombay) = 0,4703 qm 1 Qu.-Meile = 3,3444 qkm	1,196 17 0,024 71 10,764 3 4,784 7 2,126 2 0,299 0
Japan.	metrisch und englisch. 1 Shaku Kane zu 10 Sun zu 10 Bu = 0,303 m 1 Ri zu 36 Tchô zu 60 Ken zu 6 Shaku = 3,927 km	3,3003 0,2546	metrisch und englisch. 1 Qu.-Tchô = 0,991 74 ha 1 Shaku f. Stoffe = 0,379 m	1,008 33 2,638 5
Oesterreich-Ungarn.	metrisch. 1 m = 0,999 997 64 Mètre des Archives = 443,294 889 8 Pariser Linien. 1 Seemeile = 1,852 km Früher: 1 Wr. Fufs zu 12 Zoll zu 12 Linien = 0,316 081 m 1 Wr. Elle = 0,777 558 m 1 Wr. Klafter = 1,896 484 m 1 Postmeile = 7,585 936 km	0,5400 3,1637 1,2861 0,5273 0,1318	metrisch, früher: 1 Qu.-Fufs = 0,099 907 qm 1 Qu.-Klafter = 3,596 652 qm 1 n.-österreich. Joch = 0,575 464 2 ha 1 Qu.-Meile zu 10 000 Joch zu 1600 Qu.-Klafter = 57,546 42 qkm	10,007 9 0,278 00 1,737 73 0,017 38
Paraguay.	metrisch, früher: 1 Vara = 0,866 m 1 Legua = 4,33 km	1,1547 0,2309	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 18,75 qkm	0,053 33

*) 6080 engl. F. ist die abgerundete Länge des Mittels aus den 60-sten Teilen des Meridian- und des Aequatorgrades, dabei die Meridianlänge = 40 000 km und die Aequatorlänge = 5400 geographische Meilen gerechnet. Die engl. Admiralität rechnet 1 Admiralty Mile = 6080,5 Fufs = 1,8551 km = $\frac{1}{360}$ des Aequatorgrades = $\frac{1}{4}$ geographische Meile.

Digitized by Google

Raummafse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
metrisch. 1 Stère = 1000 *l*	0,001	metrisch.		**Frankreich.**
metrisch. 1 Kilò = 1 hl	1	metrisch. 1 Stater = 56,32 kg	1,775 56 100	**Griechenland.**
1 Kub.-Zoll = 16,386 ccm	0,0610 3	1 Pfd. avoirdupoids (lbs.) [Handelsgewicht] zu 16 Ounces zu 16 Drams = 0,453 592 65 kg = 7000 Troygrains	2,204 62	**Grofs-britannien.** (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)
1 Kub.-Fufs = 0,028 315 cbm	35,3166	1 Troypfund [Gold-, Silber- und Münz-, sowie Apothekergewicht] zu 12 Ounces zu 20 Pennyweights (dw) = 5760 Grains = 0,373 241 95 kg	2,679 23	
1 Kub.-Yard = 0,7645 cbm	1,3080	1 Schiffston (short ton, Kanada, Ver. St. [s. u.]) = 2000 Pfund (lbs.) = 907,1853 kg	1,102 31	
1 Register-Ton = 100 Kub.-Fufs = 2,832 cbm	0,3532	1 Ton (long ton) = 20 Hundred- (cent-) weight zu 4 Quarters zu 28 Pfund (= 2240 lbs.) = 1016,0475 kg	1000 0,984 206	
1 Imperial Gallon v. 277,2738 Kub.-Zoll = 4,5435 *l* *)	0,2201		1000	
1 alter (Winchester-) Gallon von 231 Kub.-Zoll = $\frac{5}{6}$ Imp. Gallon = 3,785 203 *l*	0,2642			
1 Last zu 10 Quarters zu 8 Bushels zu 4 Peks zu 2 Gallons = 29,078 924 hl	0,0344			
1 Barrel zu 2 Kilderkin zu 2 Firkin zu 9 Gallons = 1,635 hl	0,6116			
1 Anker = 10 Imp. Gallons von 1824 = 0,454 35 hl	2,2009			
1 Tun zu 2 Pipes (Butts) zu 2 Hogsheads zu 63 Gallons = 11,45 hl	0,0873			
Flüssigkeiten nach engl. Imperial Gallons oder, wie Getreide, nach Gewicht.		1 Bazar Maund zu 40 Sihrs (Seers) zu 16 Chittaks zu 5 Tolas = 37,324 kg	0,026 79	**Ostindien** (britisch).
1 Khahoon (Bengalen) zu 16 Soallees wiegt 1354,73 kg	0,738 15	1 Faktorei Maund = 33,868 kg	0,029 53	
1 Kandry Reis (Bombay) wiegt 97,95 kg	$\frac{1}{1000}$ 0,0102	1 Madras Maund = 11,34 kg	0,088 18	
1 Garce (Madras) zu 80 Parahs zu 5 Markals = 4,916 cbm	0,2034	1 Bombay Maund zu 40 Sihrs zu 30 Parahs = 12,70 kg	0,078 74	
metrisch und englisch. 1 Sho zu 10 Go zu 10 Sai zu 10 Satsu = 1,803 907 *l*	0,5544	metrisch und englisch. 1 Kin zu 160 Momme zu 10 Fun zu 10 Rin = 0,600 kg	1,667	**Japan.**
1 Koku zu 10 To zu 10 Sho = 1,803 907 hl	0,5544	1 Kwan zu 1000 Momme = 3,7565 kg	0,266 19	
metrisch, früher: 1 Kub.-Fufs = 0,031 578 67 cbm	31,667	metrisch. 1 kg = 0,999 997 8 Kilogramme prototype.		**Oesterreich-Ungarn.**
1 Kub.-Klafter = 6,820 099 2 cbm	0,1466	Früher:		
1 Schachtrute = 3,157 867 cbm	0,3167	1 Wr. (und bayerisches) Pfund zu 32 Lot = 0,560 060 kg	1,785 52	
1 Wr. Metze zu 16 Mafs = 0,614 868 3 hl	1,6264	1 Wr. Lot = 17,501 87 g	0,057 14	
1 Eimer zu 40 Mafs = 0,565 890 hl	1,7671	1 Wr. Ztr. = 56,0060 kg	0,017 86	
1 Mafs = 1,414 724 *l*	0,7069	1 Apotheker-Pfund = 0,420 kg	2,381	
		1 Stein zu 20 Pfund = 11,212 kg	0,891 00	
metrisch, früher: 1 Fanega = 2,88 hl	0,3472	metrisch, daneben: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libra = 46,008 kg	0,021 74	**Paraguay.**
1 Pipa = 5,8157 hl	0,171 95			

*) Imperial Gallon von 1824. Mit der Jahreszahl 1890 wird ein Imperial Gallon zu 277,463 Kub.-Zoll = 4,546 508 718 *l* angegeben: 1 *l* = 0,219 949 Imperial Gallons. Hieraus ergibt sich 1 hl = 2,7466 Bushel; 1 Bushel = 0,3637 hl. Ein Imperial Gallon zu 4 Quarts zu 2 Pints zu 4 Gills.

Digitized by Google

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$	Flächenmafse
Preufsen. (Altes Mafs.)	1 Fufs zu 12 Zoll zu 12 Linien = 0,313 853 5 m	3,1862	1 Qu.-Fufs = 0,098 50 qm.
	1 Elle = 0,666 94 m	1,4994	1 Qu.-Rute = 14,185 qm
	1 Lachter = 2,092 36 m	0,4779	1 Morgen zu 180 Qu.-Ruten = 0,255 322 4 ha
	1 Rute zu 12 Fufs = 3,766 24 m	0,2655	1 Qu.-Zoll = 6,8406 qcm
Dänemark. Norwegen.	**In Dänemark, Norwegen:**		**In Dänemark:**
	1 Rute zu 5 Alen zu 2 Fufs = 3,138 535 m	0,3186	1 Qu.-Rute zu 100 Qu.-Fufs = 9,85 qm
	1 Meile zu 2000 preufs. Ruten = 7,532 484 km	0,1328	1 Tonne Land zu 360 Qu.-Ruten = 0,551 63 ha
	in Norwegen 1 Meile zu 6000 Faden = 11,295 km	0,0885	
Rufsland. (In Finnland und den Ostseeprovinzen besondere Mafse und Gewichte.)	metrisch, engl. Fufsmafs.		metrisch, engl. Fufsmafs.
	1 Saschehn (zu 7 Fufs oder zu 3 Arschin zu 16 Werschock) = 2,133 57 m	0,4687	1 Dessatine = 1,0925 ha 1 Qu.-Saschehn = 2400 Dessätinen = 4,5521 qm
	1 russ. Fufs = 1 engl. Fufs (Zoll 10 teilig)		1 Qu.-Werst = 1.138 02 qkm
	1 Werst zu 500 Saschehn = 1,066 781 km	0,9374	1 Lofstelle $\sim$ $\frac{1}{2}$ Dessatine
	1 Meile zu 7 Werst = 7,467 465 km	0,1339	
Schweden.	metrisch, früher:		metrisch, früher:
	1 Famn zu 3 Alen zu 2 Fufs zu 10 Zoll = 1,7814 m	0,5614	1 Tunnland zu 2 Spanland zu 16 Kappland zu $3\frac{1}{2}$ Kannland = 56000 Qu.-Fufs = 0,493 641 ha
	1 Meile = 10,688 km	0,0936	
Schweiz.	metrisch, früher:		metrisch, früher:
	1 Rute (= 1^2 Klafter) zu 10 Fufs zu 10 Zoll = 3,000 m	0,3333	1 Qu.-Klafter = 3,24 qm 1 Juchart = 0,36 ha
Südamerika.*)	metrisch, altkastilisch.		metrisch, altkastilisch.
	1 Vara = 3 Piks = 4 Palmos = 0,8359 m	1,1963	**In Venezuela:**
	1 Legua zu 3 Millas = 5,572 km	0,1795	1 Fanegada = 0,6987 ha
Uruguay.	metrisch, früher:		metrisch, früher:
	1 Vara = 0,859 m	1,1641	1 Qu.-Legua = 26,6 qkm
	1 Legua = 5,154 km	0,1940	
Vereinigte Staaten von Nordamerika. (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)	englisch, jedoch:		englisch.
	1 Statute Mile = 1,609 32 km	0,6214	1 Qu.-Meile (Sektion) = 2,5899 qkm
	1 Naut. M. = 1 854 96 km	0,5391	1 Township zu 36 Sektionen = 93,236 qkm
	1 League = 3 Naut Miles oder = 3 Statute Miles		

*) Die Angaben gelten für Bolivia, Chile Columbia, Costarica, Ecuador, Guat Honduras, Nicaragua, Peru, S Salvador und Venezuela.

**) Anm. zu S. 999: Die Fanega weicht von dem angegebenen Werte oft ab.

Raummaſse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
1 Kub.-Fuſs = 0,030 92 cbm	32,342	1 (Zoll-) Pfund zu 30 Lot zu 10 Quentchen zu 100 Korn = 0,500 kg	2,000	**Preuſsen.** (Altes Maſs.)
1 Kub.-Zoll = 17,891 ccm	0,0559	1 alt. preuſs. (u. württemberg.) Pfund = 0,4677 kg	2,1381	
1 Klafter zu 108 Kub.-Fuſs = 3,339 cbm	0,2995	1 Schiffslast zu 40 Zentner zu 100 Pfund = 2000 kg	0,05 / 100	
1 Schachtrute zu 144 Kub.-Fuſs = 4,452 cbm	0,2246	1 Hamburger Komm.-Last = 6000 Pfund	0,033 33 / 100	
1 Oxhoft zu 1,5 Ohm zu 2 Eimer zu 2 Anker zu 30 Quart zu 64 Kub.-Zoll = 2,061 95 hl	0,4852	**In Dänemark:** 1 Komm.-Last zu 5200 Pfund = 2600 kg	0,038 46 / 100	**Dänemark.**
1 Scheffel zu 16 Metzen zu 3 Quart = 0,549 61 hl	1,8195	**In Norwegen:** 1 Zentner = 49,811 kg	2,007 59 / 100	**Norwegen.**
metrisch, engl. Fuſsmaſs.		1 Pfund = 0,409 531 kg	2,441 82	**Rufsland.**
1 Kub.-Saschehn = 9,7123 cbm	0,1030	1 Pud zu 40 Pfund zu 32 Lot zu 3 Solotnik = 16,380 48 kg	0,061 05	
1 Botscka zu 40 Wedro zu 100 Tscharka = 4,9195 hl	0,2033	1 Tonne zu 6,2 Berkowitz zu 10 Pud = 1015,5 kg	0,098 47 / 100	
1 Krutschka (Stoof) = 1,229 89 l	0,8131	1 Last = 2025,44 kg	0,049 37 / 100	
1 Tschetwert zu 8 Tschetwerik zu 8 Garnitzi = 2,099 hl	0,4764			
1 Wedro zu 10 Krutschka				
metrisch, früher:		metrisch, früher:		**Schweden.**
1 Ahm zu 6 Kub.-Fuſs zu 10 Kannen = 1,570 313 hl	0,6368	1 Zentner zu 100 Skalpund zu 100 Ort = 42,507 58 kg	0,023 52	
1 Tonne = 1,6489 hl	0,6065	1 Schiffspfund = 170,028 kg	5,881 38 / 1000	
		1 Schiffslast = 5760 Pfund = 2450 kg	0,408 16 / 1000	
metrisch, früher:		metrisch, früher:		**Schweiz.**
1 Saum zu 4 Eimer zu 25 Maſs = 1,5 hl	0,6667	1 Zentner = 100 Pfund = 50 kg	0,02	
metrisch, auch altkastilisch.		metrisch, auch altkastilisch.		**Südamerika.**
1 Cahiz zu 12 Fanegas**) zu 12 Celemines = 6,66 hl	0,1502	1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras zu 2 Marco zu 8 Oucas = 46,0093 kg	2,173 47 / 100	
1 Cantara zu 8 Acumbres zu 4 Cuartillas = 16,328 l	0,0612	1 Tonnelada = 20 Quintal = 920 kg	0,108 674 / 100	
1 Moyo = 2,5826 hl	0,3872			
1 Pipa = 4,3570 hl	0,2295			
1 Bota = 4,8411 hl	0,2066			
metrisch, früher:		metrisch, früher:	2,172 40 / 100	**Uruguay.**
1 Pipa = 4,554 24 hl	0,2196	1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45,94 kg	0,108 620 / 100	
1 Fanega**) = 1,372 72 hl	0,7285	1 Tonnelada = 918,8 kg		
1 Galon = 3,805 l	2,6281			
altenglisch.		englisch.		**Vereinigte Staaten von Nordamerika.**
1 (Wein-) Gallon zu 4 Quarts zu 2 Pints zu 4 Gills zu 4 Fluid Ounces = 3,7852 l	0,2642	1 Hundred-weight häufig (z. B. in New York) zu 4 Quarters zu 25 Pfund = 45,359 kg	2,204 63 / 100	(Das metrische Maſs und Gewicht sind zugelassen.)
1 Trocken-Gall. (Getreidem.) von 268,803 Kub.-Zoll = 4,4046 l	0,2270	1 Ton (short ton) zu 2000 Pfund (lbs.) = 907,1853 kg	1,102 31 / 1000	
(1 Bushel = 8 Trocken-Gall.)		1 long ton zu 2240 Pfund (lbs.) = 1016,0475 kg	0,984 206 / 1000	
1 gehäuft. Gallon = $1\frac{1}{4}$ Trocken-Gallons		1 Barrel Mehl zu 196 Pfund = 88,9 kg	1.125 / 100	
1 Barrel Petroleum zu 42 Gallons = 1,5898 hl	0,6291	1 Barrel Fleisch zu 200 Pfund = 90,72 kg	1.1023 / 100	
1 Barrel Bier zu 31 Gallons = 1,173 hl	0,8525	1 Barrel Salz = 280 Pfund	2.756 / 1000	
		1 Humpheon Maismehl zu 800 Pfund = 362,68 kg		

Digitized by Google

D. Vergleichungstafeln zusammengesetzter Mafseinheiten.

1. Gewichtseinheit für die Längeneinheit.

kg/m	Pfund/Fufs			Pfund/Fufs	kg/m aus		
	preufs.	engl.	österr.		preufs. Mafs.	engl. Mafs.	österr. Mafs.
1	0,6277	0,6719	0,5644	1	1,5931	1,4882	1,7719
2	1,2554	1,3439	1,1287	2	3,1862	2,9764	3,5438
3	1,8831	2,0158	1,6931	3	4,7793	4,4646	5,3157
4	2,5108	2,6878	2,2575	4	6,3724	5,9528	7,0875
5	3,1385	3,3597	2,8218	5	7,9655	7,4410	8,8594
6	3,7662	4,0317	3,3862	6	9,5586	8,9292	10,6313
7	4,3939	4,7036	3,9506	7	11,1517	10,4174	12,4032
8	5,0217	5,3756	4,5150	8	12,7448	11,9057	14,1751
9	5,6494	6,0475	5,0793	9	14,3379	13,3939	15,9470

2. Gewichtseinheit für die Flächeneinheit.

kg/qcm	Pfund/Quadrat-Zoll			Pfund/Qu.-Zoll	kg/qcm aus		
	preufs.	engl.	österr.		preufs. Mafs.	engl. Mafs.	österr. Mafs.
1	13,681	14,223	12,388	1	0,0731	0,0703	0,0807
2	27,361	28,445	24,776	2	0,1462	0,1406	0,1614
3	41,042	42,668	37,164	3	0,2193	0,2109	0,2422
4	54,722	56,891	49,552	4	0,2924	0,2812	0,3229
5	68,403	71,114	61,940	5	0,3655	0,3516	0,4036
6	82,083	85,336	74,328	6	0,4386	0,4219	0,4843
7	95,764	99,559	86,716	7	0,5117	0,4922	0,5652
8	109,444	113,782	99,103	8	0,5848	0,5625	0,6458
9	123,125	128,004	111,491	9	0,6579	0,6328	0,7265

kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll	kg/qcm
100	0,635	2300	14,6	4600	29,2	1	157,5	26	4095
200	1,27	2400	15,2	4700	29,8	2	315,0	27	4252
300	1,905	2500	15,9	4800	30,5	3	472,5	28	4410
400	2,54	2600	16,5	4900	31,1	4	630,0	29	4567
500	3,175	2700	17,1	5000	31,75	5	787,5	30	4725
600	3,81	2800	17,8	5100	32,4	6	945,0	31	4882
700	4,445	2900	18,4	5200	33,0	7	1102,5	32	5040
750	4,762	3000	19,0	5300	33,7	8	1260,0	33	5197
800	5,08	3100	19,7	5400	34,3	9	1417,5	34	5355
900	5,715	3200	20,3	5500	34,9	10	1574,9	35	5512
1000	6,35	3300	21,0	5600	35,6	11	1732	36	5670
1100	6,985	3400	21,6	5700	36,2	12	1890	37	5827
1200	7,62	3500	22,2	5800	36,8	13	2047	38	5985
1300	8,254	3600	22,9	5900	37,5	14	2205	39	6142
1400	8,889	3700	23,5	6000	38,1	15	2362	40	6300
1500	9,524	3800	24,1	6500	41,3	16	2520	41	6457
1600	10,159	3900	24,8	7000	44,4	17	2677	42	6615
1700	10,794	4000	25,4	7500	47,6	18	2835	43	6772
1800	11,429	4100	26,0	8000	50,8	19	2992	44	6930
1900	12,064	4200	26,7	8500	54,0	20	3150	45	7087
2000	12,699	4300	27,3	9000	57,1	21	3307	46	7245
2100	13,334	4400	27,9	9500	60,3	22	3465	47	7402
2200	13,969	4500	28,6	10000	63,5	23	3622	48	7560
						24	3780	49	7717
						25	3937	50	7875

Digitized by Google

3. Gewichtseinheit für Raumeinheit.

kg/cbm	Pfund/Kubik-Fuſs			Pfund/Kubik-Fuſs	kg/cbm aus		
	preuſs.	engl.	österr.		preuſs. Maſs	engl. Maſs	österr. Maſs
1	0,06183	0,06242	0,05638	1	16,1789	16,0196	17,7354
2	0,12366	0,12485	0,11277	2	32,3459	32,0392	35,4708
3	0,18550	0,18727	0,16915	3	48,5188	48,0588	53,2062
4	0,24733	0,24969	0,22554	4	64,6918	64,0784	70,9416
5	0,30916	0,31212	0,28192	5	80,8647	80,0980	88,6770
6	0,37099	0,37454	0,33831	6	97,0376	96,1175	106,4123
7	0,43282	0,43697	0,39469	7	113,2106	112,1371	124,1477
8	0,49465	0,49939	0,45108	8	129,3835	128,1567	141,8831
9	0,55649	0,56181	0,50746	9	145,5565	144,1763	159,6185

4. Metrische (neue) Atmosphäre, alte at und Höhe der gleichwertigen Quecksilbersäule (O.-S.). (Vgl. I. Bd. S. 392 u. 393.)

	Die alte at angenommen zu		Höhe der Quecksilbersäule in			
	76 cm Q.-S.	28 Par. Zoll Q.-S.	cm	preuſs. Zoll	engl. Zoll	Par. Zoll
	1 metr. at = n alte at		1 metr. at = n Q.-S.-Einheiten			
n =	0,96778	0,97039	73,551	28,122	28,958	27,172
	1 alte at = $\frac{1}{n}$ metr. at		1 Q.-S.-Einheit = $\frac{1}{n}$ metr. at			
$\frac{1}{n}$ =	1,033296	1,0305	0,013596	0,0356	0,0345	0,0368

5. Vergleich der Arbeitseinheiten.

Verglichene Arbeitseinheit	preuſs.	engl.	österr.	russ.	schwed.	
1 mkg = n Fuſspfunde .	6,3724	7,2331	5,6489	8,0124	7,9236	= n
1 Fuſspfund = $\frac{1}{n}$ mkg . . .	0,1569	0,1383	0,1770	0,1248	0,1262	= $\frac{1}{n}$

6. Vergleich der Pferdestärken. (Vgl. I. Bd. S. 151.)

	England	Oesterreich	Preuſsen	Sachsen	Baden	Württemberg
	1 PS = 550 Fuſspfd./sk	1 PS = 430 Fuſspfd./sk	1 PS = 480 Fuſspfd./sk	1 PS = 530 Fuſspfd./sk	1 PS = 500 Fuſspfd./sk	1 PS = 525 Fuſspfd./sk
	1 metr. PS = 75 mkg/sk = n PS der verschiedenen Länder					
n =	0,9863	0,9853	0,9957	0,9994	1,000	0,9973
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{1}{n}$ metr. PS					
$\frac{1}{n}$ =	1,0139	1,0149	1,0043	1,0006	1,000	1,0027
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{75}{n}$ mkg/sk					
$\frac{75}{n}$ =	76,041	76,119	75,323	75,045	75,000	75,204

Digitized by Google

E. Gebührenordnung der Architekten und Ingenieure.*) **)

I. Allgemeine Bestimmungen.

§ 1. Grundsätze für die Bemessung der Gebühren.

1. Die Gebühren werden im allgemeinen nach der Bausumme in Rechnung stellt, u. zw. für Vorarbeiten und Ausführungsarbeiten***) gesondert. Für erstere die Summe des Kostenanschlages oder — falls oder solange ein Kostenanschlag nicht aufgestellt ist — die Kostenschätzung maßgebend; für letztere die Summe Baukosten.

2. Vorarbeiten sind:

a) der Vorentwurf in Skizzen nebst Kostenschätzung und gebotenenfalls läuterungsbericht,

b) der Entwurf in solcher Durcharbeitung, daß danach der Kostenanschla aufgestellt werden kann,

c) der Kostenanschlag zur genauen Ermittlung der Baukosten.

d) die Bauvorlagen, bestehend in den zur Nachsuchung der behördlichen nehmigungen nötigen Zeichnungen und Schriftstücken.

Ausführungsarbeiten sind:

e) die Bau- und Werkzeichnungen in einem für die Ausführung genüge Maßstabe,

f) die Oberleitung. Diese umfaßt die Vorbereitung der Ausschreibungen, Entwurf der Verträge über Arbeiten und Lieferungen, die Verhandlu über die Verträge mit den Lieferanten und Unternehmern bis zum Vertr abschlusse; die Bestimmung der Fristen für den Beginn, die Fortfüh und die Fertigstellung der Bauarbeiten; die Ueberwachung der A ausführung; den Schriftwechsel in den bei der Ausführung vorkommen Verhandlungen mit Behörden und dritten Personen; die Prüfung und R stellung der Baurechnungen.

3. Die für die Berechnung der Gebühren in Betracht zu ziehende Gesamtb summe umfaßt sämtliche Kosten, welche für den Bau aufgewandt werden, mit A schluß der Kosten des Grunderwerbes und der Bauleitung, sowie der Gebühren den Architekten und Ingenieur. Uebernimmt der Bauherr selbst Materiallieferu und Arbeitsleistungen, so werden deren Kosten bei der Berechnung der Gebü nach ortsüblichen Preisen zu den übrigen Baukosten hinzugerechnet.

4. Die Zahlung der Gebühr berechtigt den Auftraggeber nur zu einmaliger A führung des gelieferten Entwurfes; Benutzung zu wiederholter Ausführung ist neuem gebührenpflichtig.

5. Umfaßt ein Auftrag mehrere Bauwerke nach demselben Entwurfe, so die Gebühren, vorausgesetzt, daß diese Bauwerke auf einmal ausgeführt werden, Vorentwurf und Oberleitung nach der Gesamtsumme, für die übrigen Arbeiten erforderlichen Leistungen entsprechend zu berechnen. Umfaßt ein Auftrag meh gleichartige Bauwerke nach verschiedenen Entwürfen, so sind die Gebühren jedes Bauwerk einzeln zu berechnen.

6. Umfaßt ein Bauauftrag mehrere verschiedenen Gebieten, Gruppen Bauklassen angehörende Bauwerke, so darf die Gebühr für jedes getrennt berec werden.

7. Wird auf Veranlassung oder unter Zustimmung des Auftraggebers durch änderung des Entwurfes eine Vermehrung der vorbereitenden Arbeiten erforder so ist dafür eine der Mehrleistung entsprechende Gebühr zu zahlen.

8. Wird nur der **Vorentwurf** als eine in sich abgeschlossene Leistung geliefert erhöht sich die Gebühr um die Hälfte.

9. Werden für eine Baustelle mehrere Vorentwürfe nach verschiede Bauprogrammen verlangt, so ist jeder Vorentwurf besonders zu berechnen. Sind demselben Bauprogramme und für dieselbe Baustelle mehrere Vorentwürfe auf langen des Bauherrn aufgestellt, so wird die Gebühr für den ersten voll, für weiteren nach Verhältnis der Mehrleistung berechnet.

---

*) Eine Aenderung der Gebührenordnung ist in Aussicht genommen und zur Zeit den beteiligten Körperschaften zur Beratung vor.

**) Siehe auch: Gebührenordnung der beratenden Ingenieure für Elektrotech aufgestellt vom Verein beratender Ingenieure für Elektrotechnik (E. V.) in Berlin.

***) Unter „Bauausführung" ist nicht die „Bauunternehmung" zu verstehen.

Digitized by Google

10. Für den **Entwurf** sind die Teilbeträge aus § 1, 2a) und b) zusammen zu berechnen, auch wenn ein Vorentwurf nicht geliefert worden ist.

11. Sind im Auftrage des Auftraggebers mehrere Entwürfe für dieselbe Bauaufgabe angefertigt worden, so sind die Gebühren für den ersten Entwurf aus § 1, 2a) und b), für jeden der weiteren Entwürfe nach Verhältnis der Mehrleistung, jedoch mindestens mit der Hälfte der Gebühren aus § 1, 2a) und b) zu berechnen.

12. Die Gebühren für die **Oberleitung** gelten unter der Voraussetzung, dafs die Bauausführung durch Einzel- oder Gesamtunternehmer erfolgt. Für solche Leistungen, welche ohne Zuziehung von Unternehmern ausgeführt werden, verdoppelt sich die Gebühr für § 1, 2f) bezüglich des von dieser Ausführungsart betroffenen Teiles der Bausumme. Die Gebühr für § 1, 2c) kommt auf alle Fälle auch dann zur Verrechnung, wenn die Pläne des Entwurfes ganz oder zum Teil als Bau- und Werkzeichnungen verwendet werden können.

13. Erstreckt sich der Auftrag nur auf die Ausführungsarbeiten, so erhöht sich die Gebühr für § 1, 2e) und f) um ein Viertel.

14. Für Umbauten erhöhen sich die Gebühren den erforderlichen Leistungen entsprechend, mindestens aber um die Hälfte.

15. Werden seitens eines Lieferanten oder Unternehmers Provisionen oder Rabatte auf Bestellungen gewährt, so fallen diese dem Bauherrn zu.

16. Dem Auftraggeber ist auf Verlangen eine Ausfertigung des Entwurfes ohne besondere Vergütung zu übergeben.

§ 2. Nebenkosten.

In die festgesetzten Gebühren sind nicht eingeschlossen und daher vom Auftraggeber besonders zu vergüten:

17. die Kosten aller für die Aufstellung des Entwurfes notwendigen Unterlagen, als: Katasterauszüge, Lage- und Höhenpläne;*) Bauaufnahmen, Bodenuntersuchungen, Bohrungen, Wassermessungen, Analysen, statistische Erhebungen u. drgl.; die Bauskizzen und Bauzeichnungen des zu bearbeitenden Gebäudes für Entwürfe zu Heizungs-, Lüftungs-, Beleuchtungs-, Be- und Entwässerungs- sowie elektrischen Anlagen;

18. die Kosten der besonderen Bauleitung, d. h. die Gehaltsbezüge der Bauführer, Bauaufseher, Bauwächter usw.; die Kosten für die Beschaffung und Unterhaltung eines besonderen Baubureaus, für die Vervielfältigung der Unterlagen und für die Ausschreibung und Vergebung der Arbeiten, Lieferungen u. drgl., sowie für die zur Abrechnung erforderlichen Vermessungen. Die Gehaltsbezüge eines zur besonderen Bauleitung erforderlichen Bauführers sind auch dann — u. zw. nach Verhältnis des Zeitaufwandes — zu erstatten, wenn der Bauführer zur Leitung mehrerer Bauten vom Architekten oder Ingenieur bestellt ist;

19. bei Hochbauten die Gebühren der mit statischen Berechnungen, Konstruktionen, maschinellen Anlagen u. drgl. betrauten Ingenieure; bei Ingenieurbauten diejenigen des mit der künstlerischen Ausbildung des Entwurfes betrauten Architekten und der zugezogenen Spezialisten;

20. die Mühewaltung bei Auswahl, Erwerb, Veräufserung, Benutzung und Belastung von Grundstücken, Baulichkeiten usw., sowie bei Ordnung der Rechtsverhältnisse;

21. die aus Anlafs des Baues erforderlichen Reisen;

22. etwa geforderte Revisions- und Inventarzeichnungen, sowie bei Strafsen, Eisenbahnen und Kanälen die Schlufsvermessungen.

§ 3. Zahlungen.

23. Abschlagzahlungen auf die Gebühren sind auf Verlangen bis zu $^3/_4$ der nach dieser Gebührenordnung zu bewertenden, bereits bewirkten Leistungen zu gewähren. Insbesondere sind die Gebühren für die Vorarbeiten zu $^3/_4$ sofort nach deren Ablieferung fällig. Die Restzahlungen sind, gesondert nach Vorarbeiten und Ausführungsarbeiten, längstens 3 Monate nach Erfüllung des Auftrages zu leisten.

§ 4. Besondere Gebühren.

24. Gutachten, Schätzungen, schiedsgerichtliche Arbeiten, statische Berechnungen, künstlerische Darstellungen u. drgl. stehen aufserhalb dieser Gebührenordnung und sind nach der darauf verwendeten geistigen Arbeit, nach der fachlichen Stellung des Beauftragten und nach der wirtschaftlichen Bedeutung der Frage zu bewerten.

---

*) Bezüglich der Kosten der Arbeiten des Feldmessers wird auf den Entwurf des deutschen Geometer-Vereines für einen Gebührentarif für geometrische Arbeiten, Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. XV Heft 10 bis 12, verwiesen, welcher als Sonderdruck von dem Bibliothekar des Vereines aus München zu beziehen ist.

Digitized by Google

25. Für nach der Zeit zu vergütende Arbeiten sind zu berechnen

für die erste Stunde . 20 ℳ
für jede fernere Stunde 5 „

26. Für Reisen im Inlande sind außer den im § 4, 24 und 25, oder § 6 §§ 8 bis 10 aufgeführten Gebühren 30 ℳ für den Tag zu vergüten. Dieser Satz kor auch für Teile eines Tages voll in Ansatz; jedoch kann er für einen Tag nur ein angesetzt und soll nach Verhältnis verteilt werden, wenn gleichzeitig mehrere Auft geber beteiligt sind. Neben diesem Tagesatze sind die Auslagen für Fahrten, Gepä beförderung und Arbeiter zu erstatten.

27. Die Leistungen von Gehülfen werden deren Stellung entsprechend in Rechn gestellt.

II. Gebühren der Architekten.

§ 5. Grundlagen der Berechnung.

28. Die Gebühren für die Leistungen der Architekten bei der Vorbereitung Ausführung von Bauten werden

sowohl nach der **Bausumme,**
als nach der **Art,**
als nach der **Ausbausumme**

der Bauwerke bemessen.

29. Die **Bausumme** umfaßt die sämtlichen Baukosten. Sie ist bei Berechn der Gebühren für die Vorarbeiten dem Kostenanschlage, und für die Ausführu arbeiten der Bauabrechnung zu entnehmen. Wenn und solange die Bauabrechn nicht vorliegt, tritt an deren Stelle der Kostenanschlag und, solange auch dieser fe an deren Stelle die Kostenschätzung.

30. Nach der **Art** der Bauwerke werden unterschieden:

Gruppe I: Schuppen, Scheunen, Ställe, Remisen, Gewächshäuser; Lagerhäu Speicher, Schlacht- und Viehhöfe; Werkstätten, Betriebsanlagen, Fabriken; Abo und Barackenbauten;

Gruppe II: Wohn-, Gast-, Kaufhäuser, Banken; Schulen, Kasernen, Gefängni Bade-, Heil- und Pflegeanstalten, Markt- und provisorische Hallenbauten; schäfts-, Bureau-, Verwaltungs-, Verkehrs-, sowie alle ähnliche Gebäude, welche ni unter den Gruppen I und III besonders benannt sind;

Gruppe III: Kirchen aller Art, Friedhofsbauten, Gedenkhallen; Hochschu Akademien, Bibliotheken; Museen, Theater, Konzerthäuser; Börsen, Parlamen und Rathäuser;

Gruppe IV: Denkmäler, Brunnen, Grotten, Lauben, Bänke; Raumausstattungen; F und Trauerdekorationen, bauliche Ausstattungsgegenstände (Altäre, Kanzeln us

Gruppe V: Möbel und kunstgewerbliche Gegenstände (Lichtträger, Geräte, Schmu sachen usw.).

31. Die **Ausbausumme** umfaßt den auf den Ausbau und die Ausschmück des Bauwerkes fallenden Teil der Bausumme, welcher in Kostenanschlägen und B abrechnungen im einzelnen nachzuweisen ist. Dabei werden die Bauarbeiten wie f geschieden:

Rohbau:	Ausbau:
Ausschachtungsarbeiten	—
Maurerarbeiten	Putzarbeiten und Mehrkosten für Zie verblendung
Steinmetzarbeiten: Lieferung und Versetzen des Materiales in einfacher glatter Bearbeitung (durchschnittlich zu $^2/_3$ der Gesamtkosten anzunehmen)	Mehrkosten für Profilierung und V zierung (durchschnittlich zu $^1/_2$ Gesamtkosten anzunehmen)
Asphalt- und Isolierarbeiten	—
Zimmerarbeiten: Balken, Fachwände, Dachverband	Zulagen für Verzierung und Verkleid sichtbarer Holzteile; Fußböden; zerne Treppen
Eisenkonstruktionen	Kunstschmiedearbeiten

Digitized by Google

Gebühren der Architekten in Hundertsteln der Bausumme.*)

1.	2.	3.	4.	5.	6	7.
	In den Gruppen					
Für Bausummen bis	I	II	III	IV	I bis IV	V
	Grundgebühr beim Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme bis				Zuschlag	
ℳ	20/100	20/100	40/100	80/100	je 1/100 mehr	
1 000	6,00	9,00	12,00	15,00	0,135	21,00
2 000	5,60	8,40	11,20	14,00	0,125	19,60
3 000	5,30	8,00	10,60	13,30	0,120	18,60
4 000	5,10	7,70	10,20	12,80	0,115	17,90
5 000	4,90	7,40	9,80	12,30	0,110	17,20
6 000	4,30	7,20	9,60	12,00	0,108	16,80
7 000	4,70	7,00	9,40	11,70	0,106	16,40
8 000	4,60	6,90	9,20	11,50	0,104	16,10
9 000	4,55	6,85	9,10	11,40	0,103	15,95
10 000	4,50	6,80	9,00	11,30	0,102	15,80
15 000	4,30	6,50	8,60	10,80	0,097	15,10
20 000	4,10	6,20	8,20	10,30	0,093	14,50
25 000	4,00	6,00	8,00	10,00	0,090	14,00
30 000	3,90	5,85	7,80	9,70	0,088	13,60
35 000	3,80	5,70	7,60	9,50	0,086	13,30
40 000	3,70	5,55	7,40	9,30	0,084	13,00
50 000	3,60	5,40	7,20	9,00	0,081	12,60
60 000	3,50	5,25	7,00	8,70	0,079	12,20
70 000	3,40	5,10	6,80	8,50	0,077	11,90
80 000	3,35	5,05	6,70	8,40	0,076	11,75
90 000	3,30	5,00	6,60	8,30	0,075	11,60
100 000	3,25	4,95	6,50	8,20	0,074	11,45
150 000	3,10	4,70	6,20	7,80	0,070	10,90
200 000	3,00	4,50	6,00	7,50	0,067	10,50
250 000	2,90	4,30	5,80	7,20	0,065	10,10
300 000	2,80	4,20	5,60	7,00	0,063	9,80
350 000	2,75	4,10	5,50	6,90	0,062	9,65
400 000	2,70	4,00	5,40	6,80	0,061	9,50
500 000	2,65	3,90	5,30	6,60	0,059	9,25
600 000	2,60	3,80	5,20	6,40	0,058	9,00
700 000	2,55	3,75	5,10	6,30	0,057	8,85
800 000	2,50	3,70	5,00	6,20	0,056	8,70
900 000	2,45	3,65	4,90	6,10	0,055	8,55
1 000 000	2,40	3,60	4,80	6,00	0,054	8,40
1 250 000	2,30	3,45	4,60	5,80	0,052	8,10
1 500 000	2,20	3,30	4,45	5,60	0,050	7,80
2 000 000	2,10	3,20	4,30	5,40	0,049	7,50
2 500 000	2,05	3,10	4,15	5,20	0,047	7,25
3 000 000	2,00	3,00	4,00	5,00	0,045	7,00
4 000 000	1,95	2,95	3,90	4,90	0,044	6,85
5 000 000	1,90	2,90	3,80	4,80	0,043	6,70
6 000 000	1,85	2,85	3,70	4,70	0,042	6,55
7 000 000	1,80	2,80	3,65	4,60	0,041	6,40
10 000 000	1,75	2,70	3,55	4,50	0,040	6,30

*) Die Bausumme wird nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfällt.

Digitized by Google

Dachdecker- und Klempnerarbeiten .	Metallverzierungen
—	Putz- und Stuckarbeiten
—	Bildhauerarbeiten mit Modellen
—	Bekleidung aus Stuckmarmor, Terrazzo, Mosaik, Steinplatten, Fliesen, Kacheln, Formsteinen, Terrakotten usw.
—	Tischler-, Glaser- und Schlosserarbeiten
—	Maler- und Tapezierarbeiten
—	Heizungs- und Lüftungsanlagen, Ofensetzerarbeiten
—	Wasser- und Gasleitungen, Abortanlagen
—	Elektrische und Maschinenanlagen
Pflasterungen, Wege- und Gartenanlagen .	—
Insgemein	Unvorhergesehene Arbeiten des Ausbaues.

§ 6. Berechnung der Gebühren.

32. Die Gesamtgebühren werden nach Maßgabe der beigefügten Tafel in Hundertsteln der Bausumme berechnet, welche mit den Gruppen und mit steigendem Ausbaue wachsen, dagegen mit steigenden Bausummen abnehmen.

33. Die Grundgebühren der Tafel in den Gruppen I bis IV entsprechen den am Kopfe der Spalten 2 bis 5 bezeichneten Mindestsätzen für das Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme und werden für jedes weitere Hundertstel dieses aus dem Kostenanschlage bzw. aus der Bauabrechnung nachzuweisenden Verhältnisses um den in Spalte 6 angegebenen Zuschlag erhöht.

34. Solange die Ausbausumme nicht nachgewiesen ist, wird das Ausbauverhältnis zu den Mindestsätzen der Tafel angenommen. Nach geschehener Lieferung des Entwurfes steht es dem Architekten jedoch zu, den Nachweis durch Vorlage eines Kostenanschlages zu führen.

35. An Einzelgebühren werden berechnet

für Vorarbeiten	a) Vorentwurf	10	30	40	Hundertstel der in der Tafel angegebenen Sätze	
	b) Entwurf.	20				
	c) Kostenanschlag . . .	7	10			
	d) Bauvorlagen	3				
für Ausführungsarbeiten	e) Bauzeichnungen. . .	20	40	60		
	und Werkzeichnungen	20				
	f) Bauleitung.	20	20			

Beispiele der Gebührenberechnung.

Beispiel 1. Villa. Gebühren für Vorentwurf und Entwurf. Nach der Kostenschätzung: Bausumme 100 000 ℳ

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} \cdot 4{,}95 \cdot 0{,}30 = 1485\ ℳ.$$

Beispiel 2. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Vorarbeiten. Nach dem Kostenanschlage: Bausumme 100 000 ℳ, Ausbausumme 50 000 ℳ, Ausbauverhältnis $= {}^{50}/_{100}$

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} \left[4{,}95 + (50 - 30)\,0{,}074\right] 0{,}40 = 2572\ ℳ.$$

Beispiel 3. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Arbeiten.

Nach dem Kostenanschlage: Bausumme 100 000 ℳ, Ausbausumme 50 000 ℳ, Ausbauverhältnis $= {}^{50}/_{100}$.

Nach der Bauabrechnung: Bausumme 120 000 ℳ, Ausbausumme 66 000 ℳ, Ausbauverhältnis $= {}^{55}/_{100}$.

Gruppe II:

$$\frac{100\,000}{100}(4{,}95 + 20 \cdot 0{,}074)\,0{,}40 + \frac{120\,000}{100}(4{,}70 + 25 \cdot 0{,}070)\,0{,}60 = 7216\ ℳ.$$

III. Gebühren der Ingenieure.

§ 7. Art der Berechnung.

36. Für die Gebührenberechnung werden die Ingenieurarbeiten, sofern sie nicht als Hochbauten nach II. zu verrechnen sind, in drei Gruppen geteilt, u. zw. in solche, die

Digitized by Google

A. nach Hundertsteln der Baukosten (§ 8),
B. nach der Länge der Linie (§ 9),
C. nach der Gröfse der Fläche vergütet werden (§ 10).

Die Gruppe A. zerfällt in vier Bauklassen 1., 2., 3. und 4.

37. Für die Arbeiten der Gruppen B. und C. werden Gebührengrenzen für einfache und schwierige Verhältnisse angegeben. Die zu zahlenden Gebühren sind in jedem Falle vertragsmäfsig zwischen diesen Grenzen mit dem Bauherrn zu vereinbaren.

38. Die Frage, ob einfache oder schwierige Verhältnisse vorliegen, wird gleichzeitig nach der Geländegestaltung, nach den wirtschaftlichen Umständen und nach technischen Gesichtspunkten entschieden.

39. Alle Arbeiten, deren Baukosten den Betrag von 5000 ℳ nicht erreichen, dürfen nach den Sätzen für Zeitgebühren (§ 4, 25) verrechnet werden.

40. Die Anteile der Einzelleistungen an der Gesamtgebühr werden für Ingenieurarbeiten folgendermafsen festgesetzt:

Bezeichnung der Einzelleistung	Teilbeträge in Hundertsteln
Vorentwurf und Kostenschätzung	25
Entwurf	30
Kostenanschlag	
Bauvorlagen	5
Bau- und Werkzeichnungen	10
Oberleitung der Bausausführung	30

§ 8.

Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Bausumme vergütet werden.

41. Hierher gehören alle Bauwerke, welche nicht nach den Bestimmungen für die Gruppen B. § 9 und C. § 10 zu berechnen sind, nämlich:

Bauklasse 1.

Bohlwerke, Brücken (gerade feste bis 10 m Spannweite); einfache Deichsiele; einfache Durchlässe; Erdarbeiten jeder Art; Anlagen zur Fortleitung und Verteilung der Elektrizität; Faschinenbauten; Felssprengungen; Futtermauern, Gerinne für Wasserleitungen ohne Kunstbauten; einfache Hafenanlagen ohne Kunstbauten; Pflasterungen als Uferdeckung; Rohrleitungen ohne Abzweige; einfache Strafsenanlagen; Strafsenbefestigungen; Stützmauern mit einfacher Gründung; Trockenmauern; einfache Uferdeckungen; einfache feste Wehre.

Bauklasse 2.

Einfache Anschlufsgleise und Bahnhöfe mit mehr als 2 Nebengleisen für jedes Hauptgleis (kleinere Bahnhöfe werden mit den Strecken-km nach B. § 9 verrechnet); unterirdische Behälter für Flüssigkeiten; feste Brücken von 10 bis 30 m Spannweite; Anlagen zur Entwässerung von Städten; schwierigere Deichsiele; Düker; schwierigere Durchlässe; Fabrikgebäude mit maschineller Einrichtung; kleine Fähren für Fufsgänger und Wagen; Flufskanalisierungen; Flufsregelungen; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Gas; Gründungen, ausschliefslich der Luftdruck- und Gefriergründungen; schwierigere Hafenanlagen; Heizungsanlagen; Hellinge; Installationen für Elektrizität, Gas und Wasser; einfache Konstruktionen für Hochbauten; Lüftungsanlagen; Schöpfwerkanlagen; einfache Schiffschleusen; Speicher mit maschineller Einrichtung; schwierige Strafsenanlagen; kleine Talsperren; einfache Tunnel; Ufermauern mit schwieriger Gründung; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Wasser; Wasserbauten für Kraftgewinnungsanlagen; einfache bewegliche Wehre; schwierige feste Wehre.

Bauklasse 3.

Schwierige Anschlufsgleise und Bahnhöfe; oberirdische Behälter für Gase und Flüssigkeiten; hohe Wasserleitungsbrücken; bewegliche Brücken; schwierige Konstruktionen für Hochbauten; Doppelbrücken; schiefe Hausteinbrücken (falls der Steinschnitt ausgetragen wird); schwierige und grofse Brücken über 30 m Spannweite; Fähranstalten für Eisenbahnen; Gefriergründungen; geneigte Ebenen; Luftdruckgründungen; Schiffahebewerke, schwierige Schiffschleusen, Schiffswerften, Schwimmdocks; grofse Talsperren, hohe Talübergänge; Trockendocks; schwierige Tunnel; schwierige bewegliche Wehre.

Digitized by Google

Bauklasse 4.

Maschinentechnische Anlagen aller Art, insbesondere Azetylenanlagen; Anlagen Verarbeitung von Abfallstoffen; Appreturanstalten; Aufbereitungen; Aufzüge; Ba anstalten; Bagger; Bergwerksmaschinenanlagen; Brauereien, Brennereien; chemis Fabriken; Cementfabriken; Dampfanlagen, Dampfkessel, Dampfmaschinen, Dam leitungen, Dampfüberhitzer usw.; Destillieranlagen; Druckluftanlagen; Eisenerzeugu anlagen; Anlagen zur Erzeugung, Aufspeicherung und Umformung des elektrisc Stromes; Färbereien; Feuerlöschanlagen; Gebläse; Gerbereien; Gesteinbohranlag Gießereien; Glashütten; Hammerwerke; Hebewerke; Hochöfen; Holzbearbeitungsanlag Holzschleifereien; Hüttenwerke; hydraulische Kraftanlagen; Kälteerzeugungsanlag Karbidfabriken; Kesselschmieden; Koch- und Waschküchen; Kokereien; Kompresso für Luft und Gase; Kondensationen; Kühlanlagen; Ladevorrichtungen; landwirtsch liche mechanische Einrichtungen; Lederbearbeitungsanlagen; Malzereien; Maschin fabriken; Molkereien; Mühlen; Oefen für technische Zwecke; Papierfabriken; Press Pumpwerke; Sägewerke; Schachtanlagen; Schiffe; Separationsanlagen; Spinnerei Transmissionen; Transportvorrichtungen; Trockenanstalten; Walzwerke; Waschanstalt Wasserdruckwerke; Wasserkraftanlagen; Webereien; Werkzeugmaschinen; Windkr maschinen; Zuckerfabriken usw.

Gebühren der Ingenieure nach Hundertsteln der Bausumme.

Bausumme	Bauklasse				Bausumme	Bauklasse			
ℳ	1	2	3	4	ℳ	1	2	3	4
5000	8,0	12,0	16,0	16,0	200000	3,4	5,2	7,5	5,
10000	6,7	10,5	13,4	13,4	300000	3,2	4,8	6,8	4,
20000	5,8	8,7	11,7	11,7	400000	3,2	4,6	6,4	4,
30000	5,3	7,9	10,6	10,6	500000	3,2	4,4	6,0	4,
40000	4,9	7,4	9,9	9,9	600000	3,2	4,3	5,6	4,
50000	4,7	7,0	9,3	9,3	700000	3,1	4,2	5,3	4,
60000	4,5	6,8	9,2	8,8	800000	3,1	4,1	5,2	4,
70000	4,3	6,5	9,0	8,4	900000	3,0	4,1	5,1	4,
80000	4,1	6,3	8,3	8,0	1000000	3,0	4,0	5,0	4,
90000	4,0	6,2	8,6	7,7	2000000	2,7	3,6	4,5	3,
100000	3,9	6,0	8,5	7,3	3000000	2,4	3,2	4,0	3,
150000	3,5	5,6	7,9	6,2					

42. Die Gebührensätze für diese vier Bauklassen sind nach der folgenden Zusammenstellung in Hundertsteln der Bausumme zu berechnen. Die Bausumme w nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfi

§ 9.

B. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Länge der Linie vergütet werden.

Die Leistungen des Ingenieurs sind die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1, 2a)]: Bereisung der Linie. Eintragung Linie in Abzeichnungen vorhandener Karten, Anfertigung eines Höhenplanes auf Gru von Höhenaufnahmen, Erläuterungsbericht, Kostenschatzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1, 2b) c) d)]: Aufstellung der besonderen V arbeiten unter Benutzung vorhandener, nach Bedarf zu ergänzender Karten; Auftrag des Höhenplanes und etwa erforderlicher Querschnitte; Aufstellung der Regelentwü für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Streckenbauwerke; läuterungsbericht, Kostenanschlag. Alle Einzelbauwerke, welche nicht nach Re entwürfen hergestellt werden können, werden nach § 8 nach Maßgabe ihrer Bausum besonders vergütet.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

44. Deichanlagen, Straßenanlagen.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen Verhältnissen	schwierigen Verhältnissen
800 ℳ	2400 ℳ

Digitized by Google

45. Haupteisenbahnen, Neben-, Klein- und Strafsenbahnen aller Betriebsarten, Leitungs- und Schiffahrtskanäle.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen Verhältnissen	schwierigen Verhältnissen
1200 ℳ	3600 ℳ

§ 10.

C. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Fläche vergütet werden.

46. Die Leistungen des Ingenieurs sind in dieser Gruppe die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1. 2a)]: Begehung der Fläche, Eintragung des Vorentwurfes in vorhandene Lage- und Höhenpläne. Darstellung der allgemeinen Anordnungen der beabsichtigten Anlage. Erläuterungsbericht, Kostenschätzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1. 2b) c) d)]: Beschaffung aller Unterlagen für die Bauausführung unter Benutzung vorhandener Lage- und Höhenpläne; Aufstellung der Regelentwürfe für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Hauptmafse der nicht nach Regelentwürfen herzustellenden Einzelbauwerke, welche nach § 8 vergütet werden; Erläuterungsbericht. Kostenanschlag.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

47. Bebauungspläne.

Die Gebühren, welche den Teilleistungen a) und b) in § 7, 40 entsprechen und eintretendenfalls nach dem Verhältnis 1:1 zu teilen sind, betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen Verhältnissen	schwierigen Verhältnissen
20 ℳ	60 ℳ

48. Bewässerungs- und Entwässerungsanlagen für landwirtschaftliche Zwecke.

Die Gebühren betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen Verhältnissen	schwierigen Verhältnissen
30 ℳ	90 ℳ.

F. Gesetze zum Schutze des gewerblichen Eigentums.

a. Internationale Union zum Schutze des gewerblichen Eigentums.

(Auszug aus den Bestimmungen.)

Die Angehörigen oder Eingesessenen, die in irgend einem der Vertrag schliefsenden Staaten vorschriftsmäfsig eine Patentanmeldung eingereicht haben, genielsen in den anderen Staaten vom Tage der ersten Anmeldung an ein Prioritätsrecht

1. von zwölf Monaten, wenn die Anmeldung im Auslande auf ein Patent gerichtet war, und
2. von vier Monaten, wenn die Anmeldung im Auslande sich auf Gebrauchsmuster bezog; gleichviel in den Fällen zu 1 und 2, ob auf die Erfindung ein Patent oder Gebrauchsmuster nachgesucht wird.

Für die Bemessung der für das Prioritätsrecht bestimmten Frist ist nach ständiger Rechtsprechung des deutschen Patentamtes die erste von mehreren Auslands-Anmeldungen mafsgebend.

Zur Ausübung der Erfindung ist eine Mindestfrist von drei Jahren festgesetzt, die in den meisten Staaten von dem Tage der dortigen Anmeldung läuft. Nichtausübung kann unter Umständen entschuldigt werden. Bzgl. der Ausübung (nicht aber der Prioritätsfristen) bleiben die früheren Uebereinkommen in Kraft, wonach in Italien und der Schweiz eine patentierte Erfindung für ausgeübt gilt, wenn die Ausübung in Deutschland (sofern sie dort gleichfalls durch Patent geschützt) erfolgt ist und umgekehrt.

Digitized by Google

b. Die wichtigsten Bestimmungen der deut

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung Geschäftsg
Belgien. (Union.)	Vom Tage der Anmeldung 20 Jahre. Bei gleichlautenden früheren Auslandspatenten läuft das belg. Patent („Einführungspatent") mit demjenigen von längster Dauer ab.	1. Gesuch an den Minister. 2. 2 Beschreibungen, französisch, vlämisch, deutsch, für Ausländer mindestens 1 französisch. 3. 2 Satz Zeichnungen auf Pausleinwand 34 cm hoch, 21 bis 22 oder 44 oder 66 cm breit; links Rand von 40 bis 50 mm. 4. Vollmacht, nicht beglaubigt. 5. Erste Jahrestaxe.	Keine Vorpr Erteilung oh rantie, vorl lich der R Dritter auf des Anmel
Deutsches Reich. (Union.) *)	Von dem auf die Anmeldung folgenden Tage an 15 Jahre. Das deutsche Patent wird durch gleichlautende ältere Auslandspatente in seiner Dauer nicht beeinflußt.	1. Gesuch an das K. Patentamt. 2. 2 Beschreibungen. 3. 1 Hauptzeichnung auf Karton 33 cm hoch, 21, ausnahmsweise 42 cm breit. 4. 1 Nebenzeichnung auf Pausleinwand desselben Formats. 5. Vollmacht, nicht beglaubigt. 6. Proben bei Verfahren zur Herstellung neuer chem. Stoffe; bei Farbstoffen Ausfärbungen auf Wolle, Seide od. Baumwolle. 7. Anmeldegebühr 20 M.	Vorprüfung, meldeabteil (Entscheid über Patent keit), nach 2 r licher Ausl und Prüfun etwaigen E sprüche Patenterteil
Frankreich. (Union.)	Vom Tage der Einreichung ab je nach Antrag 5, 10 oder 15 Jahre (da die Gebühren dieselben, Anmeldung auf 15 Jahre üblich); dabei darf die Dauer eines französ. Patents („Einführungspatent") diejenige eines früher erteilten Auslandspatents nicht überschreiten.	1. Gesuch an den Minister für Handel und Industrie. 2. 2 französ. Beschreibungen. 3. 2 Zeichnungen wie in Deutschland. 4. Vollmacht, nicht beglaubigt. 5. Erste Jahrestaxe 100 Francs (Zusatzpatente 20 Francs). 6. Verzeichnis der eingesandten Unterlagen.	Keine Prüfur Neuheit ode tentfähigkeit. fertigung de kunde 3 bis nate nach de meldung

*) Eine Vorlage zu einem neuen Patentgesetz liegt zur Zeit dem Reichstag Beratung vor. April 1914.

Digitized by Google

und einiger ausländischen Patentgesetze.*)

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
Zusatz- (Verbesserungs-) patente werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	1. Jahr 10 Frcs. 2. „ 20 „ für jedes weitere Jahr 10 Frcs mehr bis 200 Frcs. Fälligkeit: Jahrestag der Einreichung, 1 Monat Frist; in den folgenden 5 Monaten 10 Frcs. Zuschlag. Für Zusatzpatente keine Gebühren, wenn dem Inhaber des Hauptpatents erteilt.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	3 Monate nach Einreichung der Anmeldung sind die Unterlagen für jedermann zugänglich. Patentschriften werden nicht ausgegeben, aber kurze Auszüge amtlich veröffentlicht.
werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	Für alle Patente: Bei der Anmeldung 20 M. für das 1. Jahr: 30 „ Nur für Hauptpatente: für das 2. Jahr: 50 M. für jedes folgende Jahr 50 M. mehr, im 15. Jahre also 700 M. Frist 6 Wochen nach der jährlichen Wiederkehr des auf die Anmeldung des Patents folgenden Tages; innerhalb weiterer 6 Wochen 10 M Zuschlag.	Ausübung innerhalb drei Jahren vom Tage der Anmeldung. Einfuhr gestattet.	Unterlagen während der 2 monatigen Auslage beim Patentamt für jedermann zur Einsicht frei. Patentschriften zum Preise von 1 M werden ausgegeben, außerdem Auszüge im Patentblatt.
werden erteilt und laufen mit d. Hauptpatent ab. Während d. 1. Jahres des Hauptpatents hat nur dessen Inhaber das Recht, ein solches anzumelden.	Bei Anmeldung eines Hauptpatents 100 Frcs. (gilt zugleich als 1. Jahrestaxe), eines Zusatzpatents 20 Frcs. Für Hauptpatente vom 2. Jahr ab jährlich 100 Frcs. Aufschlag: 5, 10, 15 Frcs. für 1-, 2- bzw. 3 monatige Frist.	Ausübung innerhalb drei Jahren; die Einfuhr des pat. Gegenstandes nach Frankreich aus einem Unionsstaate zieht nicht mehr den Verfall des französischen Patents nach sich; doch gilt diese nicht als Ausübung.	Unterlagen nach Erteilung eines Patents für jedermann im Ministerium für Handel u. Industrie einzusehen. Nach Zahlung der 2. Jahrestaxe werden Beschreibungen u. Zeichnungen veröffentlicht. (Patentschriften z. Pr. v. 1 Fr.) Jährliche Ausgabe eines Verzeichnisses der erteilten Patente, alle 3 Monate Bekanntmachung derselben.

*) Nach Dr. L. Fischer u. P. C. Roediger, Die Patentgesetze, Berlin 1905, 1907 und 1909.

Digitized by Google

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung. Geschäftsgang
Großbritannien und Irland (Union.)	Vom Tage der Anmeldung ab vorläufig 6 Monate und nach Patenterteilung 14 Jahre von obigem Termin an gerechnet. Verlängerung um 7, ausnahmsw. um 14 Jahre möglich. Etwaige früher ablaufende Auslandspatente haben keinen Einfluß	Für d. vorläuf. Patent: 1. 2 vorläufige englische Beschreibungen. 2. 2 Zeichnungen auf glattem, weißem Zeichenpapier, 13" Höhe, 8" oder 16" Breite, ringsum $\frac{1}{2}$" breiter Rand. 3. Vollmacht, nicht beglaubigt. Erklärung des Erfinders. 4. Anmeldegebühr 1 £. Für d. endgültige Patent: 5. 2 engl. Beschreibungen. 6. 2 Zeichnungen i. obigem Format. 7. Anmeldegebühr 3 £. Bei sofortiger Erlangung eines endgültigen Patents die unter 3, 5, 6 angegebenen Unterlagen u. 4 £.	Prüfung nur auf formelle Richtigkeit der Unterlagen und darauf, daß die Erfindung nicht schon vor < 50 Jahren in G. patentiert worden ist, worauf vorläufiger Schutz auf 6 Monate (bis zur Patenterteilung) beginnt. Nach Eingang, bzw. Annahme der endgültigen Beschreibungen Auslage auf 2 Monate, Einspruch zulässig; dann Erteilung des endgültigen Patents.
Italien. (Union.)	Patentschutz tritt mit dem Tage der Anmeldung ein; die Dauer des Patents berechnet sich vom letzten Tage des Vierteljahres, während dessen die Anmeldung erfolgte, u. kann nach Wahl 1 bis 15 Jahre betragen. Bei gleichlautenden früheren ausländischen Patenten läuft das ital. („Einführungspatent") mit demjenigen ab, dessen Dauer die längste ist.	1. Gesuch mit Angabe der gewünschten Patentdauer. 2. 3 ital. oder französ. Beschreibungen auf Stempelpapier. 3. 1 Kartonzeichnung und 2 Leinwandpausen bis zu 33 · 42 cm, ringsum Randlinien, außerhalb dieser etwaige Erläuterungen. 4. Vom ital. Konsul beglaubigte Vollmacht. 5. Bei Einführungspatent die Urkunde für das ausländ. Patent im Original oder in beglaubigter Abschrift. (Für Zusatzpatente dieselben Unterlagen.)	Prüfung auf Neuheit findet nicht statt. Das Gesuch wird bei der nächsten Präfektur eingereicht und von hier an das Handelsministerium eingesandt. Kurze Zeit nachher Ausfertigung der Urkunde. 3 Monate nach Patenterteilung öffentliche Auslegung der Unterlagen.
Oesterreich. (Union.)	beginnt mit dem Tage der Bekanntmachung im Patentblatt u. beträgt längstens 15 Jahre. Verfall früherer Auslandspatente ohne Einfluß.	1. Gesuch in deutscher Sprache mit 6 K. gestempelt. 2. 2 Beschreibungen (deutsch). Für 1 Bogen oder 2 Blatt —.30 K. Stempelgebühr. 3. 1 Zeichnung auf Karton 33 oder 34 cm Höhe, 21 oder 42 oder 63 cm Breite, 2 cm Randlinie, außerdem oben 3 cm freier Raum. Stempelgebühr pro Blatt kleineren oder mittleren Formats —.30 K., großen Formats —.60 K. 4. 1 Zeichnung auf Pauseinwand (gleiches Format). 5. Vollmacht nicht beglaubigt. Stempelgebühr 1 K. 6. Anmeldegebühr 20 K.	Vorprüfung auf Neuheit, Abhängigkeit und Schutzgrenzen, Patentfähigkeit und Vorschriftsmäßigkeit der Unterlagen; nach 2monatiger Auslage Patenterteilung.

Digitized by Google

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
werden erteilt und gelten für die Dauer des Hauptpatents.	Bei Anmeldung einstweiligen Schutzes 1 £; bei Einreichung der endgültigen Beschreibung 3 £ (oder sogleich zusammen 4 £). Bei Ausfertigung des Patents für die Prüfung auf Neuheit 1 £. Vor Ablauf von 4 bzw. 8 Jahren seit dem Patentdatum für die Erneuerungsbescheinigung 50 bzw. 100 £. Oder statt letzterer Gebühren vor Ablauf des 4., 5., 6., 7. Jahres je 10 £, des 8., 9. Jahres je 15 £, des 10. bis 13. Jahres je 20 £. Fristverlängerung bis zu 3 Monaten bei 10 £ Zuschlaggebühr. Für Zusatzpatente keine Erneuerungsgebühren.	Ausübung siehe Unions-Bestimmungen. Einfuhr gestattet. Dem inländischen Bedarf muß durch Fabrikation im Inlande entsprochen werden. (Zurücknahme des Patents zu befürchten, wenn die Erfindung nach 4 Patentjahren größtenteils oder ganz außerhalb Gs. ausgeführt wird.)	Nach Annahme der vollständigen Beschreibungen kann jedermann im Patentamt gegen 1 s von den Unterlagen Einsicht nehmen; 3 Wochen später Ausgabe von Patentschriften (8 d pro Stück); außerdem Veröffentlichung durch den Comptroller im Official Journal.
werden erteilt und gelten stets für die ganze Dauer des Hauptpatents; innerhalb 6 Monaten nach Erteilung eines Patents kann nur der Patentinhaber Verbesserungen anmelden.	Bei der Anmeldung: 10 Lire × der Anzahl Jahre, für die das Patent nachgesucht wird, + 40 Lire erste Jahrestaxe (z. B. 5jähr. Pat.: 90 Lire). Jahrestaxen: 2.–3. Jahr: je 40 Lire 4.–6. „ : „ 65 „ 7.–9. „ : „ 90 „ 10.–12. „ : „ 115 „ 13.–15. „ : „ 140 „ Für Zusatzpatente eine einmalige Abgabe von 20 Lire. Gebühren für Einführungspatent = Hauptpatent. Für Verlängerung von Patenten: (40+10 × Anzahl der Jahre, welche das Pat. verlängert werden soll) + der am Anfang der Verlängerungsperiode fälligen Jahrestaxe + Stempelspesen (2,4 Lire).	Bei Patenten von 1 bis 5 jähr. Dauer Ausübung innerhalb 1 Jahres, bei 6 bis 15jähriger Dauer innerhalb 2 Jahre. Einfuhr gestattet.	Gedruckte Verzeichnisse der erteilten Patente werden monatlich veröffentlicht; Unterlagen 3 Monate nach Erteilung zugänglich. Patentschriften nicht ausgegeben; Beschreibungen u. Zeichnungen in monatlich erscheinenden Heften veröffentlicht.
werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	Bei Anmeldung von Haupt- oder Zusatzpatent 20 K. 1. Jahr 40 K. 9. Jahr 240 K. 2. „ 50 „ 10. „ 280 „ 3. „ 60 „ 11. „ 360 „ 4. „ 80 „ 12. „ 440 „ 5. „ 100 „ 13. „ 520 „ 6. „ 120 „ 14. „ 600 „ 7. „ 160 „ 15. „ 680 „ 8. „ 200 „ Termin: Jahrestag der Bekanntmachung der Anmeldung im Patentblatt, während 3 Monate nachher Zuschlag 10 K. Für Zusatzpatente eine einmalige Gebühr von 50 K.	Ausübung hat innerhalb 3 Jahre nach Erteilung des Patents zu erfolgen oder muß mindestens gesichert sein. Einfuhr ist gestattet.	Einsichtnahme der Patentunterlagen während 2 Monate. Gedruckte Patentschrift zum Preise v. 1 K. nach Erteilung des Patents.

Digitized by Google

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
Niederlande u. Kolonien. (Union.)	15 Jahre vom Tage der Erteilung ab.	Für Ausländer Vertreter. Alle Unterlagen in fünffacher Ausfertigung.	Prüfung auf Neuheit findet nicht statt. Nach Bekanntmachung der Anmeldung 6 monatige Auslegung zum Zwecke des Einspruchs. Patenterteilung.
Rußland.	15 Jahre vom Tage der Unterzeichnung der Patenturkunde; erlischt (als „Einführungspatent"), wenn vor Nachsuchung erteilte, gleiche Auslandspatente vorhanden, mit demjenigen kürzester Dauer, sofern letztere nicht wegen Nichtzahlung der Taxe verfallen sind.	1. 2 Beschreibungen in russischer Sprache. 2. 2 Zeichnungen 330 mm hoch, 203 oder 406 oder 609 mm breit, ringsum Randlinie 25 mm. 3. Vollmacht beglaubigt. 4. Event. beglaubigte Abschrift des Auslandspatents von kürzester Dauer. 5. Anmeldegebühr 30 Rubel.	Vorprüfung; Ausstellung eines Schutzscheines und Bekanntmachung der Anmeldung. Beschlußfassung durch ein Komitee für technische Angelegenheiten beim Departement für Handel u. Manufakturen; bei Patenterteilung nach Einzahlung der ersten Jahresrate Ausstellung der Urkunde.
Schweden. (Union.)	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab, ohne Beeinflussung durch ausländische Patente.	1. Gesuch an das Kgl. Patentamt Stockholm. 2. 2 Beschreibungen in schwedischer Sprache. 3. 1 Karton und 1 Leinwandzeichnung nach deutschem Format. 4. Vollmacht nicht beglaubigt.	Vorprüfung; dann Bekanntmachung und 60tägige Auslage der Unterlagen zur öffentlichen Einsichtnahme, hierauf Patenterteilung.
Schweiz. (Union.)	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab. Für Arzneimittel 10 Jahre.	1. 2 Beschreibungen in deutscher, französischer oder italienischer Sprache. 2. 2 Zeichnungen (1 auf Karton, 1 auf Pauseinwand, Format wie Deutschland). 3. Vollmacht nicht beglaubigt. 4. Für Patente auf Herstellung chemischer Stoffe eine Probe, sowie Proben der Ausgangsstoffe. 5. Anmeldegebühr von 20 Frcs. und 1. Jahresgebühr (20 Frcs).	Keine Vorprüfung auf Neuheit. Aufgebot oder Bekanntmachung zum Zwecke des Einspruchs findet nicht statt. Sind die Unterlagen in Ordnung, so erfolgt Erteilung der Urkunde und Bekanntmachung.

Digitized by Google

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
werden erteilt dem Anmelder.	Bei der Anmeldung 25 Gld. Prüfungsgebühr. Für das 1., 2., 3. Jahr je 50 Gld., 4., 5., 6. „ „ 70 „ 7., 8., 9. „ „ 90 „ 10., 11., 12. „ „ 110 „ 13., 14., 15. „ „ 130 „ Fällig am letzten Tage der Datierung des Patents; nur die erste Jahresgebühr ist am letzten Tage des auf die Datierung folgenden Monats zu zahlen. Zuschlag von 5 Gld. bei Zahlung nach dem Fälligkeitstage; Zuschlag von 25 Gld. nach einem weiteren Monat.	Ausübung innerhalb 3 Jahren. Nichtigkeitsklage innerhalb der ersten 5 Jahre von jedermann. Zu jeder Zeit von dem Inhaber eines kollidierenden Patents.	Veröffentlichung mit Beschreibung durch Amtsblatt des Bureau voor den Industrieelen Eigendom innerhalb 8 Tage nach Erteilung; keine Patentschriften.
werden erteilt, endigen mit dem Hauptpat., dritte Personen können erst ein Jahr nach Veröffentlichung des Hauptpatents ein Abhängigkeitspatent erlangen.	Anmeldegebühr bei Hauptpatent und Zusatzpatent 30 Rubel. 1. Jahr 15 Rubel 9. Jahr 125 R. 2. „ 20 „ 10. „ 150 „ 3. „ 25 „ 11. „ 200 „ 4. „ 30 „ 12. „ 250 „ 5. „ 40 „ 13. „ 300 „ 6. „ 50 „ 14. „ 350 „ 7. „ 75 „ 15. „ 400 „ 8. „ 100 „ Für Zusatzpatente eine einmalige Gebühr von 20 Rubel.	Ausübung vor Ablauf von 5 Jahren. Einfuhr gestattet.	Druck der Patentschrift nach Bewilligung und noch vor Erteilung des Patents.
an den Inhaber des Hauptpatents für die Dauer desselben erteilt.	Mit dem Gesuch 20 Kronen, für Zusatzpatente sonst keine Gebühren. Hauptpatente: für das 2. bis 5. Jahr je 25 Kronen; für das 6. bis 10. Jahr je 50 Kronen, für das 11. bis 15. Jahr je 75 Kronen voraus zu bezahlen; innerhalb 90 Tage nach dem Jahrestag der Anmeldung 29% Zuschlag.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	Durch Auslage der Anmeldung sind die Unterlagen für jedermann zugänglich. Patentschriften werden ausgegeben nach Erteilung zum Preise v. 1 Kr.
laufen mit d. Hauptpatent ab.	Hinterlegungsgebühr (Anmeldegebühr) 20 Frcs., 1. Jahresgebühr 20 Frcs., 2. Jahresgebühr 30 Frcs., 3. Jahresgebühr 40 Frcs. usw. je 10 Frcs. mehr bis 160 Frcs. für das 15. Jahr.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	4 bis 8 Wochen nach Erteilung. Patentschriften in deutsch oder französisch oder italienisch. Preis 1 Frc., Ausland 1,20 Frcs.

Digitized by Google

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
Ungarn. (Union.)	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab; Verfall früherer Auslandspatente ohne Einfluss	1. Gesuch in ungarischer, event. kroatischer und italienischer Sprache mit 6 K. gestempelt. 2 Anmeldegebühr 20 Kronen. 3. Vollmacht beglaubigt von einem deutschen Amtsgericht. 4. 2 Beschreibungen der Erfindung in ungarischer Sprache der Bogen mit —.30 K. gestempelt. 5. 2 Zeichnungen, eine Karton- und eine Leinwandzeichnung, das Blatt mit —.30 K. gestempelt. Format und Ausführung siehe Oesterreich.	Keine Vorprüfung auf Neuheit; nach Bekanntmachung der Anmeldung 2monatige Auslage, dann Ausstellung der Patenturkunde.
Vereinigte Staaten von Nord-Amerika. (Union.)	17 Jahre vom Tage der Erteilung ab. Auslandspatente ohne Einfluß.	1. Gesuch an den Patentkommissar. 2. 1 englische Beschreibung. 3. 1 Zeichnung auf Karton 15" Höhe × 10" Breite, 1" Randlinie. 4. Vollmacht und eidesstattliche Versicherung des Erfinders, nach bestem Wissen der erste und wahre Erfinder zu sein, vom amerikanischen Konsul beglaubigt. 5. Anmeldegebühr 15 Dollar.	Vorprüfung. Nach Zahlung v. 20 Dollar Schlußtaxe Erteilung des Patents.

c. Deutsche Bestimmungen über die Anmeldung von Erfindungen.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898.)

Auf Grund des § 20 Abs. 2 des Patentgesetzes vom 7. April 1891 werden die nachfolgenden Bestimmungen über die Erfordernisse einer Patentanmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung einer Erfindung behufs Erteilung eines Patentes geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind.

§ 2. Das Gesuch muss enthalten:

a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
b) eine für die Veröffentlichung (§ 23 Abs. 2 des Patentgesetzes) geeignete Benennung der Erfindung;
c) die Erklärung, dass für die Erfindung ein Patent nachgesucht werde. Bei Zusatzanmeldungen ist die Angabe des Hauptpatentes nach Gegenstand und Nummer oder der Hauptanmeldung nach Gegenstand und Aktenzeichen erforderlich;
d) die Erklärung, dass die gesetzliche Gebühr von zwanzig Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
e) die Aufführung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;
f) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);
g) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ 3. Die Beschreibung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen. Dasselbe gilt für alle Nachträge. Die Schriftstücke, welche die Beschreibung bilden, müssen sowohl

Digitized by Google

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung. Einfuhr	Veröffentlichung. Patentschriften
nur an den Inhaber des Stammpatents; Ablauf mit dem Hauptpatent.	Für Nachsuchung aller Patente eine Anmeldegebühr von 20 Kronen. 1. Jahr 40 K. 9. Jahr 160 K. 2. „ 50 „ 10. „ 200 „ 3. „ 60 „ 11. „ 250 „ 4. „ 70 „ 12. „ 300 „ 5. „ 80 „ 13. „ 350 „ 6. „ 100 „ 14. „ 400 „ 7. „ 120 „ 15. „ 500 „ 8. „ 140 „ Für Zusatzpatente nur die erste Jahresgebühr. Frist 60 Tage nach Beginn des Patentjahres, nach 30 Tagen bereits Zuschlag von 20 K.	Ausübung vor Ablauf von drei Jahren. Einfuhr gestattet.	Einsichtnahme der Unterlagen während 2 Monate vom Tage der Bekanntmachung an. Gedruckte Patentschriften in ungarischer Sprache zum Einzelpreise von 1 Krone.
werden nicht erteilt.	Mit dem Gesuch 15 Dollar. Bei der Erteilung 20 Dollar.	Ausübung nicht vorgeschrieben, doch kann nach der Rechtsprechung dauernde Untätigkeit vernichtend wirken, wenn ein anderer Erfinder später anmeldet und ausführt. Einfuhr gestattet.	Gedruckte Patentschriften vom Tage der Erteilung an zum Einzelpreise von 5 Cts.

am Rande als auch zwischen den Zeilen ausreichenden Raum für Zusätze und Aenderungen frei lassen.

Maße, Gewichte sowie elektrische Einheiten müssen nach den gesetzlichen Vorschriften, Temperaturen nach Celsius angegeben werden. Bei chemischen Formeln sind die in Deutschland üblichen Atomgewichtzeichen und Molekularformeln anzuwenden.

Die Einfügung von Figuren in die Beschreibung ist nicht zulässig.

§ 4. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Zeichnungen sind auf das zur Klarstellung der Erfindung Erforderliche zu beschränken. Sie sind in zwei Ausfertigungen einzureichen.

a) Für die Hauptzeichnung ist weißes, starkes und glattes Zeichenpapier, sogen. Kartonpapier, für die Nebenzeichnung Zeichenleinwand zu verwenden.

Das Blatt der Hauptzeichnung soll 33 cm hoch und 21 cm breit sein. In Ausnahmefällen ist, falls die Deutlichkeit es erfordert, ein Blatt in der Höhe von 33 cm und in der Breite von 42 cm zulässig. Die Nebenzeichnung muß bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein. Für die Hauptzeichnung wie für die Nebenzeichnung ist die Verwendung mehrerer Blätter zulässig.

b) Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen. Auf der Hauptzeichnung sind Querschnitte entweder tiefschwarz anzulegen oder durch Schrägstriche in tiefschwarzen Linien zum Ausdruck zu bringen. Ist zur Darstellung unebener Flächen ausnahmsweise eine Schattierung erforderlich, so darf sie ebenfalls nur in tiefschwarzen Linien ausgeführt werden. Die Anwendung bunter Farben ist bei der Hauptzeichnung unzulässig.

Alle auf den Zeichnungen angebrachten Schriftzeichen müssen einfach und deutlich sein. Die Hauptzeichnung muß sich zur photographischen Verkleinerung eignen.

c) Die einzelnen Figuren müssen durch einen angemessenen Zwischenraum voneinander getrennt sein.

Digitized by Google

d) Die Figuren sind nach ihrer Stellung fortlaufend und ohne Rücksicht auf die Anzahl der Blätter mit Zahlen zu versehen.

e) Erläuterungen sind in die Zeichnung nicht aufzunehmen. Ausgenommen sind kurze Angaben wie „Wasser", „Dampf", „Schnitt nach A—B (Fig. 3)", sowie Inschriften, die auf den dargestellten Gegenständen angebracht werden sollen, z. B. „offen", „zu".

f) In der rechten unteren Ecke jedes Blattes ist der Name des Anmelders anzugeben.

g) Die Hauptzeichnungen dürfen weder gefaltet, noch gerollt werden, sondern sind in glattem Zustande vorzulegen.

§ 5. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Modelle und Probestücke brauchen nur in einer Ausführung eingereicht zu werden.

Proben sind stets einzureichen zu den Anmeldungen, welche die Herstellung neuer chemischer Stoffe betreffen. Ausgenommen sind explosive und leicht entzündliche Stoffe, deren Einsendung nur auf besondere Aufforderung zulässig ist.

Bildet ein chemisches Verfahren von allgemeiner Anwendbarkeit, nach dem ganze Gruppen von Stoffen hergestellt werden können, den Gegenstand der Anmeldung, so sind Proben der typischen Vertreter der Gruppen einzureichen. Werden jedoch besondere Ausführungsformen eines chemischen Verfahrens unter Aufzählung der einzelnen nach ihnen entstehenden Stoffe beansprucht, so sind die Stoffe sämtlich mit Proben zu belegen. Bei Farbstoffen sind außerdem Ausfärbungen auf Wolle, Seide oder Baumwolle in je einer Ausführung beizufügen.

Ueber die Beschaffenheit der Modelle und Probestücke gilt Folgendes:

a) Modelle und Probestücke, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

b) Proben von giftigen, ätzenden, explosiven oder leicht entzündlichen Stoffen sind auf der Umhüllung und, soweit möglich, auf dem Gegenstande selbst durch eine deutliche Aufschrift als solche zu kennzeichnen.

c) Proben chemischer Stoffe sind in Glasflaschen ohne vorspringenden Fuß von etwa 3 cm äußerem Durchmesser und 8 cm Gesamthöhe einzureichen; die Flaschen sind mit einem haltbaren Siegel zu verschließen und mit einer dauerhaft befestigten Inhaltsangabe zu versehen. Den Proben ist ein nach der Beschreibung oder dem Patentanspruche geordnetes Verzeichnis beizulegen.

d) Ausfärbungen müssen möglichst flach auf steifem Papier von 33 cm Höhe und 21 cm Breite dauerhaft befestigt und mit genauen, den Angaben der Beschreibung entsprechenden Aufschriften versehen sein. Den Ausfärbungen ist eine Beschreibung des angewendeten Färbeverfahrens beizulegen mit genauen Angaben über den Gehalt der Flotte an Farbstoff, die etwa gebrauchten Beizen, die Temperatur usw., sowie auch darüber, ob die gebrauchte Flotte erschöpft war oder erhebliche Mengen von Farbstoff zurückgehalten hat.

§ 6. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für Modelle und Probestücke.

Schriftstücke, die zur Mitteilung an andere Personen bestimmt sind, sind in der dazu erforderlichen Zahl von Ausfertigungen einzureichen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes weißes Papier, zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder zur Beschreibung der Erfindung gehören, Papier in Seitengröße von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Wörtern und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

Auf den später eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

d. Deutsches Reichsgesetz, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern.

(Vom 1. Juni 1891.)

[Auszug.]

§ 1. Modelle von Arbeitsgerätschaften oder Gebrauchsgegenständen oder von Teilen derselben werden, insoweit sie dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke durch

Digitized by

eine neue Gestaltung, Anordnung oder Vorrichtung dienen sollen, als **Gebrauchsmuster** nach Maßgabe dieses Gesetzes geschützt.

Modelle gelten insofern nicht als neu, als sie zur Zeit der auf Grund dieses Gesetzes erfolgten Anmeldung bereits in öffentlichen Druckschriften beschrieben oder im Inlande offenkundig benutzt sind.

§ 2. Modelle, für welche der Schutz als Gebrauchsmuster verlangt wird, sind bei dem Patentamte schriftlich anzumelden.

Die Anmeldung muß angeben, unter welcher Bezeichnung das Modell eingetragen werden und welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll.

Jeder Anmeldung ist eine Nach- oder Abbildung des Modells beizufügen.

Ueber die sonstigen Erfordernisse der Anmeldung trifft das Patentamt Bestimmung. [Diese Bestimmungen s. unter c., S. 1020.]

Gleichzeitig mit der Anmeldung ist für jedes angemeldete Modell eine Gebühr von **fünfzehn Mark** einzuzahlen.

§ 3. Entspricht die Anmeldung den Anforderungen des § 2, so verfügt das Patentamt die Eintragung in die **Rolle der Gebrauchsmuster.**

Die Eintragung muß den Namen und Wohnsitz des Anmelders sowie die Zeit der Anmeldung angeben.

Die Eintragungen sind durch den Reichsanzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

Aenderungen in der Person des Eingetragenen werden auf Antrag in der Rolle vermerkt. Die Einsicht der Rolle sowie der Anmeldungen, auf Grund deren die Eintragungen erfolgt sind, steht jedermann frei.

§ 4. Die Eintragung eines Gebrauchsmusters im Sinne des § 1 hat die **Wirkung,** daß dem Eingetragenen ausschließlich das Recht zusteht, gewerbsmäßig das Muster nachzubilden, die durch Nachbildung hervorgebrachten Gerätschaften und Gegenstände in Verkehr zu bringen, feilzuhalten oder zu gebrauchen.

Das durch eine spätere Anmeldung begründete Recht darf, soweit es in das Recht des auf Grund früherer Anmeldung Eingetragenen eingreift, ohne Erlaubnis des letzteren nicht ausgeübt werden.

Wenn der wesentliche Inhalt der Eintragung den Beschreibungen, Zeichnungen, Modellen, Gerätschaften oder Einrichtungen eines anderen ohne Einwilligung desselben entnommen ist, so tritt für den Verletzten der Schutz des Gesetzes ein.

§ 5. **Soweit ein nach § 4 begründetes Recht in ein Patent eingreift, dessen Anmeldung vor der Anmeldung des Modells erfolgt ist, darf der Eingetragene das Recht ohne Erlaubnis des Patentinhabers nicht ausüben.**

Ingleichen darf, soweit in ein nach § 4 begründetes Recht durch ein später angemeldetes Patent eingegriffen wird, das Recht aus diesem Patente ohne Erlaubnis des Eingetragenen nicht ausgeübt werden.

§ 6. Liegen die Erfordernisse des § 1 nicht vor, so hat jedermann gegen den Eingetragenen Anspruch auf Löschung des Gebrauchsmusters.

Im Falle des § 4 Abs. 3 steht dem Verletzten ein Anspruch auf Löschung zu.

§ 7. Das durch die Eintragung begründete Recht geht auf die Erben über und kann beschränkt oder unbeschränkt durch Vertrag oder Verfügung von Todes wegen auf andere übertragen werden.

§ 8. **Die Dauer des Schutzes ist drei Jahre;** der Lauf dieser Zeit beginnt mit dem auf die Anmeldung folgenden Tage. Bei Zahlung einer weiteren Gebühr von sechzig Mark vor Ablauf der Zeit tritt eine Verlängerung der Schutzfrist um drei Jahre ein. Die Verlängerung wird in der Rolle vermerkt.

Wenn der Eingetragene während der Dauer der Frist auf den Schutz Verzicht leistet, so wird die Eintragung gelöscht. Die nicht infolge von Ablauf der Frist stattfindenden Löschungen von Eintragungen sind durch den Reichsanzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

§ 9. Wer wissentlich oder aus grober Fahrlässigkeit den Bestimmungen der §§ 4 und 5 zuwider ein Gebrauchsmuster in Benutzung nimmt, ist dem Verletzten zur Entschädigung verpflichtet.

Die Klagen wegen Verletzung des Schutzrechtes verjähren rücksichtlich jeder einzelnen dieselbe begründenden Handlung in drei Jahren.

§ 13. Wer im Inlande einen Wohnsitz oder eine Niederlassung nicht hat, kann nur dann den Anspruch auf den Schutz dieses Gesetzes geltend machen, wenn in dem Staate, in welchem sein Wohnsitz oder seine Niederlassung sich befindet, nach einer im Reichsgesetzblatte enthaltenen Bekanntmachung deutsche Gebrauchsmuster einen Schutz genießen.

Digitized by Google

Wer auf Grund dieser Bestimmung eine Anmeldung bewirkt, muſs gleichzeitig einen im Inlande wohnhaften **Vertreter** bestellen. Name und Wohnsitz des Vertreters werden in die Rolle eingetragen. Der eingetragene Vertreter ist zur Vertretung des Schutzberechtigten in den das Gebrauchsmuster betreffenden Rechtsstreitigkeiten und zur Stellung von Strafanträgen befugt. Der Ort, wo der Vertreter seinen Sitz hat, gilt im Sinne des § 24 der Reichs-Zivilprozeſs-Ordnung als der Ort, wo der Vermögensgegenstand sich befindet.

e. Deutsche Bestimmungen über die Anmeldung von Gebrauchsmustern.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898, abgeändert durch Bekanntmachung vom 3. Februar 1904.)

Auf Grund des § 2 Abs. 4 des Gesetzes, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern, vom 1. Juni 1891 (s. S. 1018) werden die nachfolgenden Bestimmungen über Erfordernisse einer Gebrauchsmusteranmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung eines Modells behufs Eintragung in die Rolle für Gebrauchsmuster geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind. Für jedes Modell ist eine besondere Anmeldung erforderlich.

§ 2. Das Gesuch muſs enthalten:

a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
b) eine für die Eintragung und Veröffentlichung geeignete Bezeichnung;
c) die Angabe, welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll;
d) den Antrag, daſs das Modell in die Rolle für Gebrauchsmuster eingetragen werde;
e) die Erklärung, daſs die gesetzliche Gebühr von fünfzehn Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
f) die Aufführung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;
g) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);
h) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ 3. Erachtet der Anmelder eine Beschreibung des Modells für erforderlich, so ist sie entweder in das Gesuch aufzunehmen oder als Anlage beizufügen.

§ 4. Dem Gesuche ist eine Abbildung oder eine Nachbildung des Modells beizufügen.

a) Die Abbildung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen.

Für die Abbildung ist weiſses, starkes und glattes Zeichenpapier, sogenanntes Kartonpapier, oder Zeichenleinwand zu verwenden. Das Blatt der Abbildung auf Kartonpapier muſs 33 cm hoch und 21 cm breit sein. Das Blatt der Abbildung auf Zeichenleinwand muſs bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein.

Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen.

b) Die Nachbildung braucht nur in einer Ausführung eingereicht zu werden; sie muſs sauber und dauerhaft sein und darf in Höhe, Breite und Tiefe 30 cm nicht überschreiten.

Nachbildungen, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

§ 5. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für die Nachbildungen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes, weiſses Papier; zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder die Anmeldung selbst betreffen, Papier in der Seitengröſse von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Worten und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

§ 6. Die die Anmeldung bildenden Schriftstücke müssen in doppelter Ausfertigung eingereicht werden. Auf den nachträglich eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

Digitized by Google

G. Gebührenordnung für Zeugen und Sachverständige.

(Reichsgesetz vom 10. Juni 1914.)

§ 1. In den vor die ordentlichen Gerichte gehörigen Rechtssachen, auf welche die Reichs-Zivilprozeß-Ordnung, die Strafprozeß-Ordnung oder die Konkurs-Ordnung Anwendung finden, erhalten die Zeugen und Sachverständigen Gebühren nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen.

§ 2. Der Zeuge erhält eine Entschädigung für die erforderliche Zeitversäumnis im Betrage von zwanzig Pfennig bis zu einer Mark fünfzig Pfennig auf jede angefangene Stunde. — Die Entschädigung ist unter Berücksichtigung des von dem Zeugen versäumten Erwerbes zu bemessen und für jeden Tag auf nicht mehr als zehn Stunden zu gewähren. — Ob eine Erwerbsversäumnis stattgefunden hat, ist nach freiem Ermessen unter Berücksichtigung der Lebensverhältnisse und der regelmäßigen Erwerbstätigkeit des Zeugen zu beurteilen. — Personen, welche durch einfache Handarbeit, Handwerksarbeit oder geringeren Gewerbebetrieb ihren Unterhalt suchen, oder sich in gleichen Verhältnissen mit solchen Personen befinden, erhalten die nach dem geringsten Satze zu bemessende Entschädigung auch dann, wenn die Versäumnis eines Erwerbes nicht stattgefunden hat.

§ 3. Der Sachverständige erhält für seine Leistung eine Vergütung nach Maßgabe der erforderlichen Zeitversäumnis im Betrage bis zu drei Mark für jede angefangene Stunde. Ist die Leistung besonders schwierig, so darf der Betrag bis zu sechs Mark für jede angefangene Stunde erhöht werden. — Die Vergütung ist unter Berücksichtigung der Erwerbsverhältnisse des Sachverständigen zu bemessen. — Außerdem sind dem Sachverständigen die auf die Vorbereitung des Gutachtens verwendeten Kosten sowie die für eine Untersuchung verbrauchten Stoffe und Werkzeuge zu vergüten.

§ 4. Besteht für die aufgetragene Leistung ein üblicher Preis, so ist dem Sachverständigen auf Verlangen dieser und für die außerdem stattfindende Teilnahme an Terminen die im § 3 Abs. 1 Satz 1 und Abs. 2 geregelte Vergütung zu gewähren. — Beschränkt sich die Tätigkeit des Sachverständigen auf die Teilnahme an Terminen, so erhält er lediglich die im § 3 bestimmte Vergütung.

§ 4a. Haben in bürgerlichen Rechtsstreitigkeiten die Parteien sich dem Gerichte gegenüber mit einer bestimmten Vergütung für die Leistung des Sachverständigen einverstanden erklärt, so ist diese Vergütung zu gewähren, sofern ein zu ihrer Deckung ausreichender Betrag an die Staatskasse gezahlt ist.

§ 5. Als versäumt gilt für den Zeugen oder Sachverständigen auch die Zeit, während welcher er seine gewöhnliche Beschäftigung nicht wieder aufnehmen kann.

§ 6. Mußte der Zeuge oder Sachverständige außerhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zur Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm, außer den Beträgen, eine Entschädigung für die Reise und für den durch die Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen zu gewähren.

§ 7. Soweit nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen oder nach äußeren Umständen die Benutzung von Transportmitteln für angemessen zu erachten ist, sind als Reiseentschädigung die nach billigem Ermessen in dem einzelnen Falle erforderlichen Kosten zu gewähren. — In anderen Fällen beträgt die Reiseentschädigung für jedes angefangene Kilometer des Hinweges und des Rückweges zehn Pfennig.

§ 8. Die Entschädigung für den durch Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand ist nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen zu bemessen, soll jedoch den Betrag von sieben und einer halben Mark für jeden Tag, an welchem der Zeuge oder Sachverständige abwesend gewesen ist, und von vier und einer halben Mark für jedes außerhalb genommene Nachtquartier nicht überschreiten.

§ 9. Mußte der Zeuge oder Sachverständige innerhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zu einer Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm für den ganzen zurückgelegten Weg eine Reiseentschädigung nach den Vorschriften des § 7 zu gewähren.

§ 10. Konnte der Zeuge oder Sachverständige den erforderlichen Weg ohne Benutzung von Transportmitteln nicht zurücklegen, so sind die nach billigem Ermessen erforderlichen Kosten auch außer den in den §§ 6 und 9 bestimmten Fällen zu gewähren.

Digitized by Google

§ 11. Abgaben für die erforderliche Benutzung eines Weges sind in jedem Falle zu erstatten.

§ 12. Bedarf der Zeuge wegen jugendlichen Alters oder wegen Gebrechen eines Begleiters, so sind die Entschädigungen für beide zu gewähren.

§ 12a. Notwendige bare Auslagen, soweit sie nicht den durch den Aufenthalt aufserhalb der Wohnung verursachten Aufwand betreffen, können dem Zeugen oder Sachverständigen nach billigem Ermessen erstattet werden. Dies gilt namentlich von den Kosten für eine notwendige Vertretung.

§ 13. Soweit für gewisse Arten von Sachverständigen besondere Taxvorschriften bestehen, welche an dem Orte des Gerichtes, vor das die Ladung erfolgt, und an dem Aufenthaltsorte des Sachverständigen gelten, kommen lediglich diese Vorschriften in Anwendung. Gelten solche Taxvorschriften nur an einem dieser Orte, oder gelten an demselben Orte verschiedene Taxvorschriften, so kann der Sachverständige die Anwendung der ihm günstigeren Bestimmungen verlangen. — In den Fällen des Abs. 1 kann der Sachverständige, wenn er nicht öffentlicher Beamter ist, an Stelle der Gesamtvergütung nach den Taxvorschriften die Berechnung der Gesamtvergütung nach den Vorschriften dieses Gesetzes beanspruchen.

Dolmetscher erhalten Entschädigung als Sachverstandige nach den Vorschriften dieses Gesetzes, sofern nicht ihre Leistungen zu den Pflichten eines von ihnen versehenen Amtes gehören.

§ 14. Oeffentliche Beamte erhalten Tagegelder und Reisekosten nach Mafsgabe der für Dienstreisen geltenden Vorschriften, falls sie zugezogen werden:

1. als Zeugen über Umstände, von denen sie in Ausübung ihres Amtes Kenntnis erhalten haben;
2. als Sachverständige, wenn sie aus Veranlassung ihres Amtes zugezogen werden und die Ausübung der Wissenschaft, der Kunst oder des Gewerbes, deren Kenntnis Voraussetzung der Begutachtung ist, zu den Pflichten des von ihnen versehenen Amtes gehört.

Soweit allgemeine Vorschriften für Dienstreisen nicht erlassen sind, kann die oberste Verwaltungsbehörde über die Gewährung der den öffentlichen Beamten in den Fällen des Abs. 1 den Gerichten gegenüber zustehenden Tagegelder und Reisekosten besondere Vorschriften erlassen.

Werden nach den Vorschriften dieses Paragraphen Tagegelder und Reisekosten gewährt, so findet eine weitere Vergütung an den Zeugen oder Sachverständigen nicht statt.

Die vorstehenden Bestimmungen finden auf Personen des Soldatenstandes entsprechende Anwendung.

Auf Beamte der Gemeinden (Gemeindeverbände) finden die allgemeinen Vorschriften für Dienstreisen insoweit keine Anwendung, als die oberste Verwaltungsbehörde Bestimmungen über die Höhe der ihnen den Gerichten gegenüber zustehenden Tagegelder und Reisekosten erlassen hat.

Die oberste Verwaltungsbehörde kann die ihr durch Abs. 2 und Abs. 5 gegebene Befugnis zum Erlasse der bezeichneten Bestimmungen auf andere Behörden übertragen.

§ 15. Ist ein Sachverständiger für die Erstattung von Gutachten im allgemeinen beeidigt, so können die Gebühren für die bei bestimmten Gerichten vorkommenden Geschäfte durch Uebereinkommen bestimmt werden.

§ 16. Die Gebühren der Zeugen und Sachverständigen werden nur auf Verlangen derselben gewährt. Der Anspruch erlischt, wenn das Verlangen binnen drei Monaten nach Beendigung der Zuziehung oder Abgabe des Gutachtens bei dem zuständigen Gerichte nicht angebracht wird.

§ 17. Die einem Zeugen oder Sachverständigen zu gewährenden Beträge werden durch gerichtlichen Beschluss festgesetzt, wenn der Zeuge oder Sachverständige oder die Staatskasse eine richterliche Festsetzung beantragt oder das Gericht sie für angemessen hält. Der Ansatz kann von Amts wegen berichtigt werden, wenn die Beträge aus der Staatskasse gezahlt und dieser nicht erstattet sind. Für die Festsetzung und die Berichtigung ist das Gericht oder der Richter zuständig, vor welchem die Verhandlung stattgefunden hat, und für die Berichtigung auch das Gericht der höheren Instanz.

Gegen die richterliche Entscheidung findet Beschwerde nach Mafsgabe des § 567 Abs. 2, der §§ 568 bis 575 der Zivilprozefs-Ordnung sowie des § 4 Abs. 3 des Gerichtskosten-Gesetzes, in Strafsachen nach Mafsgabe der §§ 346 bis 352 der Strafprozefs-Ordnung statt.

Digitized by Google

Deutsche Wellblech-Normalprofile.

Die vom Verein deutscher Eisenhüttenleute aufgestellten Wellblech-Normalprofile enthalten in den auf S. 1024 bis 1027 dargestellten Profiltafeln neben der Bezeichnung des Profils — entsprechend dem Vorgang bei Walzprofilen ein wellenförmiges Zeichen ⁊ mit dem Zusatz NP und die Maſse des Profils in Millimetern, in der Reihenfolge Wellenbreite, Wellenhöhe, Kernstärke, z. B. ⁊ NP 100 . 30 . 1 — die Abmessungen des Profils und des Bleches, Querschnitt, Gewicht, Widerstandsmoment und schließlich noch die zulässige gleichmäſsig verteilte Belastung von geradem Wellblech bei verschiedenen Freilängen.

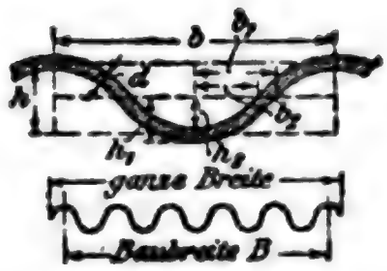
Die Berechnungsformeln sind auf Veranlassung des Vereins deutscher Eisenhüttenleute vom Professor Siegmund Müller von der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin aufgestellt worden. Die Wellblechwerke werden von jetzt ab in erster Linie diese Normalprofile herstellen.

Näheres über die deutschen Wellblech-Normalprofile sowie über die Berechnung freitragender Wellblechdächer ist in der Zeitschrift „Stahl und Eisen“ vom 11. März 1915 S. 258 bis 265 bzw. in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure vom 13. März 1915 S. 224 bis 229 enthalten.

Digitized by Google

Deutsche Wellblech-Flache

Welle a...



Querschnitt für 1 m Breite:

$$F = 12{,}5\, d \cdot \frac{b}{h}\left\{\frac{4h}{b}\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \ln\left[\frac{4h}{b} + \sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}\right]\right\} \text{ qcm}$$

Profilbezeichnung	Breite b mm	Höhe h mm	Kernstärke d mm	Normale Baubreite B mm	Querschnitt für 1 m Breite F qcm	Gewicht ohne Ueberdeckungen g kg/qm
℧ NP 60 · 20 ·			3/4		10,15	8,12
,, ,, ,,			7/8		11,84	9,47
,, ,, ,,	60	20	1	720	13,53	10,82
,, ,, ,,			1 1/4		16,92	13,52
℧ NP 76 · 20 ·			3/4		8,72	6,78
,, ,, ,,			7/8		10,17	8,13
,, ,, ,,	76	20	1	760	11,63	9,30
,, ,, ,,			1 1/4		14,54	11,63
,, ,, ,,			1 1/2		17,44	13,95
℧ NP 100 · 30 ·			3/4		9,02	7,22
,, ,, ,,			7/8		10,51	8,42
,, ,, ,,	100	30	1	800	12,03	9,62
,, ,, ,,			1 1/4		15,04	12,03
,, ,, ,,			1 1/2		18,05	14,44
℧ NP 100 · 40 ·			3/4		10,00	8,00
,, ,, ,,			7/8		11,67	9,35
,, ,, ,,	100	40	1	700	13,34	10,67
,, ,, ,,			1 1/4		16,68	13,34
,, ,, ,,			1 1/2		20,00	16,00
℧ NP 135 · 30 ·			3/4		8,62	6,89
,, ,, ,,			7/8		10,05	8,04
,, ,, ,,	135	30	1	810	11,49	9,19
,, ,, ,,			1 1/4		14,36	11,49
,, ,, ,,			1 1/2		17,24	13,78
℧ NP 150 · 40 ·			3/4		8,72	6,88
,, ,, ,,			7/8		10,18	8,17
,, ,, ,,	150	40	1	750	11,63	9,30
,, ,, ,,			1 1/4		14,55	11,63
,, ,, ,,			1 1/2		17,45	13,96
℧ NP 150 · 60 ·			1		13,34	10,67
,, ,, ,,			1 1/4		16,68	13,34
,, ,, ,,	150	60	1 1/2	600	20,00	16,00
,, ,, ,,			2		26,68	21,34

Digitized by Google

Normalprofile.

Wellbleche.

Parabelbogen.

Gewicht für 1 m Breite. $g = 0{,}8\,F$ kg

Trägheitsmoment für 1 m Breite: $J = \frac{1280}{21} \cdot \frac{1}{b}\,(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$ cm⁴

Widerstandsmoment für 1 m Breite: $W = \frac{2J}{h+d}$ cm³,

wobei $h_1 = 1/2\,(h+d)$ | $b_1 = 1/4\,(b + 2{,}6\,d)$
$h_2 = 1/2\,(h-d)$ | $b_2 = 1/4\,(b - 2{,}6\,d)$

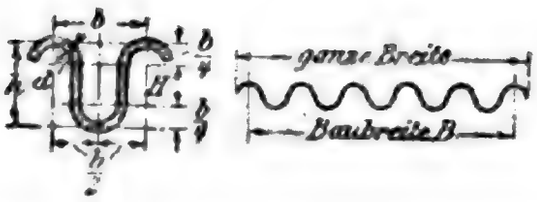
Widerstandsmoment für 1 m Breite W	Zulässige gleichmäßige Belastung für gerades Wellblech in kg/qm bei einer Beanspruchung von 1400 kg/qcm und einer Freilänge von m						
cm³	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
4,267	478	212	119	76	53	39	30
4,948	552	246	139	89	62	45	35
5,627	630	280	157	101	70	52	39
6,957	779	346	195	125	87	64	49
4,063	455	202	114	73	51	37	28
4,714	528	235	132	85	59	43	33
5,357	600	267	150	96	67	49	38
6,626	742	330	186	119	82	61	46
7,870	881	392	220	141	98	72	55
6,325	708	315	177	113	79	58	44
7,351	825	366	206	132	92	67	52
8,369	937	417	234	150	105	77	59
10,384	1163	517	291	186	129	95	73
12,370	1385	615	346	222	154	113	87
9,068	1015	451	254	162	113	83	63
10,543	1180	524	295	189	131	96	74
12,020	1346	598	337	215	150	110	84
14,939	1674	744	418	268	186	137	105
17,827	1996	887	499	320	222	163	125
5,987	670	298	168	107	75	55	42
6,957	779	346	195	125	87	64	49
7,921	887	395	222	142	99	72	55
9,826	1100	489	275	176	122	90	69
11,705	1311	582	328	210	146	107	82
8,290	929	413	232	149	103	76	58
9,642	1080	480	270	173	120	88	68
10,987	1230	548	307	197	137	100	77
13,655	1530	680	382	245	170	125	96
16,293	1825	811	456	292	203	149	114
18,171	2035	905	509	325	226	166	127
22,625	2534	1126	633	405	282	207	158
27,044	3030	1346	757	485	337	247	189
35,786	4008	1782	1002	641	445	327	250

Digitized by Google

Deutsche Wellbl

Tr

We



Querschnitt für 1 m Breite:

$$F = 100\, d \cdot \frac{1}{b}\left(4\,\frac{b}{2} + 2\,H\right) \text{ qcm}$$

wobei $H = h - \frac{1}{2}\,b$

Gewicht für 1 m Breite: $g = 0{,}8\,F$ kg.

Profilbezeichnung	Breite b mm	Höhe h mm	Kernstärke d mm	Normale Baubreite B mm	Querschnitt für 1 m Breite F qcm	Gew ohne deck g kg/
ℐ NP 90 · 70 · 1	90	70	1	450	21,25	17,
„ „ „ 1¼			1¼		26,58	21,
„ „ „ 1½			1½		31,88	25,
„ „ „ 2			2		42,50	34.
ℐ NP 100 · 50 · 1	100	50	1	600	15,70	12,
„ „ „ 1¼			1¼		19,62	15,
„ „ „ 1½			1½		23,56	18,
„ „ „ 2			2		31,40	25,
ℐ NP 100 · 60 · 1	100	60	1	500	17,70	14,
„ „ „ 1¼			1¼		22,12	17,
„ „ „ 1½			1½		26,57	21,
„ „ „ 2			2		35,40	28,
ℐ NP 100 · 80 · 1¼	100	80	1¼	400	27,12	21,
„ „ „ 1½			1½		32,54	26,
„ „ „ 2			2		43,40	34,
ℐ NP 100 · 100 · 1¼	100	100	1¼	400	32,11	25,
„ „ „ 1½			1½		38,58	30,
„ „ „ 2			2		51,40	41,

Rolla

Abmessungen und Rechnungsgrund

Profilbezeichnung	Breite b mm	Höhe h mm	Kernstärke d mm	Normale Baubreite B mm	Querschnitt für 1 m Breite F qcm	Gew ohne U deckun g kg/q
ℐ NP 30 · 15 · ½	30	15	½	600	7,42	5,9
„ „ „ ¾			¾		11,13	8,9
ℐ NP 40 · 20 · ½	40	20	½	600	7,42	5,9
„ „ „ ¾			¾		11,13	8,9
„ „ „ 1			1		14,84	11,8

Digitized by Google

Normalprofile.

Wellbleche.

Kreisbogen.

Trägheitsmoment für 1 m Breite:

$$J = 25\,d \cdot \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{16}\,b^3 + b^2\,H + \frac{\pi}{2}\,b\,H^2 + \frac{2}{3}\,H^3\right) \text{cm}^4$$

Widerstandsmoment für 1 m Breite:

$$W = \frac{2\,J}{h + d} \text{ cm}^3$$

Widerstandsmoment für 1 m Breite W cm³	Zulässige gleichmäßige Belastung für gerades Wellblech in kg/qm bei einer Beanspruchung von 1400 kg/qcm und einer Freilänge von m						
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
34,774	3890	1729	974	623	432	318	243
43,315	4852	2156	1213	776	539	396	303
51,797	5800	2579	1450	928	645	477	363
68,583	7678	3413	1918	1228	853	621	480
19,266	2158	960	540	345	240	176	135
23,957	2676	1190	671	428	298	218	167
28,609	3194	1426	800	513	356	260	199
37,778	4230	1880	1057	677	470	345	264
25,633	2872	1276	718	459	319	234	179
31,911	3572	1588	893	572	398	292	223
38,137	4270	1898	1067	683	475	349	267
50,439	5648	2511	1412	904	628	461	353
50,440	5648	2511	1412	904	628	461	353
60,342	6675	3001	1690	1082	752	553	423
79,966	8950	3980	2238	1432	995	732	558
72,369	8102	3602	2025	1297	901	662	506
86,629	9700	4310	2430	1554	1077	792	606
114,939	12860	5718	3218	2059	1429	1051	805

Wellbleche.

wie bei flachen Wellblechen.

Widerstandsmoment für 1 m Breite W cm³	Zulässige gleichmäßige Belastung für gerades Wellblech in kg/qm bei einer Beanspruchung von 1400 kg/qcm und einer Freilänge von m						
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
2,381	267	119	67	43	30	22	17
3,520	394	175	99	63	44	32	25
3,199	358	159	90	57	40	29	22
4,744	531	236	133	85	59	43	33
6,258	702	311	175	112	78	57	44

Digitized by Google

SACHVERZEICHNIS

des ersten, zweiten und dritten Bandes.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen, die römischen die der Bände.
* bedeutet Tafel.

A.

Abblaseventil . . II 68
Abdampfentöler . II 57
—heizung . . . . III 424
—verwertung . II 56, 137; III 424
Abdichtung, Rohr- I 307, 915; III 581, 705, 839
Abessynierbrunnen III 664
Abfallrohr . . . II 524
Abfertigungsräume (Bahnhof) III 774, 775, 777
Abfluſsmenge (Kanalbau) . . . . III 535
— —ndauerlinie (Flussbau) . . . . III 498
— —nermittlg. III 571, 574*
— — (Regen) . . III 610*
— — (Stadteentwässrg.) III 685
—rohr, Blei-, Steinzeug-, Normalien . . I 930
— —, gusseisernes, Normalien . . . I 916*
Abkühlung, Dampfrohrleitg. . . I 451*
—sverlust (Dampfmasch.) II 129
Ablaſsvorrichtung (Kessel) II 64, 68, 777; III 838
Ablaufbahn (Schiff) II 662
—gewicht (Schiff) II 662
Abnutzung (Zahnrad) I 214
Abort . . . II 687, 688*; III 475, 645, 886
Abrichtmaschine . II 380; III 471
Abschaumventil . II 777
Abscherung, zulässs. — Beanspruchg. . I 503*, 504*; III 57*, 73*, 74*
Abschreibungssumme I 54*
Absolutbewegung I 146
—es Maſssystem I 149; II 837
—e Temperatur . I 392
— schwarzer Körper I 390
Absorptionsmittel f. CO_2, O, CO II 327
Absorptionsvermögen, Ammoniak-Wasser I 381
— — d. Wassers I 280, 380*, 381*
— — (Wärmestrahlg.) I 389
Absperrhahn . . I 944
—schieber I 911*, 944; III 682
— —, Lokomotiv- III 839
—ventil . . . . I 942
— —, -vorrichtg., (Dampfk.) I 924; II 62, 68, 776
— vorrichtung, Widerstandszahlen . I 305
Abstellanlage (Eisenb.) III 777
Abszisse . . . I 88, 112
Abteufpumpe . . II 557
Abfsche Weiche . III 893
— Zahnstange . . III 889
Abwärmebeizung . III 426
Abwässerreinigung III 706
Abzweigung, Rohr- III 682
Achsbüchse (Eisenb.) III 868
—druck (Mechanik) I 233
— — (Riementrieb) I 798
—e . . . . . I 816
—e, Dynamomasch.- II 891, 905
—e, Eisenbahnwagen- III 808
—e, freie . . . . I 283
—e, Lenk- . III 864, 869
—e, Lokomotiv- . III 843
—e, u[illegible]trale . . . I 522
—enkreuz I 88, 90, 112, 115, 140
— —, festes u. bewegliches . . . . I 231
—enmoment . . . I 156
—enregler . I 965; II 163
—e, Treib- . . . III 848
—e, verschiebbare III 848, 862
—e, Zentral- . . . I 159
—halter . . . . III 869
—ialdruckausgleich II 221, 298, 568, 608
Achsschenkeldruck III 809
—senke . . . . . III 802
—stand d. Strafsenfahrzeuge . . . . III 526*
Adams-Achse . . III 843
Adhäsion . . . . I 260
Adiabate . I 405, 407*
—e, Dampf- . . . I 421
—ische Kompression (Luft) I 410, 411*; II 613*
AEG-Dampfturbine II 235, 237, 760
— -Schleuderluftpumpe (Kondensation) II 207
Aërodynamik . . I 335
—gengas . . . . II 817
—plan . . . . . I 342
—statik . . . . . I 331
A-Fläche, -Linie III 93
Afonassieffsche Formel (Schiffswiderstd.) II 725
Aggregatformänderg. I 378*
Ahming . . . . II 628
Aehnlichkeitsgesetz I 329
— —, Anwendung a. Schiffsschraube II 732
— — (Schiffswiderstd.) II 725
—schlüsse (Strömungswiderstd.) . . I 354
Akkumulator (elektr.) II 858
—enbetrieb (el. Bahn) II 993
—, Fahrzeug- . . II 806*
— hydraulischer . II 390
—, Laden einer Batterie II 930, 935
—, Regelung der Biel- II 934
—, Schaltung einer Batterie . . . . II 929
—triebwagen. . . III 860*
Aktion d. Wasserstrahls I 317
—sdampfturbine II 216, 237
—swasserturbine II 289, 293
Alfenide . . . . I 681
Alhidade . . . . III 14
Alkohol, Explosionsgrenzen . . . I 472

Digitized by Google

Alkohol, Gefrierpunkte wässerigen —. I 873*
—, Heizwert, Luftbedarf . . . . II 256
—, kritische Werte I 413
—, Verbrennung . I 477
—, Wärmewerte I 376 ff., 400, 462, 472, 477
—, wässriger, spez. Gew. I 618*
Allan-Umsteuerung II 181
Alterungskoeffizient (Hysteresis) . II 841
Aluminiumbronze I 681
— —, Festigkt. I 496, 501
—, Draht aus Legierungen . . . I 502
—, Festigkt. . . I 496, 501
—messing . . . . I 681
— —, Festigkt. . I 496
Aluminothermisches Schweifsen . . I 671
Amagats Versuche, Kohlensäure , . . I 430*
Amalgam, Spiegel- I 681
Amboís . . . . II 334
Ammoniak, Dampftafel . . . . I 436*
—, Dichte u. Volumen verflüssigten — I 373
—kältemaschine I 429, 433*
— —, Gewicht . . II 702*
—, kritische Werte I 413
—, Lösung i. Wasser I 381*
—, spez. Wärme I 398, 400*
—, wichtige Wärmewerte . . I 376 ff., 398
Ampere . . II 837, 838
—sche Schwimmregel II 849
—sches Gesetz . . II 849
—windung . . . II 847
Amplitude . . . I 221
Analyse, Gas- . II 327
—, harmonische (harm. Analysator) I 124, 127, 129
Analytische Geometrie d. Ebene . . I 88
— — d. Raumes . I 112
Anemometer . . . II 319
Aneroidbarometer . III 33
Anfahrregelung d. Fördermasch. II 450, 1007
—vorrichtung f. Verbrennungsmasch. II 783
— — f. Verbundlokomotiven . . . III 851
Angabe (Libelle) . III 10
Anker, Drehstrommotor- . II 916, 917
—, Fundament- I 750, 751
—, Gleichstrommasch.- II 870, 875
—, Kessel- II 29, 77, 80, 89; III 828
—kette . . . . . II 700
—, Mauer- . . . III 279
Ankerrückwirkung II 882
—, Schiffs- . . . II 683
—, Sicherheits- (Zahnradb.) . . . . III 902
—spill . . . . . II 684*
—, Turbodynamo- II 905
—, Wechselstrommasch.- II 896
—wicklung (Gleichstrommasch.) . II 870, 879
— —, Schaltung . II 862
— —, Wechselstrommaschine . . II 896
Ankleideraum , . III 474
Anlassen d. Stahles I 631
Anlafsvorrichtung, — **widerstand** f. Drehstrommot. II 916
—, — f. Gleichstrommot. II 893
Anlaufzeit (Regulierung) II 304
Ansatzwinkel (Werkzeug) II 346* 347*
Anstellwinkel (Flügel) I 353, 364
— (Werkzeug) II 346*, 347*
Anstrengungsgrad, Dampfk. II 33*, 768*; III 825
Anstrich . . I 668, 669
—, Schiffs- . . . II 698
—, wasserdichter . III 224
Anthracenöl . . . I 476
Anthrazit . . . . I 458
Antifriktionslinie . I 110
Antimon . . I 610, 613
Antrieb d. Kraft . I 226
Anzapfturbine II 216, 241
Anziehung d. Massen I 219
A. P. B., Allgem. polizeil. Best. üb. Anlegung v. Lnddampfk. I 23, 67
A-Polygon . . . III 81
Aequatoriales Trägheitsmoment . . . I 193
Aequipotentialfläche I 218
— —verbindungen II 874
—valente Brennweite III 11
Aräometer . . . . I 618
Arbeit . . . . I 150
— d. Biegung . . I 533
— d. Drehung . . I 571*
— eines belebten Motors II 1
—, elektrische II 837, 844
—er, Kraft, Leistg., Tagewerk II 1, 2; III 280, 601, 612, 738*, 739*
—erverhältnisse, Einfluís auf Fabrikort . III 433
—, Federungs- . . I 592
— (Massenpunkt) . I 187
—, nutzbare (Wärme) I 394
— (Punkthaufen) . I 229
—, Reibungs- . . I 253
—sdiagramm . . I 396, 408
Arbeitsdiagramm für Fabrikanlagen III 437
—seinheitenvergleich I 1001*
—sfestigkeit . . . I 511
—sflüssigkeit f. Kraftein-schalter . . . II 809
—sgleichung stat. unbest. Fachwerke . . III 108
—sgrube (Eisenb.) . III 800
—sintegralkurve I 958
—sleistung d. Zugtiere II 1, 2; III 601*, 739*
—smaschine, Schutzvorrichtg. . . . III 470
—smessung . . . II 321
—sprozefs (Gase) I 405, 408
— — (Wärme) . . I 394
—stakt (Verbrennungsmotor . . . . II 243
—süberschufs (Schwungrad) . I 950
—sverlust d. Exzenter I 893
— — d. Getriebe . I 253
— — d. Kurbelgetriebe I 887*
— — d. Zugmittel I 256
— — durch Drofselung I 454*
— — durch Gleiten I 259
— — durch Seilsteifigkeit I 258
— — durch Zahnreibung I 255, 767
— — durch Zapfenreibung . . . . I 246
— — (Thermodyn.) I 395
— —, verhältnismäfsiger I 252
—svermögen d. Massenpunktes . . . I 218
— — d. Reglers . I 964
— — des Stoffes (Festigktsl.) . I 484
— — durch Formänderung . . I 487*, 493*
— — durch Stabverlängerung . . I 508
— — frei ausfliefsender Strahlen . I 817
— — v. Mensch u. Tier II 1, 2*; III 280*, 601, 612, 738*, 739*
—szähler . . . . II 324
—szahnrad . . . I 780
Archimedische Spirale I 108
Arcus I 37*, 57, 60*, 65
Argandbrenner . . II 816
Argon . . . I 372, 413
Arithmetik . . I 45*
—sche Reihe . . I 55
—sches Mittel . . I 87
Armatur s. Ausrüstung.
Armierter Beton, s. a Eisenbeton . . I 708
—tes Rohr . . . I 606
—ung, Schiffs- II 707*, 711*
Armlager . . . . I 842

Artesischer Brunnen III 664
Artillerie, Schiffs- II 707*; 711*
Asbest . . . I 683, 715
—isolation . . . I 451
—olith . . . . . I 691
—zement, Festigkt. I 499
Asche-Ejektor . . II 528
Asphalt I 668, 717; III 626
—abdichtung . . III 223
—bizplatte . . . I 718
—, Guss- . . . . III 626
—platte . . . . III 626
—, Stampf- . . . III 626
—strafse, Land- . III 618
—strafse, Widerstandszahlen . . III 600*
Astatischer Punkt, —Regler . . . I 961
Astrois . . . . . I 107
Asymptoten . . I 92
—tischer Punkt . I 109
Asynchronmotor II 912, 954
Aether. Explosionsgrenzen . . . I 472
—, Kritische Werte, Siedepunkt . . I 413
—, spez. Wärme . I 400*
—, Zusammendrückbarkt. . . . . I 260
Atmosphäre I 392; II 310
—, Vergleich m. Quecksilbersäule . . I 1001*
Atomgewicht . . I 610*
—zahl, Gase . . . I 398*
Atwoodsche Formel (Stabilität) . . II 644
Aetylen I 373, 379, 472, 473
—, Wärmewerte I 398, 400, 401, 413
Auerbrenner . . . II 816
Aufhängung d. Last II 402
Aufklimmung . . . II 628
Auflagerdruck, s. auch Flächendruck, Stützdruck I 171, 525; III 93, 96
— — v. Trägern, versch. Belastungsfälle I 546* ff.
— —, Verbrennungsmasch. . . . II 265
— —, zulässiger f. Ventile I 932
—gelenk . . . . I 172
—platte . . . . III 321*
—quader (Brückenb.) III 977
—steine, zulass. Beanspruchg. . . . I 506*
—, Wand- . . . . III 321
Auflandung . . . III 557
Auflockerung, Erdboden- III 737*
Aufnehmer . . II 196
—druck . . . . II 120
Aufpunkt . . . . I 216
Aufschlagwassermenge u. Wassermangel III 574*
Aufschleppen (Schiff) II 664
Auftrieb . . . . I 263
—, dynamischer, b. Strömungen . I 341
— v. Gasballonen . I 332
—szahl (Luft) . . I 365
Aufzug, Bau- . . III 494
—, Berg- . . . . II 557
—, Druckwasser- . II 421
—, elektrischer . . II 411
—, Gichtschrag- II 499, 555
—, Hand-, Transmissions- II 410
—maschine, elektr. II 413
—, Paternoster- . . II 424
—, Schutzvorrichtg. III 471
—seil . . . . . III 905
—, Steuerung II 416, 418
Ausatmung, Ausdünstung d. Menschen . III 391
Ausbalancierung I 233
—, Gestänge- . . II 589
— (Kompressor) . II 616
Ausbesserungsdauer d. Eisenb.-Fahrzge. III 874
Ausblaseventil, -vorrichtg. II 64, 68, 777; III 838
Ausdehnung d. Gase I 330, 373*
— durch Wärme I 369* ff., 494
—sgefäß (Heizung) III 430
—shub, Verbrennungsmotor . . . . II 253
—skraft . . . . I 371
—skupplung . . . I 824*
—srohr I 914, 919*, 923*, 931
Ausfluchten . . . III 2
Ausflufs b. unveränderl. Druckhöhe . . I 266
— b. veränderl. Druckhöhe . . . . I 270
—, Dampf- . . . II 218
— d. Oeffnungen i. Gefäfsen oder Stauanlagen . . . I 265
—exponent v. Gasen u. Dämpfen . . I 442
—öffnung (Messung) II 314
—strahl . . . . I 345
— v. Gasen u. Dämpfen I 440
—vorrichtung . . I 288
— verschiedener Flüssigkeiten . . . I 288
—zahl f. Luft . . II 317*
— — (Hydr.) I 267, 272 ff., 281
Ausgleich der Belastungsschwankungen, (Forderm.) II 1009
—getriebe, Motor-Fahrzeug . . . . II 803
—hebel (Lokomotive) III 849
—seil, Seilbahn . III 911
—srechnung (Vermessungsk.) . . III 48
Ausgleichsrohr I 914, 919*, 923*, 931
—ströme i. Anker II 878
—vorrichtung (Dreileiteranlage) . II 932
— — f. Rohrleitung I 914; II 196
— — f. Spannungsverlust . . . II 961
—weiher . . . . III 575
Ausglühen d. Stahles I 681
Ausklinkventilsteuerung II 170
Auslegerbalken . III 95
—bogen . . . . III 150
—kran . . . . III 492
—, Kran- II 471, 473, 474, 475, 480, 481
Auspuffleitg., -topf II 278, 279
—rohr . . . . . II 782
—temperatur . . II 254
Ausrückkupplung I 829
—vorrichtung, Maschinen- III 471
Ausrüstung, Kessel- II 60, 68, 776, 777; III 748
—steile, Zylinder- II 195, 748
—sverfahren für Lehrgerüste . . III 1050
Ausschlagwinkel (Steifer Knoten) . . . III 118
Ausschubhub, Verbrennungsmotor . II 254
Aufsenbeleuchtung II 881*, 834*
—temperatur . . III 405*
Aussteifung v. Baugruben III 701
Ausstrahlung, elektr. II 969
Ausweichestelle . . II 982
Autogas . . . . II 818
—genes Schneiden I 673
— — Schweifsen . I 671
—matische Bahn . II 495
—mobilbau . . . II 790
— —motorwelle . I 891
—transformator . . II 921
Avanzinisches Gesetz (Luftwiderstand) I 365
Avogadrosches Gesetz I 396
Axoid . . . . . I 208
Axonometrisches Verfahren . . . I 138
Azeton, spez Wärme I 400*
Azetylen . . . II 817
—, Dichte u. Volumen verflüssigten — I 373
—, Explosionsgrenzen I 472
—, spez. Gewicht . I 618
—, Schweifsverfahren I 671
—, Verbrennung . . I 473
—, Wärmewerte I 379, 380, 398, 413
Azyklische Dynamomasch. II 870

Digitized by Google

B.

Babbit-Metall, Festigkt. I 496
Babcock-Wilcox-Kessel II 772, 775
Bach-Schüle, Potenzgesetz . . . . I 482
Bad, Fabrik- . . III 474
Bagger II 523, 528; III 476
—bodenbeseitigung III 480
Bahn s. auch Eisenbahn
—, automatische . II 495
—bau, Entwurf . III 726
— —, Streckenbau III 733
— —, technische Vorarbeiten . . . III 727
— —, Vorarbeiten III 715
— —, Vorschriften III 722
— bettung, Zahnradbahn III 892
—, Bremsberg- . . II 495
—druck . . . . I 188
—, Hänge- . . . II 497
—, Gefälle- . . . II 495
—, gleislose . . . II 492
—, Gruben- . . . II 493
—hof, Kohlenversorgung III 796
— —sanlage, Gliederung, Grundformen . III 770
— —sbeleuchtung . II 835
— —sgebäude . . III 771
— —, Verschiebe- III 777
— —, Wasserversorgung . . . . III 790
— —, Zahnradbahn- III 894
—, Kabel- . . . II 494
—, Ketten- . II 493, 494
—motor . . II 995, 996*
—räumer . . III 849, 854
—, Schwebe- II 497, 530
—, Schwerkraft- . II 495
—, Seil- II 493, 497, 542, 543; III 905
—steig . . . . . III 774
— —halle . . . . III 864
—widerstand . . I 137
Balancier (Lokomotive) III 849
Balatariemen . . I 502, 802
Balken s. mehreren Stützen . . . III 126
— s. 4 u. 5 Stützen III 138
—binder . . . . III 338
— —, eiserner . . III 836
—brücke, Eisenbeton- III 265
—bucht . . II 628, 637
—, einfacher . . III 78
—, —, M_x-Linie . III 99
—, —, Querkräfte, Biegungsmomente I 176
—, —, ungünstigste Laststellung . . . III 89
—, gleichförm. belast. s. 3 u. 4 Stützen III 134, 135*
Balken, Holz-, Verbindungen . III 300, 303
—lage, Gewicht III 874*
—stärken I 726*; III 299*
—träger . . . . I 175
— —, Querkräfte, Biegungsmomente I 176
—, verdübelter u. verzahnter . . . III 303
—, vollwandiger . III 119
Balkonträger . . I 591
Ballastleitung . II 767
—pumpe . . . . II 765
—, Schiffs- . . . II 708
Ballon, Antrieb, Gleichgewicht . . . I 332
—et (Luftsack) . . I 334
—, statische Stabilität I 335
Bambusrohr, Festigkt. I 498
Bandbremse I 257*, 860; II 400
—eisen . . . . . I 660
—förderer . . II 508, 511*
—säge, Holz- II 378, 379
Bändigung d. Gebirgsflüsse . . . . III 510
Barometer II 311; III 32
—stand . . . . I 331
Barometrische Höhen II 250*
— Höhenmessung III 32
Bär, Ramm- . . . III 485
Basalt . . . . I 498, 683
Basismessung (Triangul.) III 47
Batterie, Akkumulatoren- II 806, 861; III 861
— —, Regelung . II 934
— —, Schaltung II 929, 949
Bauaufzug . . . III 494
—bestandteile (Flufsb.) III 508
—block . . . . . III 640
—grube, Aussteifung III 188, 701
— —, Herstellung III 188
— —, Trockenlegung III 133
—grund, Tragfähigk. III 185*
— —, zulässs. Beanspruchg. I 507; III 60, 185
—gruppen für Handelsschiffe . . . II 679
—höhe, Brücken- . III 915
—holz . . . . . I 726*
— —arten . . . I 728
— —, Abmessungen III 299
— —, Festigkeit . I 497
— —, Gewicht . . III 56*
— —, zulässs. Beanspruchg. I 506; III 59
—kran . . . . . III 491
—maschine . . . III 476
—plan, Stadt-, Orts- III 630
—pumpe . . . . III 495
—stoffe, Brücken- III 916, 917
Baustoffe, Brücken-, zulässige Beanspruchg. III 73*, 78*, 237, 917
— —, Festigkt. . I 486 ff.*
— — f. Eisenbeton III 226
— — f. Flufsbau . III 508
— — f. Hochbau; Gewichte . . . III 55*
— — f. Hochbau, zulässs. Beanspruchg. I 504*, 506*; III 57*, 237, 917
— — f. Maschinenbau, zulässs. Beanspruchg. I 502
— — f. Schotterstrafsen III 612
—winde . . . . III 490
Baumé . . . . . I 618
Baumpflanzung a. Landstrafsen . . . III 608
— — a. städt. Strafsen III 645
— — a. Strafsen . III 636
—wollriemen . I 801, 802
— —, Festigkt . . I 502
—wollseilberechnung I 814
— —betrieb I 809, 810*, 812
— —, Treib- . I 809*, 810*
Beale-Flügelgebläse II 623
—-Kegelräderfräsmaschine II 374
Beanspruchung, zulässige f. Brückenbau I 507; III 73*, 78*, 237, 917
—, — f. Hochbau I 504*, 506*; III 57*
—, — f. Maschinenbau I 502, 503*
Beaufort-Skala (Wind, Seegang) . . . I 655*
Bebauungsarten (Städtebau) . . . . III 639
Becherförderer, —kabel, —kette . . . II 521
—werk . . . . . II 517
Beckersche Bremse II 383
—r Flaschenzug . II 385*
Bedachungsstoff I 691, 718
Bedingte Beobachtung (Vermessungsk.) III 52
Bedingungsgleichungen, Netz- (Triangul.) III 47
Bedürfnisanstalt, Fabrik- III 475
Behälter, Wasser- III 368, 671, 678*, 792, 793*
—, Eisenbeton- . . III 262
—nietung . . . . I 760
Beharrungsregler . I 965
Bekohlung v. Schiffen II 556
Belageisen . I 641*, 660
— v. Strafsenbrücken III 61
Belastung v. Tragwerken . . . III 79
—en gewölbter Brücken III 60

Belastungen f. Eisenbetonhochbauten III 234
—en v. Hochbauten III 56*
—änderung, verhältnismäfsige . . . II 804
—sdauer, Einfluss a. Festigkt. . I 495, 496
—sfalle für Träger unveränderl. Querschn. I 546*
— —, wichtige, f. Träger I 561 bis 564*
—sgleichwert . . III 69
—shöhe . III 60, 178, 180
—slinie . . . . . I 177
—svorschriften d. Vereinsdeutscher Eisenverwaltungen . III 79
— — für d. preufs. Staatsbahnen . III 65
— — für d. Schutzgebietbahnen . . III 76
—swiderstand . . II 894
—, zulässige d. Baugrundes I 507; III 60, 185
Belebte Motoren . II 1, 2*
Beleuchtung . . II 807
—, Berechnung II 811, 812*, 831
—, Eisenbahnwagen- III 804
—, mittelbare . . II 833
— v. Fabriken, Theatern, Sälen, Warenhäusern, Eisenbahnwagen II 833, 834
—, Wärmeabgabe III 330*
—, Wirtschaftlichkeit II 830
—sanlage, Entwurf II 829
—sart, Wahl der . II 832
—sarten . . . . II 813
—seinheit . . . . II 809*
—skurve . . . . II 813
—sstärke . . . . II 808
— —, erforderliche II 832*, 834*
Belichtung . . II 808
—, Fabrik- . . . III 443
Belleville-Kessel II 773, 775
Benn-Kupplung . I 832
Benzin, Explosionsgrenzen . . . I 472
—, Heizwert, Luftbedarf II 256
—motor II 253, 258, 267, 275
—, Verbrenng. I 455, 460, 477
Benzol, Explosionsgrenzen . . . I 472
—, Heizwert, Luftbedarf II 256
—lichtlampe . . . II 815
—, Verbrennung . I 477
—, Wärmewerte I 371, 376 ff., 401, 413, 462
Beobachtung, direkte vermittelnde, bedingte III 49, 50, 52
—sfehler . . . . III 49
— —, Theorie der I 84
Bergaufzug . . . II 537
Berieselung III 562, 711
Bernoullische Zahlen I 79
Berührung . . . I 92
Beschickungs-(Gicht-)seilbahn . . . . II 555
Beschleunigung I 141, 142, 145, 184
—, Coriolis- . . I 224
—, Erd- . . . I 143, 148
—, Fall- . . . I 113, 148
—, Normal-, Tangential-, Zentripetal . . I 145
—sarbeit . . . . I 231
—sdruck (Kolben) . I 885
—skraft . . . I 225
—splan . . . . I 210
—srückdruck . . I 321
—szentrum . . . I 211
—szustand . . . I 210
—, Winkel- . . . I 146
—, zulässige v. Fördermasch. . . . II 1005
—, Zusatz- . . . I 224
Bessels Erdelemente III 1
Bessemereisen(-stahl) I 633
—gebläse . . . . II 610
Beton s. auch Eisenbeton I 704; III 227
—behälter . . . . III 674
—brücke . . . . III 217
—brunnen . . . III 662
—, Eisen- s. auch dort I 704; III 226
—, Festigkt. I 498, 499*, 500*
— f. Strafsen . . III 622
—gefülltes Rohr, Festigkt. I 517
—, Gewicht I 706*; III 55
—, Gips- . . . . I 697
—grundpfahl . . . III 202
—mast . . . . II 975
—mauerwerk . . III 278
—mischmaschine . III 488
—rohr I 707*; III 630*
—, Schädigende Einflüsse auf — . . . III 224
—schüttung unter Wasser . . . . III 220
—, Zulässs. Beanspruchg. I 506, 507; III 60
Betriebsverluste d. elektr. Gleichstrommasch. II 563
—wassermenge . . III 574*
—werkstatt, Eisenb. III 605
Bettung, Eisenbahnschwellen- . . III 736
—sbreite, -höhe (Eisenbahn) . . . III 733
—, Zahnradbahn- III 892
Bewässerung . . III 561
—, Fabrik- . . . III 465
Bewegliche Einzellasten (Statik) . III 96, 129
Kupplung . I 824
Bewegung, Absolut-, = Relativ- . . . I 146
—, beschleunigte . I 141
— d. starren Körpers I 190
—, ebene . . . I 207, 206
—, Elementar- . . I 203
—, endliche . . . I 207
—, drehungsfreie, v. Flüssigkten . . I 336
—, freie Massenpunkt- I 164
—, geradlinige . . I 141
—, geradlinige Massenpunkt- . . . I 184
—, gleichförmige (ungleichförmige) . I 141
—, gleichf. Kreis- . I 145
—, Kreis-, (Dreh-) I 186
—, Kreis-(Dreh-) — d. Massenpunktes I 227
—, Kreisel- . . I 207, 235
—, komplane — 2 Ebenen I 212
—, krummlinige . I 144
—, — Massenpunkt- I 185
—, Relativ- b. Drehung d. Bezugssystems I 223
—, Roll- . . . . I 246
—, Schiebungs- d. starr. Körp. . . . . I 190
—sdreieck . . . . I 207
—senergie . . . . I 152
—sgröfse . . . . I 225
—, sphärische . . I 207
—sschraube (Mechanik) I 204
—sschraube . . . I 749
—swiderstand d. Fahrzeuge . . . . III 599*
—, unfreie Massenpunkt- I 187
—, unfreie (Punkthaufen) I 226
— unvollkommener (wirklicher) Flüssigkt. I 348
—, Vertauschbarkeit d. I 355
—, Wirbel- . . . I 337
—, Zusammensetzung d. Elementar- . . I 204
—, Zusammensetzung geradliniger . I 143
Bewehrter Beton s. auch Eisenbeton . . I 705
Beyer-Regler . . I 972
Bezeichnung d. Eisenbahnwagen . . III 572
Biegemaschine II 341, 342
—eversuch . . . I 695
—sames Tombakrohr I 993*
—same Welle I 820, 821*
Biegungsarbeit . I 583
—sbeanspruchung, zulässige I 503*, 504*, 506*; III 57*, 73*
—sdruckfestigkeit, Eisenbeton . . . . III 237
—sfeder . . . I 593, 595
—sfester Stabzug . III 118

Digitized by Google

Biegungsfestigk I 485, 521
—slinie . . . . . I 532
— —, Fachwerk- . III 111
— — d. Untergurtes III 109
— — als Seileck . III 113
—smoment . . . . I 521
— —e, Balken a. 3 u. 4 Stützen III 134, 135*
— —e d. einfachen Balkens . . . . I 176
— —e v. Brückenträgern III 66 bis 72*, 77*
— — (Fachwerk) . I 180
— — für Schiffe II 711, 714*
— — i. einfachen Balken III 79
— — ü. Stützpunkten durchlauf. Träger I 565, 567*
— —, wichtige Belastungsfälle v. Trägern I 546* ff.
— —, zeichn. Bestimmg. f. d. allgemeinen Belastgsfall . . I 554
—sspannung . . . I 522
— —, Momentenebene durch Hauptachse I 523
— — bei beliebiger Momentenebene . I 528
— —, zulässige I 503*, 504*, 506*; III 57*, 73*
—swinkel . . . . I 532
— —, Träger v. Kleinstem — . . . I 564*
—szugfestigkeit, Eisenbeton . . . . III 238
— u. Drehung . . I 585
— —, Werte:

$$0{,}35 + 0{,}65\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 \cdot M_d}{M}\right)^2}$$

I 585*
— u. Druck (Zug) I 572
— u. Schub . . . I 584
Biehnsche Grundwasseraltdichtung . . I 718
Bilgram-Kegelräderhobelmaschine . . II 373
Bimsbeton . . . III 278
— —dach . . . . III 442
—stein . . . . . I 683
—zementdiele . . I 688
Bindemittel, Festigkeit I 498*, 499*
Binder s. auch Träger.
—anordnung . . . III 338
—, Balken- . . . III 338
—, Dreigelenk- . . III 344
—, eiserner . III 336, 356
—, Hallen- . . . III 312
—, Holz- . . . . III 304
—, Holzeisen- . . III 316
—, Zweigelenk- . III 346
Binnenschiffahrtkanal III 522
Binomialkoeffizienten I 43*, 45 46
Binomischer Satz I 45
Binormale . . . . I 116
Biologische Abwasserreinigung . . III 710
Blattfeder . . . . I 593
Blaubrüchigkeit . I 486
Blech, Blei- . . I 677
—, Eisen- I 660 ff.; II 73
—, Fein —lehre . I 622*
— f. Brückenbau . III 921
—, gelochtes . . . I 661
—kantenhobelmasch. II 358
—, Kessel- . II 73 ff., 101
—, Kupfer- . . . I 676
—, — (Festigkeit) . I 493
—lehre, Zink- . . I 674*
—mantelpfahl . . III 209
—platte, Gewicht . I 621*
—richtmaschine . II 341
—schere . . . . II 344
—schornstein . . II 53
—, Schwarz- . . . I 660
—träger I 563; III 64, 923
— —, erforderl. Höhe III 943
— — für Eisenbahnbrücken . . . III 990
— —, zulässs. Spannung I 511, 512*
—, Ueberpreisliste II 101
—verbindung . II 23, 27
—, verkupfert, vernickelt, verzinkt, verzinnt I 662
—, Well- I 662, 664*, 675
—, Zink- . . I 621*, 674
Blei . . . . . I 667, 677
—akkumulator II 806, 858, 929, 934, 949
—bende Dehnung . I 483
—blech . . . . . I 677
—draht . . . . . I 677*
—, Festigkt. I 496, 500, 501
—, Gewicht I 621*; III 56
—kabel (el. Leitg.), zulässs. Stromstärke II 963*
—rohr . . I 677, 929*, 930
B-Linie . . . . III 93
Blitzableiter . . . II 950
Blockkran II 485, 487*, 488* 490
Blondin . . . . II 554
Bobilliersche Konstruktionen (Krümmungsmittelp.) . . . I 212
Bobine . . II 433, 439*
—nmaschine, elektr. III 1006
Bodenauflockerung, -gewinnung III 736*
—, Behälter- . . . III 675
—druck (Silo) . . II 534*
—durchlässigk. I 315; III 658
—filtration . . . III 711
—, Kessel- II 27, 85, 87
—preis, Einfluss auf Fabrikort . . . III 431
—speicher . . . . II 529
—untersuchung . . III 188
Bogenabsteckung III 40
—, Bohlen- . . . III 312
—brücke, Eisenbeton- III 271
— —, gewölbte III 1030, 1034, 1039, 1040
— —, Lager . . . III 978
—differential . . I 91, 116
—, Dreigelenk- (gewölbte Brücken) III 1034, 1039
—,eingespannter III 948, 1035
—, Holzfachwerk- III 312
—lampe II 821, 829, 830, 831, 835, 836
—länge . . . . . I 95
— —, Kreis- . I 36*, 38*
—, Mauer- . . . III 289
—, Schwerpunkt . I 166
—stück, Widerstandszahl . . . . I 288
—träger . . III 948, 1025
— —, beiderseits eingespannter III 150, 1025
— —, Biegungslinie d. vollwandigen . III 119
— —, Brücken-, Gewichte III 65*
— —, Dreigelenk- III 99, 174, 175, 180, 274, 344
— —, Dreigelenk- (Brückenb.) III 948, 1025
— —, durchgehender III 104
— —, Eisenbeton- III 271, 274
— —, vollwandiger III 948
— —, vollwandiger, mit aufgehobenem Horizontalschub III 146
— —, Zweigelenkbogen III 141, 347
—weiche . . III 763, 765
Bohlenbelag v. Straßenbrücken III 61, 1009
—werk . . . . . III 188
Böhmische Kappe . III 294
Bohrer, Metall- . II 348
—kegel . . . . . II 363*
—maschine, Metall- II 361
— —, Holz- . . . II 382
—rohr . . . . . I 918
Boileau-Dach . . . III 445
Bolzenkipplager I 172, 972
—kupplung, elastische I 827*
Bomben-Kalorimeter II 326
Boot . . . . II 690*, 704*
Bordring . . I 925, 926*
—stein, -Schwelle . III 630
Bördelblech . II 75, 76
Böschung, Eisenb.- III 734
—, Graben- . III 558, 734
—, Kanal- . . . . III 535*
—, Straßen- . . . III 635
—smesser . . . . III 3
—swinkel II 491*; III 168, 558, 734
— — (Getreide) . II 524*
— —, natürliche III 168*

Bougie-mètre . . . II 805
Boylesches Gesetz . I 326
Brandmauer III 285, 406
Brauchwassermenge III 685
Brauerei, Arbeitsdiagramm III 438
—sches Dynamometer II 322
—sches Wassermefsverfahren . . . . II 314
Braunkohle I 455, 456, 458*; II 33
—nteeröl . . . . I 478*
—, Verbrennung . I 466*
Breccie . . . . . I 685
Brettenmafs v. Brücken III 915
Bremme-Umsteuerung II 186
Bremsbandlastdruckbremse . . . II 400
— —, Reibung I 257*, 258*
—bergförderung . II 495
—dynamometer . . II 321
—e . . . . . I 859
—e, Automobil- . II 804
—e, Eisenbahn- I 243, 244; III 812
—e, elektrische Bahn- III 902
—e, elektrische Hebemaschinen- . II 393
—e, Fall- . . . . II 415
—e, Fördermaschinen- II 447, 1015
—e, Fuhrwerk- . . III 598
—e, Grubenbahn- . III 906
—e f. elektr. Bahnen II 995
—e f. Hebemaschinen II 383, 387, 388, 389, 393
—e, Hebezeug- . . II 383
—e, Lastdruck- II 388, 399
—e, Lokomotiv- . III 850
—e, Magnet- II 395, 398
—e, Reibungszahl I 243* 244*, 257*, 258*
—e, Seilbahn- . . III 913
—e, Senk- . . II 393, 402
—e, Sperrad- . . I 864
—e, Stopp- . . . II 393
—e, Wasser- . . . II 322
—e, Zahnradbahn- III 894, 901
—gestänge, Eisenb.- III 815
—klotz (-druck) . I 243; III 813, 814, 815
—kräfte bei Brücken III 73
—lüftmagnet II 396*, 402*
— —motor . II 396*, 397
—scheibe . . . . II 321
—verband (Brückenb.) III 983
—wagen . . . . III 822
—weg, -verzögerung III 821, 822
Brennarten II 814 816
—punkt, —weite . III 11
— — (Kegelschnitt) I 97
— — (Kraftöle) . I 478*
—holz . . . . . I 728
Brennstoffe I 455; III 798
— —, flüssige I 460, 476; II 770
— —, flüssige, Feuerung II 40, 770
— —, gasförmige . I 455
— —, motorische, Heizwert, Luftbedarf, Ausnutzung . II 256*
— —, Verbrennung flüssiger u. gasförmiger I 468
— —, Verdampfungsleistg. II 33, 769; III 625, 827
—stoffpumpe . . . II 782
— —verbrauch d. Lampen . . . II 531*
—zeiten . . . . II 836*
Briggsche Logarithmen I 24 bis 25*, 48
— d. Hyperbelfunktionen I 32 bis 33*, 34*
Brikett I 455, 458*, 459*, 460
Brinellsche Kugeldruckprobe . . . . I 484
Britanniametall . . I 681
Brixsche Formel, Tragfähigkt. d. Pfähle III 214
Bronze . . . . I 678
—, Aluminium- . I 681
—blech . . . . I 621
—draht . . . . . I 679
—, Festigktszahl I 493*, 494*, 495*, 496, 500, 501
—, Gewicht . . . II 56
—rohr . . . I 913, 921*
Brons-Motor . . . II 780
Brown, Boveri, Parsonsturbine . . . II 238
— -Umsteuerung . II 188
Bruchquerschnitt I 524
—sicherheit . . I 486, 514
—spannung . . . I 483
—steinmauerwerk III 278
Brüche, imaginäre —, reelle — . . . I 70
—, Quadrat- u. Kubikwurzeln . . . I 43*
—, unbestimmte Formen I 68
—, Zerlegung rationaler i. Teilbr. . . I 69
Brücke s. auch Bogenbr., Eisenbahnbrücke.
—, Belastg. eiserner III 61
— —, — gewölbter . III 60
—, bewegliche, Literaturangaben III 1026
—, Eisenbetonplatten- (-Balken-) . . III 265
—, eiserne . III 916, 917
—, gewölbte, Literaturangaben . . III 1030
—, —, statische Verhältnisse . . III 1031
— —, Tafeln III 1042 bis 1044*
—, Kanal- . III 543, 536
Brückenbahn, Eisenbahnbrücke. . III 920
— —, Gewicht . III 65*
—nbau, Allgemeines III 915
— —, Lieferungsbedingungen . . . I 761
— —, zulässig. Beanspruchg. I 507; III 73*, 78*, 287, 917
—ngewicht . . . III 1034
—n i. Kurven . . III 1034
—nkran II 460, 461*, 504; III 521
—nlager . . . . . I 111
— —, Balken- . . III 969
— —, Bogen- . . III 978
—nnietung . . . I 762
—npfeiler III 1027, 1043
—nstütze . . . III 1006
—nträger, Biegungsmomente u. Querkräfte III 66 bis 72*, 77*, 78*
— —, zulässig. Spannung I 511; II 73*, 74*
—nwage . I 154; II 313
— —, Gleis- . . III 866
Brunnen, Abessynier-, artesischer . . III 664
—, Anordnung f. Wasserhaltung . . . III 194
—, Beton- . III 205, 662
— f. Wasserversorgung III 645, 661, 751
—, gemauerter . . III 661
—gründung . . . III 207
—, Klär- . . III 708, 709
—, Probe- . . . III 658
—rohr . . . . . I 918
—schlinge (-Kranz) II 203
—stube . . . . III 656
B T U (British Thermal Unit) . . . . I 374
Buchenholz . I 497, 736
Buckelplatte . . I 662
— f. Brücken III 998, 1011
Bügelholzsägeschnittverfahren . III 1051
Buhne . . . III 504, 505
Bühnenkipper . . II 499
Bulbeisendecke . . III 980
Bunker . . II 534, 626
—wage . . . . . II 312
Bunsenbrenner . . . I 487
Bürgerlicher Druck (Wasserltg.) . III 654
—steig . . . II 642, 643
Bürste (Kollektor) II 589
Bussole . . . . III 14

C.

Cachin-Kupplung . I 836
Cailletet u. Mathias, Schweflige Säure-Versuche . . I 435
Caissongründung . III 219
Carcel . . . . . II 609

Digitized by Google

Cardanische Formel (Gleichgälög.) I 52
—isches Problem . I 209
—getriebe . . . . II 805
Carnotscher Kreisprozefs* . . . I 408
— Satz (Stofs) . . I 241
Castiglianosches Prinzip III 120
Celsius-Thermometer I 369, 370*; II 325
C. G. S.-System I 149; II 837
Charakteristik d. Gebläse . . II 598, 606
— d. Gleichstrommaschinen II 866, 882
— d. Kreiselpumpen II 572
— d. Logarithmen I 48
— d. Regler . . I 966
— d. Wechselstrommasch. II 902
Chaussee s. auch Landstrafse, Widerstandszahlen . . III 600*
Chaussierung a. Brücken III 1015
Chemische Elemente u. Verbindgen I 610* ff.
— Zeichen . . . I 398*
Chlor I 378, 379, 380, 413
—oform, spez. Wärme I 376 ff., 401
—, verflüssigtes, Dichte, Volumen . . I 373
Chromatische Abweichung (Fernrohr) . . III 12
—nickeldraht . . I 501
— —stahl I 489 bis 491*, 625
—stahl . . . . . I 626
— -Wolfram-Stahl . I 626
C-Kurve (Regler) . I 966
Clapeyronsche Gleichg. (Statik) I 565; III 126
— (Dampf) . . I 415
Clausiusscher Satz (Wärme) I 394
Collmann-Steuerung II 165, 167, 169, 174
Compounddraht I 680
—maschine s. Verbundmaschine
—verzahnung . . I 790
Conveyor . . . . II 521
Coriolisbeschleunigung, -kraft . . . . I 224
Corlissschieber II 155, 191
—steuerung . . . II 172
Coronaverlust . . II 969
Cosinus I 26, 27*, 57 bis 61*
—, arccos . . . I 60, 65
—, Ar Cof . . . I 65
—, $\cos^3 \alpha$ . . . . II 812*
—, hyperb. I 31*, 33*, 64
Cotangens I 28, 29*, 57 bis 61*
—, arc ctg . . . 60, 65
Cotangens Ar Ctg I 65
—, hyperb. . . . I 64
Coulomb . . . II 837
—sche Erddrucktheorie III 167
—sches Gesetz . . II 859
Cremonascher Kräfteplan . I 179; III 90
Culmannsche *E*- u. *K*-Linie (Erddruck) III 168, 169
—s Verfahren (Kräftezerlegung) . . III 92
— — (Spannungsermittlg.) I 176
— Trägheitsellipse I 194
Curtisturbine II 224, 229, 234, 238
C W L (Konstruktionswasserlinie) II 627, 628, 643

D

Dach III 303, 310, 380, 384*
— Belastung . . III 57
—, Bimsbeton- . . III 442
—binder, Spannkräfte III 91*
—deckungsstoff . . I 691
—eindeckung III 380, 384* ff.
—, Eisenbeton- . . III 258
—, eisernes . . . III 334
—, Fabrik- . . . III 441
— f. besondere Zwecke III 342
—, Glas- . . III 387, 444
—, Holzeisen- . . III 317
—, Holzzement- III 386, 442
—, Krag- . . . . III 340
—, Kupfer-, Zink- . III 385
—, Kuppel- . III 160, 309
—, Leinwand . . III 387
—, Mansard- . III 308, 446
—neigung . . . III 389*
—, Papp- III 386, 442
—pappe . . . . I 718
—, Pfetten- . III 304, 334
—, Preufsische Bestimmungen . III 381* ff.
—, Pult- . I 178, 309, 340
—, Rohr-, Stroh- . III 386
—, Sägen- (Shed-) III 309, 341, 446
—, Sattel- . . . III 305
—schiefer . . . . I 691
—, Schiefer- . . . III 385
—, Schlepp- . . III 341
—, Sparren- . III 304, 334
—, Turm- . . III 163, 309
—verband, Eigengewicht III 319, 356
— — (Holz) . . . III 303
—, Walm- . . . III 308
—, Wellblech- III 385, 386, 441
Dach, Zelt- III 309, 352
—, Ziegel- . . . . III 384
—ziegel . . . . I 694
D'Alembertsches Prinzip I 225
Daltonsches Gesetz I 401
Dammerde . . . I 686
—, Kanal- . . . III 531
—, Landstrafsen- . III 609
Dampfdiagramm d. Einzylindermasch. I 426; II 106
— — d. Mehrzylindermasch. . . . II 118
— —, Ueberdruck- I 951
—dom . II 5, 30; III 834
—druckpumpe . . II 560
—düse I 442, 443*; II 218, 224
—einström(ausström-)rohr (Lokomotive) . III 839
—entölung . . . II 206
—ersparnis durch Rohrumhüllung . . I 452*
—fördermaschine II 428, 430
—geschwindigkt. b. Schiffskolbenmasch . II 746
— — b. Fördermasch II 445
— — i. Rohrleitg. I 447, 450
— — i. Steuerungskanälen II 144, 145, 746
—hammer . . . . II 333
—haspel . . . . II 427*
—heizung . . III 417, 427
— —, Eisenbahnzug- III 838
— —, Fabrik- . . III 463
—kabel II 426, 427*, 428*
—kanalquerschnitt (Dampfmasch.) II 144, 746; III 843
—kolben als Auslafsschieber . . . II 175
—lässigkeit . . . II 132
—leitung, allgemeines I 450
— —, Kondensationswassermenge Wärmeersparnis d. Umhüllg. I 451*, 452*
— —, Schiffsmasch. II 766
— —, Rohrnormalien I 917, 924, 926*
—messung . . . II 320
—pfeife . . . . . III 838
—ramme . . . . III 486
—raum (Dampfk.) . II 5
—spannung i. Lokomotivkesseln . . . III 834
—speicher . . . . II 137
—strahlgebläse . . II 625
— —pumpe . . . II 562
—tafeln I 413*, 416* ff., 423*
—triebwagen . . III 857
—überhitzer . II 21, 770; III 851
—überhitzung b. Turbinen II 217
—verbrauch d. Dampfmaschine I 424; II 125 ff.

Dampfverbrauch der Fördermasch. II 441, 442*, 443*
—walze III 62, 598, 615*
—warmwasserheizung III 420
—wasserheizung . III 421
—winde . . . . III 491
—zuleitung, -Ableitung II 196, 197
—zylinder I 207; II 189, 446, 452, 747; III 842
Dämpfe, Allgemeines I 412
—, Ausflufs I 440; II 218
—, Bewegung i. Rohrleitung . . . I 447
—, Drosselung . I 453, 454
—, Explosionsgrenzen I 472
—, kritischer Zustand, Siedetemperatur I 412, 413*, 414, 448
—, spez. Gewichte I 618*
—, strömende, Bewegung I 439
—, Wärmeübergang in Röhren I 381, 382, 388*
—, Wasserdampf, gesättigter I 416 bis 420*
—, —, nasser . I 413, 415
—, —, überhitzter I 421, 423*
—, Zustandsänderung (Expansionskurven) I 405, 415, 421
Dampfkessel II 5, 768; III 417, 825, 857
—, Absperrvorrichtungen II 62, 68, 776; III 839
—, Anstrengungsgrad, Leistg. II 33, 768; III 825
—, A. P. B. (Allgem. polizeil. Bestimmgen. II 67
—, Arten II 6, 771; III 857
—, Aufstellungsort II 6, 71
—, Ausrüstung, Zubehör II 60, 68, 776; III 836
—, Bauvorschriften für Land- . . . II 67, 81
—, Bestimmungen ü. Anlegung u. Betrieb von — . . . II 66
— Blechdicken II 67, 82; III 827
—, Boden I 603; II 84 ff.
—, Brennstoffverbrauch II 93, 769; III 825
—, Dampfraum . . . II 5
—, Dom II 5, 30; III 834
—, Einmauerung II 40, 72
—, Entleerungsvorrichtung II 64, 68, 777; III 838
—, Feuerbuchskessel II 11; III 827
—, Feuerung II 31, 67, 770, 771; III 832
—, Gewicht II 6, 775, 779
Dampfkessel, Heizfläche II 32, 769; III 825
—, Kesselpapiere . II 72
—, Klein- II 19, 72; III 857
—, Konstruktion II 23, 771
—, Lokomotiv- . . III 825
—, Materialvorschriften f. Land- . . . II 73
—, Nietung II 23, 26*, 77 80, 756
—, Normen f. Leistungsversuche . . II 91, 94
—, Prüfung . . . II 70
—, Schiffs- . . II 11, 768
—, Schweifsung II 25, 82
—, Speiseraum . . II 6
—, Speisung II 54, 63, 68, 767, 777; III 836
—, Triebwagen- . III 857
—, Verankerung, Verstärkung II 29, 77, 80; III 828
—, Verbindungen d. Teile II 23, 27, 81 ff.
—, Verbrennung, Verdampfung II 33, 34, 769; III 825
—, Verdampfungsversuche II 99
—, Wärmeverlustbestimmung . . . . II 97
—, Wasserkammern II 17
—, Wasserraum . II 5
—, Wirkungsgrad II 32; III 827
Dampfmaschine, Abkühlungsverlust II 129
—, Allgemeines I 423; II 104
—, Arbeitsverlustbestimmung . . . . I 100
—, Arbeitsverteilg. auf d. Zylinder II 119, 739
—, Ausstattung . II 201
—, Auswertung v. Versuchen . . . I 425
—, Berechnung . . II 104
—, Dampfdiagramm I 426, 951; II 106, 113
—, Dampfverbrauch I 424; II 125 ff., 441
—, Einzylinder- . I 426; II 106
— f. Hebemaschinen II 388, 428, 436
—, gewinnbare Arbeit I 424
—, Gleichstrom- . II 175
—, Heifs- . . II 119, 132
—, Indizierte Leistg. II 105
—, — Spannung . II 109, 120, 124
—, Kalorimetrische Untersuchg. . . I 427
—, Kalt- . . . . I 428
—, Kolbengeschwindigkeit I 883; II 138, 739
—, Lokomotiv- III 839, 858
Dampfmaschine, Naſsdampf- . . . II 13
—, Normen f. Leistungsversuche . . II 91, 9
—, Raumdiagramm I 1
—, Schiffs- . . . II 7
—, Steuerung II 144, 4 754; III 8
—, Teile . . II 189, 7
—, Theorie . . . I 4
—, Umlaufzahl, Hub, Kolbengeschwindigk. d. Schiffskolben- II 73
—, Undichtheitsverlust II 13
— Verbund- . . . I 42 II 117, 74
—, Wärmeausnutzung II 13
—, Wärmeverbrauch I 42 II 133, 13
—, Wirkungsgrad . I 42 425; II 133, 134, 13
—, Zwei- u. Mehrzylinder- . . . . II 11
—, Zylinderraumverhältnis . . . II 115, 73
Dampfturbine, Bauarten . . II 229, 75
—, Gemischte od. kombinierte . . . II 2
—, Rückwärts- . . II 75
—, Schiffs- . . . II 75
—, Theorie . . . II 21
Dämpfungsfaktor I 2
—widerstand . . II 55
Darcy-Rohrreibungszahl I 29
Dauerbrandlampe II 5
—förderung . . . II 30
Daumensenkbremse II 3
—stoppbremse . . II 3
Dechers Prismentrommel III 7
Deckelschrauben II 193, 268, 74
—lage (Strafsenbau) III 61
—werk, Ufer- . . III 50
Decke III 373, 374* ff.
—, Belastung . . III 5
—, ebene Massiv- III 23 378, 376, 377, 3
—, Eigengewichte III 37 bis 379*
— Eisenbeton- III 235, 254, 275, 37
—, gewölbte III 374 bis 37
—, Holzbalken- . . III 37
—, Preufsische Bestimmungen . . III 374* ff.
—, Steine für — . I 69
—nplatte, Eisenbeton- III 23
—nträger, gewalzter I 85 36
Dehnfuge . . . III 3

Dehnung I 481, 483, 488 bis 496*
—, elastische . . I 483
—sellipse . . . . I 527
—sfähigkeit v. Eisenbeton . . . . III 240
—sgesetz f. luftförmige Körper . . . I 330
—srohr I 914, 919*, 923*, 931
—szahl I 482, 488 bis 496*
Deichbau . . . . III 564
Dekrement, logarithmisches . . . . I 223
Deltametall . . I 680
—, Festigkeitszahlen I 494*
Deplacement II 628, 639*, 641
Déri-Repulsionsmotor II 957
—wicklung . . . II 887
Derrick-Kran . . II 475; III 491, 494
Descartessches Blatt I 111
Deseniss & Jacobi, Wasserenteisenung . III 670
Desinfektionsanlage, -apparat II 706; III 882
Determinanten . . I 49
Deviationsmoment I 192
D-Fläche, -Linie . III 95
Diagramm, Arbeits- des Verbrennungsmotors . II 242, 254
—, — f. Fabrikanlagen III 437
—, Dampf-, s. dort.
—, Heyland . . . II 914
—, Indikator- . I 425, 426
—, Kappsches . . II 900
—, Kompressordruck- II 613
—, Massenwucht- . I 959
—, Raum- (Dampfmasch.) II 115, 116
—, Schieber- . . . II 146
—, Ueberdruck- u. Widerstands- (Schwungrad) I 951
—, Wärme- . . . I 396
Diaphragma . . III 12
—pumpe . . . . III 495
Diatomit . . . . I 688
Dichte, s. auch spez. Gewicht . . . I 149
—e d. Gase . . . I 398*
—e d. Wassers . . I 372*
—e, magnetische . II 839
—heit d. Dampfabschlüsse II 132, 145
Dichtung d. Kanalbettes . . . . III 531
—, Kolben- . . . I 865
—, Rohr- . . . I 307, 915; III 581, 705, 839
—, Ventil- . . . I 932
Dielung III 374 bis 379, 457
Dielektrizitätszahl . . II 845
Dieselmaschine II 242, 247, 254, 781
—, Oele für — . . I 476*
Differdinger **I**-Eisen I 652 ff.*, 660
Differentialflaschenzug . . . . . II 385
—formeln . . . . I 66*
—gleichung . . . I 80
—pumpe . . . . II 584
—quotient, -rechnung I 66
Diffuser . . II 594, 596
Dimension I 149; II 837*
Diopterinstrument . III 4
Direktionskonstante II 907
Direktrix . . . . I 96
Diskontfaktor . . I 54
Diskontinuitätsfläche I 349
Diskriminante . . I 96
Distanzmesser . . III 85
Divergenz (Vektorrechng.) I 123, 217
Dochtkohle . . . II 824
Dohmen-Leblanc-Reibungskupplg. I 830, 831*
Dolomit . . . . I 684
Dom, Dampf- II 5, 30; III 834
Doppelbronzedraht I 680
—dach . . . . . III 304
—frequenzmesser . II 940
—kegelkupplung . I 823*
—kegel-Reibungskupplung . . . . I 833
—kessel . . . . II 9
—kollektormotor . II 955
—laschennietung I 759; II 24
—punkt . . . . I 94
—scheiben-Reibungskupplung . . I 832
—schiebersteuerung II 156
— — mit Achsenreglern II 163
—schlufsmaschine . II 863
— —, Charakteristik II 868
—-T-Eisen . . . I 641*
— —, Grey-Profile I 652 ff.*, 660
—-T, Querschnittmoment I 536, 537
—weiche . . III 763, 765
—zellenschalter . . II 935
Doerfel-Steuerung . II 167
Doergens-Prisma . III 7
Dowsongas . . . I 472
Drachenflieger . . I 342
Draht, Eisen- I 620, 635, 660
—, Blei- . . . . I 677*
—, Bronze- . . . I 679
—, Festigkeit I 500*, 501*
—glas . . . . . I 711
—, Kupfer- . . I 620, 676
—lehre . . . . . I 622*
—, Mafse u. Gewichte I 620*
—putzwand . . . III 285
—riese . . . . . II 543
Drahtseil, Anwendungsgebiet . I 855; II 407
—bahn s. Seilbahn
—betrieb . I 806; III 460
—, Festigkt. I 501, 842 bis 853*; II 540, 701; III 905
—förderer . . . . II 516
— f. Fördermasch. . II 431
— f. Hebemaschinen I 848, 849 bis 853*
— f. Riesen . . . II 539
— f. schwebende Seilbahnen II 539, 540*, 541*
— f. Touristen-Bahn. III 905
—, Gleitverlust . I 259
—, Grubenseilbahn- III 905*
—, Schutzvorrichtg. III 469
—scheibe, Gewicht I 806*; II 439
—, Schiffs-, Gewicht, Festigkeit . . II 701*
—, Triebwerk- . . I 807*
Drainage . . III 558, 711
—rohrweite, Gerhardtsche Tafel . . III 560
Drall I 225, 228, 231, 235
Drehachse (—vektor) I 235
—bank . . . . . II 358
— —, Holz- . . . II 381
—bewegung d. Massenpunktes . . I 186, 227
— — d. starren Körpers I 190, 231
—erei . . . . . III 882
—feld . . . . . II 911
—gestell, Lokomotiv- III 848
— —, Wagen- . . III 870
—kraftkurve (Kolbenmaschine) . I 950, 951
—kran II 465, 477, 479, 481; III 491, 493, 494
— —gründung . . II 473
—maschine (Schiffsmasch.) II 766
—moment . . . . I 155
— — d. Gleichstrommotoren . . . II 892
— — d. Wechselstrommotoren . . . II 914
— — (Massenpunkt) I 187
— — (Festigkeit) . I 571*
— — (Festigkeit), zulässiges . . . I 568*
—scheibe . . III 779, 780*
—schieber . . . II 155
— —steuerung . . II 172
—stahl . . . . . II 815
—strom . . . . II 855
— — Gleichstrom-Umformer . . . II 926
— —kollektormotor II 955
— —leitung . II 966, 970
— —, Regelung . II 953
— —, Systemwahl II 958
— —maschine, Parallelbetrieb, —schaltung II 940

Drehstrommaschine, Spannungsregelung II 941
— —motor . . . II 911
— —motor, Regelung II 953
— —motor, synchrone Umlaufzahlen . II 959*
— —schaltung . . II 937
— —serienmotor . II 955
— —transformator II 920
— —verteilung . . II 954
—tor, Schleusen- . III 542
—vektor . . . . I 203
—zahländerung, verhältnismäfsige . . II 304
— —änderung, Wasserturbinen . . . II 307
Drehung . . . I 141
— d. starren Körpers I 190
— — um feste Achse I 231
— — um festen Punkt I 235
—, Elementar- . . I 203
—sarbeit (Festigkt.) I 571*
—sfeder . . . . I 596
—sfestigkeit . . I 485, 568
—sfreie Flüssigkeitsbewegung . . . I 336
—spaar . . . . . I 204
—sspannung, zulässige I 503*
— u. Biegung . . I 585
— u. Schub . . I 583
— u. Zug (Druck) . I 584
Dreieck d. Winkelgeschwindigkeiten I 206
—, ebenes . . . . I 61*
—feder . . . . I 593, 594
—, Flächeninhalt . I 129
—, Kugel- . . . I 62*
—lenker . . . . I 904
— querschnitt, Kern I 575
— —, Randspannung I 530
—, Querschnittsmomente I 535, 569, 571
—schaltung . . . II 856
—, Schwerpunkt I 165, 166
—, Trägheitsmoment I 197
Dreifachexpansionsmaschine II 118, 134, 738, 739* bis 742*
Dreiflammrohrkessel II 9
Dreigelenkbinder III 344
—bogen III 99, 174, 175, 180
— — (Brückenb.) III 948, 1025
— —, gewölbte Brücke III 1034, 1039
— —, Eisenbeton- III 274
Dreileiteranlage, Schaltung . . . . II 931
Drittellotrechte, . III 127
Drosselklappe, Widerstandszahl . . I 306
—scheibe . . . . II 318
—spule . . . II 921, 950
—ventil . . . . I 429
Drofslung, Dampf-, Gas- I 453
Druckabfall i. Aufnehmer . . . II 120
— — i. Rohrleitgen. I 450
—, Aktions- . . . I 317
— auf Körper mit gewölbt. Oberfl. I 509; III 973
—ausgleichkolben (Dampfturbine) . . . II 221
—, bürgerlicher (Wasserversorgung) . III 654
— d. Getreides . . II 534
—diagramm (Kompressor) II 613
—, exzentrischer . I 578
—festigkeit I 484, 487*, 496 bis 500*
— — gerader Stäbe I 507
— — von Eisenbetonstützen . . . III 237
—fortpflanzungsgl. Flüssigk. I 260
—gasanlage . . . II 281
—gleichung (Flüssigkeitsströmung) I 337
—höhe (Hydr.) . . I 281
—, hydraulischer . I 281
—, hydrostatischer I 262, 281
—knopfsteuerung elektr. Aufzüge . . . II 420
—, kritischer . . I 413*
—luftbremse . . . III 818
— —förderer . . II 525
— —gewinnung durch Wasser . . . III 584
— —gründung . . III 218
— —hebemaschine II 389
— —heber . . . II 559
—messung (-Einheiten) I 892; II 310
— — (Luft) . . . II 595
—pumpe, Kolben- II 584
—, Reaktions- . . I 321
—rohrleitung (Entwässrg.) III 705
— — (Kraftwerk) III 580
— — (Wasserversorg.) III 678
—, Sättigungs- . . I 412
—, Schnitt- (Werkzg.) II 346
—spannung (Festigk.) I 484
— — (Festigk.), zulässige I 503*, 504*, 510; III 57* ff., 73*, 74*, 78
—steigerung i. Rohrleitg. . I 306; III 682
—stollen . . III 579, 581
—stufen (Dampfturb.) II 224
— u. Biegung . . I 579
— u. Drehung . . I 584
— u. Schub . . . I 584
—verhältnisse im geschlossenen Raum (Lüftg.) . . . III 894
—versuch (Festigk.) I 625
—wasseraufzug . . II 421
Druckwasserförderer II 32*
— —hebemaschine II 38*
— —hebezeug, Reibg. I 244
—wechsel i. Kurbelgestänge . . . I 954
—welle (Schiff) . II 7[illegible]
—windkessel . . II 5[illegible]
—wirkung d. Kolbenpumpe . . . II 581
—zunahme b. Absperrung v. Rohrleitg. . III 6[illegible]
— — b. Verbrennung I 474*
Dübelstein . . . I 6[illegible]
Dücker . . . . . III 5[illegible]
Dulac-Gründung, -pfahl III 210
Duplexpumpe . . . II 58[illegible]
Duraluminium . . I 6[illegible]
Durana-Gufsmetall I 495*
—metall . . . . I 6[illegible]
Durchbiegung . I 531
— einfacher Balkenträger . . . III 113
—, Ermittlg. d. Biegungslinie als Seileck III 122
—, Schiffs- . . . II 715
— stat. unbest. Tragwerke . . III 109, 113
—, Träger kleinster — I 564*
— vollwandiger Bogen III 119
— — Träger . . III 949
— v. Fachwerkträgern III 959
— v. Kragträgern (Gerberträger) . . . III 948
— v. Walzträgern . I 558
—, wichtige Trägerbelastgsfälle I 547* ff.
Durchfahrthöhe u. Brücken III 533, 535*, 915
Durchflufs durch gefüllte Rohrleitung. I 277, 349
—öffnung (Messung) II 315
—, Widerstandsz. I 291, 351
—zahlen f. Luft I 350; II 320*
Durchgehende Bremse III 815, 818
—r Balken, — Träger s. durchlaufender Träger.
Durchhang, Seil- II 542
— v. Kupferdrähten II 973
Durchlafs III 533, 609, 636
—, Eisenbeton- . . III 365
— (Hydr.) . . . I 268
Durchlässige Bauten (Flufsbau) . . III 507
—keit d. Erdreichs s. auch Versickerung I 515*; III 658
— —, magnetische II 839
Durchlaufender Träger I 175, 565; III 126
— — mit veränderlich. Belastg. . . III 96
— Bogenträger . . III 104

Durchstich . . . III 507
Durchtränken v. Holz I 723
Dürr-Kessel . II 772, 775
Düse, Dampf- (Düsenerweiterg) I 442; II 218, 224
—, Gas- (Luft-) I 442, 443*, 445; II 316
—, Normal- . . . II 318
—, Peltonrad- . . II 299
—, Wasser- I 276, 316*; II 314
Dyn . . . . . I 149
Dynamik d. Massenpunktes . . . I 184
— d. Punkthaufens I 225
— d. Schwingungen I 221
— d. starren Körpers I 190, 230
— flüssiger Körper, theoretische . I 336
—, Kraftfelder, Potential I 216
— luftförmig. Körper I 335
—, Relativbewegung b. Drehung d. Bezugssystems . . . I 223
— tropfb. flüss. Körper I 264
Dynamische Grundgleichung . . I 149
— r Auftrieb (Strömg.) I 341
Dynamomaschine, Allgemeines . . II 862
— —, Gleichstrom- II 862
— —, Wechselstrom- II 895
—meter . . . . II 321

E.

e (Grundzahl) . I 43*, 48
—, Reihenentwicklg. I 56
$e^{\mu\alpha}$ . . . . I 257*, 258*
Ebene Bewegung I 207, 208
—, geneigte (Schiffshebewerk) . . . . III 548
— im Raume . . I 113
—, Schmiegungs- (Krümmungs-) . . . I 116
Ebonit . . . . . I 497
Eckverband (Brückenbau) . . . . III 74
Edisonakkumulator II 858
L-Eisen . . . . I 642*
— f. Schiffbau . . I 650*
Efeublattkurve . I 111, 112
Effekt, elektr. II 837, 844
—, — (Wechselstrom) II 852, 853
—, Ferranti- . . . II 854
—ive Spannung (-Strom) II 850
—ivkraft . . . . I 225
—kohlenlampe II 823, 824, 825*, 826*
—lampe . . . . II 820
Effekt (Leistung) I 150, 187
—quotient . . . I 187
Eiche, Festigkt., zulässs. Beanspruchg. I 497, 506; III 59
—, Gewicht . . . III 56
Eigengewichte s. auch Gewicht, spez. Gew.
—, Akkumulatoren II 806*; III 861*
—, Balkendecken III 374*
—, Baustoffe, Baukörper III 55*
—, Beton, Eisenbeton I 706*; III 233
—, Dachdeckungen III 384* ff.
—, Dachverbände III 319, 358
—, Dampfkessel . II 6
—, Decken . . III 374* ff.
—, Draht, Metallplatten I 620*, 621*
—, Drahtseile I 809*, 849 bis 853*; II 540*, 541*, 701*; III 905
—, Eisenb.-Radsätze III 809
—, Eisenbahnwagen III 873
—, eiserne Brücken III 1025
—, eiserne Eisenbahnbrücken . . . III 63
—, Erdarten . . . II 491; III 55, 168*
—, geschichtete Körper I 618*
—, gewölbte Brücken III 60
—, Grubenbahnwagen III 906
—, Heizungsrohre III 413*
—, Holzarten . . I 614*; II 698; III 56
—, Kolbenmaschinenanlagen a. Schiffen II 778*
—, Laufwinden, Kranträger . . . . II 458
—, Lokomotivkohlen III 797*
—, Lokomotivteile III 879*
—, Mauersteine . I 692
—, Nietköpfe . . I 754*
—, Profileisen . I 638 ff.*
—, Rohre . . . I 908* ff.
—, Schiffsgewichte II 692 ff.*
—, Schiffskesselanlagen II 779*
—, Schiffsladungen II 678*
—, Schiffswalzstahl II 696
—, Schraubenbolzen, Köpfe, Muttern, Unterlegscheiben I 743*
—, Seilbahnwagen III 912
—, Steine f. Landstrafsen III 613*
—, Strafsenbahnschienen II 984*
Eigengewichte, Strafsenbrücken III 61, 62, 1024
—, Strafsenfahrzeuge III 598*
—, Triebwagen III 860*
—, Turmspitzen . III 163
—, Verbrennungsmotoren f. Schiffe . . II 781
—, Wagen elektr. Bahnen II 999*; III 593
—, Walzstahl für Schiffe II 696
—, Zahnradlokomotiven, -wagen . III 903, 904
Eigenschaften verschiedener Stromsysteme II 951
Eigenschwingungen von Massenpunkten I 228
Eimerwerk . . . II 557
—kettenbagger . . II 523; III 476, 478*, 479, 483, 484*
Einankerumformer II 926
Einbeulung . . . II 87
Einfachzellenschalter II 934
Einflammrohrkessel II 6, 7
Einflussfläche einer Spannung . . I 576
—linie . . . III 93, 130
— —, parabelförmige III 122, 123*
Einfriedigung, Eisenbahn- . . . . III 769
—smauer . . . . III 260
—, Strafsen- . . . III 609
Eingriffbogen, -dauer, -linie, -strecke I 213, 214, 767
—sfeld (Schneckenrad) I 777
Einheitsgewicht s. Eigengewicht, spez. Gewicht
—strimm-Moment . II 657
—svektor . . . . I 121
—, Wurzeln der . . I 47
Einhüllende Kurve I 95
Einketten-, -schalten, -schneiden (Triangul.) III 20
Einlafsschleuse . . III 577
Einlaufstück, Widerstandsz. . . . . I 298
Einphasiger Wechselstrom, Eigenschaften, Regelung . . II 956
—, Systemwahl . . II 959
Einsatzhärtung I 631
—, Stahl für — I 488*, 489*
Einschienenbahn . I 240
Einseilbahn . . II 543
— —, zerlegbare . II 557
—greifer . . . . II 406
Einschnitt f. Landstrafsen III 609
Einschnürung s. auch Kontraktion
— (Festigktsl.) I 481, 483, 488 bis 496*

Einschnürung (Hydraulik) . . I 345, 346
—, Strahl- . . I 266, 304
—szahl, Luft . . . II 317*
Einspannung (Statik) I 172
—smoment (Bogenträger) III 151
Einspritzkondensation II 202
Einstauung . . . III 562
Einsteigschacht . . III 701
Einströmung, Luft II 317
Eintrittswinkel (Schiffb.) II 722*
Einzelantrieb, elektr. III 460
—förderung . . . II 491
Einzylinderdampfmaschine II 106, 127*, 128*
—, Verbrauch, Wirkungsgrad . . . . II 134*
Eisen, Allgemeines, Bestandteile, Einteilung I 626
—draht . I 620, 635, 660
—erze . . . . . I 632*
—, Festigkeitszahlen I 486, 487*, 500, 501; II 330
—, Formgebung . I 635
— f. Brückenbau . III 917
—, Gewicht . . . III 56
—gewicht v. Strafsenbrücken . . . III 61
—gieſserei I 635; III 436, 884
—, Glühfarben . II 326*
—, Handelsfabrikate I 636
—, Härteskala, Festigkeit . . . . I 628*
—, Lieferungsbedingungen I 663
—portlandzement . I 701; III 226, 439
—sorten I 629, 631, 632*
—, spez. Wärme . I 376*
—verlust i. Anker . II 878
— —, Transformator- II 924
—, Zulass. Beanspruchg. I 503*, 504*; III 73*, 74*, 78
—, Zustandsänderung, Wärmebehandlung I 630
Eisenbahnbrücke, Belastung gewölbter III 60
— —, Belastungsvorschriften III 65, 76, 79
— —, Gesammtanordnung . . . . III 988
— —, Gewicht eisern. III 63
— —, gewölbte III 1042 bis 1044*, 1045
—, elektrische . . II 680
—fahrzeuge III 806, 856, 862, 894, 906, 912
— —, Leistung, Untersuchungszeiträume III 873
Eisenbahnschwelle I 727, 746, 149, 892, 906
—triebwagen III 856, 860*
—wagen . . . . III 862
— —, Beleuchtung II 884
— —feder I 504, 595; III 869
— werkstätte III 805, 878
—wesen, Bestimmg. üb. Bau u. Betrieb III 714
Eisenbeton, Allgemeines III 226
—, Amtl. Bestimmungen f. Hochbauten III 227, 233, 234, 236
—, Anfangs- u. Wärmespannung . . III 239
—, Anwendungen . III 254, 275
—, Behälter III 262, 674
—, Betonzugspannungen III 248
—, Bogenbrücken . III 271
—brücken . . . . III 917
—, Brunnengründung III 205
—, Bügelberechnung III 250
—, Dächer, Hallen III 258, 260
—, Decken III 235, 254, 275, 376
—, Elastizität u. Dehnungsfähigkt. . III 240
—, Fachwerkbrücken III 269
—, Fahrbahntafel (Strafsenbr.) III 1013
—, Festigkt. I 500, 704, 708; III 237
—fundamentplatten III 199
—, Gewicht I 706*; III 233
—, Gewölbe III 232, 258, 271
—, Gründungen . III 261
—, Leitsätze für d. stat. Berechnung . III 233
—, Mauern, Wände III 260
—pfahl . . . III 211, 212
—platte I 603; III 230, 233, 240, 244*, 248
—, Plattenbalken . III 230, 233, 240, 246, 248
—, Platten-, Balkenbrücken . . . III 265
—, Röhren, Kanäle, Durchlässe . . III 264
—, Schädigende Einflüsse auf — . III 224
—, Schub- u. Haftspannungen . . . III 249
—, Stabaufbiegungen III 250
—, Stützen III 232, 251, 253
—, Theorie . . . III 233
—, Treppen . . . III 257
—wasserturm . . III 678
—, zulass. Spannung I 505; III 234, 236, 237, 242*, 249*
Eisenkonstruktionen III 319
— für Dächer . III 35[illegible]
—, Holz- . . . . III 31[illegible]
—, Lagerungen . . I 171
—, Lieferungsbedingungen . . . I 7[illegible]
—, Nietung I 760; III 329
—, Reinigung, Anstrich I 66[illegible]
Eiserne Brücken III 916, 917
—, Belastungen III 61, 65
—, Eigengewichte III 61, 63, 65, 102[illegible]
—, Eisengewicht . III 6[illegible]
—, Gewichte III 61, 63, 6[illegible]
—, Haupt- u. Fahrbahnträger, zulässe. Beanspruchg. III 73*, 74*
Ejektor . . . . II 5[illegible]
—, Asche- . . . . II 5[illegible]
Ekonomiser . . . II 44
Elastische Bolzenkupplung . . I 827*
— Dehnung . . . I 483
— Formänderung gerader Träger . . . I 532
— Gewichte . . . III 111
— Kupplung . . I 825
— Linie . . . . I 552
— — d. vollwandigen Bogens . . . III 119
— — für wichtige Trägerbelastungsfälle I 547* ff.
— Nachwirkung (Festigkeitsl.) . . . I 484
— Querstützung . I 519
— Reibungskupplung I 834
—r Stofs . . . . I 241
— Schwingung . . I 146
— Verlängerung (Verkürzung) . . I 508
— Zahnkupplung . I 827, 828*
Elastizitätsgleichung (Statik) . . . III 105
—grenze . . . I 483, 511
—mafs (—zahl) . . I 482
—zahl v. Eisenbeton III 240
—zahlen I 486, 487*, 493 bis 501*
Elektrische Arbeit II 837, 844
— Bahn . . . . II 980
— — m. eigenem Bahnkörper . . . II 999
— —, Zahnrad- . III 898
— Beleuchtung II 818, 821, 826, 827, 828
— Bremse II 893; III 902
— Energieübertragung i. Fabriken . . III 450
— Fernleitung . . II 975; III 590
— Fern-Vollbahn . II 1002

Digitized by Google

Elektrische Grundgesetze . . . II 841
— Hebemaschine . II 390
— Heizung . . . III 411
— Kraftübertragung III 590
— Leistungsmessung II 323
— Lokomotive . . III 898
— Maßeinheiten . II 837*
—r Aufzug . . . II 411
—r Einzel-, — Gruppenantrieb . . . III 460
—r Leitwiderstand II 842, 965
—s Schweißen . . I 669
— Wasserhaltung . II 591
— Winde . . . . III 491
Elektrizitätsmenge II 837
Elektrode, Kohlen- II 823
—eisen f. Brückenbau III 918
—hängebahn . . . II 552
—lyse . . . II 844, 845*
—magnetische Friktionskupplung . . I 834
— — Wechselwirkungen II 846
—mobil . . . . II 805
—motor s. a. Gleichstrommot., Drehstrommot., Wechselstrommot.
— —, Allgemeines II 862
— — f. elektr. Bahnen II 995, 996*
— —ische Gegenkraft II 844
— —ische Kraft . II 837
—n . . . . . I 496
—seilbahn . . . II 554
—stahl . . . . I 492, 634
—technik . . . . II 837
—verglasung . . . I 713
Elementarbewegung I 203
—arfläche . . . . I 118
—e, chemische . I 610* ff.
—, galvanisches . II 857
Elevator II 517; III 521
—, Dampfstrahl- . II 562
—, Hunt-Pohlig- . II 498
—, pneumatischer . II 525
— (Schutenentleerer) III 481
Eliminationsverfahren I 51
Ellipse, Flächeninhalt, Umfang . . . I 100
—, Gleichung I 96, 97, 99
—, Konstruktion I 99, 100
—nabschnitt, Schwerpunkt . . . I 168
—nlenker . . . . I 902
—nquerschnitt, Randspannung . . I 590
—, Querschnittsmoment I 538, 569, 571, 587
—, Trägheitsmoment I 196, 200
Ellipsoid . . I 120, 136
—, Rotations- (Erde) III 1
—, Schwerpunkt I 169, 170
Elliptisches Zahnrad I 778
Emaillieren . . . I 668
Emission, Wärme- I 389
Empfangsgebäude (Bahnhof) . . . . III 774
Emscher Brunnen . III 708
Endgeschwindigkeit (Fall) . . I 278*, 279*
Endtemperatur b. Gasverbrennung . I 474*
Energie, Erhaltung d. I 152
—, Gesamt- d. Massenpunktes . . . I 218
—, innere u. äußere (Wärme) . . . I 393
—, kinetische . . I 152
—, potentielle (d. Lage) I 218
—verteilung i. Fabriken III 458
Englers Zähflüssigkeitsmesser . . . I 288
Englischer Binder . III 340
Enkegebläse . . . II 625
Enteisenung, Wasser- II 60; III 668
Entfernung (Vermessgsk.) III 1
—smessung . . III 35, 38
Enthärtungsverfahren (Wasser) . II 57, 59
Entladespannung . II 934
Entlastungskolben II 755
Entleerungsvorrichtung, Kessel- II 64, 68, 777; III 838
Entlüftung, Rohrleitg. I 285, 682
Entöler, Abdampf- II 57
Entropie . . . I 394
— d. Wasserdampfes I 416*, 418*
—diagramm . . . I 396
Entsäuern d. Wassers III 671
Entstaubungsanlage III 471
Entwässerung, Brücken- III 999, 1024
—, Eisenbahn- III 734, 735
—, Fabrik- . III 465, 878
— festen Gebirges III 657
—, landwirtschaftliche III 555, 557
—sgraben . . . . III 711
— v. Landstraßen III 607
— v. Straßen . . III 640
Entzündungstemperatur I 472*, 478*
Epizykloide . . . I 105
Erdarbeiten (Bahnbau) III 735
— — b. Kanälen III 531
— —, Flächen- u. Massenermittlg. . . . III 728
—arten, Böschungswinkel II 491*; III 168, 558, 734
— —, Gewicht II 491; III 55, 168*
Erdarten, spez. Gewicht I 614; II 491*
—beschleunigung I 143, 148
—bodenauflockerung III 737*
—damm . . . III 191
—druck . . . . III 167
— — bei gewölbten Brücken . . III 1040
—e als Rotationsellipsoid (Abmessungen) III 1
—en (Erdarten) . . I 682
—e, spez. Gewicht I 613
—förderung . III 737, 738*, 739*
—gewinnung . III 736*
—krümmung III 1, 26, 32
—öl I 455, 460, 476*, 478*
—weg, Widerstandszahlen . . III 600*
Erg . . . . . I 150
Erhaltung d. lebendigen Kraft, — Energie I 152, 218
Erregerschwingung I 223
Ertragsberechnung von Wasserkraftanlagen III 594, 595*
Erwärmung s. auch Temperatur.
— i. Anker (Gleichstr.) II 879
— d. Feldmagneten II 883
— d. Gleichstrommasch. II 863, 864
— d. Stromwenders II 889
— d. Wassers i. Rohrleitg. . . . . III 683
— d. Wechselstrommasch. II 903
—, zulässs. — elektr. Leitg. II 962
—, — elektr. Masch. II 865*
Erzwungene Bewegung d. Punkthaufens I 225, 228
— Schwingung . . I 223
Erzzement . . . I 699
Estrich . . . . I 695, 697
Eternit . . . . . I 691
Etmal . . . . . II 716
Euler-Savarysche Formel (Krümmungsmittelp.) I 211
—sche Gleichungen (Hydrodyn.) . I 264
— — Gleichg. (Hydrostat.) . . . . I 261
— — Gleichg. (Kreisel) I 235
— — Knickformeln I 513
— —r Satz (Normalschnitt) . . . I 119
Evansscher Lenker I 903
Evolute . . . . . I 93
Evolvente . . I 93, 94
— (Huygenssche Traktorie) . . . . I 110

Digitized by Google

Evolvente, Kreis- I 107
—nverzahnung I 215, 770
— —, Vergleich mit Zykloiden . . . I 773
Expansion b. Kolbendampfmaschinen (Schiffs-) II 738*, 739*
—sgrad (Dampfmasch.) II 121, 122*
—skurve, vollkommene Gase . . I 405, 407
— —, Wasserdampf I 415, 426; II 106
—ssteuerung . . . II 155
Expansit-Korkstein I 688
Explosionsgrenzen I 471, 472*
Exponent, Ausflufs- (Gase u. Dämpfe) I 442
—, Gas- . . . I 406, 407
—ialreihe . . . . I 56
Exzenter . . . I 892
—, Ersatz- (Umsteuerg.) II 179
—, loses oder verschiebbares f. Umsteuerung II 177
—, resultierendes, Relativ- . . . . II 157
—stange . . . . I 894
—steuerung, Gasmasch. II 274
Exzentrische Beanspruchg. nur druckfester Körper . I 580
—r Zug (Druck) . I 578
Exzentrizität d. Kegelschnitte . . I 96, 98
Exzefs, sphärischer I 63; III 47
Eyermann-Turbine II 240

F.

Fabrikanlagen, Bauplatzwahl . . III 433
— —, Entwurf . . III 434
—beleuchtung II 833, 834
—belichtung . . . III 443
—be- u. entwässerung . . . . III 465
—gebäude . III 859, 441
—heizung . . . . III 462
—kanal . . . . . I 813
—ort, Wahl des — III 431
—schild (Dampfkessel) . . . III 838
Fächertor (Schleuse) III 542
Fachwerkbalken, s. auch Balken, Träger, Tragwerk, . . III 84
—balken a. 3 Stützen III 140
— —, einfacher Brücken- III 950
— —, Stabkraftermittlung . . III 22
Fachwerk, Biegungslinie . . . . III 111
—bogen (Holz) . . III 312
—brücke, Eisenbeton- . . . III 269
—lehre, Grundbegriffe I 173
—, Holz- . . . . III 303
—, räumliches . . III 157
— — (eisernes) . . III 848
—, Spannungsermittlg. I stat. bestimmt. — I 178
—, Stabsysteme . . I 175
—, statisch unbestimmtes . . I 183
— —, Arbeitsgleichg. III 103
—träger . . . . III 64
— —, Brücken- . III 949
— —, Gerberscher III 97
— —, Knickfestigk. I 519
— —, Spannungen I 512*
— —, Stabquerschnitte . . . III 837
—wand . . . . . III 313
— —, eiserne, . . III 359
Faden . . . . . I 986
Fahrbahnbreite, Landstrafsen . III 606
— —breite, städt. Strafsen . . . III 642
— —breite, -gefälle v. Strafsenbrücken III 1009
— —, Brücken-, zulässs. Beanspruchg. III 74*
— —, Brücken-, Gewicht III 1026
— —gerippe (Brücken.) III 1016, 1017* bis 1021*
— —gerippe, Gewicht III 65*
— — m. durchgehendem Kiesbett (Brückenb.) III 998
— —, schwere Strafsenbrücken- . III 1010
— —tafel, Brücken-, Gewichte . . III 65*
— —tafel, Eisenbeton III 270
— —, Verbindung mit Hauptträger . III 984
— — v. Eisenbahnbrücken III 990
—barer Drehkran . II 477
—enheitsthermometer I 369, 370*
—geschwindigkeit elektr. Bahnen . . . II 995
—geschwindigkeit, Schiffe a. Flüssen . III 522*
— —, Zahnradbahn III 903
— —, zulässige Eisenbahn- . . III 725, 726*
—korb . . . II 430, 431*
—leitungsspannung II 991, 1000, 1001
Fahrschalter II 997, 1001
—stuhl (Aufzug) . II 410
—sicherung, Fördermasch. . II 450, 1014
—werk, Kran- . . II 478
—widerstand, Motorwagen . . . II 792*
—zeug s. auch Eisenbahnfahrzeug, Fuhrwerk, Wagen
— —bewegung . . I 147
— —maschine II 790, 793
— —, Grubenbahn- III 906
— —, Seilbahn- . III 912
— —, Strafsen- . III 595*
— —, Zahnradbahn III 894, 904
Fairbairnkran . . II 468
Fakultät . . . . I 45
Fallbeschleunigung I 143, 148, 278*, 279*
—bremse . . . . II 415
—, freier I 143, 148, 278*, 279*
—geschwindigkeit I 143, 278*, 279*
—hammer . . . . II 331
—höhe I 278*, 279*, 281
—rohr . . . . . II 534
Fällen d. Holzes . I 720
—mittel (Abwasserreinigung) . . III 709
Falzziegeldach . . III 304
Fangedamm . . III 192
—keil . . . . . II 415
—vorrichtg. (Aufzug) II 413
Farad . . . . . II 837
—aysche Scheibe . II 870
—aysches Gesetz II 844, 845*
Farben . . . . I 668
—, Gewichte. . . II 698*
— v. Lichtquellen II 825, 829*
Faschine . . . . III 508
Fafs, Inhalt . . . I 136
Faulen d. Holzes . I 721
Feder, Festigkeit I 592
—hammer . . . . II 331
—nde Dehnung . I 483
—, Puffer- . . . III 812
—regler . . . . I 971
—rohr, Kupfer- . II 919*
—, Schwingungszeit I 593
—stahl, Festigktszahl. I 487*, 488*, 491*
— —, zulässs. Spannng. I 504
—, Trag-, Automobil II 803
— —, Eisenbahnwagen III 869
— —, Fuhrwerk III 598
— —, Lokomotive III 849
—ungsarbeit . . . I 592
Fehler, Beobachtungs- I 84; III 49
—fortpflanzungsgesetz III 53
—gleichungssystem (Vermessgsk.) . III 80

Digitized by Google

Fehlergrenzen (Vermessgskd.) III 20, 31*
— — (Vermessgk.), amtl. III 3, 19, 24, 30
Feinblech . . I 660, 661*
— —lehre . . . I 622*
—gewinde . . . I 741
Feldlinie . . . . I 217
—magnet, Gleichstrom-, Berechnung, Wicklung, Ausführung II 880, 889
—, —isches . II 839, 846
— —, Aufbau f. Wechselstrommasch. . II 898
— —, Turbodynamo II 904
—mafs . . . . . I 987*
—stärke (Intensität) I 216, II 832
—weg . . . III 602, 605
Felgenbreite . . III 598*
Fellows Stirnräderstofsmaschine . . II 372
Fenster . . . . III 287
—, Eisenbahn- . . III 871
—, eisernes . . . III 370
—, Fabrik- . . . III 443
—glas . . . . . I 710
—, Schiffs- . . . II 102*
—sprosse . . . . III 382
Fernheizung . . III 427
—rohr . . . III 11, 35
—übertragung d. Wasserkräfte . . . . III 590
— -Vollbahn, elektr. II 1002
Ferranti-Effekt . . II 853
Festigkeit, Biegungs- I 485, 521
—, Biegungsdruck- III 237
—, Biegungszug- . III 238
— d. Federn . . I 592
— d. Gefäfse . . I 604
— d. Platten . . I 600
—, Drehungs- . I 485, 568
— einfach gekrümmter Stäbe . . . . I 588
—, Eisenbeton- . . III 237
— gerader Stäbe . I 507
—, Knick- . . . I 512
—, Schiffs- . . . II 711
—, Schub- . . I 485, 519
—slehre . . . . I 481
—sprüfung . I 625; II 73
—szahlen, Hölzer . I 497*, 498*
— —, Metalle I 486 bis 496*
— —, Steine u. Bindemittel I 498* bis 500*; III 237
— —, Zugorgane I 500* bis 502*
—, Temperat reinflufs I 486*, 492*, 493*, 495*
—, Würfel- . . . III 237
—, Zug- u. Druck- I 483, 484, 507
—, zusammengesetzte I 572
Festmeter . . . I 725
—punkte (durchgehende Träger) . . . III 126
— — einer Fläche I 195
Fettgas . . . . II 818
—schmierung . . I 836
—, Tier- . . . I 668, 730
Feuchtigkeit, Luft- I 402 403*; II 611
—, relative I 402; III 391
Feuerblech . . . II 75
—brücke . . . . II 86
—büchse . II 29, 87, 89; III 827
—büchskessel II 11; III 827
—festigkeit . . . II 326
—geschränk . . . II 35
—polizeiliche Vorkehrungen (Eisenbahn) III 724
—schutz d. Holzes I 724
— —, Eisenbahn-. III 769
— — in Fabriken III 466, 878
—sichere Wand . III 285
—spritze . I 317; III 653
—ung, Kessel- II 31, 35, 769; III 832
— — f. flüssige Brennstoffe . . . II 40, 770
— —, Dampfk.-, Anstrengungsgrad II 33*, 768; III 826
— —sarten . . . II 37
— —, Schiffskessel- II 771
— —technische Messung II 326
—zug II 43, 67, 769; III 835
Fichte, Festigkt. . I 497
—, Gewicht . . . III 56
Fieldrohr-Kessel . II 20
Filter I 314; II 57; III 665
—, Abwasser- . . III 710
—becken . . . . III 666
—gang . . . . . III 657
—geschwindigkeit III 658, 667
—, Luft- . . . . III 400
—sand . . . . . III 666*
—, Schnell- . III 668, 669
—, Stufen- . . . III 666
—, Vor- . . . . III 665
Fink-Umsteuerung II 183
Fixpunktnivellement III 29
Flacheisen I 654* ff., 660; III 921
—regler . . . I 966, 968
—schiebersteuerung II 144
Fläche, Haupt- . I 119
—, krumme . . I 118
—nausdehnung (Wärme) I 369, 371
—nbeleuchtung . II 812
—ndruck s. auch Auflagerdruck, Leibungsdruck . I 247
Flächendruck, (Fördermasch.) . . . II 452
— — (Schiffsmasch.) II 750*
— — (Silo) . . . II 584
— — (Verbrennungsmasch.) . . . II 265
— — (Zapfen) . I 836, 838
—ermittlung (Bahnbau) III 728, 731
—ngeschwindigkeit I 227
—nhelle . . . . II 808
—ninhalt I 94, 129* ff., 132
— —, Kreis- I 2 bis 23*
— — (Schiffb.), Berechnung . . . . II 630
— —sermittlung (Vermessungsk.) . III 22
—nmafse verschiedener Länder . . I 994* ff.
—nnivellement . . III 29
—nprofil (Eisenbahn) III 731
— — (Kanal) III 525, 526
—nteilung . . . III 25
—, Schwerpunkt I 166
—, Trägheitsmoment I 193, 195, 197, 200
—, Umdrehungs- . I 137
—, wirksame (Festigk.) I 573
— zweiter Ordnung I 119
Flammenbogenlampe II 824
—rohrkessel II 6, 83, 87, 771
—punkt, Kraftöle . I 478*
—rohr . . . . II 29, 83
Flanschenformstücke I 910, 913*
—rohr, gufseisernes Normal- . . . I 909*
— —, Heizungs- III 413*
— —, Mannesmann- I 918
—verbindung I 916, 925, 926*; II 29
Flaschenzug II 385*, 386*
Flechtwerk (Statik) I 175
—zaun . . . . III 509
Fliegen . . . . . I 342
Fliehkraft, s. Zentrifugalkr.
— —regler . . I 965, 966
— — v. Eisenbahnfahrzeugen . . . III 73
Fliese . . . . I 693, 714
Fliefsen d. Wassers durch Erdreich. s. auch Versickerung I 314; III 658
—en in nicht gefüllten Rohrleitgen, Flüssen, Kanalen . . I 310
—grenze (Festigk.) I 483
—zustand . . . I 277
Flofshafen . . . III 520
—holzforderung . II 494
Flötzerei . . . . III 521
Flügel (Flugzeug), Widerstandszahlen I 365
—gebläse (Beale) . II 623
— mauer (gewölbte Brücke) III 1049

Digitized by Google

Flügeltheorie (Strömung) I 442
—, Windrad- . . . II 8
Flufsbagger . . . III 479
—bau, Linienführung III 503
— —, Vorarbeiten III 497
—deich . . . . . III 564
—eisen I 628, 629, 633, 634; II 78
— —blech, Gewicht I 621*
— —draht . I 501, 620*
— —, Festigkeitszahlen I 486, 487, 628; III 104, 217
— —, Gewicht . . III 56
— —, zulass. Beanspruchg. I 503*, 504*, 511, 515, 518; III 57, 73*, 74*
—, Fliefsen in — . I 310
—hafen . . . . . III 518
—kanalisierung . . III 512
—krümmung. Wasserbewegung . . III 502
—mündung . III 507, 549
—querschnitt III 499, 501, 502
—regelung . . . III 504
—schiff, Mafse . . III 534*
—spaltung . . . III 507
—stahl I 625, 629, 633, 634
— —blech, Gewicht I 621*
— —draht, Gewicht I 620*
— —, Festigkeitszahlen I 487 bis 492*, 628*
— —, Gewicht . . III 56
— —, zulass. Spannung I 501, 503*, 515
— verbesserung, -regelung (schiff b. Fl.) III 504, 511
—vereinigung . . III 507
Flüssige Brennstoffe I 468, 476*, 477*; II 770
— —, Feuerung II 40, 770
— keit, Bewegung vollkommener — . I 336
— —, Bewegung wirklicher — . . I 318
— —sleitung, Strömung i. — . . . . I 349
— —smafs . . . I 987*
— —smessung . . II 813
— —, spez. Gewicht I 617*
— —, Zähigkeit I 288, 348*, 349*
Flutfläche, -kurve (Entwässerg.) . . III 686
-welle . . . . . III 551
Förderband, -gurt II 508, 511*; III 480
—eisenbahn . . . II 492
—gefäfs II 403, 430, 431*
— haspel . . . . II 427*
—kette . . . . . II 521
—korb . . . II 430, 431*
— kosten (Seilbahnen) II 550*
— maschine Berechng. II 436
Fördermaschine, Dampf- II 430
— —, Dampf-, Einzelheiten . . . II 452
— —, elektr. II 1005, 1011*
— —, elektr., Antrieb II 1007, 1009, 1013
— —, elektr., Ausgeführte Anlagen II 1011*
— —, elektr., Berechnung . . . II 1017
— —, elektr., m asynchronen Drehstrommot., Repulsionsmot., Drehstromserienmot. II 1013
— —, kleine Dampf- II 428
— —, Vorgelege- . II 426
— —, Zwillings- . II 439
—mittel f. Schüttstoffe II 490, 491
—rinne . . . . . II 513
—rohr, -schnecke, -spirale II 505, 507
—seil I 848, 849*, 850*, 854; II 431
—trommel I 855; II 408, 432, 439*, 452
—turm . . . . . III 494
—wagen II 431*, 492, 496*, 548; III 906
Förderung beliebiger Richtg. . II 504, 521
—sarten . . . . . II 432
— —, Erd- III 737, 738*, 739*
—, Seil-(Grubenbahn) II 493
—, senkrechte od. stark geneigte . II 497, 517
—, stetige . . . . II 505
—, wagerechte od. schwach geneigte . II 491, 505
Formänderung biegungsfester Stäbe . . III 117
— —, elastische, gerader Träger . . . I 532
— —, Gegenseitigkeit der — . . . III 106
— —, Stat. unbest. Fachwerke . . . . III 107
— —sarbeit (Festigktsl.) I 484, 487*, 493*
— —sarbeit d. Biegung I 533
— —sarbeit d. Fachwerks . . . . III 104
— —sarbeit d. Schubkräfte . . . . I 534
— —sarbeit, Prinzip d. kleinsten — . III 120
— —sarbeit, virtuelle I 182
—at, Kloster- I 693; III 279
—at, Ziegelstein- . I 692; III 279
—gebungsarbeiten für Eisen . . . . I 635
Formeisen f. Schiffbau I 647* 8
—faktor d. Werbeistroms II 850, 87
—maschine . . . II 3
—stücke f. Rohrleitg., Gewicht I 910*, 912* 91
—, unbestimmte — eines Bruches . . . I 6
— verhältnisse d. Schiffe II 636, 638*, 6
— widerstand eingetauchter Körper . . I 3
Förstersche Decke . III 3
Foucaultströme . . II 8
Fouriersche Reihen I 13
Francisturbine II 288, 29 293; III 5
Fräser . . . II 365, 24
—maschine . II 364, 3
— —, Holz- . . . II 3
Freibord . . II 628, 6
—e Achse . . . . I 2
—er Fall I 143, 148, 278*, 279*
—e Schwingung . I 2
—lager . . . . . II 5
—leitung (elektr.) . II 9
—tragende Wand . III 2
—träger (Walzprofil) I 5
Fremderregung d. Gleichstrommaschine II 8
Frequenz . I 124, 221; II 850, 954, 958, 9
—messer . . . . II 9
—wandler . . . . II 9
Friktion s. Reibung
Froudesches Verfahren (Schiffswiderstd.) II 7
Fuchs . . . . II 43, 6
Fuga-Kupplung . I 8
Fügemaschine . . II 3
Führerstand, Lokomotiv- III 8
Führung der Last II 40
—sgerüst f. Gasbehälter III 1
—skraft . . . . I 2
Fuhrwerk s. a. Strafsenfahrzeug, Fahrzeug, Wagen . . . III 5
—, Gewicht . . . III 6
—, Strafsen-, Höhe, Breite III 9
— Strafsen-, Reibung I 2
Füllen u. Entleeren v. Schleusen . . III 5
—rumpf . . . . II 5
—ungsausgleich (Umsteuerung) II 184, 1
—ungsverfahren (Abwasserreinig.) . III 7
—ungsverhältnis bei Lokomotiven . III 8
—ung (Dampfmasch.) II 121, 7

Füllung, reduzierte II 204
— —, vorteilhafteste (Dampfmasch.) II 125*
Fundamentanker I 750, 751
— i. Verbrennungsmasch. . . . II 279
—, Maschinen- . . III 461
—mauer. Zulässs. Beanspruchung . III 60
—platte . . . III 199, 261
—verbreiterung . III 198
Fundierung s. a. Grundbau. v. Kanälen III 701
Funkenbildung (Gleichstrommasch.) . II 880
—fänger . . . . III 836
—freie Stromwendung II 886
—spannung (Stromwendung) II 883, 886
Funktion, Hyperbel I 30 bis 34*, 52, 64
—, irrationale . . I 73
—, Kreis- I 26 bis 29*, 52, 57, 65
— mit einer Veränderl. I 68
— mit zwei Veränderl. I 69
—, periodische . . I 125
—, Potential- . . I 217
—, rationale . . . I 72
—, Störungs- . . I 82
—, transzendente . I 75
—, unentwickelte . I 69
Fufsboden . . . I 689
— —, Fabrik III 456, 877
— —belag . . . I 689
—gängerbrücke, Belastung III 61, 63
—mafs . . . . . I 986*
— — -Metermafs I 988*, 990*, 992*
—pfund/sk, Vergleich m. PS . . . I 1001*
—weg . III 630, 642, 643
— — (Brücken) . III 1016

G.

g (Erdbeschl.) I 43*, 143, 148
Gallische Kette . . I 847*
Galvanisches Element II 857, 858*
Gangspill . . II 684*, 685*
Garbekessel . . . II 18
Gartenstadt . . . III 650
Gas, Allgemeine Eigenschaften . . I 330, 396
—analysator . . . II 927
—, Atomgewicht . I 610*
—, —zahlen . . . I 398*
—ausbeute . . . II 280*
—, Ausdehnung durch Wärme I 330, 373, 405
—ausströmung I 440; II 317
—ballon, Auftrieb, Gleichgewicht. I 332
Gasbehälter . III 160, 162
— —, Nietung . . I 760
—, Bewegung i. Rohrleitg. . . . I 349, 447
—dichte I 398*, 435 bis 438*, 478*, 613, 618*
—, Drofslung . . I 453
—druckpumpe . . II 561
—, Dynamik . . I 335, 392
—, Expansionskurven I 405, 407*
—, Explosionsgrenzen I 471, 472*
—, Exponent . I 406, 407
—feuerung . . . II 39
—förmige Brennstoffe, Verbrennung . I 468
—, Generator- I 455, 472, 473; II 280
—, Gicht- I 455, 466*, 472, 473; II 256
—glühlicht II 814, 816, 829, 830, 831, 835
—heizung . . . . III 410
—, Hochofen- I 455; II 256
—, Koksofen- I 455; II 256
—konstante I 396, 398*, 401
—, Kraft- I 455; II 256, 280
—, Kritischer Zustand I 412, 413*, 448*
—lampe . . II 814, 816
—leitung f. Gasmotoren II 277, 278*
—, Leucht- I 455, 472, 473; II 256, 816
—, Löslichkeit i. Wasser I 280, 380*
—, Luft- . . . . I 455
— -Luftgemisch, Explodierbarkt. I 471*, 472*
—maschine s. auch Verbrennungsmasch.
— —, Kreisprozefs I 409
—messung . . . II 915
—, Misch- . . . . I 455
—mischungen . . I 401
—, Molekulargewicht I 398*, 473*, 610*
—, Natur- . . . . I 455
—, Oel- . . . . I 455
—öl . . . . . I 476, 478
—, Rauch- I 464; II 98
—reiniger . . . . II 281
—rohr . . . . . I 917
— —leitungsdruckabfall I 450
— —gewinde . . I 748*
—, spez. Gewicht I 398*, 435 bis 438*, 473, 613, 618*
—, spez. Wärme I 397, 398*, 400*, 401
—, strömende Bewegung I 439
—, unvollkommenes I 421
—, Verbrennung I 472, 473*
Gas, Verbrennungs- I 464, 465; II 98
— —stemperatur . I 474*
— — v. Gasgemischen I 472, 473*
—, verflüssigtes, Dichte, Volumen . . I 372*
—versorgung der Personenwagen . III 804
—, vollkommenes . I 396
—, Wasser- I 455, 472, 473, 480
—, Zähigkeit . . I 348
—, Zustandsgleichung I 331, 396
—, —änderungen . I 405
—, Zündgeschwindigkeit . . . . I 471*
Gattersäge . . II 378, 379
Gaufssche Formeln (Kugeldreieck) I 63
—r Satz (Vektorrechng.) I 124, 217
Gay-Lussacsches Gesetz I 330, 396
Gebäudelager . . II 529
Gebirgsfluſsbändig. III 510
Gebläse, Dampfstrahl- II 625
—diagramm . . . I 953
—, Gasdruck- . . II 817*
—, Kapsel- . . . II 623
—, Kolben- . . . II 609
—, Rad- II 593, 602*, 603*, 604*
—, Turbo- . . . II 605
—ventil I 936, 941; II 616
—, Wirkungsgrad II 609, 615, 625
Gebrauchsmusterschutz I 1018, 1020
Gebührenordnung d. Architekten und Ingenieure . . I 1002
— für Zeugen u. Sachverständige . . . I 1021
Gedämpfte (ungedämpfte) Schwingung . I 221
Gedrückte Brückenglieder, Berechnung . III 959
Gefährlicher Querschnitt I 524, 545* ff.
Gefälle, s. auch Neigung, Steigung.
—ausrundung, Zahnradbahn . . . III 893
—ebahn . . . . II 495
—e f. Kraftanlagen III 576
—e, Kanalisationsleitg. III 697*
—e, Strafsen- . . III 634
—e, übliche i. Kanälen I 813*
—e v. Landstrafsen III 608*
—e v. Strafsenbrück III 1009
—gewinnung a. Seen III 587

Gefäfs Festigkeit . I 600
Gefriergründung . III 221
—punkt . . . I 377* ff.
Gegendruckdampfturbine II 235, 241
Gegengewicht, Kran- II 472, 481
—, Lokomotivrad- III 844
Gegenkräfte . . I 149, 153
Gegenseitigkeit der Formänderungen III 106
— der Spannungen I 576
Gegenstromkondensation . . . II 202
— (Wärme) . . . I 388
Gegliederte Stützen III 958, 959
—, Knickfestigkeit I 519
Geländeaufnahme III 571
—linie . . . . . III 29
—r. Brücken- . III 1016
—r, Strafsen- . . III 636
Gelbgiefserei . . . III 883
Gelenk, Brückenträger- III 945
—geradführung . I 902
—kette . . . . . I 647*
—lager, Träger- . III 825
—-Wölbbrücke, Eisenbeton- . . . III 274
Genauigkeitskoeffizient . . . . . I 85
—schaltung elektr. Fördermasch. II 1008
— v. Beobachtungen u. Messungen III 3, 19, 30, 37, 47, 49 ff.
Geneigte Ebene (Schiffshebewerk) . . III 548
Generatorgas I 455, 471*, 472, 473, 474*, 478, 479*; II 256, 281
—senkbremse . . II 397
Genieteter Stab (Knickfestigkeit) . . I 518
Geodäsie . . . . III 1
Geoid . . . . III 1, 48
Geometrie, analytische I 88
—sche Reihe . . . . I 56
—sches Trägheitsmoment I 191, 193, 196, 197, 200
Gepäckwagen . . III 871
Gerade Linie, Gleichg. I 88, 113
—er Stab, Festigkeit I 507
—führung . . . . I 902
—linige Bewegung I 141, 154
— — Schwingung I 221
Geräuschschutzmittel I 688
Gerberpfette . . III 337
—scher Gelenkträger I 175
—träger . . . . III 95
— —, Brücken- . III 952
— —, Fachwerk- . III 97
— — mit vollwandigen Hauptträgern . III 944
Gerichtete Größe . I 121
Gerölle, Geschiebe I 685
Gerüst . III 298, 313, 315
Geschichtete Feder I 594
— Körper, Gewicht I 618*
Geschiebebewegung III 499
Geschofs . . . II 707*
—, fliegendes . . I 835
Geschränkter Riemen I 799
Geschützbronze . I 679
—v Schiffs- . . . II 707*
Geschwindigkeit I 141, 144, 184
—, Ausfluss- v. Gasen u. Dämpfen . I 442
—, Fall- I 143, 278*, 279*
—, Flächen-(Sektoren-) I 227
— Gleit- (Schiebungs-) I 203
—, kritische (Grenz-) I 280, 350, 412, 413*, 448*
—, lotrechte . . . I 210
—sbeiwerte (Flufsbau) III 500*
—, Schall- . . . I 443
—sgrenzen f. Eisenbahnen in Krümmg. III 741*
—shöhe . I 277, 278*, 281
—smafs . . . . II 715
—smessung (Flüssigkeit) . II 314
—splan . . . . . I 210
—spotential (Flüssigk.) I 336
—srifs . . . . . I 145
—sstufen (Dampfturb.) II 224
— — (Werkzeugmaschinen) . . . . II 350
—szustand . . . I 209
—, übliche — i. Kanälen I 313
—, Wechsel- d. Poles I 210
—, Winkel- I 146, 206, 765*
Gesetz d. Schwere . I 220
Gesichtsfeld . . . III 12
Gesimse . . . . III 287
Gesperre . . . . I 863
Gestängeberechnung II 588
—, Dampfmasch.- II 749*
—schlofs . . . . I 738
—wasserhaltung . II 587
Gestell v. Verbrennungsmasch II 259, 265, 782
Gesteuertes Ventil . I 938
Getreidedruck . II 534
—mafs . . . . . I 987*
—, Reibungswinkel II 524*
—speicher . . . II 530
Getriebe. Fahrzeugmaschinen . . II 801
—, Kraft- u. Arbeitsverhältnisse I 253, 886
Gewicht, s. auch Eigengewichte, . . I 148
—, elastisches . . III 111
—e verschiedener Länder I 995* ff.
Gewicht, Raum-, (Stan-) I 618; II 678
—, relatives . . . I 150
—, Schiffs- . . . II 692
—seinheit . . . . I 145
—, spezifisches, s. auch spez. Gewicht . I 149
—sverteilung d. Lokomotiven . . . III 849
Gewindearten . . I 749
—fräsmaschine . . II 369
— -Lastdruckbr. II 384, 401
—, Reibung . . . I 254
—schneidmaschine II 361
Gewölbe . . . III 177
—arten . . . III 290, 297
—, eingespanntes Brücken-, ohne Gelenke III 1031
—, Eisenbeton- III 232, 259, 271
—, Inhalt . . . . I 136
—, Konstruktion . III 283
—, Rüstungssenkung III 298, 1050
—stärke . III 178, 291 ff.
— — eingespannter Brücken . . III 1035
—, Trompeten- . . III 701
—, umgekehrtes . III 199
—, zulass. Spannung I 505*
Gewölbte Brücke III 1042 bis 1044*
— —, Belastung . III 60
— Decke . . . . III 374
Gichtgas I 455, 466*, 472, 473, 479; II 256
— —motor . II 258, 267
—schrägaufzug . . II 499
—seilbahn . . . II 535
Giefserei I 635; III 352
—kran . . . II 484, 486*
—kübel . . . . II 404*
Gips . . . . . I 684
—diele . . . . I 691, 697
—fluat . . . . . I 697
—mörtel . . . I 696, 697
Gittermast II 974, 975*
—reinigung, -rechen III 704, 707
—träger . . III 340, 938
Glas . . I 709; III 352
—baustein . . . I 713
—dach . . III 57, 382, 387
—, Festigkt. . . . I 497
—, zulass. Beanspruchg. I 507
Gleason-Kegelräderhobelmaschine II 373, 375
Gleichdruckdampfturbine II 216, 222, 224
— —verbrennungsmasch. II 242, 781
— —ölmotor II 253, 258, 267, 275
— —turbine, Schiffs- II 759
— —verfahren (Kreisprozefs) . . . II 247

Digitized by Google

Gleichgang v. Verbrennungsmasch. . II 276*
—gewicht am gestützten Körper . . . I 171
— — a. Seil . . . I 181
— — d. Kräfte . . I 158
— —; indifferentes, labiles, stabiles . I 170
— —sbedingungen I 160, 162
— — v. Gasballonen I 332
—polmaschine . . II 695
—strombogenlampe II 824*, 825*, 826*
— —dampfmaschine II 175
— —maschine (Elektr.) II 862
— —maschine, Berechnung . . . . II 870
— —maschinen, Eigenschaften . . . II 866
— —maschinen für gleichbleibenden Strom . . . II 868
— —maschine, Mechanische Konstruktion . . . . II 891
— —maschinen mit Verbundwicklg. . II 869
— —maschine, Regelung II 933
— —maschine, Schaltung II 928
— —motor . . . II 892
— —motor, Regelung II 951
— —leitung . II 969, 970
— —, Regelung . II 933
— —, Schaltung . II 928
— —turbo . . . II 888
— —umformer . . II 917
— —, Wahl d. Spannung, Eigenschaften . II 957
— — (Wärmeübergang) I 388
Gleichungen . . I 50
—, Widerspruchs- III 18
Gleisabzweigung III 760, 763
—anlage i. Fabriken III 469
—anordnung f. Abstellanlagen . . . III 777
— — f. Drehscheiben III 779
— — in Bahnhöfen III 772, 778
—bahn, Landstrafsen-, Widerstandszahl III 600*
—beleuchtung II 835, 836*
—bau . . . . . III 743
—entfernung . . . III 723
— — a. Bahnhöfen III 773
— für elektr. Bahnen II 980, 983, 988
—kreuzung . III 756, 760
—lage . . . . . III 740
—lose Bahn . . . II 492
—neigung . . III 725, 772
Gleisplan . . . III 768
—seilbahn . . . II 493
—sperre . . . . III 773
—, Strafsenbahn- a. Brücken III 1015
—wage II 312; III 806, 880
Gleitbahn (Kreuzkopf)-Reibung . . . I 887
—en d. Zahnradzähne I 214, 256, 768, 772
—geschwindigkeit . I 203
— —, zulässs. f. Bremsen . . . . . I 862
— —, zulässs. f. Tragzapfen . I 837, 838
—kurve . . . . I 209
—mafs (Festigkt.) I 485, 487*
—mafs f. Beton . I 500
—schuh für Kolbenstangen . . . I 876
—verlust d. Zugmittel I 259
—winkel (Biegungsfestigkt.) . . . I 533
Gliederriemen . . I 801
Glimmerschiefer . I 683
Glocke, Lampen- II 828, 829*
—nmetall . . . . I 679
—nventil . . . . I 938
Glühfarben d. Eisens II 326*
—kopfmaschine . . II 780
—lampe, elektr. II 818, 829, 830, 831, 835
—lichtlampe. Gas- II 816, 829, 830, 831, 835
— —, Petroleum- II 815, 830, 836
— —, Spiritus- II 815, 830, 836
Glyzerin I 376, 378, 379, 462
—, Gefrierpunkte wässerigen — . . I 379*
Gneis . . . . . I 683
Goniometrische Lösung v. Gleichg. . . I 51
Gooch-Umsteuerung II 181
Göpel . . . . II 2, 426
Graben, Entwässerungs- . III 558, 734
—, Strafsen- . . . III 635
Gradient . . II 123, 219
Gradierwerk . . . II 215
Granit . . . . I 682
— Festigkt. . I 498*, 499
—, Gewicht . . . III 55
—, zulässs. Beanspruchg. I 506; III 59
Graphische Statik . I 176
Graphit . . . . I 732
Grauguís . . . . I 636*
Grauwacke . . . I 684
Gravitationsgesetz, — konstante, — kraftfeld I 220
Greifbagger . . . III 476
Greifer II 405*, 406*, 499
Grenzgeschwindigkeit (Fliefs) . . . I 280
— — (Rohrleitg) . I 350*
—kurve, Wasserdampf I 421
—länge (gedrückter Stab) . . I 514, 515*
—regulierung . . III 25
—spannung (Festigk.) I 573, 576
—zustand (Gas) . I 412
Grey-Profileisen I 652 ff.*, 660
Grissongetriebe . I 769
—kupplung . . I 828, 829*
Grobblech I 661*; II 101
Grofswasserraumkessel II 6
Grubenlokomotive II 498
—seilbahn . . . III 905
—ventilator . . . II 600
—wagen II 496*; III 906
Grudekoks . . . I 456
Grundbau . . . III 185
— —, Herstellg. d. Baugrube . . III 188
— —, Trockenlegung d. Baugrube . III 193
—berührung, Schiffstabilität bei — II 653
—büchse . . . . I 877
—kegel . . . . . I 773
—lager . . . . . II 750*
—lauf, Schleusen- . III 539
—mauer . . . . III 283
—pfahl . . . . . III 215
—platte, Dampfmasch. II 200
— — (Schiffsdampfmasch.) . . . II 751
—schwelle (Flufsbau) III 506
—stellung d. Lastenzuges . . . . III 85
—stück, Bau —, zweckmäfsige Mafse III 640
—wasser . . III 656, 658
— —abdichtung I 718; III 222
— —senkung III 194, 496, 658
— —, Fliefsen durch Erdreich . . I 314
—zahlen d. Logarithmen . . . I 48
Gründung, Eisenbeton- . . . III 261
— i. offenen Wasser III 220
—, Kran- . . . . II 473
—sarten . . III 197*, 198
—, Standfestigkeit von Pfahl- . . . . III 215
Gruppenantrieb, elektr. . . . III 460
—bremse (Eisenb.) III 818
—ventil . . . . I 938
Gudron . . . . I 717

Guldinsche Regel . I 137
Gummi . . . . I 714
—riemen . . . I 801, 802
Günstigster Querschn. v. Wasserläufen III 499
— Rohrquerschnitt I 452, 214; III 580
Gurtförderer II 508, 511*; III 480
—platte v. Blechträgern III 924
— —nstofs . . . III 937
—ung, Spannkräfte III 84
—winkel . . . III 924
— —stofs . . . . III 938
Gufsasphalt I 717; III 626
—eisenarten . . . I 636*
— —, Festigkeitszahlen I 486, 487, 492
— — f. Brückenbau III 918
— —, Gewicht *l* 621; III 56
— —, zulässige Spannung I 503*, 505*, 515; III 59, 78
—eisernes Rohr I 914
—putzerei . . . . III 472
—stahl s. auch Flufsstahl.
— — draht . . . I 501
Gütegrad (Dampfmasch.) . . . II 135
—(Verbrennungsmot.) II 246
Gutermuthventilklappe I 941
Güterschuppen . III 775
—verkehr (Eisenb.) III 775
—wagen III 866, 871, 872*
Gut, laufendes und stehendes II 681, 700
Guttapercha . . . I 715

H.

Hackworth-Steuerg. II 187
Hafen, Flufs- . . III 518
—, Kanal- . . . III 536
Haftfestigkeit, Eisenbeton- . . . III 239
—spannung, Eisenbeton- . . . III 249
— —, zulässige . I 507
Hahn, Absperr- . I 944
—, Widerstandszahl I 806
Haken, Last- I 856, 858*, 859*; II 402
— nagel . . . . III 746
—platte III 747, 752, 753*
—zapfenplatte . . III 751
Halbgassteuerung . II 89
— kreuzriementrieb I 799
—rundeisen . . . I 651*
Haldenseilbahn . . II 555
Halladay-Windrad II 4
Hallenbau III 318, 336, 353, 364, 414
— —, Eisenbeton- III 258, 269
Hallenbeleuchtung II 832, 833
—binder . . . . III 312
Haltepunkt, Bahn- III 773
—stelle v. Strafsenb. II 983
Halvor Breda, Wasserenteisenung . III 670
Hammer, Aufstellg. III 462
—, Preßluft- . . II 337
—, Schmiede- . II 331
Handaufzug . . . II 410
—bremse, Eisenbahn- III 815, 817
—kurbel . . . . I 891
—läufer-Eisen . I 645*
—winde . . . . III 490
Handelsdampfer, Gewichtsverhältnisse II 709*
Hanfseil, Festigkt. I 501; II 701
— berechnung . . I 813
—betrieb I 809, 810*, 812; III 459
— f. Hebemasch. . I 856*
—, Gewicht I 809*, 856*; II 701*
—, Reibungs- u. Gleitverlust . I 258, 259
—, Treib- . . I 809*, 810*
Hangbau (Rieselfeld) III 563, 712
Hängebahn . II 497, 552
— —, Elektro- . . II 552
— —schiene . . . II 552
—kuppel . . . . III 295
—lager . . . . . I 842
—werk, Holz- . . III 303
Harmonische Analyse I 124
— Schwingung I 124, 221
Hartgummi . . I 497, 668
—guß . . . . . I 635
—lot . . . . . I 681*
—holz, Festigkt. . I 497
— —, zulässige Spannung I 506
Hartung-Regler I 972, 973
Härte d. Wassers III 651*
—grad (Wasser) . II 57
—n d. Stahles . . I 630
—skala, Eisen u. Stahl I 628*
— —, mineralogische I 682
—zahl (Festigkt.) . I 484
Harzöl . . . . . I 731
Häselersche Formeln (Zug u. Druck) I 512
Haspel . . . . . II 427*
—rad . . . . . II 382
Haufenlager . . . II 534
Häufigkeitslinie (Wasserabflufs). . . . III 498
Hauptabsperrventil (Dampfmasch.) II 196, 748
—achse . . . . I 194
— —ngleichung (Kegelschnitt) . . . I 96
Hauptbahn . III 722, 725
—dehnung . . . I 527
—fläche . . . . I 119
—normalschnitt . I 119
—moment . . . I 159, 161
—spannung (Biegung) I 526
—spant . . . II 628, 643
—strommagnetsenkbremse . . . II 402
—strommaschine . II 862
— —, Charakteristik II 867
— —, Regelung . II 933
— —, Schaltung . II 929
—strommotor . . II 892
—träger . . . . I 177
— —, Brücken-, Biegungsmomente u. Querkräfte III 66 bis 72*, 75, 77*, 78*
— —, Brücken-, Gewicht . . . III 65*
— —, Brücken-, Stabquerschnitte III 954, 957
— —, Brücken-, zulässs. Materialbeanspruchg. III 73*, 78
— —, Systeme v. Fachwerkbrücken . III 952
— — v. Eisenbahnbr. III 990
—trägheitsachse (-moment) I 193, 194
—tragwerk (Brückenb.) III 922
Hausschwamm I 722, 724
Hautreibung (Luft) II 358
Hebemaschine . . II 382
— —, Antrieb d. Verbrennungsmotor II 388
— — für Bauzwecke III 490
— — f. Handantrieb II 382
— —, Maschinenteile für . . . . . I 842
— — m. Dampfantrieb II 388
— — m. Druckwasserantrieb . . . II 390
— — m. elektrischem Antrieb . . . II 391
— — m. Luftdruckantrieb . . . II 389
— — m. Transmissionsantrieb . . . II 386
— — m. unbegrenztem Arbeitsfeld . . II 461
—werk f. flüss. Körper II 557
—zeug . . . . . II 382
Hebelsteuerung, elektrische Aufzug- . II 419
Heberleitung I 280, 282, 284; III 794
—, Saug-, Druckluft- II 559
—turbine . . . . II 288
Hefnerkerze . II 808, 809
Hilfsdampfbetrieb II 132
— —maschine, Schmidtsche . . . . II 119

Heifsdampflokomotive III 851
—laufen d. Zapfen . I 837
—luftmaschine, Kreisprozefs . . . I 408
—wasserheizung . III 417
Heizfläche . . I 381, 388
— —, Kessel- II 32, 769; III 412, 825, 826*, 898
— — (-körper), Wärmeabgabe . . . III 406
— —, Ueberhitzer- II 21; III 827
—kammer f. Luft . III 401
—kanal . . . . II 43
—rohr, Kessel- I 917; II 28, 77, 80; III 413
— —kessel . . II 11, 86
— —, Lokomotiv- III 834
— —, Wärmeübergang II 382 ff.; III 406
—ung . . . . . III 402
— — elektr. Bahn. II 1002
— —, Fabrik- III 462, 877
— —skanal . . . III 422
— — u. Zwischendampfentnahme . . III 424
— —, Zug- . . . III 871
—wert I 461, 462*, 476 bis 479*; III 798
— —bestimmung . II 826
— — deutscher Kohlen I 458*
— —, Dieselmaschinenöle . . . . . I 476*
— — gasförmiger Brennstoffe . . . . I 469
— —, Kraftgase . II 280*
— — motorischer Brennstoffe . . II 256*
— —, oberer, unterer I 461, 470, 473*
— — (Verbandsformel) II 95
Heliolith . . . . I 690
Hellegatt . . . . II 677*
—igkeit . . . . II 808
—ing . . . . II 662
— —seilbahn . . II 556
Henry . . . II 837, 847
Herd, Schiffs- . . II 702*
Hertzsche Gleichungen (Kugeldruck) I 509; III 973, 976
Herzkurve . . . I 107
—stück . . II 987; III 758
Hespeneisen . . . I 651*
Heusinger-Umsteuerung II 182
Heylanddiagramm II 914
Hildebrandtsche Zahnkupplung . . I 830*
Hill-Kupplung I 831, 832*
Hinterdrehbank . II 861
H-Linie, -Fläche . III 100
— —, parabolische III 143, 156
Hobelmaschine, Holz- II 380
— —, Holz-, Schutzvorrichtung . . . III 470
— —, Metall- . . II 356
—stahl . . . . . II 346
Hochbahnkran II 460, 504
—bau . . . . . III 278
— —, Belastungen III 56
— —, Gewicht d. Baustoffe . . . . III 55*
— —, Lieferungsbedingungen . . I 762
— —, Nietung . . I 760
— —, zulässs. Beanspruchungen I 504*, 506*; III 57*, 237
—druckleitung (Wasser-) III 582
—behälter II 534; III 368
— —, Eisenbeton- III 264
— —, Wasser- III 671, 678*, 792, 793*
—ofengas I 455, 479; II 256
— —gebläse II 609, 610, 616, 620
— —schlacke I 498, 633; III 612
— —zement . . . I 701
—spannungsschaltanlage II 944
—wasser . . . . III 499
Hodograph . . . I 145
Höhenbestimmung III 26
— —, barometrische I 331*, 332*; III 32
—formel (Luftdruck) I 331
—messung, trigonometrische . . . III 31
—unterschied (Luftdruckmessung) I 331*
Hohlkugel (Festigk.) I 609
—rad . . . . I 769, 772
—zylinder (Festigkt.) I 604
Holz, s. auch Bauholz
— als Brennstoff I 455, 456*
— als Ware . . . I 725
—arten, spez. Gewicht I 614*, 719
—balkendecke . . III 374
—, Bau-, s. Bauholz.
—bearbeitungsmaschinen II 377
— —, Schutzvorrichtg. III 470
—durchtränkung . I 729
—eisenkonstruktion III 316
—, Fällen, Trocknen, Schwinden, Quellen I 720
—, Festigkt. . . . I 497*
—kohle . . . I 455, 456
—konstruktionen . III 292
—, Nutz- . . . . I 719
—pfahl . . . III 211, 212
—pflaster . . . . III 627
— —, Brücken- . III 1015
Holzpflaster, Fabrik- III 456
— —, Widerstandszahlen . . . III 600
—, physikalische Eigenschaften . . . I 719
—, Schiffszimmer-, Gewicht . . . . II 698*
—schwelle, Eisenb.- I 727; III 746
—, Schutz geg. Zerstörung . . . III 225
—verband . . . . III 299
—zahn . . . . . I 782
—zahnrad . . . . I 790
—zementdach III 57, 304, 386, 442
—zerstörung . . I 721, 722
—, zulässs. Beanspruchg. I 506*
Homogen . . . I 163
—e Differentialgleichg. I 81
—e Gleichung . . . I 50
—kohle . . . . . II 823
Homopolarmaschine II 870
Hookesches Gesetz I 482
Horizont . . . III 26
—alkurve . . . . III 1
—alschub (Bogenträger) III 99, 141
—alschub (Gewölbe) III 183
—alzug d. Kette III 103, 156
—korrektion . . . III 32
Hoerbiger-Ventil . I 936
Hospital, Schiffs- II 675, 687
Hubmagnet . II 402, 841
—rad . . . . . II 520
—tor, Schleusen- . III 533, 542, 547
—ventil . . . I 932
— —, gesteuertes . I 938
—werk, Drehkran- II 471
— —, Laufkran- . II 455
Huf. Zylinder-, Inh., Oberfläche . . I 134
— —, Schwerpunkt I 169
Hulettkran . . . II 407
Hülfsmaschinen für Schiffe . . . II 789
—zug . . . . . III 806
Hüllbahn . . . . I 208
—kurve . . . . I 95
Hülsenkupplung . I 821
Humphrey-Pumpe II 561
Hunt-Pohlig-Elevator II 498
—sche Schwerkraftbahn II 495
—sche Verladeeinrichtung . . . . III 797
HuygenesscheTraktorie I 110
Hydrant III 645, 682, 796
Hydraulische Hebemaschine . . II 390
—r Aufzug . . . II 421
—r Druck d. Wasserstrahlen . . . I 317

Digitized by Google

Hydraulischer Kalk I 698
—r Kompressor . II 626
—r Mörtel . . . I 697
—r Radius . . I 287, 310
—r Regler . . . I 974
—r (hydrodynamischer) Seitendruck . I 281
—r Stau . . . . III 512
—r Widder (Widderstofs) II 562; III 682
— Wasserhaltung . II 590
Hydrodynamik . I 264
— —, theoretische I 336
—pulsator . . . . III 556
—statik . . . . I 260
—statischer Druck I 262
— — Seitendruck . I 281
Hygrometer . . . I 404
Hyperbel . . I 96, 97
—, Flächeninhalt . I 100
—funktion I 30 bis 34*, 64, 65
—, Konstruktion . I 98
—rad . . . . . I 775
Hyperbolische Spirale I 108
—oid . . . . . I 120
Hypozykloide . I 105, 766
Hysteresis II 839, 840*, 864

I.

Ideale Hauptspannung I 527, 585
—s Moment (Biegung u. Drehung) . I 585*
I-Eisen s. Doppel-T-Eisen.
Ilgnerschwungrad II 1010, 1020
Imaginäre Gröfse . I 47
Impedanz . . . . II 851
Imprägnieren v. Holz I 723
Impuls . I 225, 228, 230
—moment I 225, 226, 228
—schraube . . . I 228
Indifferentes Gleichgewicht . . . . I 170
Indikator . . II 322, 323
— —diagramm I 396, 426; II 106
—zierte Leistung d. Dampfmaschine II 105
— —r Dampfverbrauch II 126
— —r Schub, Schiffsschraube . . . II 729
— —r thermischer Wirkungsgrad, Verbrennungsmasch. II 248
— —r Wirkungsgrad, Dampfmasch. . I 425
— —r Wirkungsgrad, Luftkompressor I 411
— — Saugleistung (Gebläse) . . . . II 612
— — Spannung, Kompressor . . . II 614
Indizierte Spannung, Dampfmasch. II 109, 111*, 112*, 124
— — Spannung, Mehrzylinderdampfmasch. II 120, 123*
— — Wärmearbeit, Verbrennungsmotor II 248
Induktion, gegenseitige . . . II 848
— —, magnetische II 839, 847
— —, Selbst- . . II 847
— —smotor . . . II 912
— —sregler . . . II 925
—tor, Wechselstrommasch. . . . II 895
Industriebauten III 359, 434, 436
Induzierter Strom, Richtg. . . . II 849
Infusorienerde I 386, 451; III 408
Inhalt, Flächen- I 94, 129*; II 630
—, Körper- . . I 133 ff.*
Injektor II 563; III 637
Innenbeleuchtung II 831*, 832*
—feuerung . . II 11, 37
—polmaschine . . II 895
—verzahnung . I 769, 772
Integral, angenäherte Berechnung . I 79
— —, bestimmtes . I 78
— —formeln . . I 71*
— —kurve für die Arbeit . . . I 958
— —rechnung . . I 71
—ation d. Reihenentwicklg. . . I 78
—ator . . . . . II 647
— ierender Faktor . I 80
Intensität d. Feldes I 216
—vlampe . . . . II 820
Interferenzerscheinung I 223
—national-Standard-(Candle-foot) Candle-meter . II 809
—polationskurve . III 23
Intze Behälter III 675, 678*
Invariante . . . . I 96
Inversion (Determ.) I 49
J S-Diagramm (Entrop.) I 396
Isodromregler I 975, 978
Isolation, elektr., I.-stoffe I 714; II 898, 919
— —smesser . . . II 951
— ator, Porzellan- II 978, 979*
— ierbims . . . . I 687
— —filz . . . . I 71
— —mittel, Wärme- I 386*, 387*, 451*, 688; II 699; III 408
Isolierstoffe, Wärmeleitzahlen . I 386*, 387*
— —ter Punkt . . I 94
— —ung, Mauer- . III 286
—uxkurve . . . . II 813
Isotherme . . . I 405
—e, Wasserdampf. I 415
—ische Kompression I 410, 411*; II 613

J.

Jackstagprofileisen I 631
Jägergebläse II 624*, 625
Jahns-Regler . . . I 973
Johnson u. Ostenfeld-Knickformeln . I 518
Joule . . . . . II 837
—sches Gesetz (Elektr. Arbeit) . . . II 844
— — (Wärme) . . I 396
Joy-Umsteuerung . II 187

K.

Kabel, s. auch Drahtseil.
—bahn . . . . . II 494
—, Dampf- II 426, 427*, 428*
—, elektr. . . . II 980
— —, zulässs. Stromstärke II 963*
—hochbahnkran . II 554
—kran . . II 504; III 492
—winde . . . . III 490
Kahnabmessungen III 534*
—, Tragfähigkt. III 531*, 534*
Kaimauer . . III 217, 276
Kalibrierte Kette I 845, 846*
Kalk, hydraulischer I 698
—mörtel . . . . I 695
—sandstein I 686; III 279
—schlackenstein . I 687
—stein . . I 683; III 55
— —, Festigkt. . I 495*
— —, Zulässs. Beanspruchg. I 506; III 59
—, Wasser- . . . I 698
Kalorie . . . I 152, 373
—, Gramm- . . . II 844
—meter . . . . II 826
—metrische Bombe I 462
—sche Maschine . I 408
Kaltbrüchigkeit . I 629
—dampfmaschine . I 428
—luftmaschine, Kreisprozefs . . . I 408
—reckung . . . I 625
Kälteleistung I 429, 433*
— maschine, Gewicht II 702*
— —, Kreisprozefs I 408
— —, Theorie . . I 428
—mischung . . . I 377*
—schutzmittel . . I 688
Kamelhaarriemen I 502, 862
Kaminheizung . . III 409
—kühler . . . . II 215

Digitized by Google

Kammerschleuse . III 536, 538
—rad . . . . I 782, 789
—zapfen . I 838; II 753
Kämpferdruck, -linie I 180; III 99, 148, 152
Kanalabgaben . III 524*
—abmessungen . III 534*
—bau . . . . . III 522
— —, Vorarbeiten III 523, 525
—, Beton- . . . III 699
—brücke . . III 533, 586
— —, Eisenbeton- III 269
—, Eisenbeton- . . III 265
—, Fabrik- I 313; III 465
—, Fliefsen in —en I 810
—, gemauerter . III 700
—, Günstigster Querschnitt I 312; III 499
—hafen . . . . III 536
—heizung . . . . III 410
—, Heizungs- . . III 422
—isation, Entwurfsdarstellung . . . III 691
— —sleitg. . . . III 690
— —sbetrieb . . III 705
— —ssysteme . . III 684
—isierung, Flufs- . III 512
—, Lüftungs- . . III 401
—netz (Städteentwässrg.) III 684
—schieber . . . . II 152
—, Schiffahrts- I 313; III 522
—schleuse . . . III 533
—, See- . . III 549, 552
—, Seiten- . . . III 518
—speisung . . . III 529
—, Triebwerk- . . III 577
—, Turbinen- . . III 585
—, übliche Gefälle, Geschwindigkeiten I 313
—wage . . . . . III 8
—, Wasserbedarf . III 527
Kantenpressung in Gewölben . . III 182
— in Stützmauern III 176
Kaolin . . . . . I 685
Kapazität d. Akkumulatoren . . . II 860*
—, elektrische II 837, 845
— v. elektr. Leitg. II 967
Kapillarität . . I 260
—, Erdboden- . . III 655
Kappengewölbe . . I 136; III 291, 294, 374
Kappsches Phasenverschiebungsdiagramm II 900
Kapselgebläse II 623, 624*
Kardangetriebe . II 803
—isches Problem . I 209
Kardioide . . . . I 107
Karte, Gelände- III 48, 571
Kaskadenschaltung II 954
—umformer . . . II 928
Katarakt, Flüssigkeits- I 962
Kathedralglas . . I 712
Kautschuk . . I 714
—, Festigkeitszahl. I 482, 497
Kavalierperspektive I 138
Kayserscbe Knickformel . . . I 516
Kegel, Bohr- . . II 863*
—bremse . . . I 862
—(Kegelstumpf-)feder I 598, 599*
—, Gleichung . . I 120
—, Inhalt, Oberfläche I 135
—, Mantelschwerpkt. I 166
—pendel . . . . I 185
—rad . . . I 773, 786
—räderfräsmaschine II 374
— —hobelmasch. II 373, 375
—radtrieb . . . . III 459
—regler . . . . I 966
—reibrad . . . . I 793
—scheibenriementrieb I 799
—schnitt . . . . I 95
—, Schwerpunkt . I 169
—, Trägheitsmoment I 201, 202
—trommel (Fördermasch.) II 434, 439*
—ventil . . . . I 932
—windmotor . . II 3*
Kehrmaschine, Strafsen- III 616, 631
Keilrad, —nutrad I 792; II 386
—, Reibung . . . I 254
—, Schwerpunkt . I 169
—, Inhalt . . . . I 134
—kopfschiene . . III 910
—nutreibung . . I 792, 860
—verbindung . . I 736
Keller . . . . . III 256
Kennlinie, s. Charakteristik.
—ziffer (Log.) . . I 48
Kern (—grenze, —punkt, —weite) eines Querschnitts . . . I 574
—punktmoment, Stat. unbest. Tragwerk III 147, 152
— —, Stützmauer III 176
—, Schornsteinquerschnitt . . II 49, 50*
Kerosin . . . . I 460
Kessel, s. auch Dampfk.
—anlagen, Schiffs- II 774*, 775*
—bekleidung, Lokomotiv- III 839
—blech . . II 73, 75, 78
—boden I 603; II 84, 103
—brunnen . . . III 661
—gesetze . . . . II 66
—, Heizungs- III 411, 417
—schmiede . . . III 881
—speisepumpe . . II 586
— —wasser II 57; III 792
Kette, Anker- II 683, 684, 700
—, Anwendungsgebiet II 407
—, Arbeitsverlust . I 258
—, Förder- II 514, 515, 516, 521, 528
—, Gallsche . . . I 847*
—, kalibrierte I 845, 846*
—förderung . II 493, 494
—ngeschwindigkeit I 815
—nkasten, Schiffs- II 677*
—nlinie . . . I 109, 181
—npumpe . . . . II 558
—nrad . . I 845, 846*, 848
—nrolle, —trommel I 844
— —, Wirkungsgrad I 259
—nrost . . . . . II 38
—nsäge . . . . II 382
—nzug . . . II 385*, 386*
—, Rundeisen- I 842, 844*
—, Treib- . . . . I 814*
—, versteifte . . . III 102
— —, durch einfachen Balken . . III 154
Kiefer, Festigkeit I 497
—, Gewicht . . . III 56
—, zulässs. Beanspruchg. I 506, 515; III 55
Kies . I 685; III 55
—bett a. Brücken III 998
—elgur I 386, 451, 685, 688; III 409
— —, Wärmeleitg. I 386, 451
—strafse . . . III 613
Kilogramm . . . I 148
—watt, -wattstunde I 151; II 837
Kimmsente . . . II 643
Kinematik . . . I 203
—tische Energie . I 152
— — eines Gases . I 393
Kipper . . II 499, 502
—kübel . . . II 403, 404*
—lager . . . . . I 172
— —, Brücken- . III 972
—moment . . . . I 170
—regel . . . . III 39, 48
—wagen . . II 492, 496*
Kirchdach, —turm III 163, 350 ff.
—hoffsches Gesetz, Stromverzweigung II 842, 854
— —, Warmestrahlg. I 390
Kirksche Formel (Schiffswiderstand) . II 720
Kitt . . . . . I 716
Klafter . . . . . I 986
Klammer, Mauer- . III 279
Klampen, Schiffs- II 685*, 686*
Klappe, Absperr-, Widerstands-. . I 306
—enventil I 939; II 211
—enwehr . . . . III 517

Klappmulde II 403, 404*
—tor, Schleusen- III 533, 542, 546
Klärbecken, Trink- wasser- . . . III 665
—ung, Abwasser- . III 707
Klauenkupplung . I 824*
Kleinesche Decke III 373, 377
—kessel . . . II 19, 72
— —, Dampftriebwagen III 857
— —, Heizungs- III 411, 417
—pflaster . . . . III 619
—sches Verbindungsstück . . . . I 902
triangulation . . III 20
Klemmenspannung d. Wechselstrommasch II 900
—kupplung . . . I 823*
—platte, Schienen- III 746, 752, 753*
Kletterweiche . . III 759
—zahnstange . . III 891
K-Linie, Culmannsche (Erddruck) . . III 169
Klinkengesperre . I 863
—r . . . . . I 692
—r, Festigkt. . I 496, 500
—r, Gewicht . . III 55
—rpflaster . . . III 620
Klosterformat . I 693; III 279
—gewölbe . . . . III 294
Klotzbremse I 243, 859; II 893, 447; III 814
Klug-Umsteuerung II 187
Knickbeanspruchung, zulässige . I 504, 505, 506, 514, 515*
—festigkeit . . . I 512
— — gegliederter Stützen III 958, 959
—sicherheit I 504, 505, 506, 513
Kniestück, s. a. Formstück, Widerstandszahl . . . . I 298
—rohr, Kupfer- I 919*, 921
Knorrbremse III 814, 818, 820
Knotenblech (Brücken), Gewicht . . III 1026
—linie (Kreisel) . I 236
— (Mafs) . . . . II 715
—punkte b. Fachwerkträgern . . . III 964
— —verfahren (Spannungsermittlg.) I 179
— —verschiebung III 103
— —, Winkeländerung am steifen — . III 118
Kochsalzlösung, spez. Wärme . . . I 375*
Koerzitivkraft . . II 840
Kohäsion . . . . I 260
Kohle I 455, 457 bis 459*
—breiverfahren (Abwasserreinig.) . III 709
—elektrode . . . II 823
—, Gewicht . . I 618, 619
—, Heizwert, Zusammensetzung . . . I 458*
—, Raumgewichte III 797*
—, Syndikatsmarken I 459*
—nbunker . . . II 676
—nfadenlampe . . II 819
—nkipper . . . . II 502
—nlagerung II 532; III 797
—noxyd I 379, 380, 472, 473
— —, Dichte u. Volumen verflüssigten — I 373
— — in Rauchgasen I 465
— —, Krit. Werte, Siedetemp. . . I 413
— —, spez. Wärme I 398*, 400*
—nsäure, Adiabatische Kompression . I 432*
— — als Verbrennungsprodukt . . . I 464
— —ausscheidung d. Menschen . . III 391
— —, Dampftafel . I 437*
— —, Dichte u. Volumen verflüssigter — I 372
— —entwicklung der Lampen II 830*; III 391
— — im Rauchgase I 464, 466*
— —kältemaschine I 434*; II 702*
— —, Krit. Werte, Siedetemp. I 378, 413
— —, Löslichkeit im Wasser . . . I 380
— —, Rauminhalt I 430*
— —, spez. Gewicht I 398, 437, 618
— —, spez. Wärme I 398, 400*
— —, Wichtige Wärmewerte I 380, 398, 437*
—nstoffstahl I 487*, 488*, 492, 628
— —, Verbrennung I 466*
—nverbrauch d. Lokomotiven . . . III 796
—nversorgung d. Bahnhöfe . . . . III 796
—nvorrat, Schiffs- . II 706
—nwasserstoff, Krit. Werte, Siedetemp. I 413
— —, Verbrennung I 473*, 476*, 477*
— —, Wichtige Wärmewerte I 398, 400, 462, 471* ff.
Kohlmetzdecke . . III 373
Koje, Schiffs- II 687, 702
Koks I 455, 458*, 459, 460; II 33
Koksasche, Gewicht II 135
—ofengas . I 455; II 256
Kolben I 865; II 268, 748, 782, 798; III 842
—beschleunigung . I 884
—dampfmaschine, s. auch Dampfmaschine II 96, 104, 144
— —, Schiffs- . . II 737
—dichtung . . I 908, 865
—druck, Dampfmasch. I 951; II 745, 749
— —, Verbrennungsmaschine . . II 264
—gebläse . . . . II 609
—geschwindigkeit (Dampfmasch.) I 883; II 138, 739*; III 843
— — (Luftpumpe) II 210
—hub II 140, 739*; III 849
—kompressor . . II 609
—kühlung . . . II 783
—luftpumpe . . . II 208
—, Luftpumpen- . II 211
—pumpe . . II 578, 591; III 485
— —, Abmessung, Arbeitsbedarf, Wirkungsgrad II 582
— —, Antrieb, Regelung II 586, 591
—, Pumpen- I 865; II 583
—ring I 868; II 269, 749, 798
—schieber . II 155, 754
— —steuerung . . II 144
—scheibenberechnung I 869
—stange . I 872, 874; II 749*; III 843
—, Uebersetzungs- II 423
—umlaufpumpe . II 764
—weg . . I 882; II 151*
Kollektor, s. auch Stromwender II 883, 888
—motor . . . . II 955
Kollermischer . . III 490
Kollimationsachse III 13
—fehler . . . . III 14
Kolmation . . . III 557
Kombinationslehre I 48
Kommutator II 883, 888
Kompensationsrohr I 914, 919*, 923*, 931
—wicklung . . . II 887
Komplane Bewegung, 3 Ebenen . . I 212
Komplexe Gröfse . I 47
Komponente . . . I 153
Kompression, Einzylinderdampfmasch. II 107
— —shub, Verbrennungsmotor . . . . II 251
—or, s. auch Gebläse II 593, 609, 616, 672, 783
— —, Arbeitsprozefs I 408, 410, 430

Kompressor, hydraulischer . . . II 626
— —, Stufen- . . . II 614
Komprimierte Welle I 820
Konchoide . . . I 111
—nlenker . . . . I 904
Kondensation bei Dampfmasch. II 201, 212, 213
— — b. Fördermasch. II 440
— — (feuchte Luft) I 404
— —swasserleitg. . III 419
— —swassermenge, stündl., i. Rohrleitg . I 451*
—or, Dampfmasch.- II 205, 212, 213
— —, elektr. II 845, 853
— —, Kältemasch. I 428
— —, Schiffsmasch. II 756
Kondenstopf s. Wasserabscheider.
Koenensche Decke III 373, 376, 380
Konischer Stift . . I 740
Konjugierte Durchmesser I 98
Konkav . . . . I 94
Konsistentes Fett I 731, 836
Konstruktionshöhe (Brückenb.) . III 915
— — v. Eisenbahnbrücken III 1006, 1007*, 1008*
—stahl . . . I 492*, 626
—wasserlinie (CWL) II 627, 628, 643
Kontaktknopfsystem (Elektr. Bahn) II 994
Kontinuierlicher Träger, s. auch durchlaufender Tr. I 175, 565; III 126
— — Bogenträger III 104
— — Träger mit veränderl. Belastg. III 96
— tatsgleichung I 265, 337
Kontradow-Kondensator II 205
Kontraktion I 266, 345, 346
— (Gasverbrennung) I 468
—szahl . . . I 304, 317*
Kontrollflansch (Dampfk.) II 71
Konvex . . . . I 94
Konveyor . . . . II 521
Koordinaten, ebene I 88
—, Polar- . . . I 90, 115
—, Raum- I 115, 140, 141
—, Umwandlung I 90, 115
Koepemaschine, elektr. II 1005
—scheibe . . II 435, 439*
Kopiermaschine . II 381
Korbbogen . . III 288
—, Elementbestimmung III 41
Korfund . . . . I 689
Korkisolation . I 387, 451, 699
—stein . . . . I 499, 688
Körner-Steuerung . II 169
Körper, geschichtete, Gewicht . . . I 618*
—, Inhalt u. Oberfläche I 133* ff.
—, Schwerpunkt wichtiger — I 164, 168
—, spez. Gewicht fester — . . . I 613*
—, Trägheitsmoment I 200
—, Umdrehungs- . I 137
— geringsten Luftwiderstandes . . . I 358
Körtingscher Strahlkondensator . . II 206
Kostenanschlag, Bahnbau . . . . III 726
— d. Wasserkräfte III 594
—überschlag, Kanalbau III 526
Kraft . . . . . I 147
—antrieb . . . . I 926
—ausbau, Wirtschaftlichkeit . . . III 590
—ausgleich-Kupplung I 835
—bandbetrieb . . I 802
—, Beschleunigungs-, Effektiv- . . . I 225
—, Coriolis- . . . I 224
—eck, —polygon . I 153
—einheit . . . . I 148
—einschalter . . . II 302
—, Erhaltung d. lebendigen . . . . I 218
—feld . . . . I 216, 219
—fluss . . . . I 217
—, Führungs- . . I 224
—gas I 455, 472; II 256
— —anlage . . . II 280
— —motor . II 258, 275
— —, Wärmewerte II 280
—kreuz . . . . I 159
—, lebendige . . I 151
— — (Punkthaufen) I 229, 230
—linie . . . . I 217
— —, magnetische, Kraftl.-Dichte, Kraftl.-Zahl . . . . II 839
— — u. Nullinie (Biegung) . . I 528
—maschine . . . II 1
— —n-Kupplung . I 835
— —nregler . . . I 961
—, menschliche, tierische II 1, 2
—, Mittel- . . . I 153
—moment . . . . I 153
—öl . . . . I 476* 478*
—, Relativ- . . . I 224
—richtung (elektr. Strom) II 849
—schraube . . . I 159
Kraft, Schwer- . I 148
—sche Steuerung . II 445
—steuerung . . . II 189
—, Stofs- . . . I 225, 240
—tarif . . . . . III 595
— übertragung III 458, 590
—umsetzung III 591*, 592*
—versorgung, Werkstatt- . . . . III 879
—wagen, s. auch Motorwagen, Abmessungen . . . III 596, 597
— —, Eigengewicht, Nutzlast . . . III 598
— —, Zugkraft . . III 601
—werk, Eisenb.-Werkstätte . . . . III 878
— — f. elektr. Strafsenbahnen . . . II 991
— —, Wasser- . . III 584
—zahnrad . I 779, 780*
—, Zentrifugal- I 188, 232
—, Zusatz- . . . I 224
—, Zwangs- . . I 187, 224
Kräftefunktion . I 217
—, Gleichgewicht der— I 153, 170, 171
—, Gleichgewichtsbedingungen I 160, 162
—paar . . . . I 155
—, Parallel- . . . I 162
—plan . . . . . I 154
— —, Cremonascher I 179; III 90
—zerlegung . I 153, 159; III 92, 157
—zusammensetzung I 153, 158, 160
Kragdach . III 336, 340
—träger . . . . I 552
— — m. vollwand. Hauptträgern . III 944
Kranausleger II 471, 473, 474, 475, 480, 481
—, Bau- . . . . III 491
—, Brücken- . . II 460
—, Dreh- . . . . II 465
—fahrwerk II 458, 463, 478
—gleisschiene, massiv unterstützte . I 555
— —träger . . . I 553
—, Lauf- . . . . II 454
—, Leistungsfähigk. III 521
—, Schiffs- . . . II 686*
—, Schwimm- . . II 480
—seil I 851*, 852*, 853*, 854
—, Seilbahn . . . II 554
—, Stahlwerks- . . II 484
—stützen u. -Anlagen i. Fabriken . . III 449
—träger II 457, 462; III 88
—wagen . . . . II 478
Krängungsversuch II 649
Kratzerkette . . III 480
—rinne . . . II 514, 515

Kreisabschnitt I 36, 37*, 131
— —, Schwerpunkt I 167
— —, Trägheitsmoment I 199
—ausschnitt . . I 37, 131
— —, Schwerpunkt I 167
— —, Trägheitsmoment I 199
—bewegung . . . I 146
— — d. Massenpunktes I 186, 227
—bogenabsteckung III 40, 45
— —höhe . . . I 36, 37*
— —länge . I 36 bis 41*
— —, Schwerpunkt I 166
— —, Trägheitsmoment I 196
—elbewegung . I 207, 235
—el. Einschienenbahn I 240
—elgebläse II 593, 602*, 603*, 604*
—elkompafs . . . I 239
—elkondensator . II 206
—elluftpumpe . . II 206
—elpumpe II 564, 569, 576*, 592, 764; III 496, 556
—el, Schiffs- . . I 240
—elwirkung . . . I 238
—elwipper . . . II 503
—ende Flüssigkeit I 265, 268
—, Evolvente . . I 107
—, Flächeninhalt I 2 bis 23*, 131
— —trägheitsmom. I 199
—funktionen I 26 bis 29*, 57*, 65*
—, Gleichung . . I 96, 97
—, Kern d. —querschnitts . . . I 575
—, Krümmungs- . I 93
—, magnetischer . II 841
—prozefs . . . . I 408
— — (Verbrennungsmaschine) . . II 245
—, Querschnitt exzentr. beansprucht . I 582
— — für Biegung u. Drehung . . . I 585*
— —, Randspannung I 590
— —moment I 537, 539*, 568, 571
—ring, Flächeninhalt I 131, 132
— —, Kern . . . I 576
— —, Querschnitt exzentr. beansprucht . I 582
— —, Querschnittsmoment I 537, 540*, 541*, 568, 571
— —stück, Schwerpunkt I 168
— —, Trägheitsmoment I 199
—säge, Holz- II 378, 379; III 479
— —, Metall . . II 369
Kreisschere . . . II 345
—, Sehnenlänge I 36, 37*
—seilbetrieb . . . I 813
—sichelstück . . I 132
—transporteur . . II 497
—, Umfang . I 2 bis 23*
—, Wechsel- . . . I 211
—, Wende- . . . I 211
Kremerfaulbrunnen III 709
Kreosotöl . . . . I 476
Kreuzgelenkkupplung I 824, 825*
—gewölbe I 136; III 295
—kopf I 886, 887, 899; II 749; III 842
—kurve (Schiff) . II 648
—stück, kupfernes I 920*
—ung, elektr. Bahn II 988
— —, Gleis- III 756, 760, 764, 772
— —weiche III 760, 764
—verband (Eisenhochbau) . . III 355, 356
Kriegsschiff, Gewichtsverhältn. ausgeführter II 711*
Kritische Geschwindigkeit d. Luft in Rohrleitg. . . I 448*
— — (Flufs-) . . I 280
—r Anstellwinkel (Strömungswiderst.) I 353
—r Zustand v. Gasen I 412, 418*
— Umlaufzahl (Turbodynamo) . . II 905
Kröhnke-Filter . . III 669
Kronenbreite, Bahn- III 733
—dach . . . . . III 804
Krumme Fläche . I 118
—e Linie . . . I 91, 115
—er Stab, Festigkt. I 588
—linige Bewegung I 144
Krümmung I 93, 116, 119
—, Mafs der — . . I 119
—, mittlere . . . I 119
—sebene . . . . I 116
—shalbmesser I 93, 117, 118
— — einfach gekrümmter Stäbe . . . I 589
— —, Eisenbahn- . III 724
— —, elektr. Strafsenbahnen . II 982, 987
— —, Grubenseilb.- III 906
— — in Bahnhöfen III 772
— — städt. Strafsen III 641
— — v. Landstrafsen III 605
— — v. Zahnradbahnen III 892
—skreis . . . . I 93
—smittelpunkt . . I 93
—smittelpunkte, zugeordnete — . . I 211
—swiderstand, Eisenbahn . . . . III 718
Kübel, Begichtungs-, Giefs-, Kipp- II 403, 404*, 498*
—, Inhalt . . . . I 136
Kubikwurzeln I 2 bis 23*
— — wichtiger Brüche I 42*
—sche Parabel . . I 103
—zierapparat . . II 316
Küche, Schiffs- II 688, 689, 702*
Kugelabschnitt, Schwerpunkt . . . . I 169
— —, Trägheitsmoment I 202
—abweichung (Fernrohr) . . . . III 12
—ausschnitt, Schwerpunkt . . . . I 169
— —, Trägheitsmoment I 202
—dreieck I 62*, 135, 136
—druck . . . . I 503
— —probe, Brinellsche I 494
—gesperre . . . I 864
—, Gleichung der — I 120
—, Hohl- (Festigkt.) I 609
—, Inhalt, Oberfläche I 35*, 135
—lager . . . . . I 889
— —, Reibung I 251, 252*
—, Trägheitsmoment I 202
—ventil . . . . I 935
—zone, Schwerpunkt I 168
—zweieck . . . I 135, 136
Kühlfläche (Kondensation) II 205
—raum, Temperatur II 676
—teich . . . . . II 218
—ung, Kompressor- II 613
— —, Transformator- II 925
— —, Zylinder-, Kolben- II 279, 783, 799
—wasser f. Kondensation II 202
— —leitg., Gasmasch. II 279
— —, Wärmeübergang I 388
Kulisse, Aufhängung, bauliche Ausbildung II 184, 85
— (Wasserrad) . . II 284
—nsteuerung II 178, 444; III 849
Kunstbronze . . I 679
—sandstein, Festigkt. I 498
—strafse . . III 608*
—tuffstein . . . . I 699
—werkstein . . . I 707
Kupfer . . . . . I 673
—blech I 503*, 621*, 676
—dach . . . . . III 885
—draht I 500, 501, 620*, 676
—, Festigkeitszahlen I 493*, 495*, 500, 501, 676

Kupfer, Gewicht I 620*, 621*; III 56
—legierung . I 493*, 678
—rohr I 676, 919*, 920*, 921*, 923*
—schlange . . . I 923*
—schmiede . . . III 883
—verlust i. Anker . II 878
—, zulässig. Beanspruchg. I 503*; II 81, 973
Kuppeldach I 172, 175; III 348, 349
— —, Berechnung III 160
—, Eisenbeton- . . III 260
—gewölbe . . . . III 294
—radsatz . . . . III 843
—schleuse . . . . III 537
—stange . I 896; III 843
Kupplung, Allgemeines, Arten . . . . I 821
—, ausrückbare . I 829
—, bewegliche . . I 824
— d. Fahrzeugmaschine II 800
—, Eisenbahn- . . III 811
—, elastische . . I 825
—, feste . . . . I 821
—, Reib- f. Hebemasch. II 386
—, Ring- Rutsch- . III 899
—, Seilbahnwagen- II 548
—, Tender- . . . III 849
—, Zentrator- . . I 793
Kurbel I 887, 888; II 382
—druck . . . I 886, 951
—getriebe I 881; II 270, 751
—gehäuse d. Fahrzeugmotoren . . . II 798
—kröpfung . I 889; II 752
—lager, Dampfmasch. II 199
— —druck . . . I 886
— —, Schiffsmaschine II 749*, 750*
—schleife . . . . I 892
—, Sicherheits- I 864; II 384
—trieb . . . . . I 951
— —, Bewegungsverhältnisse . . . . I 881
— —, Kraft- u. Arbeitsverhältnisse . I 886
— —masse, -ndruck I 953
—welle I 889, 891; II 270, 749, 751, 782, 788, 796
— winkel u. Kolbenweg II 151*
—zapfen . . I 887; II 270
Kurve doppelter Krümmung . . . . I 115
—, einhüllende . . I 95
—, elektr. Bahnen . II 987
—, Gleit-, Roll- . I 209
—, Herz-, Stern- . I 107
— i. d. Ebene . . I 91
—, Leit-, Pol-, System- I 208
—nabsteckung . . III 89
—nblatt (Schiffb.) . II 685
Kurvenkipper . . II 502
—, Schwerpunkt . I 166
—, zyklische . . . I 105
Kurzschlußanker II 912
—senkbremse . . II 397
—spannung (Stromwendung) . II 883, 885
Kuttasche Strömung I 342

L.

Labiles Gleichgewicht I 170
Labyrinthdichtung I 309, 866; II 221
Lackiererei . . . III 884
Ladebaum . . . II 681
—block . . . . . II 700*
—breite, -gewicht d. Straßenfahrzge. III 597, 598*
—gleis, —rampe, —straße . III 723, 776
—kran, Eisenb.- . III 776
—luke, Schiffs- . . II 687
—maß (Eisenb.) . III 776
—n einer Akk.-Batterie II 860, 930, 935
—rad . . . . . II 682
—raum, Schiffs- II 673, 679*
—winde . . . . II 686*
Ladung, Ladungsrückstand (elektr.) II 845
—sinhalt, Wagen- . I 619*
Lage d. Landstraßen III 604, 684
—plan . . . . . III 1
Lager, Balkenbrücken- III 969
—, Bogenbrücken- III 978
— Brücken- . . . I 171
—entfernung bei Triebwerkwellen . . I 817*
—, Gelenk- (Hochb.) I 171; III 325
—, Grund- (Schiffsmasch.) . . . II 750
—körper . . . . I 839
—, Kipp- . I 172; III 972
—, Kugel- . . . I 251
—, Kurbel- . II 199, 270
—, Maschinen- . . I 172
—metall . . . . I 680
— —, Festigkeit . I 496
—mittel f. körnige Stoffe II 529, 534
— — f. Schüttstoffe II 490
—reaktion . . . . I 171
—reibung . . . I 246, 837
— Rollen- . . . . I 252
—schale . . . . I 838
—, Trägergelenk- . III 325
—, Turbinen- . . II 293
—ungen i. Maschinen I 172, 836
—ungen (Statik) . I 171
—ungsverlust d. Kohlen I 460
Lager, Wellen- I 817, 839 840*, 841*, 842*; III 458
—widerstand . . I 171, 233
Lagrangesche Gleichg. I 229
Lambertsches Wärmestrahlungsgesetz I 390
Lamellenbremse . I 862
Lampe, elektrische II 818
— f. flüss. Brennstoffe II 813, 814
—, Gas- . . II 814, 816
—nanordnung . . II 832
—nglocke . . . . II 829*
Lancashire-Zusatzmaschine . . . II 936
Landestriangulation III 46
—karte . . . . . III 46
Landsbergsche Formeln (Zug u. Druck) I 511
Landsche Nullinienbestimmung . I 573
—r Trägheitskreis . I 195
— Spannungsermittlg. I 529
Landstraße, Bau u. Unterhaltung . III 609
—, Einteilung, Linienführung . . III 603*
—, Kosten . III 616, 620
—, Nebenanlagen . III 621
—, Stoffbedarf . III 613*
Landungssteg, Eisenbeton- . . . III 270
Landwirtschaftlicher Wasserbau . . III 555
Langerscher Balken III 954
—kessel, Lokomotiv- III 834
—lochbohrmaschine, Holz- . . . . II 382
— —fräsmaschine, Metall- . . . II 369
—sche Rohrreibungszahl I 292
—schwelle, Eisenb. III 756
Längenänderung (Festigktsl.) . I 481
— —, Arbeit der — I 484
—enausdehnung (Wärme) I 369*, 371*
—enmaße verschiedener Länder . . I 994* ff.
—enmessung . . . III 2, 3
—enprofilaufnahme III 29
—sbanten (Flußreglg.) III 504
—skeil . . . I 738, 739*
—skraft (Fachwerk) I 180
—sneigung, Eisenbahn III 725
—sträger, Brücken-, Angriffsmom., Widerstandsmom. III 1001*
— — (Brückenfahrb.) III 1017* bis 1019*, 1021*
Laschennietung I 758, 759; II 24
—nschraube . . . III 753
—, Schienen- III 753, 755*

Lastaufhängung II 402; III 420
—druckbremse II 383, 399, 400
—enaufzug . . . II 412
—enzug . . III 65, 76, 79
—führung . . . II 407
—haken I 856, 858*, 859*; II 402
—scheide . . . . III 85
Lateralplan . . . II 628
Laternenaufbau (Kuppeldach) III 295, 339
—uring (Kuppeld.) III 161
—, Strafsen- II 834; III 645
Laufachse, Lokomotiv- III 843, 848
—kran II 454; III 445, 449, 494
— —schiene . . . II 456*
—rad, Dampfturb.- II 231 ff.
— —, Lokomotiv- III 844
— —, Schleuder-pumpen- . . . II 566
— —, Wasserturb.- II 294
—rohr . . . . . II 521
—steg . . . . . I 560
—welle (Schiff) II 753, 788
—winde II 455, 460, 481, 483*
Läufer, Drehstrommot.- II 913, 916, 917
Läutevorrichtung (Lokomotive) . III 838
Lavalturbine . II 222, 231*
Lazarett, Schiffs- II 675, 687
Lebendige Kraft I 151, 187, 188, 191, 229, 230
— Erhaltung der — I 152, 218
Leckrechnung . . II 659
Stabilität bei — II 653
Lederdichtung . I 308
—stulp . . . . I 244, 865
—treibriemen . I 733, 795
— —, Festigkt. . I 501
— —, Gleitverlust I 259
Leerlaufarbeit d. Dampfturbine . . . II 221
— —widerstand (Dampfmasch.) . II 141, 142*
—scheibe . . . . I 805
Legebrett . . . III 10
Legierung I 678; III 839
—, leicht schmelzbare I 682
Lehmmörtel . . I 695
—pisé . . . . . I 686
—stein . . . . . I 686
Lehrbogen, -gerüste III 315, 1049
—e, Blech- . . . I 674*
—e, Feinblech- u. Draht I 622*
—gerüst für gewölbte Brücken . . III 1049
Leibungsdruck I 505, 760; III 57*, 73*, 74*, 920
Leichtmetalle . . I 496
Leinwanddach . . III 387
L-Eisen I 638*, 640*, 646*
Leistung . . I 150, 187
— d Eisenb Fahrzeuge III 873
—, elektrische II 837, 844, 852
— lebender Motoren II 1, 2; III 280, 601*, 612, 738*, 739*
—sfaktor, Drehstrommot. II 917
— — (Wechselstrom) II 852
—sgrenze d. elektr. Gleichstrommaschinen II 863
—skonstante d Dampfmasch. . . . II 105
—smessung . II 321, 333
—squotient . . . I 187
—sregelung d. Kreiselpumpe . . . II 574
—sregler . . . . I 965
—sversuche a. Dampfkesseln u. Masch. II 91
—szeiger . . . . II 949
—sziffer, Arbeitsprozefs I 408, 429
Leitapparat v. Dampfturbinen . . II 219
—erzahnstange . . III 888
—kurve . . . . I 208
—linie . . . . I 96
—(Lade-)rad . . II 682
—rad, Wasserturbinen- II 296
—strahl . . . . I 98
—ung, Dampf- . . I 450
— —, elektr. II 960, 962*, 963*, 972
— —, Entwässerungs-Druckrohr- . . III 705
— —, Heizungs- III 412, 428, 430
— —, Kanalisations- III 690
— —, Luft- . . . I 450
— —snetz (elektr.), Ausführung . . . II 972
—squerschnitt (Kanalisation) III 694
—squerschnitt (elektr.), Berechnung . II 964
—smast I 727; II 973, 975*; III 645
—swiderstand I 277, 312, 350, 448
— —, Warme- I 385*, 386*, 387*
— —, Wasser- III 580, 678, 793
—werk (Flufsbau) III 504, 505
—widerstand, elektrischer . . II 842, 843*
— — v. Kupferleitg II 965*
Lemniskate . . I 111
—oidenlenker . . I 964
Lenix-Spannrolle . I 800
Lenkachse . . . . III 869
—er . . . . . I 902
— —steuerung . . II 186
— —ventil . . . I 903
—ung, Automobil- II 892
Lentz-Steuerung . II 187
Lenzleitung . . . II 767
—pumpe . . . . II 765
Leonard-Schaltung II 982, 1007, 1019
Letternmetall . . I 681
Leuchtgas I 455, 475; II 256
— —, Explosionsgrenzen I 477
— —motor II 253, 258, 267, 270
— —, spez. Gew. . I 333
— —, Verbrennung I 472, 473, 474*, 475
— — -Luftgemisch, Zündgeschwindigkeit I 471*
—kraft . . . . . II 806
Libelle . . . . . III 9
Lichtabgabe . . II 805
—einheit . . . . II 805*
—messung . II 807, 809
—stärke, -kraft, -intensität . . II 807, 808*
— —, Berechnung II 810
— —, erforderliche II 832*, 834*
— —seinheit . . II 805*
—strahlenverteilung bei verschiedenen Lichtquellen . . . II 829*
—strom-, -menge . II 805
—verlust durch Lampenglocken . . . II 829*
—weite (Brückenbau) III 915
Liderung I 307, 863, 886, 879
Lieferungsgrad (Kompressor) I 411; II 611
— — (Viertaktmotor), Einfluss d Höhenlage . . II 248, 260*
—vorschriften f. Eisenkonstruktionen I 702
— — f. Eisen u. Stahl I 663
— — f. Portlandzement I 699
— — f. Schmieröle I 783
Ligroin . . . . . I 460
Lilienthal-Kessel II 21
Limbus . . . . . III 11
Lineare Differentialgleichung . I 83
— —e Voreilen . II 149
—ie, elastische I 532, 547* ff.
— —, gerade i. d. Ebene I 88
— —, gerade L. Ramme I 112, 113

Digitized by Google

Linie, krumme in der Ebene . . . . I 91
— —, krumme i. Raume I 115
— —nführung elektr. Bahnen . . . II 980
— —nführung b. Flufsbau . . . . III 503
— —nführung v. Landstrafsen . . . III 603
— —nführung v. Touristenbahnen . III 907
— —nkipplager . III 972
— —nrifs (Schiffb.) II 629, 632, 633*
— —nrifsentwurf . II 642
— —nvergleich v. Eisenbahnen . . . III 721
— —, Schwerpunkt I 165
— —n. Trägheitsmomente wichtiger — . 196
Linoleum . . . I 689
Linse . . . . . III 10
—ndichtung . . . III 839
Lipowitz-Metall . I 682
Lippenventil . . . I 942
Lochbohrer . . . II 348
—ersche Zahnstange III 890
—leibungsdruck I 505, 760; III 57*, 73*, 74*, 920
—maschine . II 343, 344
—stein . . . . . I 692
Löffelbagger III 476, 482, 483*
Logarithmen . I 48, 56
— —, Briggsche . I 24 bis 25*, 48
— — d. Hyperbelfunktionen I 32*, 33*, 34*
— —, natürl. I 2 bis 23*, 48
—ische Reihe . . I 56
— —s Dekrement . I 222
— — Spirale . . I 109
Logleine . . . . II 716
Lokalbahn . . . III 722
Lokomobilkessel II 11
—schornstein . . II 53
Lokomotive, Bezeichnung . III 822*, 823*
—e, Breiten- u. Höhenmafse . . . . III 823
—e, elektr. Vollbahn- II 1004
—e, elektr. Zahnrad- III 898
—e, gemischter Zahnrad- u. Reibungsbetrieb III 897, 899
—e, Gestell . . . III 846
—e, Gewicht d. Zahnrad- . . . . III 903
—e, Gewicht v. -teilen III 879*
—e, Gruben- . . II 493
—e, Hauptabmessungen f. Normalspur III 829* bis 831*
—e, Hauptabmessungen f. Schmalspur III 832*
Lokomotive, Heifsdampf- . . . III 851
—e, Kessel . . . III 825
—e, Kohlenbedarf. III 796
—e, jährl. Leistung III 873
—e, Leistung, Zugkraft elektrischer — III 903
—e, Maschine . . III 832
—e, Prüfung . . . III 855
—e, Umdrehungszahlen III 844*
—e, Verbund- . . III 850
—e, Verschub- . . II 492
—e, Wasserbedarf. III 790
—e, Widerstandszahlen III 717
—e, Zahnrad- . . III 894
—e, Zugkraft . . III 839
—schuppen . . . III 798
—werkstatt . . III 880
Löschgrube . . . III 802
—-, Lade-, Leitrad II 682
Löslichkeit v. Gasen i. Wasser I 280, 380*, 381*
Losscheibe . . . I 805
Lot (Legierung) I 680, 681*
— (Schiffb.) . . . II 627
—gabel . . . . . III 8
—rechte Geschwindigkeit . . . . I 210
Löten, elektrisches II 844
Löwenherz-Gewinde I 741, 749*
L-Querschnittsmoment I 537, 570
Luft, Ausdehnung I 330
—, Ausflufsformeln I 444*
— —zahlen . . . II 317*
—bedarf b. Verbrennung I 463
— — d. Lampen . II 830*
— — motorischer Brennstoffe . . . . II 256*
—befeuchtung, -erwärmung . . . . III 401
—bewegung . I 355, 356*; III 401
— — i. Rohrleitg. I 447, 450
—, Drofslung . . I 453
—druck I 364; II 594; III 32
—, Druckabfall i. Rohrleitg. . . . . I 450
—druckbremse II 623, 998; III 818
— —gründung . . III 218
—, Druck i. offenen u. geschlossenen Räumen . . . I 331, 332
—, Durchflufszahlen II 320*
—, Dynamik . . I 335
—erwärmung f. Lüftung III 401
—, feuchte I 402, 403*; II 611
—filter . . . . . III 400
—gas . I 455, 460; II 817
—heizung . . III 421, 463
Luftkompressor . II 593
— —, Arbeitsprozefs I 410
—, kritische Geschwindigkeit . . . I 448*
—leitung . . . . I 447
—, Löslichkeit i. Wasser I 280, 380
—messung . . I 315, 317
—, mittelfeuchte . II 611
—mörtel . . . . I 695
—pumpe, Kolben- II 208
— —, Schiffs- . . II 762
— —, Schleuder- . II 206
— —, Verbrennungsmotor- . . . II 782
—reibungswiderstand I 358
—reinigung . . . III 400
—-Sack (Ballonet) I 334
—saugebremse . . III 819
— —leitung v. Verbrennungsmasch. . II 277
—schicht, Wärmeübergang . . . . I 382
—schiff . . . . I 332
—schleuse . . . . III 219
—schraube . . . I 346
—, spez. Gewicht I 402, 403*, 618; II 611*
— — Wärme . . I 398
—, strömende Bewegung I 440, 444
—überschufs b. Verbrennung . . I 463
—verflüssigung . . I 439
—vorwärmer (Dampfmasch. . . . II 198
—, Wärmeleitzahl I 396*
—-Wasserdampfgemisch I 402, 403*
—wechsel, Gröfse und Notwendigkt. des — III 390, 391
—, wichtige Wärmewerte . . . . I 398
—widerstand I 335, 355, 358, 361 bis 363*
— —, Eisenbahn II 793; III 717
— —, Flügel . I 365
— —, Geschosse . I 335
—, Zähigkeit . . I 348
—, Zusammensetzung I 463
Lüftung III 390, 463, 877
—, Eisenbahn- . . III 871
—, Fabrik- . . . III 463
—, natürliche u. künstliche . . . . III 395
—, Schiffs- . . . II 690
—anlage, Ausführung III 400
—skanal . . . . III 401
Lukenprofileisen . I 651*
Lumen . . . . II 808
Lupe . . . . . III 11
Lux . . . . . II 809
—ferprisma . . . I 713

M.

Maclaurinsche Reihe I 67
Mac-Nicol-Kessel . II 12
Magnalium . . I 681
—, Festigkeit . I 496, 501
Magnesium, Festigkt. I 496
Magnetbremse II 395, 398
—, Bremslüft- . . II 402*
—, Feld- (Gleichstrommaschine) II 880, 889
—ische Induktion II 839, 847
— —r Kreis . . . II 841
— —r Widerstand II 841
— —s Feld II 839, 846, 898
—isierungskurve . II 839
— —tafel . . . . II 881*
—ismus . . . . II 839
—itbogenlampe . . II 826
—omotorische Kraft II 841
—pol . . . . . II 839
—rad (Wechselr.) . II 895
—senkbremse II 398, 402
—stoppbremse . . II 395
—, Trag- . . . . II 402
—, Tragkraft . . II 841
—wicklung II 880, 882, 931
Makadam-Straße III 611, 618
—, Zement- . . . III 625
Mammutpumpe . . II 559
Manganbronze . I 493
—entfernung a. Wasser III 670
—stahl I 482 bis 492*, 626
Mannesmannrohr I 918, 919
Mannloch . . . II 80, 90
Manometer II 65, 70, 311; III 838
Mansardendach III 57, 208, 340
Manschettendichtung I 309, 865
Mantisse . . I 24, 25*, 48
Marine-Kessel II 773, 775
Mariottesches Gesetz I 330, 396
Marmor . I 498, 506, 683
Marschturbine . . II 758
Marshall-Umsteuerg. II 186
Martinstahl . . I 492, 634
Marx-Steuerung . II 171
Maschinenfundament II 279; III 461
— kraft, Schiffs- II 715, 716, 717
—teile . . . . . I 736
Masse . . . . . I 148
—anziehung . . I 220
—ausgleich (Schlick) II 744
—ermittlung (Bahnbau) . . III 728, 731
—ndruck (Kurbeltrieb) I 953
—nmittelpunkt . . I 163
—nprofil (Eisenbahnbau) . . . . III 721
Massenprofil (Kanal) III 525, 526
—npunkt, freie Bewegung des — . . . I 184
— —, unfreie Bewegung des — I 187
—nreduktion . I 231, 958
—nträgheitsmoment I 191
—ntransport . . . II 490
—nverteilung (Bahnbau) . . . . III 731
—nwuchtdiagramm I 957, 959
—, spezifische . . I 149
Maßeinheit, elektrische II 837*
— —en für Schiffsladeräume . . II 679*
— — (Vermessungsk.) III 1
—e, Schiffs- . . . II 671
— e verschiedener Länder I 994* ff.
—stab für Spannungsermittlung . . I 529
— — v. Biegungslinien III 113
—system, absolutes (C-G-S) I 149; II 837
— —, physikalisches I 149
— —, technisches . I 149
—, Vergleich der M. verschiedener Länder m. Meterm. . . I 986*
Massivdecke III 373, 376
Mast, Eisenbeton- III 277
—enkran . . . III 498*
—enzubehör . . . II 681*
—, Leitungs- II 973, 975*
—, Schiffs- . . . II 699
Mastt . . . . . I 460
Materialabnahme II 74
—prüfung I 625; II 73
Mathematik . . I 1
—sches Pendel . . I 189
Mauer, Baustoffe für I 686
—bogen . . . . III 289
—, Eisenbeton- . . III 260
—fraß . . . . . I 686
—, freistehende . . III 283
—öffnung . . . . III 287
—ring (Kuppel) . . III 161
—stärke . . III 281, 283*
—stein I 692; III 278, 279
—, Stütz- . . . . III 167
—werk, Arten . . III 278
— —, exzentrische Beanspruchg. . I 580
— —, Gewicht III 55, 280
— —, Kessel- . . II 41
— —, zulässig. Beanspruchg. I 506*; III 59*
Maurertagewerk III 280*
Maximum . . . . I 68
Maxwellscher Satz III 106
Mechanik luftförmiger Körper . . . I 330
Mechanik starrer Körper, Grundbegriffe . I 140
—k tropfbar flüss. Körper . . . I 360
—scher Wirkungsgrad, Dampfmasch. II 140, 142
— — Wirkungsgrad, Verbrennungsmot. II 249
— —s Wärmeäquivalent . . . I 152, 333
Meerseilbahn . . . II 356
Mehrleiternetz (Gleichstrom) . . . II 932
—phasenmaschine II 895, 911, 937, 940, 941
— —phasenstrom II 855, 933, 952
—stufige Gleichdruckdampfturbine . II 224
— — Scheibenturb. II 232
—zylinderdampfmaschine II 113, 115
Meile . . . . . I 987*
Meißelwinkel II 346*, 347*
Melms & Pfenninger-Turbine . II 239, 759
Membranpumpe . . III 495
Mengenmessung . II 312
Mensch, Ausatmg., Ausdünstg., Ausscheidg. v. Kohlensäure, Wasserdampf . . III 391*
—engedränge . . II 708
—, Kraft, Leistg. II 1, 2; III 601*, 738*, 739*
—, Wärmeabgabe . III 390
Messing . . . . I 678
—, Aluminium- . I 681
—, Festigkt. I 493, 496, 500, 501
—, Gewicht v. Draht u. Blech . I 620*, 621*
—rohr . . . I 919, 922*
Meßgeräte, elektr. II 949
— — f. Maschinenmessg. II 310
— —, Höhen- . . III 27
— —, Längen- . . III 2
— —, Winkel- . . III 13
—kunde . . . . II 310
—latte, —band, —rad III 2, 3
—tischblatt . . III 39, 45
—ung d. Luftfeuchtigkeit . . . . I 404
—verfahren, Schiffs- II 671
—wehr . . . . . III 572
Metall, Allgemein., Maße u. Gewichte I 620* ff.
—dach . . . . . III 304
—, Gewicht . . . III 58*
—, Eigenschaften . I 623
—elektrodenlampe . II 826
—, zulässa. Spannung I 502, 503*, 504*
—faden(draht)lampe II 820

Metalllegierg. I 678; III 839
—liderung . . I 868, 878
—platten, Gewichte I 621*
—preise . . . . I 682*
—schlauch . . . I 931
—, Schwindmafs . I 371*
—, spez. Gewicht I 613*, 620*, 621*
—überzug . . . . I 667
Metazentrische Höhe II 629, 645, 647*
—um I 264; II 628, 632
Meterkilogramm . I 150
—mafs — Fufsmafs I 988*, 990*, 992*
Methan I 398, 401, 472, 473, 477
Methode d. kleinsten Quadrate . . I 86
Meunierscher Satz I 118
Meyer-Steuerung . II 159
M_x-Fläche, —Linie III 94, 99
Middendorfsche Formel (Schiffswiderstand) II 721, 722*, 723*, 724*
Mikroskop . . . . III 13
Militärperspektive . I 138
Mineralogische Härteskala . . . . I 682
—öl I 460, 730, 731*, 733
Minette . . . . . I 632
Minimum . . . . I 68
Mischgas I 455, 472; II 818
—kondensation . . II 202
—maschine, Mörtel-, Beton- . . . III 488
—ungstemperatur I 376, 377*
— —, Luft — Wasserdampf . . . I 403*
— — v. Gasen . . I 401
Mittelachse, verschiebbare . . . . III 869
—bewegung . . . . I 143
—kraft, —kraftlinie I 153
—pfeiler, Brücken- III 1048
—punkt (Gleichg.) d. Kegelschnitte . I 96
— —fläche . . . I 119
—schiene, Zahnradb. III 886
—schlächtiges Wasserrad . . . . . II 284
—stütze (Träger) . III 133
—wand . . . . . III 284
Modellregel (Schiffswiderst.) . . . I 329
—versuch (Schiff) II 727, 728*
Modul (Zahnrad) . I 766
Mohrsche Durchbiegungsermittlg. I 533
— Nullinienbestimmung . . . . I 572
—r Trägheitskreis. I 195
— Spannungsermittlg. bei exzentr. Beanspruchung . . I 581
Moivrescher Satz . I 47
Mol . . . . . I 397
Molekulargewicht I 396, 398*, 473*, 477*, 610*
— —, scheinbares . I 401
—wärme . . . . I 474
Mollerscher Turmverband . . . . III 312
Molybdändraht . . I 501
Moment, Achsen- I 156
—ankraft . . . . I 240
—, Deviations- . . I 192
—enfläche . . . . I 176
—enkurve . I 177; III 80
—ensätze . . . . I 157
—, Haupt- . . I 159, 161
—, Impuls- . . I 225, 226
—, Kraft- . . . . I 155
—, Stabilitäts- . . II 644
—, statisches . I 162, 163
—, T- . . . . . III 129
—, Trägheits- . . I 191
—vektor . . . . I 156
—, Zentrifugal- . I 192
Mönch- u. Nonnendach I 512
Monelmetall, Festigk. I 494
Monierbau s. a. Eisenbeton, . . . I 708
—decke . . III 254, 376
—rohr . . . . . I 709
—wand . . . . III 285
Monozyklisches System II 856
Montagehalle . . III 359
Montejus . . . . II 560
Moorelicht . . . II 828
Moorwasser, Schädigender Einfluls auf Beton III 224
Morgen . . . . . I 987
Morsekegel . . . II 363*
Mörtel I 694, 697; III 279
—, Festigkt. . I 498*, 499*
—, feuertester . . I 694
—, Luft- . . . . I 695
—mischmaschine . III 488
—stein . . . . I 686
—, Wasser- . . I 697, 702
Moseleysche Formel (Stabilität) . . II 645
Motor, belebter II 1, 2*
—droschke, Vorgeschriebene Mafse . . II 792
—fahrzeug . . . II 790
— f. flüssige Brennstoffe II 257
—generator . . . II 926
—gerade (Regler) . I 979
—wagen, Eisenbahn- III 856, 858, 860*
— —, elektr. . . II 805
— —, elektrische Zahnrad- . . III 898
—winde . . . . III 491
Muffendruck (Regler) I 963
—regler . . . . I 965
—rohr, gufseisernes Normal- . . . I 998*
Muffenrohr, Heizungs- III 413*
— —, Mannesmann- I 919
—verbindung I 915; III 591
Mühle, Arbeitsdiagr. III 441
Mulde . . . . . II 485*
—nkipper . . . . II 496*
—nkran . . II 485, 487*
Müller-Breslau, Formeln f. Zug u. Druck I 512
— —, w-Gewichtsberechnung . . III 114
Mundstück I 276, 316*, 445*; II 218, 224, 314, 316, 318
Mündung Flufs- III 507, 549
Munition, Schiffs- II 707*
Muntz-Metall (Festgk.) I 494
Münztafel . . . . I 981
Muschelkurve . I 111, 112
—schieber . . . . II 146
Mutterschraube . I 742*
—, Schrauben-, Gewicht I 743*

N.

Nabe . . . . I 789, 805
Nachstellen d. Bremsgestänges . . III 817
Nadelwehr . . . III 516
Nagel . . . . . I 663
Näherungswerte (Gleichg.) I 53
Nahtloses Stahlrohr I 918
Naphthalin I 376 ff., 413, 462, 477
Nafsbagger . . . III 476
—dampfbetrieb (Dampfmasch.) . . . II 130
Nasser Dampf I 413, 414*
Naturgas . . . . I 455
Natürliche Logarithmen I 2 bis 23*, 48
Naviersche Knickformel I 518
Nebenbahn . III 722, 726
—schnitzmaschine . II 863
— —maschine, Charakteristik . . . II 867
— —maschine, Regelung II 933
— —maschine, Schaltung . . . . II 928
— —motor . II 892, 951
— (Zuschlag-) spannungen f. Träger . I 512*
Neigung, Bahngleis- III 725
—, Schienen- i. Bahnhöfen . . . . III 772
—swechsel . III 721, 725
Nennleistung (Dampfmasch.) . . . II 125
Nepersche Analogien I 63
Nernstlampe . . . II 821
Netzbedingungsgleichungen (Triangul.) III 47

Netzschaltung . . II 856
—winde . . . . II 686*
Neusilber . . . . I 681
Neutrale Achse, — Faserschicht (Biegung) I 522
Newtons Aehnlichkeitsgesetz . . I 329; II 725
—sche Gleichungslösung I 53
—s Gravitationsgesetz I 220
—s Potential . . . I 220
Nickel . I 612, 615, 627
—stahl . . . . . I 626*
— —, Festigkeit . I 487 bis 492*, 627
— — f. Brückenbau III 627, 918
— —, zulässig. Beanspruchg. I 505, 511
Niclausse-Kessel II 772, 775
Niederschlagsmenge, s. auch Wasserabflufsm., III 558, 571, 574*, 610*, 655*, 686
Niedrigwasser . . III 499
Niet I 663, 753; III 918
—abzug i. Blechträgern III 935
—arbeit (Hochbau) III 320
—eisen . . . . II 77, 80
— für Rohre . . I 927*
—, Gewicht . . . II 697*
—kopf, Gewicht . I 754*
—maschine . . . II 336
—tafel f. Winkeleisen III 920*
—ung, Berechnung I 755
— — f. Behälter . I 760
— — f. Brückenbau I 760; III 919, 935
— — f. Dampfkessel I 756; II 23, 26*, 82
— — f. Hochbau . I 760; III 320
— — f. Maschinenteile I 763
— —, Trägerver- . III 947
— —, zulässig. Beanspruchg. I 505; III 73*, 74*
Niveau . . . . III 9
—fläche . . . I 217, 262
Nivellement . . III 26
— —splan . . . III 1
—ier„geräte, -methode III 2 7, 28
— —ungsarbeiten . III . 28
Nockensteuerung II 273, 755
Nomineller Expansionsgrad . . . . II 104
Nonius . . . . . III 15
Normalbeschleunigung I 145
—druck (Hydr.) . I 262
—düse . . . . . II 318
—e, Bi- . . . . I 116
—e, Gleichg. der — I 92, 114
—ebene . . . . I 116
—element . . . . II 857
—flamme, -kerze . II 808
Normalformat (Ziegelst.) I 692; III 229
—gleichungssystem (Vermessungsk.) . III 51
—höhe v. Bahnen I 833
—ien f. Bewertung u. Prüf. elektr. Masch. und Transformatoren II 865
—null . . . . . III 26
—profileisen I 637, 638* ff.
— — (Knickfestigkt.) I 518*
— —, Eisenbahn- III 722, 824, 864, 866
—sand . . . . . I 760
—schienen, preufs. III 745*
—schnitt . . . . I 118
—spannung . . I 481, 524
— —, einfach gekrümmter Stab . . . I 583
— — en f. elektr. Strom II 959
— — en im Schiffsquerschnitt . . . II 713
— — u. Schubspanng. I 589
— — (zusammengesetzte Festigkt.) . . I 572
—spur . . . . . III 722
—tender . . . . III 854
—- u. Schubspannung einfach gekrümmter Stäbe . . . . I 591
—weiche . . . . II 762
Normand-Kessel II 775, 776
Normen f. Leistungsversuche a. Dampfkesseln u. Dampfmaschinen . . II 91
Notauslafs (Entwässrg.) III 703
—ausschalter (Fördermaschine) . . II 1016
Nullleiter . . . . II 856
—linie, -schicht (Biegung) . . . . I 522
— —, Lage b. exzentr. Beanspruchg. . I 582*
— — u. Kraftlinie I 528
— — (zusammengesetzte Festigkt.). Bestimmg. n. Mohr u. Land I 572
Numerische Exzentrizität I 96
Nut, Nutenkeil I 738, 739*
Nutation (Kreisel) . I 238
Nutzbare Arbeit . I 394
— —r Dampfverbrauch II 126, 127*
—holz . . . . . I 719
—lasten i. Hochbau III 56*

O.

Obelisk, Inhalt I 134, 137
—, Schwerpunkt . I 169
Oberbau, Eisenb.- III 740
— —, Eisenb.- mit Querschwellen II 746, 749
Oberbau, elektr. Bahnen II 993
— —, Grubenseilb.- III 906
— —, Landstrafsen- III 610
— —, Touristen-Seilbahn- III 910
— —, Zahnradbahn- III 892
—fläche, Körper- I 133* ff.
— —nänderung v. Flüssigkeiten . . I 265
— —nkondensation II 304
— —nspannung . I 260
— —nteerung . . III 611
— —nwiderstand I 351, 358
—gurtlaufwinde . II 483
—kasten, Eisenbahnwagen- . . . III 870
—leitungsbetrieb (elektr. Bahn) . II 992, 995
—licht . . . . . III 444
—schlächt. Wasserrad II 283
Objektiv (Fernrohr) III 13
Ofenheizung III 469, 482
— kachel . . . . I 694
Ohm . . . II 837, 838
—sches Gesetz . . II 841
Ohnesorge-Kupplung I 835
Okular . . . . . III 12
Oelabscheider . . II 206
—besprengung III 617, 633
—, Erd- . . . . I 476*
—farbenanstrich . I 668
—gas . . . I 455; II 813
—, Heizwert I 462, 476*, 477*; II 256
—lampe . . . . II 814
—maschine, Schiffs- II 780, 784*
—, Pflanzen-, Fett-, Mineral- . . . . I 730
—, Schmier- . . I 460, 730
— —, Reibungszahlen I 248*
—, Treib- I 476*, 478*; II 256
—, wasserlösliches I 732
—, Zähigkeit . I 261, 288
O-Linie . . . . III 97
Optik . . . . . III 10
Ordinate . . . I 88, 112
Orsat-Apparat . . II 327
Oestensche Wasserenteisenung . . III 670
ω-Tafel (Stützenmoment) III 139*
Ovales Rohr, Festigk. I 608
Oxydationskörper (Wasserreinig.) III 668, 710
Ozoidenverzahnung I 773
Ozonisierung v. Wasser III 671

P.

π . . . . . I 43*
Packlage (Strafsenb.) III 610
—ung (Dichtung) . I 308, 866, 876; II 565
—werk (Flufsb.) . III 503

Panzerturm . . II 707*
—ung, Schiffs- II 706, 711*
Papier, Festigkt. I 497
—stoffzahnrad . . I 783
Pappdach . . III 386, 442
Pappussche Regel . I 137
Parabel . . . I 96, 102
—, Flächeninhalt . I 103
—fläche, Schwerpunkt I 168
—förmige Einflufslinie III 122, 123*
—, Konstruktion . I 103
—, kubische, semikubische . . . . I 103
—, Seil- . . . . I 181
—träger III 83, 340, 969, 1025
—, Trägheitsmoment I 200
Paraboloid . I 120, 136
—, Schwerpunkt . I 170
Paraffinöl . . . . I 476
Parallaxe . . . . III 13
Parallelbetrieb, -schaltung v. Wechsel- u. Drehstromgenerat. . II 940
— — v. Wechselstrommasch. . . . II 906
—bogen . . . . III 142
—epipedon, Inhalt, Oberfläche . . . . I 133
— —, Trägheitsmoment I 200
—koordinaten I 88, 90, 112, 115
—kräfte . . . . I 162
—ogramm d. Bewegungen . . . . I 143
— — d. Impulse, Impulsmomente . I 226
— — d. Kräfte . I 153
— — d. Winkelgeschwindigkeiten . . I 206
— —, Flächeninhalt I 130
— —gesetz . . . I 153
— —, Inhalt . . I 130
— —, Schwerpunkt I 166
— —, Trägheitsmoment I 198
— —, Wattsches . I 906
—perspektive . . I 138
—schaltung v. Gleichstrommasch. . II 933
—stromkondensation II 202, 203
—strömung . . . I 349
—träger I 175; III 83, 86, 155, 340, 952, 969, 1025
Parameter . . . . I 98
Parsonsturbine II 236, 238
Partinium . . . . I 502
Partialbruch . . . I 69
Paskalsche Kurven I 209
—s Gesetz . . . I 260
Patentanmeldung I 1016
—gesetze . . I 1009, 1010*
Paternosteraufzug II 424
—werk . . . . . II 517
Pech . . . . . I 668
Pedometer . . . III 3
Pegelbeobachtungen III 498
Pekrungetriebe . . I 788
Peltonrad II 289, 293, 299; III 588
Pendel, Kegel- . I 189
—länge, reduzierte I 234
—, mathematisches I 189
—n parallelgesch. Wechselstrommasch. . II 906
—, physisches . . I 234
—regler . . . . I 969
—säge . . . . . II 369
—stütze . . . . III 329
Pennsche Schraubensicherung . . I 747*
—-Schieber . II 153, 754
Pentan . . I 472, 473, 477
Periode . . . I 124, 221
—envergleicher . . II 940
—e, Wechselstrom- II 850, 958
—ische Funktionen I 125
Peripherie d. Kreises I 2* ff.
Perkinsheizung . . III 417
Permeabilität . . II 839
Permutation . . I 48
—itvertahren . . II 59
Perpendikel (Schiffb.) II 627
Personenaufzug . II 412
—wagen . . . . III 870
Perspektive . . . I 138
Petersche Kletterzahnstange . . . III 891
Petroleum I 371, 376, 455, 460, 461*, 476*, 477, 617; II 256
—glühlicht . . . II 815
—heizung . . . . III 410
—lampe . . . . II 814
—motor s. a. Verbrennungsmasch. II 258, 275
Pfahl, Betongrund-, Eisenmantel-, mantelloser III 209
—bock . . . . . III 215
—, Eisenbeton- III 211, 212, 261
—gründung . . . III 209
—, Holz- . . III 211, 212
—, Holz-Beton- . III 213
—rost . . . . . III 215
—, Tragfähigkeit . III 214
Pfannendach . III 304, 385
Pfeiler, s. auch Stütze, Säule.
—, Brücken- III 1027, 1048
—, Eisenbeton- III 232, 234, 237
—gründung . . . III 207
—mauer . . . . III 283
—, zulass. Beanspruchung . . . . I 506*
Pfeilrad . . . . I 785
Pferdestärke I 151; II 837
Pferdestärke, Vergleich m. Fufspfund/sk I 1001*
—, Kraft, Leistung II 2, 492; III 601*, 739*
Pfette, Pfettendach III 303, 304
— —; eisernes . . III 334
Pflanzenöl I 261, 617, 730
—ung Uferbefestig.) III 509
Pflaster a. künstl. Steinen . . . III 625
— b. Flufsbau . . III 508
—, Brücken- . . III 1014
—, Gewicht . III 61*, 62*
—, Holz- . . . . III 627
— — f. Fabriken . III 456
—, Klein- . . . . III 619
—, Kluker- . . . III 620
—stein I 690, 693; III 622
—strafse, Land- . III 619
—ungstädt. Strafsen II 989; III 622, 642
—, Widerstandszahlen III 599*, 600*
Pfosten, Holz- . . III 299
Phasenmesser . . II 852
—regler . . . . II 912
—transformator . II 925
—vergleicher . . II 940
—verschiebung . . I 223
— —, Drehstr.-Mot. II 917
— —swinkel . . I 125
—winkel . . . . I 124
Phosphorbronze I 679
—, Festigkeit . I 493, 501
Photometer . . II 809
—rische Einheiten II 807, 808*
Physisches Pendel I 234
Piefkes Wasserentleisenung . . . . III 668
Piranischaltung . II 936
Pisé wand . . . . I 686
Pissoir . . . . . III 645
Pitotsche Röhre I 319; II 315
Pius Fink-Umsteuerung II 188
Planauftragung III 39, 571, 726
—drehbank . . II 356, 360
Planetenrädergetriebe I 206; II 354
Planimeter . . . III 24
Planum, Bahn- . . III 733
Platindraht . . . I 500
Platte, Eisenbeton- III 230, 233, 240, 248
—, Festigkeit ebener I 600; II 89
—, gewölbte (Brückenlager) . . . . III 970
—, Metall-, Gewichte I 621*
—nbalken, Eisenbeton- III 246, 248
—nbrücke, Eisenbeton- III 265

Plattengründung III 199
—, Rohr- . . . . II 86
Platz (Städtebau) III 647
Pleuelstange I 886, 894; II 750, 796
Plunger s. Tauchkolben.
Pneumatisch. Elevator II 525
Pohlmanndecke . . III 380
Poinsotsches Trägheitsellipsoid . . . I 193
Poiseuillesches Gesetz (Leitungswiderstand) I 349
Pol . . . . . I 154, 208
—bahn, -kurve . . I 208
— i. Kräfteplan . I 154
— (Magnet-), Polstärke II 839
—, Satz d. drei — e I 212
—schuh . . . II 886, 890
—umschaltung . . II 954
—, Wechsel-, Wende- I 211
—, Wende- (Dynamo) II 887
—weite . . . . . I 158
Polarisation . . II 944
—es Trägheitsmoment I 193
—koordinaten . . I 20
— —, Raum- . . I 115
—normale, -subnormale, -subtangente, -tangente I 92
Poller . . . . . II 685*
Poloncaubinder, —träger I 175; III 316, 338, 339, 356
Polygon, s. auch Vieleck., —, A- . . . . . III 81
—, Inhalt, Abmessungen I 130, 131*
—zug, Anordnung v. — (Vermessungsk.) III 17
Polysius Umdrehungsregler . . . . I 800
— -Zahnkupplung . I 827
Polytrope I 406, 407*, 410
Poncelctsche Gleichung (Erddruck) . . III 171
Porphyr . . . . I 438, 682
Portalkran . . . II 478
Portlandzement I 668, 699, 701, III 226
—, Eisen- . . . . I 701
Postwagen . . . III 851
Potential . . . I 216
— —funktion . . I 217
— — Geschwindigkeits- (Flüssigkeitsströmg.) I 336
—elle Energie . I 152, 218
Potenzen I 2 bis 23*, 45
—gesetz (Festigktsl.) I 482
Prägepresse . . . II 343
Prahm . . . . . III 480
Prallhöhe (Ballon) . I 333
Präzession . . . I 237
Präzisionsgebläse II 624*, 625
—nivellement . . III 30
Pressen . . . . I 635
—, Schmiede- . . II 334
—, Stofsel- . . . II 342
—, Prä.e- . . . . II 343
—, Zieh- . . . . II 342
Pressung (Luft) . II 594
Prefsgaslicht . . II 816
—hartglas . . . I 712
—kohle . I 458, 459, 460
—luftanlage . . . II 340
—(luft-)gaslicht . . II 816
—lufthammer . . II 337
—schraube . . I 749, 751
—spindel . . . . I 751
—zylinder . . I 606, 906
Preufsische Kappe III 291, 374
Primzahlenteilung . II 367
Prinzip d Erhaltg. d. Energie (lebend. Kraft) I 152, 218, 393
— d. kleinsten Formänderungsarbeit III 120
— d. Unabhängigkeit d. Einzelbewegungen I 143
— d. virtuellen Verschiebungen . I 182
Prisma, Inhalt, Oberfläche . . . . I 133
—, Schwerpunkt . I 168
—, Trägheitsmoment I 200
—toid, Inhalt . . I 137
Prismeninstrument, -kreuz, -trommel III 6, 7, 44
—trommel, Dechers- III 44
Probefahrt, Schiffs- II 716
—estab (Festigk.) I 625; II 73
—ierbahn (-ventil) II 65, 69, 777
Profilaufnahme . III 29
—eisen . . I 637, 638* ff.
—mafsstab . . . III 729
Progression s. Reihe.
Projektion . . . I 138
Pronyscher Zaum . II 321
Propellerrinne . II 514
—, Schiffs- . . . II 728
Proportionalitätsgrenze I 482, 487*, 493*, 494*, 496*, 497*, 500*, 501*
Proviantraum, Schiffs- II 675*
—, Schiffs- . . . II 708
Prüfswand . . . III 285
Pseudostatisch. Regler I 961
PS (Pferdestärke) I 151, 1001
Psychrometer . . I 404
Pufferbatterie (elektr. Bahn) . . . II 992
— — (Fördermasch.) II 1012, 1020
— —, Schaltung II 935, 937
—dynamo . II 1009, 1012
—, Eisenbahn- . . III 811
—, Oel- . . . . II 266
Pulsometer . . . II 560
Pultdach I 178; III 309, 340
Pumpe . . . . II 558
—, Aoteuf- . . . II 557
—, Bau- . . . . III 495
—, Kolben- . . . II 578
—, Kreisel-(Schleuder-, Zentrifugal-) II 564, 764; III 536
—, Luft- II 593, 609, 762
—nplan, Schiffs- . II 767
—nventil . . . . II 595
—nzylinder I 906; II 583
—, Schiffs- . . II 690, 703*
—, schwungradlose II 586
—, Strahl- . . . II 562
—rad . . . . . II 558
—station (Kanalisation) III 703
—werk . . . . . III 794
— —, Entwässerungs- III 556
Punkt s. auch Massenpunkt.
—absteckung im Bogen III 41
—, asymptotischer I 109
—bahn . . . . . I 208
—bestimmung, trigonometrische . . III 20
—bewegung . . . I 141
—, Doppel- . . . I 94
—festlegung, —sichtbarmachung (Vermessungsk.) . . . III 2
—haufen, Dynamik I 225
— i. d. Ebene . . I 88
— im Raume . . I 112
—, isolierter . . . I 94
—kipplager . . . III 273
—, Rückkehr- . . I 94
—, unendlich ferner I 92
—, zugeordneter . I 94
Putz, Wand- I 690, 696; III 279
—, wasserdichter . III 293
Puzzolan . . . I 698
—erde . . . . . I 685
PV-Diagramm . . I 396
Pyramide, Inhalt I 134
—, Mantelschwerpunkt I 168
—, Schwerpunkt . I 169
—, Trägheitsmoment I 201
Pyrometer . . . II 326

Q.

Quadermauerwerk . III 278
Quadranteisen . I 643*
—, Umrechnung d. 90°-Teilg. i. d. 100°-Teilg. . . . . I 42*
Quadrateisen I 659*, 660
—, Methode d. kleinsten — . . . . I 86
—querschnitt, Kern I 575

Quadratquerschnittsmoment I 535, 542* bis 545*, 569, 571
— —, Trägheitsmoment I 198
—ur (Triangul.) . III 22
—wurzeln I 2 bis 23*, 43*
— — wichtiger Brüche I 43*
Quarz . . . . I 652, 683
—glas . . . . . I 710
—it . . . . . I 683
—lampe . . . . II 827
Quecksilberdampflampe . . . II 827
—höhen I 331, 332, 392; II 810; III 33
—säule, Vergleich m. Atmosphäre . I 1001*
—, Zähigkeit . . . I 261
—, Zusammendrückbarkeit . . . . . I 260
Quellfassung . . . III 656
Querausbauchung I 484
—aussteifung (Brückenb.) III 979
—bauten b. Flufsbau III 504, 505
—dehnung . . . I 484
—feldmaschine . . II 868
—keil . . . . . I 736
—kraft (Festigkt.) I 519, 521
—kräfte (Fachwerk) I 180
—kraft, Balken a. 3 u. 4 Stützen . . III 135*
— —, Eisenbahnbrückenträger III 68 bis 71*, 78*
— —fläche . . . I 176
—kräfte i. einfachen Balken I 176; III 79
—neigung, Eisenbahn- III 729
— — städt. Strafsen III 642
— profilaufnahme . III 29
— —, Strafsen- III 607, 620, 624, 627, 628, 642
—schnittbestimmung (Biegung) . . I 531
— — d. Kanalhaltungen III 529
— —e d. Hauptträgerstäbe . . III 954, 957
— —, gefährlicher I 525, 547* ff.
— —smomente I 534, 535* bis 545*, 568*
— —sverhältnis b. stat. unbest. Konstr. III 148
—schwelle, flufseiserne III 749
— —, Holz- . . . III 746
— —noberbau a. Brücken III 992
— —, Weichen- . III 759
—siederkessel . . II 20
—steifigkeit . . . I 175
—stützung, elastische I 519
Querträger, Brücken-, Auflagerdruck, Widerstandsmomente (Eisenbahnbr.) III 996*, 997*, 1001*
— — (Brückenfahrb.) III 1020*, 1021*
—zusammenziehung I 481, 483
Quetschgrenze I 484, 487 bis 497*
Q-Fläche, -Linie I 521; III 94, 97
Quirl . . . . . I 337
Q-Linie . . . . III 94

R.

Rabitz-Wand I 697; III 285
Raddruck, Eisenbahn- III 725, 806
— —, Fuhrwerks- III 598*
—, Eisenbahn- . . III 806
—, Fuhrwerks- . III 597*
—gebläse II 593, 602*, 603*, 604*
—, Grubenbahn- . III 906
—körper . . III 808, 843
—lenker . . . . III 759
—, Lokomotiv- III 843, 808
Radovanović-Steuerung II 169
—reifen, Eisenb.- III 807, 808
— —, Fuhrwerks- III 598
— —reibung . . . I 213*
—satz . . . . . III 806
— —drehbank . . II 361
—stand, Automobil- II 790
— —, Eisenbahn III 847, 863, 864*
—steuerung, Aufzug- II 419
—sturz . . . . . III 597
—, Vergnügungsbahn- III 912
Räderformmaschine II 329
—fräsmaschine . . II 370
—vorgelege I 793, 800; II 354
—winde . . . . III 491
Radialdampfturbine II 240
—system (Kanalisat.) III 685
Radiator, Wärmeabgabe III 407
Radingersches Verfahren (Massendruck im Kurbeltrieb) . I 954
Radius, hydraulischer I 287
Rahe . . . . II 681, 699*
Rahmen, Dampfmasch.- II 198
—, Spannungsermittlg. I 175
—, Lokomotiv- . . III 846
—schieber . . . II 154
—, Verbrennungsmasch. II 266
— (Windverband für Brücken) . . III 985
Ramieriemen . . . I 502
Rammarbeiten . . III 211
—e . . III 213, 485, 487
—e, Hand- . . . III 625
—pfahlgründung . III 211
— —, Tragfähigkeit III 214
Rampe, Eisenbahnlade- . . . . III 776
—, Wege- (Inh.) . I 137
Randspannung . I 577
— bei exzentr. Beanspruchung . . I 583*
— b. krummen Stäben I 590
Rankinesche Erddrucktheorie . III 174
— Knickformel . I 518
— Schiffswiderstandsformel . . . II 720
Rateauturbine . . II 234
Rauch . . . . . I 467
—abführung (Schmiede) III 465
—fang . . II 777; III 800
—gas . . I 464, II 98
— —analyse . . . II 327
— —, spez. Gewicht I 618
—kammer, Lokomotiv- III 835
—rohr . . . . . III 285
—verbrennung, —verhütung . . . II 34
Rauhigkeit . . . I 351
— —szahl (—grad) I 294, 310*, 311*, 327*; III 500, 687
—wehr . . . . . III 508
Raumausdehnung I 369*, 371*
—diagramm (Dampfmasch.) . . . II 115
—gehalt, Schiffs- II 671, 672
—gewichte I 618*; II 491, 678
—koordinaten . . I 112
—mafse verschiedener Länder . . I 995* ff.
—messung . . . II 315
—meter . . . . I 725
—verband (Brückenb.) III 979
—winkel . . . . I 113
Räumliches Fachwerk . . . . III 157
— — Fachwerk (eisernes) . . III 348
—nadel-, Räummaschine II 356
Raumtemperatur III 405*, 462
—verhältnis d. Dampfzylinder . II 115, 739
Raymondpfahl . . III 209
Reaktanz . II 851, 901
—spannung . II 883, 884
Reaktionsdampfturbine . . II 216, 238

Reaktionsgrad (Dampfturbine) . . . II 225
—sverhältnis (Parallelbetr. v. Wechselstrommasch.) . II 908
—, Wasserstrahl- . I 321
Réaumurthermometer I 369, 370*
Rebhannscher Satz III 179
Receiver . . . . II 196
Rechen, Flügel-, Scheiben- . . II 520
— für Abwässerreinigung . . III 704, 707
Rechteckfeder I 593, 594
—, Flächeninhalt . I 130
—querschnitt, Einflufsfläche . . . . I 577
— —, exzentr. beansprucht . . . I 582
— — für Biegung u. Drehung . . . I 588
— —, Kern . . . I 575
— —smomente I 535, 542 bis 545*, 569, 571
— —, Randspannung I 590
—, Trägheitsmoment I 198
Reduktion d. Massen I 231
—zierte Masse beim Kurbeltrieb . I 953
— — Pendellänge I 231
— —r Dampfverbrauch I 425
— —r Füllungsgrad II 121
— — Spannung (Dampfmasch.) II 113
Reelingprofileisen . I 651*
Reflektor . . . . II 828
—xionsvermögen . II 813
Refraktionskoeffizient III 82
Regelfläche . . . I 208
—untormer . . . II 955
—ung, Bleiakkumulatoren- . . . . II 934
— —, Dampfturb.- II 233
— — d. Stromerzeuger II 928
— —, Fahrzeugmotor- II 800
— —, Flufs- III 504, 511
— — d. Fördermasch. II 450
— —, Gebläse- . . II 620
— —, Gleichstrommasch.- . . . II 933
— —, Gleichstrommotoren- . . II 951
— —, Kolbenpumpen- II 586, 592
— —, mittelbare I 965, 974, 976
— —, Schleuderpumpen- II 574
— —, Spannungs- der Dreh- u. Wechselstromgenerat. . II 941
— —, unmittelbare I 964
Regelung, Wasserturbinen- II 301; III 589
— —, Wechselstrommotoren- . . II 953
— —, Windrad- . II 4
Regenmenge, s. auch Niederschlagsm., Wasserabflufsm. III 655*, 686
— —nermittlung . III 571
—sinkkasten . . . III 704
—überfall . . . . III 696
Regler . . . . I 945
—abweichung . I 976, 980
—, Achsen- I 965; II 103
—, Arbeitsvermögen I 964
—, Aufzug- . . . II 415
—, Beharrungs- . I 965
—, Flach- . . . . I 966
—, Fliehkraft- . I 966, 969
—, hydraulische . I 974
—, Induktions- . . II 925
—, kaufmännische . . I 971
—, Kegel- . . . . I 966
—, Kraftmaschinen- I 961
—, Leistungs- . I 965; II 574, 586
—, Lokomotiv- . . III 839
—, Polysius-Umdrehungs- . . . . I 800
Regnaultsche Dampfversuche . . . I 415 ff.*
Regulierventil . I 428
—zeit . . . . . II 304
—zylinder, Wasserturbinen- . . . II 302
Reibkupplung f. Hebemaschinen . . II 386
—rad . . . . . I 792
Reibung . . . I 188, 242
—, Bremsen- I 243, 244, 257, 864; III 813, 821
—, Dampfturb.- . II 221
—, Exzenter- . . I 893
—, Getriebe- . . I 253
—, gleitende . . . I 242
—, innere Flüssigkeits- I 260, 348
—, Keil- . I 254, 792, 860
—, Kugellager- . . I 251
—, Kurbeltrieb- . I 887
—, Lager- . . I 246, 837
—, Radreifen- . I 243, 245
—, Riemen- . . . I 256
—, Rohr- I 286, 291, 447; III 413
—, rollende I 245, 251, 252*
—, Rollenlager- . . I 252
—, Schieber- . . I 244
—, Schleifstein- . I 244
—, Schlitten- . . I 245
—, Schrauben- . I 254, 750
—, —rad- . . . I 256, 787
—, Seil- . . . . I 256
—, Stopfbüchsen- I 244, 876
—, stulp- . . . I 244, 866
—, Zahn- . . . I 255, 787
Reibung, Zapfen- I 246, 837
—, zusätzliche (Dampfmaschine) . . II 142*
—sarbeit . . I 188, 253
—sbahnen, Bestimmg. u. Bau u. Betrieb III 714
—sgefälle . . . . I 310
— — (Getreide) . II 524*
—sgesperre . . . I 863
—shöhe (Hydr.) I 281, 286
—skoeffizient s. Reibungszahl
—skupplung I 880; II 386
—ssteifigkeit . . . I 258
—strommel . . . II 408
—svorgelege . . . I 793
—swiderstand a. benetzten Oberflächen I 328; II 717
— —, Erdboden . III 914
— — d. Luft . . I 358
— — eingetauchter Körper . . . I 351
— —, Eisenbahn- I 243; III 716, 790, 903
— —, Flüssigkeits- I 286, 351
— — i. Lüftungskanälen III 897
— —, Motorwagen II 792
— —, Schiffs- I 323; II 718, 719*
— —, Strafsenfuhrwerk I 245; III 599
— — (Strömungsw.) I 351
—swinkel (-Kegel) . I 242
— —, Erdarten III 168*
—swinde . . . . III 490
—szahl (—skoeffizient) I 188, 257*, 258*
— —, Bauwerkteile auf Erdreich . III 187*
— — d. Ruhe u. Bewg. I 242
— —, Grubenbahn II 493
— —, Schieber . . II 754
— —, Schiene—Rad III 814
— —, spezifische (Zapfen-) I 247, 248* ff.
— —, Tafeln . I 243* ff.
Reihen . . . . I 55
—, binomische . . I 46
—, Fouriersche . . I 124
—, Maclaurinsche . I 67
—, Taylorsche . . I 67
—schlufsmotor II 955, 956, 957
—wicklung . . . II 879
Reinigung d. Eisenbahnwagen . . III 804
— des Kesselspeisewassers . . . II 57
— d. Luft . . . III 400
—, Landstrafsen- . III 616
— öffentl. Wege . III 636
—, Strafsen- . . . III 631
— von Kanälen . III 705
Relativbewegung I 146, 223, 224

Relativexzenter . II 157
—e Feuchtigkeit I 402, 403*
—es Gewicht . . I 150
—kraft . . . . . I 224
Reliefkarte . . . III 1
Remanenz, magnet. II 840
Renoldsche Zahnkette I 815
Rentenrechnung . I 54
Repulsionsmotor . II 956
Reservoir s. Behälter.
Resonanz . . . I 223
—, elektr. . . . . II 853
Resultante . . . I 153
Renleaux-Müllersches Schieberdiagramm II 147
Revolverbank . . II 360
Reziproke Zahlenwerte I 2 bis 23*
Rhombus, Inhalt I 130
—, Trägheitsmoment I 198
Richmannsche Regel (Mischg.-Temp.) I 376
Richtmaschine . . II 341
—ungsregeln (elektr. Ströme) . . . II 848
— — städt. Strafsen III 641
— —swiderstand (Impedanz) . . II 851
Rider-Steuerung . II 161
Riemen, Arbeitsverlust, Reibung I 256
—berechnung, zulässige Belastg. . I 795, 796*
—, Festigkt. . . . I 501
—, gekreuzter, geschränkter . . I 799
—geschwindigkeit . I 797
—scheibe I 802, 804*; II 891
—schutzvorrichtg. III 470
—, Treib- . . . . I 733
—trieb I 794, 795; II 353; III 459
—verbindung . . I 798
Riensche Scheibe . III 707
Riese, Draht-, Seil- III 543
Rieselanrichtung (Speicher) . . II 520
—feld . . . III 562, 712
—kondensator . . II 205
—verfahren . . . III 711
Riffelblech . . . I 662
Rillenschiene . . II 984*
Ringanker . . . II 880
— —wicklung . . II 871
—geschützt . . . I 606
—, Inhalt, Oberfläche I 136
— -Rutschkupplung III 899
—schmierlager . . I 836
—, Trägheitsmoment I 203
—ventil . . . . I 936
—zapfen . . . . I 838
Rinnstein . . . . III 642
Rittersches Verfahren (Spannungsermittlg.) I 178; III 84
Rittinger-Pumpe . II 588
Robertscher Dreiecklenker . . . I 904
Roheisen . . . . I 631
— —sorten . . . I 632*
—glas . . . . . I 711
—hautrad . . . . I 782
—öl . . . . . II 256
Rohr . . . . . I 914
—abdichtung I 915; II 205; III 581, 705, 839
—, Abfall- . . . II 524
—, Abfluſs- aus Blei od. Steinzeug I 930; III 698
—, Abfluſs- a. Gufseisen I 916
—anschluſs v. Gasmaschinen . . II 278*
—, Beton-, Eisenbeton- I 707; III 264
—, betongefüllt (Festigkt.) . . I 517
—, Blei- I 677, 929, 930
—, Bronze- . . . I 921
—bruchventil I 943; II 63
—brunnen . . . III 662
—, Brunnen-, Bohr- I 918
—dach . . . . . III 386
—, Drainage- . . III 560
—erweiterung, Widerstandsz. . . I 299, 302
—, Festigkt. . . . I 604, 605*
—, Flansch- . . . I 918
—, Förder- . . . II 507
—formstücke, normale I 910*, 912*, 913*
—, Gas- . . . I 748, 917
—, genietetes . . I 916
—, geripptes . . . II 84
—, geschweifstes . I 917
—graben . . . . III 657
—, gufseisernes . . I 914
— — Normal-, Muffen u. Flansch- I 908*, 909*
—, Heiz-, Siede- I 916; II 28, 77, 80; III 413, 834
—, Hochdruck- I 917, 918
— —dampf- . I 924, 926*
—, Kanalisations . III 698
—, Kupfer- I 676, 919*, 920*, 921*, 923*
—, Mannesmann- I 918, 919
—, Messing- . . . I 922
—, Monier- . . . I 709
—, Muffen- . . . I 919*
—, nahtloses Stahl- I 918
—, ovales (Festigkt.) I 608
—, Perkins- . . . III 417
—pfeilergründung III 202, 207
—platte . . . . II 86
—, Querschnittsmoment I 537, 540*, 541*, 568, 585
—reibung I 286, 291, 447; III 413
—, Schlitz-, Sicker- III 657
Rohr, schmiedeisernes I 916
—, Seil- . . . . I 931*
—sicherung . III 582, 682
—, Stahl- . . . . I 918
—, Stampfbeton- . I 707*
—, Steinzeug- I 930; III 698*
—stutzen, Ausflufszahl I 298
—, Ton- I 694; III 698*
—umhüllung I 451*, 452*
—verbindung I 908, 909, 915, 917, 919, 924, 925
— — mit Rohrwand II 28
—verengung, Widerstandsz. . . I 304, 305
—versteifung . . II 83
—, Wärmedurchgang I 389
—, Wasserleitungs- III 681
—, Well- . . . . II 84
—weite, günstigste I 914; III 580
—, Zementbeton- III 699*
—, Zink- . . . . I 929*
Röhrenkessel II 10, 11 ff., 771; III 834, 858
Rohrleitung, Bewegung d. Gase u. Dämpfe I 447
—, Dampfdruckabfall I 450
—, Dampf- u. Wärmeersparnis d. Umhüllg. I 452
—, Druck- (Entwassrg.) III 705
—, Drucksteigerung I 306; III 582, 682
—, Durchflufs I 277, 280
—, Erwärmung des Wassers in — . III 683
—, Fliefsen in nicht gefüllter — . . I 310
—, Heizungs- III 412, 413*, 417, 418, 419, 430
—, Kondensationswassermenge . I 451*
—, Kraftwasser- . III 581
—, Leitungswiderstand I 349, 350
—, Luft- . . . . I 450
— mit wechselnden Höhenlagen, Querschnitten, Widerständen. I 280
—, nachgiebige . . I 284
—, neu u. i. Betriebe I 296
—, Schiffs- . . . II 766
—, Strömung i. — I 349
—, Wärmeübergang I 382, 383*, 384*
—, Wasser- III 679, 681, 793
— —, Geschwindigkeit und Wassermenge I 288 bis 290*
—swiderstand b. gleichem Querschnitt und gleicher Form . I 286
—, Widerstandszahlen b. Aenderg. v. Richtung u. Querschnitt I 298 ff.

Rohrwiderstandszahl (Hydr.) . . . I 291 ff.
— —en f. Gase u. Dämpfe I 449*
—, Wirkungsgrad . I 301
Rollbewegung . . I 246
—e, Führungs- (Gasbeh.) III 162
—e, gedrückte . III 976
—ende Reibung I 245, 251, 252*
—e, Ketten- . . . I 844
—enförderer . . . II 512
—enlager, Reibung I 252
—e, Seil- . . . . I 855
—e, Trag- . . . III 911
—kurve . . . . I 209
—widerstand . . II 792
Romanzement . . I 698
Rootgebläse . II 623, 625
Roses Metall . . . I 682
Rostfläche, Dampfk. II 33, 34
— —, Lokomotiv- III 825, 826*
— —, Schiffskessel- II 768
— —, Zahnradlokomotive . . . . III 898
—, Kessel- II 34, 36 ff.; III 833
—, Ketten- . . . II 38
—schutz d. Eisens I 667, 915
—stab II 36, 777; III 833
Rotation, s. auch Drehung.
—sellipsoid (Erde) . III 1
Rotbrüchigkeit . I 629
—guſs I 678, 679; III 839
— —, Festigkeit . I 493
—or (Vektorrechng.) I 123, 219
Rübelbronze, Festigkt. I 494*, 495*
—sches Leichtmetall I 496
Ruberoid . . . . I 718
Rückdruck d. Wasserstrahlen . . . I 321
—enbau (Rieselfeld) III 563, 712
— —schlächtiges Wasserrad . . . . II 284
—führungskurve (Regler) I 979
—kehrpunkt . . . I 94
—kühlung . II 214, 215
—leitung f. elektr. Bahnen II 986, 994
—stau . . . . . I 267
—wartseinschneiden (Triangul.) . . III 21
— —turbine . . . II 757
Ruderzubehör II 682, 700*
Rundeisen, Gewicht I 659*, 660
—schleifmaschine II 349, 375, 376
Ruſs . . . I 467; II 34
Rüstung f. Gewölbe III 298
Rüstung für gewölbte Brücken . . III 1050
—, verbundene . . III 313
Rute . . . . . I 986*
Rutsche III 501, 521, 523
—kupplung . . . III 899
—winkel (Getreide) II 524*

S.

Saalbau . . III 317, 365
—beleuchtung . . II 833
Sackmaſs (Straſsenbau) III 609*
—rohr . . . . . II 525
Sägedach III 309, 341, 447
—, Ketten- . . . II 382
—maschine, Holz- . II 377
—, Metallkreis- . . II 365
Sammelbecken s. auch Talsperre III 575, 583
—gang, —rohr III 656, 657
Sammler s. auch Akkumulator . . . II 858
— (Drainage) . . III 558
—triebwagen . . III 860*
Sand . . . . . I 685
—fang . . . . . III 704
—, Filter- . . . III 666*
—formmaschine . II 328
—, Normen- . . . I 700
—stein . . . . . I 684
— —, Festigkt. I 498*, 499
— —, Kalk- . . . I 686
— —, zuläss. Beanspruchg. I 506; III 59
—streuer . . . . III 850
—topf . . . . III 1051
—trockenofen . . III 802
Santorinerde . . I 685, 698
Satteldach . . III 305, 338
Sättigung (Anker-, Zahn-) . . . II 877
—, magnetische. . II 839
—sdruck . . . I 402, 412
Satzräder . . . I 768, 771
Sauerstoff, Dichte und Volumen verflüssigten — . . . . I 372
—, Spez. Wärme I 398*, 400*
— - Stickstoff - Destillation . . . . I 439
—, wichtige Wärmewerte I 372, 376 ff., 398, 413
Saugbagger . II 528; III 478, 479
—er (Drainage). . III 559
—gasanlage . . . II 281
— —maschine II 259, 267
—heber . . . . . II 559
—hub, Viertaktmotor II 242
—kopf . . . . . III 398
—leitung . I 280, 282, 284
— — (Grundwasserabsenkung) . . III 126
—luftbremse . . . III 819
Saugluftförderer . II 525
—schlitz (Luftpumpe) II 210, 212
—wasserförderer . II 538
—windkessel. . . II 579
—wirkung d. Kolbenpumpe . . . II 578
Säule, s. auch Stütze, Pfeiler, Eisenbeton- III 232, 234, 237
—, eisenumschnürte Beton- . . . . III 234
—, gufseiserne . . I 515
—, Querschnittsmoment I 540*, 541*
—, zuläss. Beanspruchg. I 505, 506*
Saxonia-Vorgelege . I 800
Schabotte . . . . II 334
Schachtbagger . III 480
—brunnen III 661, 662
—pferdekraftstunde II 429
—rute . . . . I 989*
Schädlicher Raum II 145
Schalenkupplung . I 892
Schalldämpfung . I 688
—geschwindigkeit I 335, 443
Schaltanlagenausführung . . . . II 943
—er . . II 948, 997, 1001
—kasten . . . . II 946
—zellenzahl . . . II 934
Schaltung d. Anker- u. Schenkelwicklg. II 862
— d. Bahnmotor. II 996, 1001
— d. Bogenlampen II 823
— d. Stromerzeuger II 228
—, Drehstrom- . . II 237
— einer Akkumulatorenbatterie . . . II 929
— f. Gleichstrom . II 928
—, Genauigkeits- II 1008
—, Kaskaden- . . II 954
—, Leonard- . . . II 952
—, Parallel- d. Wechsel- u. Drehstromgenerat. II 940
—, Transformator- II 920
Schamottestein . . I 624
Schaufelbefestigung (Dampfturb.) . II 240
—, Dampfturbinen- II 221
—druck . . . . I 318
—rad . . . . . II 735
—, Schleuderrad- II 571, 576
—, Ventilator- II 598, 606
—, Wasserrad- II 284, 286
Schaukeltransporteur II 497
Scheibenbremse . I 862
—kolben . . . . I 866
—kupplung . . . I 892
—raddampfturbine II 230*
—zapfen . . . . I 838
Scheinwerferdynamo II 869
Scheitelgelenkdruck I 180
—gleichung . . . I 97
—kurve . . . . II 178

Schenkelwicklung, Schaltung . . . . II 862
Schere . . II 343, 344
—e, Kreis- . . . II 345
—festigkeit I 486, 519; II 344
Schiebebühne III 786, 790*
— — für Zahnradbahnen III 893
—r, Absperr- . I 911, 944
—rantrieb . . . . II 150
—rdiagramm II 146, 147, 153, 156, 164
— —(Doppelsch.) II 157, 158
—r, einfacher, Abänderungen . . . II 152
—r, entlasteter . . II 154
—rellipse . . . . II 150
—rexpansionssteuerg. II 155
—r, geteilter . . . II 152
—rkasten . . . . II 148
—rkreis . . . . II 147
—r, Lokomotiv- . III 843
—r, offener . . . II 154
—röffnungsdiagramm II 175
—r, Reibung I 244; II 754
—r, Schiffsdampfmasch. II 754
—rsteuerung II 144, 145, 620, 754; III 843
— —, Dampfkolben als Schieber . . . II 175
— —, Dreh- . . . II 172
—r, Wasserleitungs- III 682
—r, Widerstandsz. I 306
—tor, Schleusen- . III 543
Schiebung (Mechanik) I 141, 147, 190
—, Elementar- . . I 203
— (Festigktsl.) . . I 485
—svektor . . . . I 203
Schiefe Ebene . I 144
—, Reibung . . . I 253
— (Schiffshebewerk) III 548
Schieferdach III 57, 304, 385
—, Dach- . . . . I 691
— Schnitt . . . I 119
Schiene, Eisenb.- III 743
— —, Preufs. Normalschiene . . . III 745*
— —, Unterlagen . III 745
—, Grubenseilbahn- III 906
—, Hängebahn- . II 552
—, Laufkran- . . II 456*
—nbefestigung III 746, 751
—nlage, -überhöhung III 740, 741
—nlochung . . . III 754
—nneigung III 741, 746, 751, 760, 772
—nstofs . . . . III 753
— —, Strafsenbahn II 985
—nüberhöhung, Grubenbahn . . . . III 906
— —, Zahnradbahn III 893
Schiene. Seilbahn- III 910
—, Strafsenbahn- . II 984*
—, Zahnradbahn- . III 892
—, Verhinderung des Wanderns III 748, 749, 892, 910
Schiffbarer Flufs . III 511
—bau . . . . . II 627
— —, Ausgeführte Schiffe . II 638*, 639*
— —stahlprofile I 646* ff.
— —technische Begriffe und Bezeichnungen II 627
— —, Verhältniswerte d. Hauptabmessungen II 637, 638*, 639*
—, Biegungs- u. Trägheitsmoment II 711, 713, 714*
—, Durchbiegung . II 715
—fahrtabgaben . . III 524*
— —kanal I 313; III 522
— —kosten . III 523, 524*
—, Flufs-, Abmessungen III 534*
—, Gewichtsverhältnisse ausgeführter — II 709*, 710*, 711*
—, Querschnittsspannungen . . . II 713
—, Raumverhältnisse ausgeführter — II 673*
—sanstrich . I 669; II 698
—sausrüstung, -einrichtung . . . . II 680
—sdampfmaschine. II 737
— —, Schwerpunkt II 780
—sdampfturbine . II 756
—selemente . . . II 679
—sentwurf . . . II 640
—sfestigkeit . . . II 711
—sform . . . . II 636
—sgewichte, -schwerpunkte . . . II 692
—shebewerk . . . III 548
—shülfsmaschinen . II 789
—skessel . . . II 11, 768
— —, ausgeführte Zylinder- . . . II 774*
— —, ausgeführte Wasserrohr- . . . II 775*
— —, Dauerleistung II 768*
— —, Gewichte von -anlagen . II 779*, 780
— —, Konstruktion II 771
— —, Schwerpunkt II 780
—skohlenvorrat . II 706
—skoje . . . . . II 702
—skörper . . II 679, 680
— —, Gewicht, Schwerpunkt II 693, 694*, 695*
— —, Hauptabmessungen II 627
—skreisel . . . . I 239
—slänge, -breite, -höhe II 627
Schiffsmannschaft II 708
—smaschine, Gewichte II 778*, 780, 781
— —nbau . . . II 729
— —nkraft II 715, 716, 717
—sprobefahrt . . II 716
—sschleuse . . . III 536
—sschraube . . . II 728
—sraum, innerer . II 673
—strommel (Hebewerk) III 548
—sverbrauchsstoffe II 706
—, Verbrennungsmasch. II 780
—sverlängerung . II 662
—svermessung . . II 671
—swiderstand I 323; II 716 ff.; III 522
—swohnräume II 674, 687, 701
Schindeldach . . III 387
Schirmmessung . . II 314
Schlackenbeton I 706; III 278
—stein . . . . . I 690
— —, Festigkt. . I 498
— —pflaster . . . III 625
—zement . . . . I 702
Schlafkoje . . . . II 687
Schlauch, Metall- . I 931
Schleifenkurve I 111, 112
—maschine, Holz- II 381
— —, Metall- . . II 375
— —, Metall-, Schnittwiderstand, Energieverbrauch II 349, 350*
—ring . . . . . II 905
—stein, Reibung . I 244
Schleppdach . . III 341
—er, Schleppkette II 514, 516
—kraftgesetz . . . III 499
—lohn . . . . . III 525
—riemen . . . . II 508
—schiffahrt . . . III 522
—träger . . . . III 150
—versuch, Schiffsmodell . . . II 727
Schleudergebläse II 593, 595, 602*, 603*
—luftpumpe . . . II 206
—pumpe II 556, 564, 569, 576*, 592
Schleuse s. auch Schiffsschleuse.
—, Einlafs- . . . III 577
—, Kanal- . . . III 533
—, Kraftbedarf . . III 593
—, Luft- . . . . III 219
—nabmessungen III 534*, 538
—nanlage . . . III 518
—nberechnung . . III 538
—nboden . . . . III 540
—ntor . . . III 533, 542
—ntorzapfen . . . III 544
—nwand . . . . III 541

Digitized by Google

Schleusung, Wasserverbrauch . . . III 526
Schlickscher Massenausgleich . . II 744
– Schiffskreisel . I 240
Schliefskopf, Gewicht I 754
Schlingern . . . II 656
Schlittenführung (Werkzgmasch.) II 355
–kolben . . . . I 672
–, Reibung . . . I 245
Schlitzmaschine . II 381
–rohr . . . . . III 697
Schlupfung (Drehstr.-Mot.) . . . . II 213
Schlupfwiderstand II 1010
Schlusselweite I 742* bis 747*
Schmalspurbahn II 492; III 722
Schmelzkegel, Seger- II 826*
–punkt . . . . I 278*
–sicherung . . . II 950
–verfahren, elektr. II 844
–wärme . . . . I 380*
Schmidtsche Heifsdampfmaschine II 119
Schmiedbarer Gufs I 636
–e . . . . III 464, 883
–eisen . . . I 629, 643
–eiserne Rohr . I 916
–chammer . . . II 931
–emaschine . . . II 929
–en . . . . . I 685
–epresse . . . . II 934
–estahl, zulässs. Beanspruchg. I 505; III 59
Schmiegungsebene I 116
Schmiermittel I 243, 729
– –, Prufg., Liefergs.-bedingungen I 732, 733
–öl . . . . . I 460, 730
– –, Reibungszahlen I 245*, 261, 288
–ung, Dampfmasch. II 201
– –, Fahrzeugmot.- II 798
– –, Lager- . . I 836
– –, Motor- . . II 783
– –, Zylinder- . II 195
Schmirgelscheibe, Geschwindigkeit . II 375
Schmutzwassermenge . . . III 685
–pumpe . . . . III 495
Schnecke, Förder- II 505
–nkettenzug . . . II 385*
–nlastdruckbremse II 383, 400
–nradfräsmaschine II 373
– u. Schneckenrad I 776, 786
–, Wasser- . . . II 557
Schneebeseitigung III 633
–last . . . . . III 56
–schutz, Eisenbahn- III 762
Schneide, Stahl- . II 345
–verfahren, autogenes I 673
–winkel . . II 346*, 347*
Schnellbahn, Stadt- II 1001
–filter . . . . III 668
–regler (Spannungs-) II 942
–stahl . . . . . II 346
–strombeheizung . . III 416
Schnittbrenner . II 816
–druck, spezifischer II 347*
–geschwindigkeit f. Holzbearbtg. . I 378
– – f. Metallbearbtg. II 350, 351*, 352*, 366
–holz . . . . . I 727*
–verfahren, Ritterscheres . I 178; III 84
–widerstand. . . II 348
–winkel . . II 346*, 347*
Schöpfwerk II 517, 557; III 555
Schornstein III 277, 283
–, Blech- . . . . II 53
–, Dampfkessel- . II 43
–, Lokomotiv- . . III 835
–, Querschnittinhalt, Kernweite . . II 50*
–, Schiffs- . . . II 777
–, Statische Berechnung . . . . II 48
–verlust I 465, 466*; II 35, 98
Schott . . . . II 701
–enteilung . . . II 668
–erstein . . III 612, 613*
–erstrafse . . . III 610
–kurve . . . . II 668
–vorschriften . . II 668
Schrägaufzug II 499, 555; III 495
–rost . . . . . II 39
–zahnlastdruckbremse II 383, 400
Schranke, Eisenbahn- III 767, 768
Schraube . . I 663, 740
–, flachgängige . I 750
–, Form, Ausführung II 733
– für Dampfkessel II 88*
–, Gewicht . . . II 697
–, Laschen- . . . III 753
–, Luft- . . . . I 346
–nberechnung . I 742, 749
–nbolzen, Gewicht I 743*
–ndruck (Luft) . I 348
–nfeder . . . I 596, 597
–nflaschenzug . . II 385
–n für Rohre . . I 927*
–nkopf, Gewicht . I 743*
–nlinie . . . I 117, 740
–n mit Pennscher Sicherung . . I 747*
–nmutter, Gewicht I 743*
–nrad I 256, 775, 776, 786
Schraubenradfräsmaschine . . II 372
– –gebläse . . . II 604*
– –, Reibung . . I 256
–nschub (Schiffs-) II 729
–nsicherung II 747, 751
–nstrahl . . . . I 346
–ntafel f. Güterwagen d. Staatsbahnwagenverbandes . . I 744*
–nverbindung (Hochbau) III 330
– – i. Brückenbau III 921
–nwelle . . . . II 754
– – (Verbrennungsmotor) . . . II 789
– ohne Ende I 256, 776, 786
–, Reibung . . . I 254
–, Schiffs- . . . II 729
–, Schwellen- . . III 746
–, Zylinderdeckel- II 193
Schraubung (Elementar-) I 204
Schrittzähler . . III 8
Schrott, Gewicht . II 485
Schrumpfmafs . I 888
–ring . . . . . I 606
Schubfestigkeit I 485, 519
– –, Eisenbeton- III 239
–kraft, s. auch Querkraft . . . . I 519
–kurbelgetriebe . I 882
–spannung I 481, 485, 520, 571*, 583
– –, einfach gekrümmter Stab I 589
– – i. Eisenbeton- III 249
– – i. Schiffsquerschnitt . . . II 715
– – u. Normalspannung I 553
– – v. Trägern . I 526
– –, zulässige I 503*, 504*, 506; III 57, 73, 74
–stange I 894; II 750, 796; III 843
– –nkraft . . . I 886
– –nkopf . . . I 896
– –nlänge, Berücksichtigung der – . II 160
– u. Biegung . . I 584
– u. Drehung . . I 583
– u. Zug (Druck) . I 584
–zahl (Festigkeit) . I 485
Schulz-Kessel II 773, 775
Schurre . . . . II 523
Schute . . . . III 480
–nentleerer . . . III 481
–nsauger . . . . III 481
Schüttbeton . I 506, 704
–eirinne . . . . II 513
–rinne . . . . II 523
–winkel . . . . II 555
Schutzanlage, Eisenbahn- . . . . III 762
– gewerbl. Eigentums, Gesetze . . . I 1009

Schutzstreifen (Eisenbahn) . . . . III 734
— — (Strafsenbahn) III 635
—vorrichtungen in Fabriken . . III 468
Schützenwehr III 516, 517
—, Schleusen-tor- . III 547
Schwarzblech . I 660
— er Körper, absolut — I 390
— - Rankinesche Knickformel . . . I 518
Schwebebahn II 539; III 914
— —, Bauart Torres y Quevedo. . . II 557
— — mit hängenden Wagen . . . II 497
— körper (Flufsb.) . III 509
— nde Bauten (Flufsbau) III 506
Schwebung . . . I 223
Schwedlerkuppel III 160, 348
Schwefelsäure, Leitwiderstand . . II 843*
Schweflige Säure, Dichte u. Volumen verflüssigter . I 373
— —, Wärmewerte I 373, 376 ff., 398, 429, 435*
Schweifseisen I 634; II 75
— —, Festigkeitszahl I 486, 487; III 104
— —, Gewicht I 621*, 659; III 56
— —, zulässs. Beanspruchung I 503*, 505*, 511; III 59, 73*, 74*
— —, zulässs. Knickspannung . I 515, 518
—ung . . . . . II 82
— —, Kessel- . . II 25
—verfahren . . . I 669
— —, elektrisches I 669; II 844
Schwelle, Eisenbeton- III 277
—, eiserne Quer- . III 749
—, Grubenseilbahn- III 906
—, hölzerne Eisenbahnquer- . I 727; III 746
—, Lang- . . . . III 756
—nschraube . . . III 746
—nträger (Eisenbahnbr.) Angriffsmomente, Widerstandsmomente, Querschnitte, zulässs. Stützweite III 995*, 996*
—, Seilbahn- . . III 911
—, Zahnradbahn- . III 892
Schwemmstein I 687*; III 279
—vorrichtung (Bagger) III 480
Schwenkkran III 491, 493
—werk, Kran- . . II 471
Schwere, Beschleunigung d. — . I 143, 148
—e, Gesetz d. — . I 220
—kraft . . . . . I 220
— —bahn. . . . II 495
—punkt . I 162, 163, 165
— —lagen wichtiger Linien, Flächen, Körper I 165* ff.
— —sätze. . . . I 228
— —, Schiffs- II 628, 631, 692
— — v. Schiffsdampfmaschinen . . II 780
— — v. Schiffskesseln II 780
— — v. Walzprofilen I 638* ff.
Schwimmachse . I 264
—kastengründung . III 221
—kran . . . . . II 480
—regel, Amperesche II 849
—tor . . . . . III 543
Schwinden u. Quellen d. Holzes . . I 720
—mafs . . . . . I 691
— —, Bronze . . I 494
— —, Holz . . . I 721*
— —, Metalle . . I 371*
Schwingdaumen II 166
—förderrinne . . II 513
Schwingung, erzwungene . . . . I 223
—, gedämpfte, ungedämpfte . . . I 221
—, geradlinige . . I 221
—, harmonische . I 124
—sachse . . . . I 234
—sdauer, -zahl . I 189, 221
—smittelpunkt . I 233, 234
—szeit d. Federn . I 593
Schwungmoment I 191
—rad . . . . . I 945
— —, Arbeitsüberschufsermittlg. mittels Drehkraftkurven I 950
— — berechnung mittels Massenwuchtdiagramms . . I 957
— —, Festigkeit, Konstruktion . . I 947
— —, Gebläse- . . II 616
— —gewicht . . I 945
— —, Ilgner- (Förder masch.) II 1010, 1020
— — lose Pumpe . II 586
— — umformer (Ilgner) II 1010, 1012*
— — v. Verbrennungsmaschinen . . II 274
Scottsche Schaltung II 857, 921
Sechskanteisen, Gewicht . . I 659*, 660
—kupplung . . . I 825
Securadecke . . . III 378
Seebagger . . . III 479
—deich . . . . . III 567
Seegang . . . . II 655*
—kanal . . . III 549, 552
—meile . . I 987; II 715
—schleuse . . . . III 537
—wasser, Schädigende Einflüsse auf Beton III 224
— —, spez. Gewicht I 282; II 635
Segel . II 681*, 699, 700*
—schiff, Gewichtsverhältnisse ausgeführt. II 710*
Segerkegel . . . II 326*
Segmenttor . . III 533
—wehr . . . . . III 517
Sehinstrumente . . III 10
Sehnenlänge . . . I 36*
Seilausgleichung (Förderm.) . . . II 432
—bahn II 493, 497, 542, 543; III 905
— —, Anlagekosten II 550*
— —, besondere Bauarten . . . . III 914
— —, Elektro- . . II 554
— —, Förderkosten II 550*
— —, Gesetzl. Bestimmungen . . . II 551
— —, Gicht- . . II 555
— —, Gruben- . . III 905
— —, Halden- . . II 555
— —, Helling- . . II 556
— —, Meer- . . . II 556
— —, Stand- . . III 905
— —, Verlade- . . II 554
— —, zerlegbare Ein- II 557
—, Baumwoll- (Treib-) I 809*, 810*
—befestigung . . I 855
— — am Wagen . III 912
—betrieb . . . . I 794
—bremse . . . . II 322
—, Draht-, s. dort.
—durchhang II 542; III 909
—eck, —polygon I 154, 158
— —, Biegungslinie als III 113
—, Festigkt. I 501, 808, 810*, 849* ff., 856*; II 539* ff.; III 905
—förderung (Grubenbahn) . . . . II 493
—förderer . . . . II 516
—, Fördermaschinen- II 431
—geschwindigkeit, Fördermasch.- III 429, 431
— —, Triebwerk- I 808, 810, 811
—, Gleichgewicht a. — I 181
—, Hanf- . . . I 809, 856
—lastdruckbremse. II 399
—parabel . . . . I 181
—, Reibung . . . I 257
—riese . . . . . II 543
—rolle . . I 855; III 911

Seilrolle, Wirkungsgrad I 259
—scheibe . . . . II 454
— —, Draht- . . I 806*
— —, Hanf- . I 810*, 811
— —, Fördermaschinen- II 432, 439*
—steifigkeit . . . I 258
—steuerung, Aufzug- II 418
—, Triebwerkdraht- I 807*
— —hanf . I 809*, 810*
—trommel I 855; II 108, 432, 439*, 452
—verbindung I 809; II 541
—widerstand, Fördermasch. . . . II 437*
Seitendruck, hydrostat., hydrodynam. — I 281
— — a. Silowände II 534
—kanal. . . . . III 518
—kraft . . . . . I 153
—licht . . . . . III 443
—steifigkeit offener Brücken III 987
Sektorengeschwindigkeit I 227
Sekundenpendel . I 189
Selbstentlader . . II 496
—entzündg. d. Kohlen I 460
— —stemperatur . I 478*
—hemmung(-sperrung) I 253
—induktion . II 837, 847
—regler (Spannungs-) II 941
—schlufsventil I 944; II 63
Sellers Gewinde I 741, 748*
— -Kupplung . . I 823*
Semikubische Parabel I 103
Senkbremse II 393, 397, 402
—brunnen. . III 202, 205
—el . . . . . III 8
—kasten . . . . III 206
— —gründung . . III 219
—rechtstellen v. Linien, Achszapfen, Drehachsen . . . III 8
—ung d. Lehrgerüste III 1050
—skurve . . III 514, 515*
Sente . . . . . II 629
Serienmotor II 955, 956, 957
Serpentin . . . . I 683
Servomotor . . . II 301
Setzwage . . . . III 8
Sheddach III 309, 341, 447
—, Eisenbeton- . . III 259
Sichelträger . III 143, 340
Sicherheit gegen Bruch I 486
—sanker (Zahnradb.) III 902
—sanlagen (Strafsenb.) III 636
—sbremse, -apparat, an elektr. Fördermasch. II 1014, 1015, 1016
—sgrad gegen Knicken I 504 bis 506, 513, 514, 515*, 517*
Sicherheitsgrad gegen Seilbruch . I 854; II 431, 539; III 905
—skupplung, Eisenb. III 811
—skurbel . I 864; II 384
—streifen (Eisenbahn) III 724, 769
—sventil . . . . I 939
— —, Dampfzylinder- II 196
— — f. hydr. Pressen I 939
— —, Kessel- II 60, 70, 776*; III 837
—svorrichtung a. Fördermasch. . . . II 450
— — a. Paternosteraufzügen . . . . II 425
Sicherung, Aufzug- II 415
— v. Rohrleitg. III 582, 682
Sickerdohle, —rohr III 657
Siedepunkt verschiedener Stoffe . I 379*
—rohr I 917; II 77, 80, 772
— —kessel . . II 13, 772
—temperatur flüssiger Brennstoffe . . I 477*
— — v. Dämpfen und Gasen. . I 412, 413*
Siegwart-Balkendecke III 380
Sielbau . . . . . III 193
Siemens-Martin-Flufseisen, —stahl . I 634
— —-Stahl f. Brückenbau . . . . III 918
S. L.-Gewinde I 740, 743*
Silberlot . . . . I 681
Silikalampe . . . II 827
Siliziumbronzedraht I 679
—stahl . . I 489 bis 491*
Silospeicher II 530; III 264
Simplexpfahl. . . III 210
Simpsonsche Regel (Flacheninhalt) I 133; II 630, 631
— — (Integration) I 80
Sinkbaum, -lage, -stück -matte . III 508, 509
—kastengründung III 221
— —, Regen- . . III 703
Sinus . I 26 bis 27*, 57 bis 61*
—, arcsin . . I 57, 60, 65
—, Ar Sin . . . I 64
— hyperbolicus I 80 bis 82, 64
— versus-Bewegung I 882
Skalar . . . . I 121
—e Gröfse . . . I 140
—es Produkt . I 122, 216
Slip . . . . II 729, 730*
Solenoid . . . . II 846
Sommerdeich . . III 566
—weg . . . . . III 607
Spaltungspunkt (Strömung) . . I 339
Spanabhebende Metallbearbeitungsmasch. II 345
—bildung . . . . II 345
Späneabsaugung . III 471
Spannkräfte i. Bogenträger. . . . III 99
— — i. einfachen Fachwerkbalken. . III 84
— — i. Fachwerkstäben . . . I 175
— — i. Gerberträger III 95, 97
—rolle . . . . . I 830
—schlitten . . . I 813
—schütze (Wasserrad) II 255
—weite v. Brücken III 916
Spannung, Anfangs- u. Wärme- i. Eisenbeton . . . . III 239
—, Biegungs- . . I 522
—, elektr. . . . . II 837
— —, übliche II 958, 959
—, Gegenseitigkt. d. —en . . . . I 576
— i. Schiffsquerschnitt II 713
—, indizierte Dampfmasch. II 109, 111*, 112*
— — (Kompressor) II 614
— —, Schätzung (Dampfm.) . . II 124
— —, Mehrzylinder-dampfmasch. . II 120, 123*
—, Knick- . . . I 513
—, Normal- . . . I 481
—, reduzierte (Dampfmasch.) . . . II 113
—, Schub- . . I 485, 520
—sellipse . . . . I 526
—sermittlg. b. Trägern I 521, 523, 528
— — b. stat. best. Fachwerk . . . . I 178
—sfaktor d. Wechselfeldes . . . . II 899
—sfläche (Biegung) I 529, 530, 576
—skoeffizient (Dampfmasch.) II 109, 110*, 111*, 121, 122*
—skurve (Stützmauer) III 176
—slinie (Festigkt.) I 482
—sregler . . . . II 941
—stafel, Wasserdampf I 414*, 416 bis 418*
—sverlust in elektr. Leitg. . . . . II 961
—swahl (Stromsysteme) II 958, 959
—szeiger . . . . II 949
—, zulässige f. Brückenbau I 486, 504*, 510, 514; III 57*, 73*, 74*, 237, 917
— — f. Hochbau I 486, 504*, 510, 514; III 51

Spannung, zulässige für Maschinenbau I 486, 502, 503*, 510, 514
—, zulässige f. Schiffsbau . II 713, 749, 751
Spantenriss . . . II 629
—skala . . . . . II 642
Spantform . . . . II 636
Sparbecken . . . III 539
—bogenlampe . . II 826
—schaltung . . . II 918
—transformator . . II 921
Sparren . . III 160, 303
—dach . . . . . III 304
— —, eisernes . . III 334
Speckstein . . . . I 683
Speicher, Boden-, Silo- II 529
Speiseaufzug . . II 411
—eleitung, elektr. . II 964
— —, Schiffs- . . II 767
—epumpe . . II 586, 765
—eraum (Dampfk.) II 6
—erohr . . . . . II 63
—esaal, Fabrik- . III 474
—eventil II 63, 68, 777
—evorrichtung (Kessel) II 54, 68, 765; III 836
—ewasser II 57; III 792
— —, Reinigung . II 57
— —vorwärmer . II 54
—ung d. Kanäle . III 529
Sperrdamm . . . III 507
—radbremse . . . I 864
— —senkbremse . II 398
— —stoppbremse . II 394
—tor, Kanal- . . III 533
—werk . . . . . I 863
—zeichen, Weichen- III 763
Spezifische Leitfähigkeit (elektr.) II 842, 843*
— Masse . . . . I 149
—r Druck s. Flächendruck.
— Reibungszahl I 247, 248* ff.
—r Lagerdruck . . I 247
—r Schnittdruck . II 347*
—s Gewicht s. auch Eigengewichte I 149, 613* ff.
— —, Dieselöle . I 476*
— —, Erdarten II 491*; III 168*
— —, Feste Körper I 613* ff.
— —, Flüssigkeiten I 617*
— —, Gase u. Dämpfe I 613, 618*
— —, Kohlenwasserstoffe . . I 476*, 477*
— —, Kraftöle . . I 478*
— —, mittelfeuchte Luft . . . . II 611*
— —, Seewasser I 282; II 635
— —, Süfswasser I 282, 372
— —, vollkommene Gase . . . . I 393*
Spezifisches Gleiten I 214
—s Volumen . . . I 149
— — mittelfeuchter Luft . . . . II 611*
— Umlaufzahl (Turbinen) II 291; III 589
— Wärme I 373, 374* ff.
— —, Dampf . . I 416*
— —, Eisen . . . I 376*
— —, feste und tropfb. flüss. Körper . I 376*
— —, Gasmischungen I 401
— —, Kochsalzlösungen I 375*
— —, überhitzt. Wasserdampf . . . I 423*
— —, Wasser . . I 374*
— —, vollkommene Gase I 397, 398*, 406*
—r Zähigkeitsmodul I 261, 350
Sphärische Bewegung I 207
—r Exzefs I 63; III 47
Spiegelamalgam . I 681
—gewölbe . . . . III 298
—glas . . . . . I 712
—instrument . . III 4
—kreuz . . . . III 5
—sextant . . . . III 17
Spill . II 409, 410*, 684*
Spindelmaschine (Aufzugwinde) . . II 413
Spiralbohrer . . II 348
— —kegel . . . II 363*
—e, archimedische, hyperbolische, logarithmische I 108, 109
—e, Förder- . . . II 506
—feder . . . . . I 596
—trommel . II 409, 434
—turbine, Francis- III 588
Spiritus, Gefrierpunkt I 379*
—lampe . . . . II 815
—motor . . II 258, 275
—, spez. Gew. . I 617, 618
—, Verbrennung I 477*; II 256
Splint . . . . . I 745*
Sprengarbeit . . III 737
—wagen . . . . III 682
—ewerk, Holz- . . III 393
Springbrunnen . . I 316
Sprinkleranlage III 466, 467
Spritze . . . I 316; II 1
Sprung (Schiffbau) II 628, 637, 670*
— stand (Vermessungsk.) III 20
—, Wasser- . . . I 312
—weite freier Wasserstrahlen . . . I 316
— (Zahnrad) . . I 784
Spulenwicklung . II 896
Spülgosse, Schiffs- II 689*
Spülpumpe . . . II 765
— rinne, —rohr . . III 480
—ung v. Kanälen . IV 705
—versatz . . . . II 529
Spundmaschine . II 881
—wand . . III 189, 217
—ung . . . . . III 300
Spurerweiterung, Eisenbahn . . III 762
— —, Grubenbahn III 906
— — i. Krümmung. III 740
— —, Zahnradbahn III 892
—kranz . . . . III 806
—kugellager . . . I 839
—rinne . . . III 722, 746
—weite, Automobil II 790
— —, Eisenbahn . III 722
— — elektr. Bahnen II 982
— —, Standseilbahn III 906, 910
— —, Strafsenfahrzeuge III 596
— —, Zahnradbahn III 892
—zapfen . . . . I 838
— —, Reibung I 249, 250*
— —, Wasserturb. II 297
Stab, achsial u. quer belastet . . . I 578
—, biegungsfester (Formänderg.) . III 117
—dreieck, Winkeländerung . . . . III 111
—eisen . . . . . I 660
—, exzentrisch belastet I 578
—federkupplung, nachgiebige . . . I 829
—, Festigkeit einfach gekrümmter — I 588
— —, gerader — . I 507
—längenänderung . III 107
—, langer, Spannung u. Durchbiegung . I 578
— mit eingespannten Enden achsial und quer belastet . I 580
— mit gelenkigen Enden a. 2 Stützen achsial u. quer belastet I 579
—querschnitte für Eisenkonstruktionen III 837
—spannung i. Fachwerk I 175
—, stetig gekrümmter III 118
—systeme, Fachwerk- I 175
— v. gleichem Widerstand (Zug, Druck) I 508
—wicklung . . . II 898
—zug, biegungsfester III 118
— —verfahren . III 109
Stabiles Gleichgewicht I 170
—isierung einer Bewegung . . . I 239
—ität . . . . . I 170

Stabilität b. beweglicher Ladung . . . II 652
— — b. Leck u. Grundberührung . . II 653
— —sänderung . II 650
— —, Schiffs- II 629, 644
— —smoment I 170; II 644
— —srechnung mittels Integrators . II 647
— —, statische, schwimmender Körp. . I 263
— — unter Segel . II 654
— — v. Ballonen . I 335
Stadtbauplan . . III 629
—schnellbahn . . II 1001
Städtebau, Aufgaben des — . . . III 627
—entwässerung . III 684
—verbindungsbahn I 1000
—ische Strafse III 621, 640
Staffelapparat . . III 8
—methode (Höhenmessung) . . . . III 34
Stahlbandbetrieb . I 802
—bronze . . . . I 495*
—, Einfluss d. Temp. a. Festigk. . . . II 330
—draht . . I 500, 501, 620
—, Festigkeitszahlen I 486, 487*, 500, 501, 626*, 628*; III 104
—, Gewicht I 620, 621; III 56
—, Härteskala . . I 628*
—formguss, Festigkeitszahl I 487*, 492*, 493*
— —, zulässige Beanspruchung I 503*, 505*; III 59, 78
— für Kraftwagen- u. Luftschiffbau . I 488*
—giefserei . . . I 635
—, hochwertiger I 488 bis 492*, 626*
—, Lieferungsbedingungen . . . . I 663
—produkte A u. B I 636
—rohr, nahtloses . I 918
—, Schiffbauprofile I 646* ff.
— —swalz- . . . II 696
—, Schnell- . . . II 350
—, Sonderstähle I 487* ff., 626*
—sorten I 487* ff., 626*, 633
—werksgebläse II 610, 616, 622
— —kran . . . . II 484
—, zulässige Beanspruchg. I 503*, 505*
Stampfasphalt I 718; III 626, 1015
—beton I 506, 507, 704, 706
— —behälter . . III 674
— —rohr . . . . I 707*
Standard-Kerze . . II 809
Ständerfachwerk III 85
— (Schiffsdampfmasch.) II 751
Standfestigkeit, Kran- II 477
— —, Pfahlgründung III 215
— —, Schornstein II 49
—rohr . . . . . III 582
—seilbahn . . . III 905
—sicherheit . . . I 170
Stangenreibhammer II 332
Stanniol . . . . I 677
Stapellauf . . . . II 662
Starrer Körper, Arbeit, lebendige Kraft I 230
— —, Dynamik I 190, 230
— —, Drehung um feste Achse. . . I 190, 231
— —, Drehung u. festen Punkt . . . I 235
— —, Schiebungsbewegung . . . . I 190
— —, Trägheits-, Zentrifugalmoment . I 191
—schmiere I 730, 731, 836
Statik d. Baukonstruktionen . . . III 55
—, graphische . . I 176
— luftförmiger Körper I 330, 331
— starrer Körper . I 153
— tropfb. flüss. Körper I 261
Station, Bahn- . . III 771
Statisch bestimmtes Fachwerk . . I 173
— — Tragwerk . III 79
—er Regler . . . I 961
—es Moment . I 162, 163
— unbestimmtes Fachwerk . . . . I 174
— — Trägersysteme III 954
— — Tragwerk . III 103
Staubecken, Ausfluss I 266, 270
—berieselung . . III 562
—damm, Eisenbeton- III 276
—gerät . . . . . I 320
—gewicht . . . . II 678*
—kurve . I 312; III 514
—rand . . . . . II 318
—raum, Schiffs- . II 678*
—rohr . . . II 315, 319
—spiegel, —stufe (Flussbau) . . . . III 512
—ung, Ein- u. Ueber- v. Rieselfeldern III 562, 712
— —sdruck . . . I 364
—weiher s. a. Talsperre III 575
Staubabsaugung . III 804
—beseitigung, -verhinderung a. Strafsen III 617, 633
Staubfilter . . . III 474
—kammer . . . . III 400
—saugmaschine . . III 682
Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz I 399
Stegsteindecke . . III 373
Stehblech in Blechträgern . . . III 923
— —stofs . . . . III 939
—bolzen I 751; II 29, 77, 80, 89; III 838
—lager I 839, 840*, 841*, 842*
Steifigkeit, Seil- . I 258
—rahmen . . . . I 175
Steighöhe (Ballon) I 332
— — freier Wasserstrahlen . . . I 316
—ung d. Schraube I 740
— —, Eisenbahn- III 725
— —, elektr. Strafsenbahnen . . . II 981
— —, maßgebende, unschädliche Eisenbahn- . . . . III 720
— —, Landstrafsen- III 600, 605
— — städt. Strafsen III 641
— —, Standseilbahn- III 907
— —, Strafsen-. . III 634
— —sverhältnis, zweckmäfsigstes Eisenbahn- . . . . III 720
— —swiderstand, Eisenbahn . . . . III 718
— —, Zahnradbahn III 886, 887
Steilrohrkessel . . II 17
Steinbrecherarbeit III 280*
—e, Festigkt. I 495* bis 500*
—e, gebrannte . . I 691
—e, Gewicht. . . III 55*
—eisendecke . . III 373
—e, künstliche . . I 686
—e, natürliche . . I 682
—erne Brücke III 917, 1030
— —, Belastung . III 60
—e, zulässige Beanspruchg. I 506*; III 59
—format . I 692; III 279
—holz . . . . . I 689
—kohle I 455, 457*, 458*, 459; II 88
— —nteeröl . . . I 478*
— —ntypen . . . I 457*
— —, Verbrennung I 466*
Steinle u. Hartung-Regler I 973
Steinmetzkoeffizient II 840
—packung, —schüttung III 508
—pflaster III 619, 620, 622, 1014
— —, Widerstandszahlen III 690*
—schlag, —zerkleinerung III 612

Steinschraube . . I 751
—schüttung . III 221, 508
—verband . . III 278, 281
—zange, —wolf . . III 490
—zeugrohrnormalien I 930; III 698*
Stellmacherei . . III 884
—ring . . . . . I 819
—ungslinie (Erddruck) III 168
—werk (Weiche) . III 758
Stemmaschine . . II 382
—tor, Schleusen- III 533, 542, 543
Stephenson-Umsteuerung II 180
Sterilisieren v. Wasser III 671*
Sterndreieckschalter II 916
—gewölbe . . . . III 297
—kurve . . . . I 107
—pfahl . . . . . III 209
—schaltung . . . II 856
Steuerdynamoantrieb II 1009
—geschirr . . . . II 700
—maschine, Um- . II 765
—ruder . . . II 682, 700*
—scheibe . . . . II 273
—ung, Aufzug- II 416, 418
— —, Auslaßventil- II 170
— —, Automobil- (Lenkung) . . . . II 803
— —, Dampfmasch.- II 144
— — elektr. Bahnmotoren II 996, 1001
— — elektr. Fördermasch. II 1007
— —, Expansions- II 155
— —, Fahrzeugmotor- II 796, 799
— —, Fördermasch.- II 444
— —, Gebläse- . . II 616
— —skanal II 144; III 843
— —, Laufwinden- II 483
— —, Lokomotiv- III 843, 851
— —, Schiffsdampfmasch.- . . . II 754
— —, Verbrennungsmasch.- . . . . II 273
Stiagbrunnen . . III 708
Stickoxydul . . I 401, 413
Stickstoff, Dampftafel I 438*
—, Dichte, Volumen verflüssigten —s I 372
—-Sauerstoff-Destillation . . . . I 439
—, wichtige Wärmewerte I 376 ff., 398, 400, 413
Stirlingkessel . . . II 17
Stirnraderstoßmasch. II 372
—radevolventenverzahnung . . . . I 770
Stirnräder, Festigkeit I 779, 780*
— —flaschenzug . II 386
— —fräsmaschine . II 370
— — mit schrägen Zähnen . . . I 784
— —, Reibung . . I 255
— —verzahnung . I 212
— —verzahnung, Zykloiden- . . . I 766
—zapfen s. Tragzapfen.
Stoffkunde . . . I 610
Stokesscher Satz I 219
— — (Vektorrechng.) I 124
Stollen III 579, 581, 656, 657
Stoltzkessel . . . III 857
Stopfbüchsdichtung s. auch Labyrinthdichtg. I 808, 865, 876
—e I 876, 878; II 221, 568; III 842
—e, Dampfturb.- . II 221
—e, Reibung . . I 244, 866
Stoppbremse . . . II 393
Störungsfunktion . I 82
Stofs . . . . . I 240
— gedrückter Brückenglieder . . . III 962
—heber . . . . . II 562
—kraft . . . . I 225, 240
—linie . . . . . I 240
—lücke (Gleis) . . III 758
—maschine, Metall- II 356, 358
— —, Zahnrad- . II 372
—punkt . . . . I 233
—, Schienen- . . III 753
—verbindung (Blechträger) . . . III 937
— — (eiserne Träger) III 324
— —, Straßenbahnschienen- . . II 985
—zahl d. Verkehrslast I 511, 512*
—ziffer . . . . . I 241
Stößelpresse . . . II 342
Stotzsche Kette . . I 815
Strahl, ausfließender I 265, 316, 345; II 316
—bewegung . . I 342, 345
—einschnürung b. Flüssigkt. I 266, 272, 345
— —, Luft . . . II 317*
—element . . . . I 318
—enbrechung . III 26, 32
—enmenge, Licht- . II 808
—, Gas-, Dampf- . I 440
—kondensator . . II 206
—pumpe . . . . II 562
—turbine . . II 289, 292
—ungszahl (Wärme) I 391*, 392*
—ung (Wärme) . . I 389
—, Wasser-, Steighöhe, Sprungweite . I 316
—wirkung (Wasser) I 317
Straßenbahn, elektr. II 980
—nbahnwagen III 596, 597, 995
— —, Eigengewicht, Nutzlast . . . III 598
— —, Zugkraft . . III 601
—nbau . . . III 596, 602
— —, Gesetzl. Bestimmg. . . . III 638
—nbefestigung städt. Straßen . . . III 642
—nbeleuchtung II 834, 835*
—nbreite, Land- III 605, 635
— — städt. Straßen III 642
—nbrücke, Belastung eiserner . . III 61
— —, Belastung gewölbter . . . III 60
—nbrücke, eiserne III 1009
— —, gewölbte III 1043*
— —, Verkehrslasten III 60, 62
—ndecke a. Brücken III 1014
—nentwässerung . III 640
—nfahrzeug . . III 596*
— —, Eigengewicht, Nutzlast . III 62, 598*
—nführwerk, Reibung, Bewegungswiderstand I 245; III 599, 600*
—nkreuzung, —mündung städt. Straßen III 646
—nölung, —teerung III 617, 618
—nprofil städt. Straßen III 642
—nreinigung städt. Straßen III 631, 636
— —, Land- III 616, 636
—nschild . . . . III 645
—nsprengen, —waschen III 632
—nunterhaltung . III 602
—nverbreiterung städt. Straßen . . . III 646
—nwalze III 62, 598, 614, 615*
—, Reibungswiderstand I 245
—, städtische . . III 640
— —, Bau, Unterhaltg. d. Fahrbahn . III 621
Straußspiahl . . III 210
Streben anschwerk . III 86
Streckenbau, Eisenbahn . . . . III 733
— —, Grubenseilbahn III 906
— —, Touristen-Seilbahn . . . . III 910
— —, Zahnradbahn III 888
Streck, reuze I 483, 487* bis 497*
—metall . . . . I 708
Streifkasten . . . III 683

Streudüse . . . II 215
—faktor (Drehstrommotor) II 914
—verlust (Dynamom.) II 881
Stripperkran . II 489*, 490
Strohdach . . . . III 356
Stromfunktion . I 340
—linie, —röhre . . I 340
—preis . . . . . III 595
—richtungsregeln (elektr.) . . . II 848
—rückleitung, elektr. Bahnen . II 986, 994
—spannung . . . II 837
— —, Wahl der — II 958
— —stärke . . . II 837
— —, zulässs. — f. elektr. Leitg. . . II 962*, 963*
—systeme, Eigenschaften, Wahl . II 951, 957
—verbrauch d. Lampen II 831*
—verteilung, elektr. II 951, 954, 964
— —, elektr., in Fabriken . . . III 460
—verzweigung (elektrische) . II 841, 842
—wender . . . . II 888
—wendung . . . II 883
—zeiger . . . . II 949
—zuführung für elektr. Bahnen II 1000, 1001, 1002
— — f. Straßenbahn. II 992
Strömung an eingetauchten Körpern I 351
—, ebene . . . . I 339
— i. Flüssigktsleitg. I 349
—, Kuttasche . . I 342
—, räumliche (dreidimensionale) . I 338
—slehre (Flüssigkt.) I 336
—swiderstand I 323, 351, 353
— v. Gasen u. Dämpfen I 439
— vollkommener Flüssigkt. . . I 336
— Wirbel-, (turbulente) I 350
— wirklicher Flüssigkt. I 348
Struba Zahnstange III 891
Strudelbildung . . I 266
Stuck . . . . . I 696
Stufenanker (Drehstr.) II 917
—filter . . . . . III 606
—kompressor . . II 614
—rohrkessel . . . . II 8
—scheibe I 805; II 350, 353, 354
—ventil . . . . I 938
Stulpdichtung I 309, 865
—reibung . . . I 244, 866
Stülpwand . . . III 188
Stützdruck (Kette) III 103
— —, -widerstand I 171, 176, 566, 567*; III 93, 96, 133
—en, gegliederte . I 519
—enlotrechte, verschränkte . . III 127
—e s. auch Säule, Pfeiler.
—e, Eisenbeton- III 232, 234, 237, 251, 256
—enmoment (durchgehender Träger) I 566, 567*; III 126
—enverband (Eisenhochbau) . . III 333
—en zwischen Gleisen (Brückenb.) III 1006
—e, walzeiserne, gußeiserne III 327, 333
—lager . . . . . I 172
—linie, Gewölbe III 180, 181, 183
— —, Stützmauer . III 175
—mauer, s. auch Erddruck III 167, 261, 283, 735
—punkt (Gewölbe) III 180
—ung starrer Körper I 171
—weite v. Brücken III 916
Subnormale, —tangente I 92
Suessche Fördervorrichtung . . . II 507
Sulzer-Steuerung . II 165
Süßwasser, spez. Gew. I 282, 372
Syenit . . . . I 498, 682
Synchrone Umlaufzahlen (Drehstrom) . I 959*
—isierende Leistung II 907
—motor . . . . II 912
Systemkurve, —punkt (Kinematik) . I 208
—schwerpunkt II 628, 693

T.

Tachograph . . II 810
—meter . . . . II 810
Tachymeteraufnahme III 35, 38
Tafeln wichtiger Zahlenwerte . . . . I 1* ff.
Tagesausgleichweiher III 575
—bellichtung . . III 443
—werk, Arbeiter II 1, 2; III 280*, 601, 612, 736*, 738*, 739*
Takelung . . II 681*, 699
Talbotwagen . . . II 496
Talg . . . . . I 730
Talsperre s. auch Wasserkraftanlage, I 271; III 570, 574*, 575
Tandemmaschine, Dampf- II 116, 119, 194
Tangens I 28 bis 29*, 57 bis 61*
—s, arctg . . I 57, 60, 63
—s, Nr Tg . . . I 63
—s hyperb. . . . I 84, 85
—te, Gleichung der — I 91, 92, 115
—tialbeschleunigung I 145
— —ebene . . . I 115
— —Führungsrolle III 162
— —Kurbeldruck I 886, 887, 951
— —widerstand . I 963
Tank, Schiffs- . . II 677
Tannenholz, Gewicht III 56
—, zulässs. Beanspruchg. I 506
Tantaldraht . . . I 581
Tasche (Speicher) . II 534
Taucherglockengründung . . III 212
—kolben . I 865; II 583
—ung (Schiffb.) . II 632
Taupunkt . . . I 404
—last, Schiffs- . . II 677
—werk, Gewicht, Festigkeit . . . . II 701*
Taylorsche Reihe . I 67
Teer . . . . I 461, 668
—besprengung . . III 617
—öl . . . . . I 478*
—schotterstraße . III 618
Teilbruch . . . I 69
—kopfarbeit . . . II 367
—kreis, Teilung (Zahnrad) . . I 763, 764*
—leitersystem (el. Bahn.) II 994
T-Eisen . . . . I 643*
—, Doppel- I 641*, 651*, 652*, 653*
— —, Querschnittsmoment I 521, 528, 531, 537, 570, 641*, 651*, 652*, 653*
—, Querschnittsmoment I 537, 643*, 649*
—, Wulst- f. Schiffb. I 649*
Tektolith . . . . I 719
Telegraphendraht I 660, 667, 676, 679*, 680*
— —draht, Festigkt. I 501
— —draht, Leitwiderstand . . . . II 843
— —stange . . . I 727
—phondraht . I 679*, 680*
Tellerventil . . . I 932
Temperatur s. auch Erwärmung, absolute . . . . I 331
—einfluß s. Bogenträger III 142, 148, 151
— — s. d. biegungsfesten Stab . . III 115
— —s. Fachwerkbalken s. 3 Stützen . III 140

Digitized by Google

Temperatureinfluss auf Festigkt. I 486*, 492*, 493*, 495*
— — a. stat. unbest. Tragwerke . . III 105
— — a. d. versteilte Kette . . . . III 155
— — a. vollwandiges Tragwerk . . III 121
—, Ent- b. Gasverbrennung . . I 474*
—koeffizient . II 843, 865*
—, kritische . I 412, 413*
—messung. . . . II 825
—, Mischungs- I 376, 377*
—, Siede- I 379*, 412, 413*
—zunahme (elektr. Leitg.) . . . II 843
Tempergiefserei, -guss I 636
Tender . . . III 854*
—achse . . . . . III 808
—kupplung . . . III 849
Terrainlinie . . . III 1
Terrakotta . . . I 693
—nova . . . . . I 699
—zzo . . . . . I 707
Tetmajersche Knickformel . . . I 517
Teufenzeiger . . . II 450
Theodolit . . . . III 13
Thermischer Wirkungsgrad d. Dampfmasch. I 424; II 133, 135*
— — Wirkungsgrad d. Verbrennungsmotors II 245, 247, 248
—itschweifsung . I 671
—odynamik, Hauptsätze I 393, 395
—odynamischer Wirkungsgrad d. Dampfmasch. . II 134, 135*
— — Wirkungsgrad d. Dampfturbine II 218
—oelement . . . II 325
—ometer . . . . II 325
— —grade (Vergleichg.) I 370*
Thomas-Flufseisen (-Stahl) . . . I 633
Thomson-Repulsionsmotor . . . . II 957
Thornycroft-Kessel II 773, 775
Thury-Stromsystem II 951
Tiefbehälter . . II 539
—brunnen . . . III 664
—gang . . . . . II 628
Tiegelstahl . . I 492, 634
Tier, Kraft, Leistung II 1, 2; III 601*, 739*
Tirril-Regler . . II 942
Tischlerei . . . . III 884
Titaneisen, -stahl I 491*
—karbidbogenlampe II 826
T-Moment . . . . III 129
Toise . . . . . I 986
Tolle-Regler . . I 973
—sche Schwungradberechng. . . . I 954
Tombak . . . . I 678
—rohr, biegsames . I 923*
Ton . . . . . I 685
Tonne (Schiffsmafs) II 671, 672, 678, 679
—nblech . . . . I 662
— — (Fahrbahn) III 1002, 1011
—ngewölbe . III 288, 290
Tonrohr . I 694; III 698*
—schiefer . . . I 498, 683
Tor III 287, 368, 456, 800
—, Schleusen- . . III 533
—schütze, Schleusen- III 547
Torf, Heizwert I 455, 456, 458*
—, Wärmeschutz . I 451
Torgament . . . I 630
Torpedoarmierung II 707, 711
Torsion s. a. Drehung.
—sindikator . . . II 322
T-Querschnittsmoment I 536, 537, 643*, 649*
Touristenbahnen . III 907
Tracenübertragung ins Gelände . . . III 39
Tragfähigkeit d. Baugrundes . . III 185*
— — d. Pfähle . III 214
— — v. Kähnen III 531*, 534*
— — v. Schiffen . II 628
Tragfeder, Automobil- II 803
— —, Eisenbahn- I 595; III 869
— —, Lokomotiv- . III 849
— —, Strafsenfuhrwerk- III 598
—kraft v. Gasballon I 332
— — v. Trägern, wichtige Belastungsfälle I 546* ff.
—kugellager . . . I 839
—magnet . . II 402, 841
—rolle, Seilbahn- II 544, 547; III 911
—seil . I 852*, 854; II 539, 547
—werk, eisernes, für Dächer . . . III 335
— —, Holz- . . . III 303
— —, stat. bestimmtes III 79
— —, stat. unbest. ebenes III 103
—, vollwandiges III 121
—zapfen . . . . I 886
— —, Reibung . . I 246
Träger s. a. Balken, Binder, Fachwerkbalken, Stab.
Träger, Allgemeines über die äufseren Kräfte . . . I 521
— a. mehreren Stützen I 565
— a. 4 u. 5 Stützen III 138
—ausbildung . . III 947
—, Auslegerbogen mit Schlepptragern III 150
—, Balken- . . . I 175
—, beiderseits eingespannter Bogen III 150
—, Blech- I 511; III 73, 923
—, Dreigelenkbogen III 99, 174, 175, 180
—, durchlaufender (kontinuierlicher) I 175, 565; III 126
— — m. veränderl. Belastung . . . III 96
—, einfacher Balken III 79
—, Eisenbeton- . . III 231
—, elast. Formänderung gerader — . . I 532
—, Fachwerkbalken III 84
—, genieteter f. Brückenbau . . III 926* ff.
—, Gerber- I 175; III 95, 97, 944
—, gewalzter . . III 922
—, Gitter- . III 340, 958
— gleichen Querschnitts I 525
— — Widerstandes gegen Biegung I 526, 561*
—, gleichförm. belastet a. 3 u. 4 Stützen III 131, 135*
—, Halbparabel- . III 340
—, Haupt-, s. dort.
—höhe, Brücken- III 943, 952
—, Kran- . . . . III 88
—lagen . . . . . III 321
—, mehrfach belastet. I 556
— m. einem gekrümmten Gurt . . . . III 952
— m. unveränderl. Querschnitt, Belastungsfälle . . I 546* ff.
—, Neben- (Zuschlag-) Spannungen . I 512*
—, Parabel- III 83, 340, 969
—, Parallel- I 175; III 83, 86, 155, 340, 952, 969
—, Polonceau- I 175; III 316, 338, 339, 356
—rostplatte . . . III 323
—, Sichel- . III 143, 340
—, Spannungsermittlg. I 521, 523, 528
—verankerung, -verbindung . . . . III 323
—vernietung . . III 947
—, vollwandig. Brücken- III 942
— — a. 3 Stützen III 136

Träger v. kleinstem Biegungswinkel u. v. kleinster Durchbiegung I 564*
—, Walz-, Querschn.-Ermittlg. . . I 558
—, zeichnerische Bestimmg. d. Momente I 554
—, Zweigelenkbogen I 175; III 122, 131
—, zulässs. Spannung I 511; III 57, 73
Trägheitsachse I 192, 193
—durchm. (-halbm.) I 191
—ellipse . . . . I 191
—ellipsoid . . . I 193
—gesetz I 141, 142, 228
—halbmesser . . I 194
—hauptachse . . I 193
—hauptpunkt . . I 195
—kreis . . . . I 195, 530
—moment . . . . I 191
— —, äquatoriales, polares . I 193, 196 ff.
— —, äquatoriale üblicher Querschnitte I 534, 535* bis 545*
— — d. Schiffsquerschnitts II 713, 714*
— — d. Wasserlinien II 632
— —, geometrisches I 191
— —, geometrisches, ebener Flächenstücke I 193, 196, 197, 200
— —, Massen- I 196, 197, 200
— — v. Walzprofilen I 638* ff.
— — wichtiger Linien, Flächen, Körper I 196 ff.
—widerstand I 149, 225, 233
Traineur . . . . II 508
Trajektorie . . . . I 95
Traktorie, Huygenssche I 110
Transformator . II 917
—, elektromot. Kraft II 921
—, Konstant Strom- II 823
—, Schaltung . . II 920
—, Verlust . . . II 923
Translation . . . I 141
Transmission I 806, 809, 817; III 458, 469
—aufzug . . . . II 410
—winde . . . . III 490
—, Schutzvorrichtg. III 469
—dynamometer . II 323
—seil . I 807*, 809, 810*
—welle I 817, 818*, 819*
Transporteur . . II 511
— —, Kreis-, Schaukel- II 497
—kosten, —verhältnisse, Einfluss auf Fabrikort . . . . . III 431
—mittel, s. Fördermittel.
Transversalkraft, s. Querkr.
Transzendente Funktion . . . I 75
— Gleichung . . . I 53
Trapezfeder . . . I 594
—, Flächeninhalt . . I 130
—, Kern . . . . . I 575
—, Querschnittsmoment I 536, 569
—regel (Flächeninhalt) II 630, 631
—, Schwerpunkt . I 166
—, Trägheitsmoment I 198
Trassierung v. Landstraßen . . . III 603
— v. Eisenbahnen . III 715
Trafs . . . . I 685, 698
—mörtel . . . . I 698
Treibachse, verschiebbare . . . . III 848
—kette . . . . . I 814*
—öl f. Motoren II 256*, 781
—riemen . . . . I 733, 795
— —, Festigkeit . I 501
—scheibe II 408, 435, 439*, 454
—zylinder . . . II 390
Trenckregler . . . I 971
Trennschalter . . II 949
Treppe II 687; III 56, 257, 298, 316, 372, 454
—ngewölbe . . . III 288
—nrost . . . . II 89
Triangulation, Klein- III 20
—, Landes- . . . III 46
Trick-Schieber II 152, 754
Triebradsatz . . III 843
—stockverzahnung I 215, 769
—wagen, Eisenbahn- III 856, 860*
— —, elektrische Zahnrad- . . III 898, 900
—werkkanal . . . III 577
— —welle I 817, 818*, 819*; III 458, 469
— —zahnrad . . I 780
Trigonometrische Höhenmessung III 31
— Punktbestimmg. III 20
Trimm . . . II 628, 657
Trinkwasser . . III 651
—brunnen . . . III 645
Trochoide . . II 656, 711
Trockenanlage . III 462
—bagger . . . . III 482
—faule . . . . . I 721
—förderer . . . . III 481
—isoliermittel . . I 688
—legen v. Baugruben III 193
Trocknen d. Holzes I 720
Trommelanker . II 880
— —wicklung . . II 871
—, Fördermasch.- II 432, 439*, 452
—, elektr. . . II 1006
Trommel, Ketten- I 844
—, Reibungs- . . II 408
—, Seil- I 855; II 409, 432, 437*, 432
—wehr . . . . . III 517
Trompetengewölbe III 701
—rohr, kupfernes . I 923*
Tropfverfahren (Abwasserreinig.) . III 710
Trosse . . . II 683, 701*
Tschibyscheffscher Lenker . . . I 905
—s Verfahren (Flächeninhalt) . . I 133, 631
TS-Diagramm . . I 396
T-Stück, kupfernes I 920*
Tuff . . . I 685; III 55
—, Festigkeit . . I 498
—stein, Kunst- . . I 682
Tür III 287, 368, 456, 466
—verschluss, Aufzug- II 415
Turbine, Dampf-, s. dort.
—nkammer . III 277, 586
—nkanal . . . . III 585
—nschaufel, Dampf- II 221
—, Wasser- . II 288, 587
—, Wind- . . . II 2, 3*
Turbodynamo . . II 904
—gebläse, -kompressor II 605
Turbulente Strömung I 350
Turmdach . . . III 309
—drehkran . . . III 423
—, Geschütz- . . II 707*
—helm . . . III 298, 354
—kran . . . . . II 478
—spitzen . . . . III 168

U.

Ueberdruckdiagramm (Kolbenkraftmasch.) I 251
—turbine, Dampf- II 216, 225, 236
— —, Wasser- . . II 289
— —, Schiffs- . . II 757
Ueberfall (Hydr.) I 268, 271
—, Regen- . . . III 696
—wehr . . . . . I 273
Uebergangsbogen, Schienen- . . III 742
—skurve, Zahnradb. III 898
— v. d. 90°-Teilg. in 100°-Teilg. d. Quadranten . . . I 42*
Ueberhang (Eisenbahnwagen) . . III 863*
Ueberhitzer, Dampf- II 21
— —, Lokomotiv- III 351
— —, Lokomotiv-, Heizfläche . . III 857
— —, Schiffskessel- II 770
—ter Dampf . . . I 421
—ung d. Eisens . I 631
— —stemperatur . III 852
—, Zwischen- . II 132

Digitized by Google

Ueberhöhung, Schienen- III 741, 742
– kommutierung . II 884
– kompoundierung II 868
– landbahn . . . II 1000
– –zentrale . . III 590
– lappungsnietung I 756; II 26
– lastung d. Dynamomaschinen, Motoren, Transformatoren II 866
– preisliste, Grobbleche, Böden usw. . II 101
– setzungskolben . II 423
– – –verhältnisse für Werkzeugmasch. II 353
– – –verhältnis (Zahnrad) . . . I 766, 782
– spannungsschutzapparat . . . II 950
– stauung (Rieselfeld) III 562
– strömrohr (Dampfmasch.) . . . II 196
U-Eisen . . I 642*, 650*
Uferbefestigung . III 276
– – v. Kanälen . III 532
– deckwerk . . . III 504
– mauer . . . . III 217
Uhlhornsche Klinkenkupplung . . I 835
U-Linie . . . . III 97
Ultraviolette Bestrahlung des Wassers . III 671
Ulbrichtsche Kugel II 810
Umdrehungsellipsoid, Inhalt . . . I 136
– fläche (-Körper) . I 137
– –, Schwerpunkt I 164
– körper, Schwerpunkt . . . . I 164
– paraboloid, Inhalt I 136
– – (kreisende Flüssigkeit) . . . . I 265
– regler . . . . I 800
– zahlen f. Lokomotiven III 844*
Umfangsgeschwindigkeit, Anker v. Gleichstrommaschinen II 879
Umfassungsmauer . III 284
Umformer . . . II 917
–, Regel- . . . II 955
Umgekehrtes Gewölbe (Grundb.) . . III 199
Umgrenzungslinie (Normalprofil) III 722, 824, 864, 866
Umkehr-Zustandsänderung . . I 394
– ung (Determinanten) I 49
Umkleideraum . . III 474
Umladeeinrichtung (Eisenbahn) . III 776
Umlaufpumpe . . II 763
–, Schleusen- III 539, 547
Umlaufzahl . . . I 146
– – en, synchrone Drehstrom- . II 959*
– –, spezifische (Turb.) II 291; III 588
Umrechnung, 90°-Teilg. in 100°-Teilg. des Quadranten . I 42*
Umschlagsmenge (Hafen) III 521
Umsetzeinrichtung, Eisenbahnwagen III 805
Umsteuermaschine II 765
– ung . . . . . II 177
– –, Kulissen- . II 178
– –, Lenker- . . II 186
– –, Lokomotiv- III 843
– – mit unrunden Körpern . . . II 189
– vorrichtung, Verbrennungsmotor II 783
Umwandlung d. Koordinaten . . I 90, 115
Unabhängigkeitsprinzip d. Einzelbewegungen I 143
Unbestimmte Form eines Bruches . I 68
Unbeweglichkeitsgrad (Regler) . . . I 962
Undichtheitsverlust (Dampfmasch.) II 132, 145
Unempfindlichkeitsgrad (Regler) . . I 962, 804
Unfreie Bewegung I 187
Ungleichförmigkeitsgrad d. Regelung I 946, 961, 964, 966
– (Parallelbetrieb v. Wechselstrommasch.) II 909
– (Verbrennungsmasch.) II 276*
– (Wasserturbinen) II 304
Ungünstigste Laststellung a. einfachem Balken III 82
Unica-Papierstoffzahnrad I 783
Union, internationale (Patentgesetz) . I 1009
Unipolarmaschine . II 870
Universaleisen . . III 921
Unstetigkeitsfläche I 849
Unterachsung . . III 597
– bau, Eisenbahn- . III 733
– –, Landstraßen- III 609
– –, Touristen-Seilbahn . . . . III 910
– –, Zahnradbahn III 888
– bettung städt. Straßen III 622
– feuerung . . . II 38
– gestell, Eisenbahnwagen . . . III 862
– gurt, Biegungslinie III 102
– –, Durchbiegung, Winkel-, Längenänderg II 942
Untergurtlaufwinde II 481, 488*
– haltung d. Landstraßen III 609, 617
– – d. Straßenbahnen II 990
– skosten d. Eisenbahn-Fahrzeuge III 874
– irdische Wasserhaltung II 569
– kommutierung . II 884
– lagplatte, Schienen- III 747, 752
– legscheibe . I 743*, 745*
– leitungsbetrieb (el. Bahn.) II 994, 995
– schlächtiges Wasserrad II 287
– seil . . . . . II 432
– suchungszeitraum für Eisenb.-Fahrzeuge III 873
– windgebläse . . II 626
U-Querschnittsmoment I 537

V.

Vakuum b. Dampfturbinen II 217
– heizung . . . . III 425
– meter . . . . II 311
Vanadiumstahl I 489*, 491*, 492*
Variationen . . . I 49
Vautiersche Gleichung (Standseilbahn) III 908
Vektor . I 121, 140, 203
– ielles Produkt . I 122
– linie . . . . . I 121
–, Moment- . . . I 156
– multiplikation . I 123
– produkt . . . . I 216
– rechnung . . . I 121
Ventil . . . . . I 932
–, Absperr- . . . I 942
– belastung . . . I 933
–, Dampf- . . . II 164
– – (Lokomotive) III 843
– – absperr- . . II 62
– erhebungskurve II 172, 272
–, Fahrzeugmotor- II 799
–, Gebläse- . . . II 616
–, gesteuertes . . I 938
–, Gruppen- . . I 938
– hub . . . . . I 933
–, Klappen- . . . I 939
– – (Luftpumpe) II 211
–, Luftpumpen- . II 762
–, mehrsitziges . I 936
–, Pumpen- . . . II 585
–, Regulier- (Drossel-) I 428
–, Rohrbruch- . . II 63
–, Sicherheits- (Dampfkessel) II 60, 70, 776*; III 837
– – (hydr. Presse) I 939

Digitized by Google

Ventil, Speise- II 63, 68, 777
—stahl . . . . . I 491
—steuerung, Dampfmaschine II 114, 164
— —, Fördermasch. II 446
—, Verbrennungsmasch. II 271
—, Widerstandszahlen I 306
Ventilator . II 593, 602*, 603*
—, Bauarten . . . II 599
— f. Lüftg. . . . III 398
—, Schiffs- . . . II 690*
Venturimesser . . II 313
Verankerung, Kessel- II 29, 30, 77, 80, 89
—, Träger- . . . III 323
Verbau . . . . . III 188
Verbindungen, chemische . . . I 610* ff.
— gedrückter Stabteile v. Hauptträgern III 958, 959
—sweg . . . III 602, 605
Verblattung . . . III 300
Verblendmauerwerk III 280
—stein . . . . I 693, 714
Verbrennung I 455, 461
— gasförmiger u. flüssiger Brennstoffe I 468
— i. Dampfkessel . II 34
—sgase, -erzeugnisse I 461, 465; II 35
—sgleichungen . . I 463
—sraum . . . . . II 253
—skraftmaschine II 242, 795
— —, Arbeitsverfahren, Arbeitstakte II 242, 243
— —, dynamische Berechnung . . II 244
— —, Einzelteile . II 264
— —, Ermittlung der Hauptmafse . II 255
— —, innere Arbeitsvorgänge . . II 249
— —, Zylinder . I 907
—smotor als Schiffsmaschine . . II 780
— —, Beanspruchg. d. Hauptgetriebeteile II 788
— —, Kolben I 873; II 264
— —, Kreisprozefs I 402
—srechnung . . . I 475
—srückstand . . . III 798
—stemperatur . I 465, 466; II 32
Verbunddampfmaschine I 427; II 117, 122*
— —, ausgeführte Schiffs- II 740*
—dynamomaschine II 863, 868, 869
—fördermaschine . II 440
—kompression . . I 411
—kompressor . . II 614
—lokomotive . . III 850
Verbundplatte . I 603
—wicklung . . . II 869
Verdampfer . . I 428
—ung, Dampfkessel II 33*, 769
— —, Lokomotivkessel III 825
— —sversuch . . II 99
— —swärme . I 380*, 413
Verdichtungshub, Verbrennungsmotor II 251
—spannung, -temperatur, Verbrennungsmotor II 252*
Verdrängungsschwerpunkt . . . . II 641
—widerstand . . I 323
Verdrehungswinkel, verhältnismäfsiger I 568, 570, 571*
Verdunstung . III 527, 562, 593
Vereinigung v. Wasser- u. Wärmekraft III 593
Vereinslenkachse . III 869
Verflüssigte Gase, Dichte u. Volumen I 372*
—ung . . . I 412, 413*
Vergaser, Motorwagen II 794
—ung . . . . . I 478
Vergitterung . . III 958
Verglasung . III 382, 448
Vergleichstaf. zusammengesetzter Mafseinheiten I 1000
Vergnügungsbahnen III 907
Vergröfserung . III 12
—sfaktor (Wechselstr.-Parallelbetr.) . II 909
Vergüten d. Stahles I 631
Verhältnismäfsige Belastungsänderung, Drehzahländerung (Wasserturbine) II 304
—r Arbeitsverlust . I 253
—r Verdrehungswinkel I 568, 570, 571*
Verkämmung . . III 300
Verkehrslast f. eiserne Brücken III 62, 65 ff.
— f. gewölbte Brücken III 60, 65 ff., 1025, 1041
Verkürzung, Stab- . I 508
Verladebrücke II 460, 504
—einrichtung, Hafen- III 521
—seilbahn . . . II 554
Verlängerung, Stab- I 508
Verlust d. el. Gleichstrommaschine II 862
—, Transformator- II 923
—ziffer (Hysteresis) II 841
Vermessungskunde . III 1
Vermittelnde Beobachtung (Vermessgsk.) III 50
Verpuffungsmaschine II 242
— —, Schiffs- . . II 780
—verfahren (Kreisprozefs) II 245
Versatz (Balkenverbindung) . . III 300
—, Spül- . . . . II 529
Verschiebbare Treibachsen, Laufachs. III 848
— —keit d. Mittelachsen III 741, 869
—eanlage, -dienst . III 777
—ung, virtuelle I 182; III 104
— —, virtuelle, i. einem Tragwerk . . III 121
— —splan (Williotscher) III 107
— —, willkürliche I 182
Verschraubung . . II 88
Verschublokomotive II 492
Versenken d. Wassers III 557
Versickerung III 527, 562, 654, 655*
Versteifte Kette III 102, 154
—ungsbalken d. Kette III 155
— —winkel in Blechträgern . . . III 925
Versteinerungsgründung III 221
Vertauschbarkeit d. Bewegungen . . I 355
Verteilungsleitung, elektr. II 964
Vertikalkraft s. Querkraft
Verwandlung, Metermafs — Fufsmafs . I 988*
—stafeln v. Mafseinheiten I 1000* ff.
Verzahnung . I 212, 768
—, Evolventen- I 215, 770
—, Triebstock- I 215, 769
—, Zykloiden- I 215, 766, 773
Verzögerungsdruck I 317
V-Fläche, -Linie . III 101
Vianellosches Verfahren (Knickfestigkt.) I 519
Vieh, Gewicht . . II 708*
Vieleck, Inhalt, Abmessungen I 130, 131*
—, Kern . . . . I 575
—, Querschnittsmoment . I 536, 569, 571
—, Schwerpunkt . I 167
—, Trägheitsmoment I 199
Vierblatt . . . . I 111
Viereck, Flächeninh. I 130
—, Schwerpunkt . I 167
—, Trägheitsmoment I 198
Vierfach-Expansionsmaschine, ausgeführte Schiffs- . . . II 743*

Digitized by Google

Viertakt . . II 242, 243
maschine, Ausführungsarten II 259, 260, 262
— —, Leistungskoeffizienten . . . II 258*
— , Schiffs- . . II 781
Virtuelle Formänderungsarbeit III 104, 182
— Verschiebung I 182; III 104, 121
Visier . . . . . III 13
Völligkeit (Dampfdiagramm) II 113, 139*
—sgrad (Festigkeitsl.) I 484, 487
— — (Schiffb.) II 629, 641
Vollkommene Gase I 396
Vollwandiger Balken III 119
—r Bogen . . . . III 145
—r Träger a. 8 Stützen III 136
—s Tragwerk . . III 121
Volt . . . II 837, 838
—ampere . . . . II 837
Volumen, kritisches I 413*
—n, spezifisches . I 149
—trischer Wirkungsgrad II 625
Vorausströmung, Einzyl.-Dampfmasch. II 107, 147
—eilwinkel . . . II 146
—einströmung . . II 147
—feuerung . . . II 39
—filter . . . . . III 665
—garten . . . . III 644
—gelege . I 793, 809; II 350, 353
—schubgeschwindigkeit II 350, 351*, 352*, 366
—teilhaftester Ausbau v. Wasserkraftanlag. III 589
— — Kanalquerschnitt I 312
— — Rohrdurchmesser I 452, 911; III 580
—wärmer, Speisewasser- II 54, 198
Voute . . . . . III 221
—nplatte . . . . III 376
—nverstärkung . . III 231
Vulkanfiberzahnrad I 783
— Kupplung . . I 834
—olpflastersteine . I 693

W.

Waffelblech . . . I 662
Wage . . . I 184; II 312
Wagen, s. auch Fahrzeug, Fuhrwerk.
—achse, Eisenbahn- III 868
—, Eisenbahn- . . III 862
— el. Bahnen . . II 995
—feder . . . . . III 598
— —, Eisenbahn- . III 869
Wagen, Förder- II 492, 496*
—gewicht (Eisenb.) III 873
— — (elektr. Bahnen) II 998*; III 598
— — (Zahnradbahn) III 904
—, Grubenbahn- . III 906
—halle elektr. Bahnen II 999
—kasten, Eisenbahn. III 870
—, Kipp- . . . . II 496
—kipper . . . . II 499
—ladung . . . . I 619*
—schuppen . . . III 803
—, Seilbahn- II 544, 548
—, Strafsen- III 596*, 597
—, Touristenbahn- III 912
—umsetzeinrichtung III 805
—werkstatt . . . III 882
—, Zahnradbahn- . III 904
Wagerechtstellen v. Linien, Achszapfen, Drehachs. III 8
Wägeeinrichtung, Eisenbahn- . . III 806
—ung . . . . . II 312
Wahrscheinlichkeitsrechnung . . I 84
Waldweg . . III 602, 605
Walmdach . . . III 308
Walschaert-Umsteuerung II 182
Walzasphaltstrafse III 618
—eisen f. Brückenbau III 921
— —, Normalprofile I 637, 638* ff.
— —profile (Knickfestigkeit) . . . . I 518*
—e, gedrückte . . III 976
—endrehbank . . II 361
— —gesperre . . I 864
— —lager, Brücken- I 171; III 974
— —wehr . . . . III 517
—werkprodukte A. u. B. I 636
—e, Strafsen- III 62, 598, 614, 615*
—träger i. Betondecke (Brückenb.) . III 1002
— , Querschnittermittlung . . . . I 558
Wälzkurve, -kreis I 215
—ungskreis . . I 766, 768
Wand . . . . . III 284
—auflager . . . III 321
— , Baustoff für- . I 686
—, Eisenbeton- . III 260
—, Eisenfachwerk- III 358
—ern d. Schienen III 748, 749, 892, 910
—, Fachwerk- . . III 313
—putz . . . . . I 690
Warmaufziehen . I 606
—wasserheizung III 411, 428
Wärmeabgabe d. Beleuchtung II 880*; III 390*
— — d. Menschen III 390
Wärmeabgabe umlaufender Körper . . I 384
— — v. Heizflächen I 389; III 406
—absorption . . . I 389
—äquivalent, chemisches II 845*
— —, mechanisches I 152, 393
—arbeit, indizierte, Verbrennungsmotor II 248
—ausdehnung . I 369* ff.
— —, Bronze . . I 494
— —, Schienen . III 753
—ausnutzung d. Dampfmaschinen II 133, 134*
—austausch zwischen Dampf u. Zylinderwand . . . . I 427
—bilanz (Dampfmasch.) II 100, 133
—diagramm . . . I 396
—durchgang . . I 385, 389
— —, Kondensationswassermenge in Rohrleitungen I 451*
—eigenschaften der Körper . . . I 369
— — vollkommener Gase . . I 396, 398*
—einheit I 152, 373; II 844
—ersparnis durch Rohrumhüllung . . I 452*
—grade f. geschlossene Räume III 405*, 462*
—inhalt . . . . I 395
—lehre . . . . . I 369
— —, Hauptsätze der Thermodyn. I 393, 396
—leitung . . . . I 381
—leitzahlen f. verschiedene Stoffe I 385*, 386*, 387*
—lücke (Schienen) III 753
—messung . . . II 325
—prozefs, umkehrbarer I 394
—, Schmelz- . . . I 380*
—schwankungen für Brücken III 73, 78
—schutz I 451*, 452*; III 406, 408*
— —mittel I 386*, 387*, 451*, 688; II 699; III 408
—, spezifische, Dämpfe I 413, 423*, 435 bis 439
— —, Flüssigkeiten, Körper I 373, 374* ff.
— —, Gasmischungen I 401
— —, vollkommene Gase I 397, 398*, 400*
—tönung . . . . II 844
—übergang durch Leitung I 381
— — d. Strahlung I 389
— —szahlen . . I 381* ff.
— u. Wasserkraft III 593

Wärme, Verdampfungs- I 389°, 417°, 419°, 435 bis 438°
— verlust, Dampfkesselanlage . . . II 97
— — durch d. Verbrennungsgase I 465, 466°
— — geschlossener Räume . . III 402°
— — v. Heizkanälen III 423
Warren-Kegelräderfräsmaschine . . II 374
Warzenblech . . . I 662
Waschein richtung i. Fabriken . . . III 474
Wasserabdichtung I 718; III 222, 531
—abflufsmenge III 498, 571, 610°, 655°, 685
—abscheider . . . II 196
—, Absorptionsvermögen I 280, 380
—, Aufbereitung . III 665
—, Ausflufs I 265, 266, 270; II 314
— -zahlen . . . I 272
—bau . . . . . III 497
— —, landwirtschaftlicher . . . . III 555
—bedarf d. Bahnhöfe III 790
— — f. Schiffe . . II 708
— — v. Kanälen . III 527
— — (Wasserleitg.) III 652°, 658°, 654°
—behälter III 671, 678°, 793
— beschaffenheit . III 792
—, Beurteilung . . III 651
— bremse . . . . II 322
—dampf, Ausflufs I 441; II 218
— —, Drosselung I 453, 454
— —, Druckabfall in Rohrleitg. . . I 450
— —, Druck d. gesättigten —. . . I 414°
— —, Energie . I 415, 417°, 419°, 422
— —, Entropie . I 415, 416 bis 418°, 422
— —, Expansionskurven . . . I 415
— —, Gewichtstafel I 403°
— —, kritische Geschwindigkeit . I 418
— —, kritischer Zustand . . . . I 413°
— — -Luftgemisch I 402, 403°
— —, nasser . . I 413
— —, Rauminhalt I 415, 416 bis 418°, 422
— —, Spannungstafeln I 403, 414, 416 bis 418
— —, spez. Wärme I 398, 400°, 423°
Wasserdampf, Temperaturtafeln I 418°, 419°, 420°
— —, überhitzter . I 421
— —, Wärmedurchgang d. ebene Wände I 387
— —, Wärmeinhalt I 415, 417 bis 419°, 422
— —, Wärmeleitzahl I 386°
— —, wichtige Wärmewerte . . . . I 398
— —, Zähigkeit . I 348
—dichter Putz, — Umhüllung . . III 228
—, Dichte u. Volumen b. versch. Temp. I 372°
—durchflufs . . I 277, 316
—druckprobe II 299, 314
—enteisenung . II 60; III 668
—enthärtung . II 57, 59
—, Entsäuerung . III 671
—erwärmung i. Rohrleitg. . . . . III 683
—fassung . . III 577, 656
—gas I 455, 479, 480; II 817
— —, Explosionsgrenzen I 472
— — -Schweifsverfahren I 673
— —, Verbrennung I 472, 473
—gesetz . . III 567, 570
—gewinnung III 654, 791
—glas . . . . . I 716
—haltung (Baugruben) III 193
— —maschine . . II 587
—, Härte . . . III 651°
—heizung III 411, 420, 421, 428
—kalk . . . . . I 698
—kraftanlagen, Ertragsberechnung III 594, 595°
— —, Kraftpreis . III 595
— —, Vorarbeiten, gesetzl. Bestimmungen III 569, 570
— —, Wirtschaftlichkeit d. Kraftausbaues III 589
—kraft, Kosten . . III 594
— —nutzung a. kanalisierten Flüssen III 592
—kran . . . . . III 795
—, kritische Werte I 413
—lastseilbahn . . III 207
—leitung III 580, 678, 793
— —, bürgerlicher Druck . . . III 654
— —, Drucksteigerung b. schnell. Abschlufs III 582
— —, Fabrik- . . III 877
— —, Verhalten i. Betriebe . . . . I 237
—linie . . . . . II 629
Wasserlinienform II 636
— —skala . . . II 642
— —, Trägheitsmomente II 632
—, Löslichkeit v. Gasen I 280, 380°, 381°
—mangel . . . III 574°
—messung . . . II 313
—mörtel . . . I 697, 702
—motoren II 282, 288; III 587
—pfosten . . III 682, 796
—rad . . II 282; III 587
—raum (Dampfk.) II 5
—recht . . . . . III 567
—, Reibungszahl . I 291
—rohr . . II 29, 77, 80
— —kessel . . II 13, 779
— —kessel, ausgeführte Schiffs- . II 772, 775°
—schlag . . . . III 682
—schlofs III 578, 582, 656
—schnecke II 557; III 556
—, See-, spez. Gewicht I 282; II 635
—, Siedepunkte . I 379°
—, Speise- II 57; III 792
—, spezifische Wärme I 374°
—sprung (-schwelle) I 313
—standsdauerlinie (Flufsbau) . . III 498
— —zeiger II 64, 69, 777; III 837
—station (Eisenb.) III 792
—stoff I 379, 380, 472, 473
— —, Dichte u. Volumen verflüssigten — I 372
— —, Explosionsgrenzen I 472
— —, kritische Werte I 413
— — -Luftgemisch, Zündgeschwindigkeit I 471°
— — -Schweifsverfahren I 671
— —, spez. Gewicht I 335
— —, spez. Wärme I 398, 400°
— —, Verbrennung I 473
— —, wichtige Wärmewerte . . . . I 398
— —, Zähigkeit . I 348
—, Sterilisation . III 671°
—, Stofs des — I 317; III 682
—strahl, Hydraul. Druck, Arbeitsvermögen I 311
— —pumpe . . . II 562
— —, Steighöhe, Sprungweite . . . . I 316
—, Stromwiderstand I 323
—, Süfs-, spez. Gewicht I 282°, 379°
—, Trink- . . III 651, 793
—turbine II 288; III 585, 587
— —n, Berechnung, Bau II 293

Wasserturbine, Entwurf II 291
— —, Regelung II 301; III 589
— —, Verhalten unter veränderten Verhältnissen, Wirkungsgrad II 291; III 588
— turm III 368, 671, 675, 678*, 792
— —, Eisenbeton- III 264
— u. Wärmekraft III 593
—verbrauch III 652*, 653*, 654*
— — durch Schleusungen . . . III 528
— verdrängung II 628, 632
— verhältnisse deutscher Flüsse . . III 655*
— versenken . . . III 557
— versorgung . . III 651
— — d. Bahnhöfe III 790
— — v. Fabriken . III 465
— verteilung . . . III 678
—wage . . . . . III 8
—, Weichmachen . III 670
— wirtschaftsplan . III 575
—, Zusammendrückbarkeit . . . I 260
Watt . . . . . II 837
— loser Strom . . II 852
— sches Parallelogramm I 906
— stundenzähler . II 949
Wechselgeschwindigkeit d. Poles . I 210
— getriebe . . . . I 792
—, Motorfahrzeug II 801
— kreis, -Pol . . . I 211
— polmaschine . . I 895
— wirkungen, elektromagnetische . II 846
— wirkungsgesetz . I 149
— strom, Darstellg. durch Zeichnung. . II 854
— —, Eigenschaften II 953
— —, Grundgesetze II 850
— —, Systemwahl II 959
— — lampe II 824*, 825*, 826*
— —leitung . II 966, 970
— —maschine, Bauart II 895
— —maschine, Bemessg. v. Antriebsleistg. u. Größe . . . II 852
— —maschine, Berechnung . . . . II 899
— —maschine, Charakteristik . . II 902, 903
— —maschine, Hauptabmessungen . II 903
— —maschine, Parallelbetrieb, -schaltung II 906, 940
— —maschine, Spannungsregelung II 941
Wechselstrommaschine, Turbodynamo . II 904
— — maschine, Wicklung II 896
— —motor, s. auch Drehstrommotor II 953
— —motor, einphasiger II 956
— —motor, Regelung II 953
— —transformator II 918
Wegebau . . . . III 602
—erampe, Inhalt . I 137
—erecht . . . . III 633
—e, untergeordnete III 602
—übergang (Eisenbahn) III 767, 894, 900
Wehr (Hydromech.) I 268, 273
—anlage . . III 515, 576
—, bewegliches . . III 516
—, Eisenbeton- . . III 276
—, festes . . . . III 515
—, Mefs- . . . . III 572
—messung . . . II 314
Weiche, Eisenbahn- III 756, 760, 763, 772, 773, 781
—e, Gruben bahn- . III 906
—enanordnung (Eisenb.) III 760, 763
—enverschlingung III 764
—, Straßenbahn . II 987
—e, Zahnradbahn- III 893
—lot. . . . . I 681*
—machen des Wassers III 670
Weisbachsche Reibungszahl λ. . . . I 292
Weifsblech . . . I 662
—metall . . . . I 680
— —, Festigkt. . . I 496
—scher Kondensator II 203
Wellblech . . I 662, 664*
— —dach III 385, 386, 441
— —normalprofile I 1024 ff.*
— —, Querschnittsmoment . . . I 538*
— —, Zink- . . I 674, 675*
—e, biegsame . I 820, 821*
—e, komprimierte . I 820
—e, Meeres- . . II 656, 711
—enleitung I 817, 818*, 819*; III 458, 469
—e, Triebwerk- . I 816
— —, Schutzvorrichtg. III 469
—enwiderstand I 323, 328; II 717
—rohr . . . . . II 84
— —kessel . . . . II 8
Wendegetriebe . I 792
—kreis, -Pol . . . I 211
—latte . . . . . III 28
—pol (Dynamomasch.) II 887
—punkt . . . . . I 94
Werkstätte für elektr Bahnen . . . II 999
— —narbeiter, Anzahl III 875
—zeugmaschine . II 328
— —maschinengestelle II 355
— —schleifmaschine II 375
— —schneide . . II 345
— —stahl . . I 492*, 628*
Westinghouse-Bremse III 814, 818, 820
— Leblanc-Schleuderluftpumpe . . . II 206
—-Turbine . . . II 240
Westonsche Bremse II 384
Westphalsche Decke III 373
Westrumit . III 618, 638
Wetterleistung . . II 597
w-Gewicht . . . III 111
Wheatstonesche Brücke II 849
Whitworth-Gewinde I 741, 744* bis 747*
Wickelfaktor d. Wechselfeldes II 892
—trommel . . . II 409
Wicklung, Anker- II 870, 879, 896
—, Magnet- . II 880, 890
—schema . . . . II 871
—, Transformator- II 919
—, Verbund- . . II 869
—, Wechselstrommaschine . . II 896
Widder, hydraulischer . . . . II 562
—stofs . . . . . III 682
Widerlageranschluß d. Fahrbahn (Straßenbr.) III 1023
— —anschluß (Eisenbahnbrücke) . III 994
— —, Brücken- III 1027 ff.
— —, Gewölbe III 183, 291 ff.
— — gewölbter Brücken III 1048
—spruchsgleichung (Vermessungsk.) III 18
— stand, Anlafs- II 892, 916
— —, Bahn- . . I 187
— —, Belastungs- II 894
— — d. Achslagerung I 233
— —, Durchbiegungs- I 277
— —, elektr. II 837, 838
— —, elektr. Leit- II 842, 965
— — in Rohrleitg. I 277
— —, Lokomotiv- (Zahnradb.) . . III 903
— —, magnetischer II 841
— —, Richtungs- (Impedanz) . . II 851
— —, Schiffs- I 323; II 716 ff.
— —sdiagramm (Kolbenkraftmasch.) . I 951

Widerstandsgröfse d. Querschnittes I 529, 530
— —shöhe (Hydr.) I 281 ff., 288°
Widerstandsmoment (Festigkt.) . . I 524
— für wichtige Trägerbelastungsfälle I 546° ff.
— gegen Drehung. I 570
— üblicher Querschnittsformen I 534, 535° bis 545°
— v. Blechträgern III 926° ff.
— v. Turmsparren III 167
— v. Walzprofilen I 641° ff.
— v. Wellblech I 664°, 1025°, 1027°
Widerstandszahlen Absperrvorrichtungen. I 305, 306°
—, Dampfausflufs I 112, 446°, 447°; II 218
—, Eisenbahnzüge III 717
—, Flüsse, Kanäle I 310°, 311°
—, gefüllte Rohrleitgen I 281, 283° ff.
—, Gleisbahn, Strafsen, Wege . . . III 329°
—, Lokomotiven . III 717
—, Luftausflufs I 444°, 445°
—, Rohrleitungen . I 256
— — f. Gase u. Dämpfe I 119°
—, Rohrstücke zur Stromrichtungs- oder Querschnittsänderung I 298 ff.
—, Schiffs- I 324; II 723°, 724
—, Wasserrohrleitungen I 291 ff.
Widerstand v. Flüssigkeiten gegen umströmte Flächen und Körper (Stromwiderstand). . . . I 323
Widnmann-Steuerung II 168
Wildbachverbauung III 509
Williotscher Verschiebungsplan . . III 107
Wind . . I 355; III 556
—druck I 357; II 655°; III 56, 161, 557°
— — a. Brücken . III 72
—e . . . . . II 407
—e, Aufzug- . . . II 413
—e, Bau- . . . . III 490
—e, Lauf- II 455, 460, 482, 483
—e, Schiffsladeg- . II 656°
—e, Speicher- . . II 497
—e, Zahnstangen- . II 385
—geschwindigkeit I 355, 356°; II 655°
—, Häufigkeit . III 556°
—hoffsche Bremse . II 383
— — Lastdruckbremse II 100
Windhoffscher Stirnradflaschenzug . . II 386
—joch . . . . . I 175
—kessel . . II 579, 582
—messung . . . II 319
—rad, -turbine II 2, 3°; III 556
—skala . . . . . II 655
—stärke . . . . I 356°
—verband . . . . III 74
— (Brückenb.) III 979
— — (Brückenb.), Gewicht . . . III 1026
Winkelabsteckung III 4
—änderung a. steifen Knoten . . . III 118
— — eines Stabdreiecks III 111
— — (Festigktsl.) I 481, 485
— —, Untergurt- . III 942
—eisen . I 638°, 646°, 651°; II 76, 79
— —, Nietung . . I 761
—geschwindigkeit, -beschleunigung I 146, 765°
— —, Parallelogramm der . . . . I 206
— f. d. Ebene . . . I 91
— f. Raume . . I 113, 114
—messung . . III 13, 15
—portalkran . . . II 479
—prisma . . . . III 6
—querschn., Querschnittsmoment . I 537, 539
—rad . . . . . I 774
—riementrieb . . I 799
—spiegel . . . . III 4
—zahnrad . . . I 784, 785
Winterdeich . . . III 50.6
Wipper (Kippvorrichtg.) II 503
—ausleger, -kran II 474, 475, 480
—hammer . . . . II 331
Wirbelbewegung . I 337
freie Bewegung . I 336
— — Strömung i. Leitg. I 349
—linie, -faden, -ring I 337
—strom (Induktion II 810
— —verlust i. Anker II 878
—strömung . . . I 350
— —, Gase u. Dämpfe i. Rohrleitg. . I 118
—vektor . . . I 219, 337
Wirksame Fläche (Zug u. Biegung) . I 573
Wirkungsgrad s. auch Arbeitsverlust.
—, adiabatischer (Gebläse) . . II 609, 613
—, Dampfkessel- II 32; III 827
— d. Dampfmasch. I 121, 425; II 133, 135°
— d. Dampfturbinen II 1[illegible]
— d. Kreisprozesse I 4[illegible]
— d. Schaufelrades II [illegible]
— d. Schiffsschraube II [illegible]
—, Gebläse- II 609, 615, [illegible]
—, indizierter . . I 4[illegible]
— —, d. Dampfmasch. I 42[illegible]
—, isothermischer (Gebläse) . . II 6[illegible], 6[illegible]
—, Ketten- u. Seilrollen I 2[illegible]
—, Luftschraube . I 34[illegible]
—, mechanischer . I 25[illegible]
— — (Dampfmasch.) II 140, 142°
—, Rohrleitungen I 281, 301
—, thermischer, d. Dampfmasch. . . . . I 424
— —, d. Verbrennungsmotoren II 245, 247, 248
—, thermodynamischer, Dampfmasch. II 134, 135°
— —, Dampfturbine II 21[illegible]
—, Transformator . II 92[illegible]
—, Ventilatoren II 597, 60[illegible]
—, volumetrischer (Gebläse) . . . . II 61[illegible]
—, Wasserturbine . II 29[illegible]
—, wirtschaftlicher, motorischer Brennstoffe II 257°
— —, d. Verbrennungsmotoren . . . II 249
Wirtschaftlicher Querschnitt (el. Leitg.) II 9[illegible]
— Rohrdurchmesser I 432, 914
Wirtschaftlichkeit des Kraftausbaues III 389
Wirtschaftsweg . . III 6[illegible]
Wismutlot . . . I 681°
Wöhlersche Dauerversuche (Festigk.) I 510
Wohlfahrtseinrichtung III [illegible]
Wohnungsaufsicht, -pflege . . . . III 650
—kolonie . . . . III 650
Wolframdraht . . I 501
—stahl . . . I 491°, 686
Woltmannmesser II 318
—scher Flügel . . II 318
Wood-Metall . . . I 682
Woolfsche Dampfmasch. II 116
Wucht . . . . I 151
—diagramm, Massen- I 951
Wulsteisen . I 648°, 649°
Wurfbewegung . I 143
—bremse, Esterssche III 817
—förderer . . . . II 514
—rad . . II 558; III 836
Würfelfestigkeit I 484; III 932
—, Trägheitsmoment I 201

Wurmfraß . . I 722, 724
Wurzeln I 2° bis 23°, 46
— d. Einheit . . I 47
Wüst-Zahnrad . . I 784

X.

Xylolith . . . . I 689

Y.

Yarrow-Kessel . . II 773

Z.

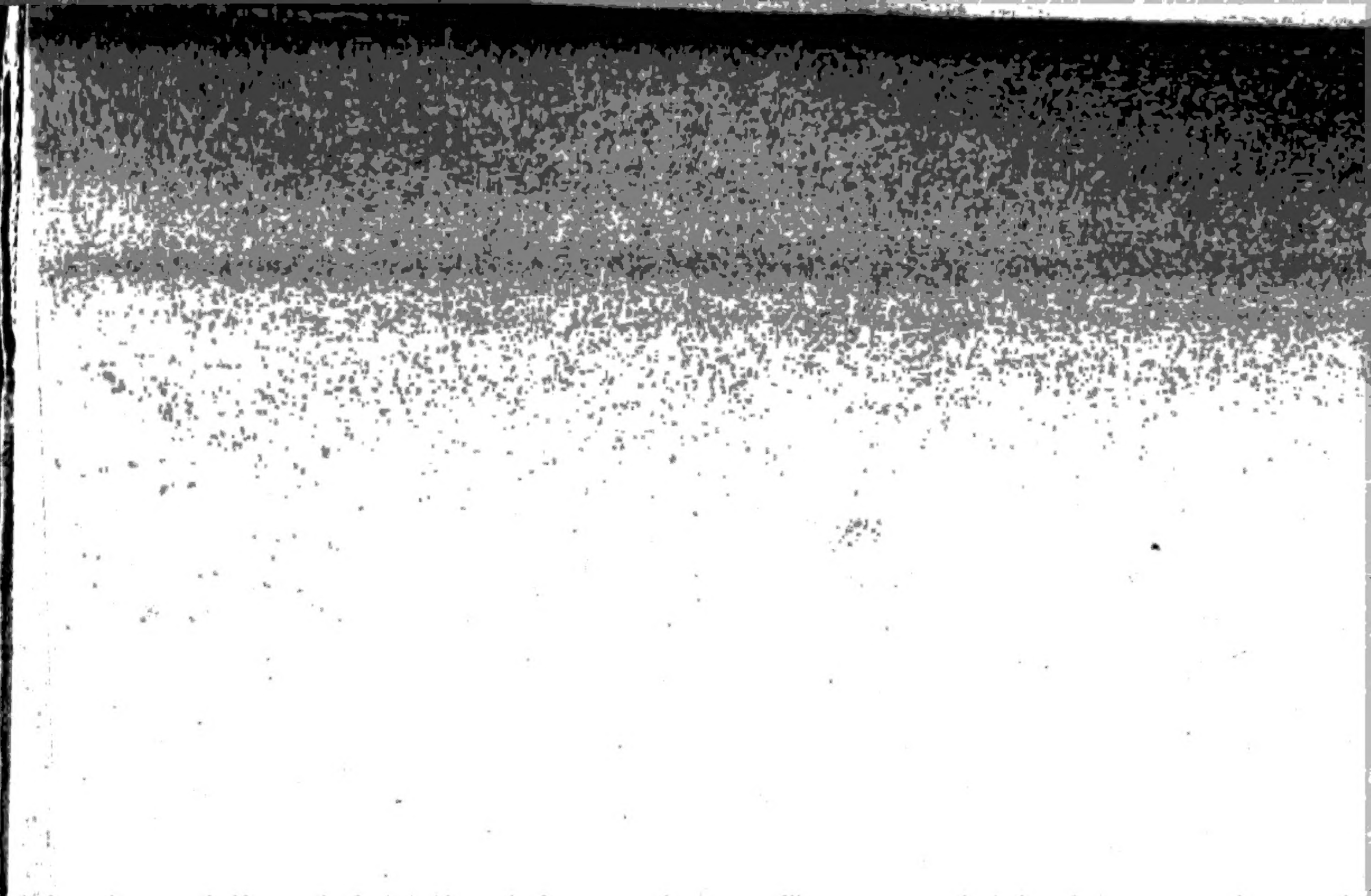
Zabel-Regler . . . I 972
Zähflüssigkeit . . I 288
—igkeit(Festigkeitsl.) I 483
— — (Flüssigk.) I 260, 348
— —swiderstand (Schiffb.) . . II 717
— —szahl (-modul) I 261*, 293, 294, 348*
Zahlentafeln . . . I 1* ff.
Zähler, Elektrizitäts-, Fehlergrenzen II 838
—er, Wattstunden- II 949
—werk . . . . . II 810
Zahnbreite . . I 779, 781
—gesperre . . . I 863
—gleiten . . . I 214, 768
—kette, Renoldsche I 815
—kupplung, elastische I 827, 828*
— —, Hildebrandtsche I 830*
—lücke . . . . . I 766
—rad . . . . . I 763
— —, Arbeits- . . I 780
— —bahn . . . . III 886
— —bremse . . . III 913
— —, Evolventen- I 215, 770, 773
— —, Festigkeitsrechng. I 779, 780*
— —formmaschine II 329
— —fräsmaschine . II 370
— —getriebe, Automobil II 801
— —, Gewicht . . I 791*
— —hobelmaschine II 373, 375
— —, Holz- . . . I 782
— —körper . . . I 788
— —, Kraft- . . I 779
— —lokomotive . III 894
— —pumpe . . . II 564
— —, Reibung . I 255, 767
— —, Rohhaut- . I 782
— —schleifmaschine II 375
— —schmiere . . I 732
— —schutzvorrichtung III 469
— —stahl . . . . I 490*
— —, Teilung I 763, 764*
— —, Verzahnung I 212, 763
Zahnradvorgelege II 355
— —, Zahnradbahn- III 888, 902
— —, Zykloiden I 215, 766, 773
—sättigung . . . II 877
—stange . . . I 769, 772
— —, Zahnradbahn- III 888
— —neinfahrt . . III 891
— —nwinde . . . II 385
—stärke . . . I 766, 784
Zange, Last- . . II 403
—nbremse . . . III 913
—, Stein- . . . . III 490
Zapfen . . . . I 836
—, Kamm- I 838; II 753
—, Kurbel- . . I 837; II 270, 752
—reibung (-szahl) I 246, 248* ff., 837
—, Schleusentor- . III 544
—schneidmaschine II 381
—, Spur- . . . . I 838
—, Trag- . . . . I 836
Zapfhahn . . . . III 790
Z-Eisen . . I 644*, 650*
Zeit-Beschleunigungs-Kurve . . . I 142
— -Geschwindigkeits-Kurve . . I 142
— -Weg-Kurve . I 141, 142
Zellenschalter II 934, 949
—speicher . . . . II 530
Zelluloid . . . . I 668
Zeltdach . . III 309, 352
Zement . . . I 697, 699
—betonrohr . . III 699*
—drahtputzwand . III 285
—, Festigkt. . I 498*, 499*
—, Hochofen- . . I 701
—makadam . . . III 625
—mörtel . . I 697, 703*
— —, Festigkt. I 498, 499*
—, Portland-, Lieferungsbedingungen . I 699
—rohr . . . . . I 707*
—, Roman- . . . I 698
—, Schlacken- . . I 702
—stahl . . . . . I 635
—stein . . . . . I 707
—trafsbeton . . . I 705
—, weifser . . . I 702
Zentralachse d. Kräftesystems . . . I 159
—ellipse . . . . I 194
—ellipsoid . . . I 193
—heizung . . . . III 411
— — in Verbindg. mit Kraftbetrieben III 424
—kraftfeld . . . I 220
Zentratorkupplung I 793
Zentrifugalkraft s. a. Fliehkraft . I 188, 232
—moment . . . . I 191
— —, geometrisches, ebener Flächenstücke I 193
Zentrifugalpumpe II 564, 569, 576*, 592, 764; III 496, 556
Zentripetalbeschleunigung . . . . I 145
Zeolithverfahren, Speisewasserreinigung II 59
Zerreifsfestigkeit I 487* ff.; II 330
Zennersches Diagramm II 149
Ziegeldach III 57, 304, 384
—, Dach- . . . . I 694
—decke . . . III 377* ff.
—format . I 692; III 279
—mauerwerk III 279, 280
—stein . . . . I 691, 692
— —, Festigkt. I 498, 500
— —, Gewicht . . III 55
Ziehpresse . . . II 342
Zink . . . . I 667, 674
—blech . . . I 621*, 674
— —, zulässs. Spannung I 505
—dach . . . . . III 385
—, Festigkt. I 496, 500, 501, 674
—, Gewicht . . . III 56
—wellblech . . . I 675*
Zinn . . . . I 667, 677
—, Festigkt. . . . I 496
—, Gewicht . . . III 56
—rohr . . . . . I 929*
Zinseszins . . . . . I 54
Zirkulationspumpe II 763
—strömung . . I 337, 341
Zissoide . . . . . I 111
Zobelsche Treibkette I 814*
Zodel-Voith-Kupplung I 826*
Zoll, englischer . I 992*
—, preufsischer . I 990*
Z-Querschnittsmoment I 644*, 650*
Zugeordnete Durchmesser . . . . I 98
—r Punkt . . . . . I 94
Zugbeanspruchung, zulässige I 503 bis 506*; III 57 bis 59*, 73*, 74, 78
—, exzentrischer . I 578
—festigkeit . . . I 483
— — gerader Stäbe I 507
— —, Hölzer I 497*, 498*
— —, Metalle I 486 bis 496*
— —, Steine u. Bindemittel I 498* bis 500*
— —, Zugorgane I 500* bis 502*
—haken, Eisenbahn- III 811
—heizung . . . . III 838
—kraft d. Wechselstr.-Motors . . . II 914
— — f. Strafsenfuhrwerk . . . . III 899*

Zugkraft, d. Grubenbahn-lokomotive . . III 907
— —, d. Lokomotiven III 839
— —, d. Zahnrad-lokomotive . . III 903
—, künstlicher (Schiffskessel) . . . II 769
—länge . . . III 716, 719*
—lasten f. verschiedene Steigungen u. Fahrbahnen . . . III 600*
—messer . . . . II 311
—mittel, Anwendungsgebiet . . . . II 407
— —, Reibung . . I 256
—organe, Festigkt. I 500*, 501*
—ramme . . III 485, 486
—regler . . . . II 37
—, Schornstein- . II 45
—seil, Seilbahn II 539, 543, 548; III 911, 914
—spannung . . . I 481
— —, zulässige, s. Zugbeanspruchung.
—stange, Eisenbahn- III 810
—tier, Kraft, Leistg. II 1, 2, 492; III 601*, 739*
— u. Biegung . . I 572
— u. Drehung . . I 584
— u. Schub . . . I 584
— u. Stoßvorrichtung, Eisenbahn- . . III 809
—versuch (Festigkt.) I 625
—widerstand (Eisenb.) III 716, 718, 719, 903
Zulage (Eisenkonstruktion) . . III 319
Zulässige Beanspruchung, Baustoffe f. Brückenbau I 507, 511; III 57 bis 59*, 73*, 74*, 78, 917
— —, Baustoffe f. Hochbau I 504 bis 507*; III 57*, 166, 237, 917
— —, Baustoffe f. Maschinenbau I 502, 503*
— — f. Zahnradzähne I 780*, 781*
— —, Haupt- u. Fahrbahnträger III 73*, 74*, 78
— Knickbelastung (-spannung) I 514, 515*
— Riemenbelastung I 796*
Zulässiges Drehmoment I 568*
— Spannung . . I 486
— —, Eisenbeton III 234, 236, 237
— —, Hölzer . . I 506*
— —, Steine, Mauerwerk, Baustoffe I 506*, 507*
Zündgeschwindigkeit I 470, 471*
—vorrichtung, Motorwagen . . . II 795
Zunge, Weichen- . III 756
Zuppinger-Wasserrad II 287
Zusammendrückbarkeit v. Flüssigkeit. I 260
—gesetzte Beanspruchg. durch Normal- u. Schubspannungen I 583
— — Festigkeit . I 572
—setzung geradliniger Bewegungen . I 143
—ziehungskraft . . I 371
Zusatzbeschleunigung, -kraft . . . . I 224
—maschine . . II 935, 936
—spannung . . . II 935
Zuschärfungswinkel II 346*, 347*
Zustand, kritischer, v. Dämpfen I 412, 413*
—sänderung, -Bilder v. Metallen . . . I 623
— — durch Wärme I 378* ff.
— —, Expansionskurven . I 405, 407*
— —, umkehrbare I 394
— —, Wasserdampf I 415
—sgleichung, Gase I 331
— —, vollkommener Gase I 396
Zvoníček-Steuerung II 170
Zwangläufige Ventilsteuerung . . II 168
—skraft . . . I 187, 224
—schiene . . . . III 759
Zweidruckturbine II 241
—eck, Kugel- . . I 135
—fach-Expansionsmasch. II 113, 116, 117, 134
— —, ausgeführte Schiffs- II 740*
—flammrohrkessel . II 6, 7
—gelenkbinder . . III 346
— —bogen I 175; III 122, 141, 347, 948, 953, 1025
Zweileiteranlage (Schaltung) . . . . II 928
—phasenstrom . . II 856
—radkran . . . . II 480
—seilbahn. . . . II 546
— -greifer . . . II 406
—takt . . . . . II 243
— —maschine . II 263, 781
—zylinderdampfmaschine II 113, 116, 117, 134*, 740*
Zwillingsfördermaschine II 439
Zwischendampfentnahme . . . II 137
— —heizung. . . III 424
—decke. . . . . III 374
—überhitzung . . II 132
Zyklische Kurven I 105
—oide . . . . . I 105
—oidenverzahnung I 215, 766, 778
Zylinderausrüstung II 195
—boden, Festigkeit I 603
—bohrmaschine. . II 364
—, Dampf- I 907; II 189, 747; III 849
—, Druckwasser- . II 422
—, Fahrzeugmotor- II 796
—, Gleichung . . I 120
—, Gruppen- . . . II 891
—, Hohl-, Festigkeit I 604
— —, Trägheitsmoment I 201
—huf, Inhalt, Oberfläche I 134
— —, Schwerpunkt I 169
—, Inhalt, Oberfläche I 134
—kessel, ausgeführte Schiffs- . . . II 774*
— —, Schiffs- . . II 771
—kühlung II 279, 783, 799
—, Preß- . . . . I 906
—, Pumpen- I 906; II 583
—raumverhältnis bei Dampfmasch. II 115, 739, 740 bis 743*
— — b. Lokomotiven III 851
—schmierung II 195, 783, 798
—, Schwerpunkt . I 168
—stahl . . . . . I 491
—, Trägheitsmoment I 200, 201
—, Treib- (Hebemasch.) II 890
—, Verbrennungsmasch.- I 907; II 266, 782

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Digitized by Google

Digitized by Google



1B P5h49

M150687

TA151
.P3
.V50
v.1

THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google